

ORTAÖĞRETİM

# GEOMETRİ

## 11

### DERS KİTABI

Yazar

**Özgür ÇELİK**

Bu kitap Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının **08.12.2011** tarih ve **198** sayılı Kurul Kararı ile 2012-2013 öğretim yılından itibaren **5 (beş)** yıl süre ile **ders kitabı** olarak kabul edilmiştir.



**Bilgetürk Eğitim Yayınları**

Matbaacılık Pazarlama Sanayi ve Ticaret Limited Şirketi  
Ayten Sokak Nu.: 13/2 Mebusevleri ANKARA  
tel.: (0312) 222 22 97 belgeç: (0312) 222 22 43



Her hakkı saklıdır ve **Bilgetürk Eğitim Yayınları Mat. Paz. San. Tic. Ltd. Şirketi**'ne aittir. İçindeki şekil, yazı, resim ve grafikler yayınevinin izni olmadan alınamaz; hiçbir şekilde çoğaltılamaz, basılamaz ve yayımlanamaz.

Bilgetürk Yayınları Ders Kitapları Dizisi : 2008 – 3 – 3

ISBN : 978-605-63089-0-1

Editör : Ersin TOKDEMİR

Rehberlik Uzmanı : Hümeyra TOĞAN

Dil Uzmanı : Dr. Tuğba ÇELİK ÖZER

Görsel Tasarımcı : Serkan AVCI

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı : Kenan GEDİK

Program Geliştirme Uzmanı : Ali GÜNEŞ

Dizgi ve Grafik : Bilgetürk Eğitim Yayınları Dizgi ve Grafik Servisi

Baskı, Cilt : Tuna Matbaacılık San. ve Tic. A.Ş.

Bahçekapı Mah. 2460.Sok. Nu:7

06370 Şaşmaz / ANKARA

#### **İletişim Adresleri:**

Ayten Sok. Köksal Apt. 13/2 Mebusevleri / ANKARA

telefon: 0 312 222 22 97

belgeç: 0 312 222 22 43

web: <http://www.bilgeturk.com.tr>

e-mail: [info@bilgeturk.com.tr](mailto:info@bilgeturk.com.tr)





### İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;  
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.  
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;  
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!  
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?  
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl...  
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.  
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!  
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.  
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,  
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.  
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,  
"Medeniyet!" dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş! Yurduma alçakları uğratma, sakın.  
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.  
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın...  
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri "toprak!" diyerek geçme, tanı:  
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.  
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:  
Verme, dünyaları alsan da, bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki fedâ?  
Şühedâ fışkıracak toprağı sıksan, şühedâ!  
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,  
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüdâ.

Ruhumun senden, İlâhi, şudur ancak emeli:  
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.  
Bu ezanlar -ki şahadetleri dinin temeli-  
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,  
Her cerîhamdan, İlâhi, boşanıp kanlı yaşım,  
Fışkırır ruh-ı mücerred gibi yerden na'sım;  
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalar sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!  
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.  
Ebediyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl:  
Hakkıdır, hür yaşamış, bayrağımın hürriyet;  
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY



## ATATÜRK'ÜN GENÇLİĞE HİTABESİ

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk cumhuriyetini, ilelebet, muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin, en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni, bu hazineden, mahrum etmek isteyen, dahilî ve haricî, bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok nâmûsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın, bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dahilinde, iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlilerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi, vazifen; Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır! Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asîl kanda, mevcuttur!





**Mustafa Kemal ATATÜRK**



# ORGANİZASYON ŞEMASI

Ünite başlığı

Kazanım başlığı

**Motivasyon**

Konuya ilgiyi artırıcı çalışma

**Etkinlik**

Kavrama ait keşfettirici çalışma

**Bilgi Kutusu**

Etkinliğin sonucunda ulaşılan bilgi

**İnceleyelim**

Kavramla ilgili teorem veya özelliğin ispatı

**Örnek**

Kavramlarla ilgili sorular

**Çözüm**

Örneğin ayrıntılı çözümü

**Uygulama Köşesi**

Ulaşılan kavram, teorem, özellik vb. ile ilgili sınıf içi çalışma soruları

**2. ÜNİTE**

**ÖZEL DÖRTGENLER**

2.1. Yamuk ve Özellikleri

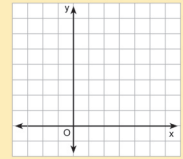


Yukarıda verilen resimleri inceleyiniz. Resimlerdeki işaretli bölgelerin hangi geometrik şekil olduğunu belirleyiniz. Bu geometrik şekillerin benzer ve farklı yönlerinin neler olduğunu söyleyiniz? Siz de günlük yaşamda karşılaştığınız benzer geometrik şekillerden örnekler veriniz.



**Etkinlik**

1. Köşelerinin koordinatları A(-3, 1), B(5, 3), C(2, 7) ve D(-2, 6) olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çizin.
2. ABCD dörtgeninin kenarlarının eğimlerini bulunuz. Bulduğunuz eğimleri karşılaştırarak karşılıklı kenarların bir-birine göre durumlarını belirleyiniz.
3. ABCD dörtgeninin kenarlarının birbirine göre durumunu göz önünde bulundurarak  $\widehat{ABC}$  ile  $\widehat{BCD}$  ve  $\widehat{BAD}$  ile  $\widehat{ADC}$  nin ölçüleri toplamalarını yorumlayınız.
4.  $[AD]$  ve  $[BC]$  kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz. Bu noktaları E ve F şeklinde adlandırarak  $[EF]$  nı çizin.
5.  $[EF]$  nin eğimini bularak  $[AB]$  ve  $[DC]$  na göre durumunu belirleyiniz.
6.  $[AB]$ ,  $[DC]$  ve  $[EF]$  nin uzunluklarını bularak bu uzunluklar arasında nasıl bir bağıntı elde edilebileceğini tartışınız.



**Bilgi Kutusu**

1. Karşılıklı kenarlarından sadece ikisi paralel olan dörtgene **yamuk** denir. Yamuğun paralel olmayan kenarlarına **yan kenarlar** (ayaklar), paralel olan kenarlarına ise **tabanlar** denir. Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  olmak üzere;  $[DC]$  üst taban,  $[AB]$  alt taban,  $[BC]$  ve  $[AD]$  yan kenarlarıdır.  $[AH]$  yamuğun yüksekliğidir.
2. Bir yamukta yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun **orta tabanı** denir. Şekildeki ABCD yamuğunda  $[EF]$  orta tabandır.



**İnceleyelim**

Bir dörtgende, bir kenarın iki uç noktasındaki iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsünün, diğer iki iç açının ölçüleri toplamının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

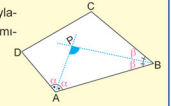
Verilen: ABCD dörtgen,  $[AP]$  ve  $[BP]$  iç açıortaylar

İstenen:  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$

$m(\widehat{DAP}) = m(\widehat{PAB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{PBC}) = \beta$  olarak alınırsa APB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $m(\widehat{APB}) + \alpha + \beta = 180^\circ$  olur. Bu eşitlikte  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri eşitliğin diğer tarafına geçirilirse  $m(\widehat{APB}) = 180^\circ - \alpha - \beta$  elde edilir. (\*)

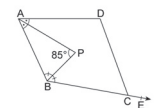
ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı  $360^\circ$  olduğundan  $2\alpha + 2\beta + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$  dir. Bu eşitlikte  $2\alpha$  ve  $2\beta$  değerleri eşitliğin diğer tarafına geçirilerek eşitliğin sağ tarafı 2 parantezine alınırsa  $m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 2(180^\circ - \alpha - \beta)$  bulunur. Eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünürse,  $\frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta$  elde edilir. (\*\*)

(\*) ve (\*\*) eşitliklerinden  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$  bulunur.



**Örnek**

Şekildeki ABCD dörtgeninde,  $[AP]$  ve  $[BP]$  sırayla A ve B açılarının iç açıortaylarıdır.  $m(\widehat{APB}) = 85^\circ$  ve  $3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ$  olduğuna göre, DCE açısının ölçüsünü bulalım.



**Çözüm**

Bir dörtgende aynı kenar üzerindeki iç açların açıortaylarının oluşturduğu açının

$$85^\circ = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} \Rightarrow m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 170^\circ \Rightarrow m(\widehat{D}) = 170^\circ - m(\widehat{C}) \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitlik  $3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ \Rightarrow 3.m(\widehat{C}) - (170^\circ - m(\widehat{C})) = 70^\circ \Rightarrow 4.m(\widehat{C}) = 240^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 60^\circ \text{ olur.}$$

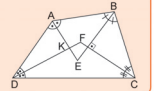
C köşesindeki bütünler açılardan

$$m(\widehat{C}) + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{DCE}) = 120^\circ \text{ bulunur.}$$



**Uygulama Köşesi**

Yandaki şekilde ABCD dörtgeninin iç açlarının açıortayları çizilmiştir.  $[CF] \perp [BE]$  olduğuna göre, FKE açısının ölçüsünü bulunuz.







## Uyarı

Dikkat edilmesi gereken bilgi



## Hatırlatma

Önceden öğrenilmiş bilgileri anımsatma



## Araştırma Sorusu

Konu ile ilgili okul dışında yapılması gereken çalışma



## Sonuçlar

Teorem, özellik veya etkinliğin sonucundaki ek bilgi



## Alıştırmalar

Kazanım sonlarındaki pekiştirme soruları

### Uyarı

Bir ABCD yamuğunun  $\vec{u}$  doğrultusunda ötelenmesiyle elde edilen görüntüsü  $A'B'C'D'$  olsun.  $A'B'C'D'$  yamuğunun  $\vec{v}$  doğrultusunda ötelenmesinden elde edilen görüntü ile ABCD yamuğunun  $\vec{u} + \vec{v}$  doğrultusunda ötelenmesinden elde edilen görüntü aynı yamuktur.

### Hatırlatma

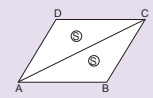
Altın oran matematik ve sanatta bir bütünün parçaları arasında gözlemlenebilen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir orandır. Bu oranın değeri  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 'dir.

### Araştırma Sorusu

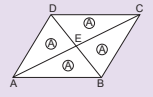
Filografi sanatını ve bu sanatta çokgenlerin kullanılıp kullanılmayacağını araştırarak sınıfta paylaşınız.

### Sonuçlar

1. Paralelkenarın herhangi bir köşegeninin oluşturduğu iki üçgenin alanları birbirine eşittir. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(\triangle DAC) = A(\triangle BCA)$ 'dır.



2. Paralelkenarın köşegenlerinin oluşturduğu dört üçgenin alanları birbirine eşittir. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(\triangle DAE) = A(\triangle ABE) = A(\triangle BCE) = A(\triangle CDE)$ 'dir.



### Alıştırmalar

- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" harfini yazınız.
  - Homoteti dönüşümü uzaklıkları aynı oranda değiştirir, açıların ölçülerini korur. (....)
  - Bir dörtgenin temel elemanları açı ve kenardır. (....)
  - Bir dörtgenin kenar uzunlukları ile ötelenmişinin kenar uzunlukları birbirine eşittir. (....)
  - Bir dörtgenin açıların ölçüleri ile bu dörtgenin  $45^\circ$  döndürülmesi ile elde edilen dörtgenin açıların ölçüleri farklıdır. (....)



## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

Ünite sonlarındaki boşluk doldurma ve doğru-yanlış türü sorulardan oluşan ölçme ve değerlendirme soruları



### ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- Bir dörtgenin komşu olmayan iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına ..... denir.
- Her bir açısının ölçüsü  $180^\circ$  den küçük olan bir düzgene ..... denir.
- Bir dörtgenin karşılıklı iki iç açısının ölçüleri  $100^\circ$  ve  $60^\circ$  ise bu açılıların açortayları arasındaki dar açının ölçüsü ..... derecedir.
- Bir dörtgenin aynı kenar üzerinde bulunan iki iç açısının açortayları arasındaki dar açının ölçüsü  $80^\circ$  ise bu dörtgenin diğer iki iç açısının ölçüleri toplamı ..... derecedir.
- Köşegenleri dik kesişen bir dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının ..... birbirine eşittir.
- Bir dörtgenin köşegenlerinin uzunluklarının toplamı bu dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin ..... eşittir.
- Bir dörtgenin köşegenleri üzerine kurulan paralelkenarsal bölgenin alanının ..... eşittir.
- Köşegenleri arasındaki açı  $60^\circ$  ve köşegen uzunlukları 3 br, 8 br olan dörtgenin köşegenleri .....  $br^2$  dir.



### ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

- Köşelerinin koordinatları  $A(2, 4)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(5, 2)$  ve  $D(2, 1)$  olan ABCD dörtgeninin  $O(0, 0)$  merkezli ve  $k = 3$  oranlı homotetiğinin  $\vec{u} = (-1, -6)$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen dörtgenin köşe koordinatlarının apsisi toplamı kaçtır?
 

A) 22 B) 35 C) 45 D) 50 E) 52
- Şekildeki ABCD dörtgeninde  $\angle C = 40^\circ$  ve  $\angle E = 65^\circ$  açıortaylardır.  $m(\widehat{BEC}) = 65^\circ$ ,  $m(\widehat{ADC}) = x + 40^\circ$  ve  $m(\widehat{DAB}) = 4x - 10^\circ$  olduğuna göre,  $x$  aşağıdakilerden hangisidir?
 

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
- Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AC] \perp [BD]$ ,  $|DC| = 3|AB|$  ve  $|AC| = 2|AD|$  olduğuna göre,  $\frac{|BD|}{|AB|}$  oranı kaçtır?
 

A)  $\sqrt{2}$  B) 2 C) 3 D)  $3\sqrt{2}$  E) 5
- Şekildeki ABCD dörtgeninde  $\angle D = 80^\circ$  ve  $\angle A = 50^\circ$  açıortaylardır.  $m(\widehat{DCF}) = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{DAB}) = 50^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{DEB})$  kaç derecedir?
 

A) 75 B) 85 C) 95 D) 100 E) 105



## İÇİNDEKİLER

### 1. ÜNİTE: DÖRTGENLER

1.1. Dörtgen ve Temel Elemanları .....	10
1.2. Dörtgenlerle İlgili Teoremler .....	14
1.3. Dörtgenin Çevre Uzunluğu ve Dörtgensel Bölgenin Alanı .....	20
Ünite Değerlendirme Soruları .....	29
Ünite Değerlendirme Testi .....	30

### 2. ÜNİTE: ÖZEL DÖRTGENLER

2.1. Yamuk ve Özellikleri .....	32
2.2. Yamuksal Bölgenin Alanı .....	47
2.3. Paralelkenar ve Özellikleri .....	57
2.4. Paralelkenarsal Bölgenin Alanı .....	66
2.5. Dikdörtgen ve Özellikleri .....	82
2.6. Dikdörtgensel Bölgenin Alanı .....	86
2.7. Eşkenar Dörtgen ve Özellikleri .....	89
2.8. Eşkenar Dörtgensel Bölgenin Alanı .....	95
2.9. Kare ve Özellikleri .....	98
2.10. Karesel Bölgenin Alanı .....	104
2.11. Deltoid ve Özellikleri .....	108
2.12. Deltoidsel Bölgenin Alanı .....	112
2.13. Dörtgenlerin Sınıflandırılması .....	115
Ünite Değerlendirme Soruları .....	117
Ünite Değerlendirme Testi .....	118

### 3. ÜNİTE: ÇOKGENLER

3.1. Düzgün Beşgen ve Özellikleri .....	121
3.2. Düzgün Beşgensel Bölgenin Alanı .....	127
3.3. Düzgün Altıgen ve Özellikleri .....	130
3.4. Düzgün Altıgensel Bölgenin Alanı .....	134
3.5. Çokgenlerde Desen, Fraktal Görüntüsü Oluşturma .....	137
3.6. Çokgensel Bölgelerle Kaplamalar Yapma .....	145
Ünite Değerlendirme Soruları .....	149
Ünite Değerlendirme Testi .....	150



#### 4. ÜNİTE: ÇEMBERLER

4.1. Çember, Çemberin Temel ve Yardımcı Elemanları .....	152
4.2. Çemberin Vektörel, Standart ve Genel Denklemi .....	157
4.3. Çemberin Parametrik Denklemi.....	167
4.4. Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Konumu .....	175
4.5. Çemberin Bir Noktasındaki Teğeti ile İlgili Teoremler.....	181
4.6. Çemberde Açılar .....	187
4.7. Denklemleri Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Konumları.....	198
4.8. Çemberde Kiriş ve Kesenler ile İlgili Özellikler .....	204
4.9. Teğetler Dörtgeni ve Özellikleri.....	214
4.10. Kirişler Dörtgeni ve Özellikleri .....	220
4.11. Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alanı .....	224
4.12. Düzlemde Çember Yardımıyla Desen, Fraktal Görüntüsü Oluşturma.....	229
Ünite Değerlendirme Soruları .....	235
Ünite Değerlendirme Testi.....	236

#### 5. ÜNİTE: KONİKLER

5.1. Konik ve Koniğin Temel Elemanları .....	240
5.2. Parabol ve Standart Denklemi .....	246
5.3. Elips ve Standart Denklemi.....	251
5.4. Hiperbol ve Standart Denklemi .....	258
Ünite Değerlendirme Soruları .....	265
Ünite Değerlendirme Testi .....	266

YANIT ANAHTARLARI .....	268
-------------------------	-----

SÖZLÜK .....	269
--------------	-----

PROJE DEĞERLENDİRME FORMU .....	271
---------------------------------	-----

SEMBOLLER VE OKUNUŞLARI .....	272
-------------------------------	-----

KAYNAKÇA .....	272
----------------	-----



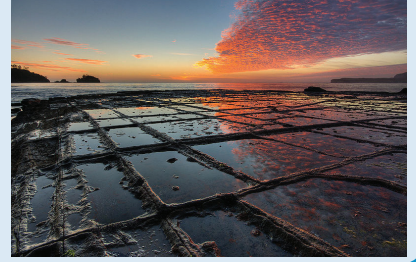
# 1. ÜNİTE

# DÖRTGENLER

## 1.1. Dörtgen ve Temel Elemanları



Yandaki fotoğrafta Dünya'nın nadir jeolojik oluşumlarından biri görülmektedir. "Mozaik Kaldırım" denen ve Tazmany'a da bulunan bu yapı yer kabuğunun baskısıyla kırılan kayaların dörtgen bloklar hâlinde katmanlar oluşturmasıyla meydana gelmiştir. Siz de dörtgen şeklindeki nesnelere çeşitli örnekler veriniz.



### Etkinlik

**Araç-gereç:** Pergel ve cetvel

1. Aşağıda köşelerinin koordinatları verilen ABCD ve EFGH dörtgenlerini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

►  $A(0, 2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(5, 2)$ ,  $D(1, 0)$

►  $E(-4, -2)$ ,  $F(-2, 0)$ ,  $G(1, -3)$ ,  $H(-2, -2)$

2. Dörtgenlerin köşe, açı ve kenarlarını şekil üzerinde gösteriniz.

3. Dörtgenlerin komşu kenarlarını, komşu açılarını, karşı kenarlarını ve karşı açılarını belirleyiniz.

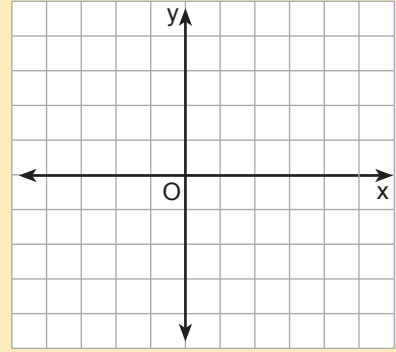
4. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanarak dörtgenlerin kenar ve köşegen uzunluklarını hesaplayınız.

5. Dörtgenlerin kenarlarına ait doğru parçalarının orta noktalarının koordinatlarını bularak komşu olmayan iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçalarını çiziniz ve uzunluklarını hesaplayınız.

6. Dörtgenlerin iç açılarının ölçülerini açıölçer yardımıyla bularak bir iç açısı  $180^\circ$  den büyük olan dörtgeni söyleyiniz.

7. Dörtgenlerin içbükey veya dışbükey olma durumunu belirleyen kriterler nelerdir? Bu kriterlerin dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri ile nasıl bir ilişkisi olduğunu yorumlayınız.

8. Uyguladığınız adımlara göre, dörtgenin temel elemanlarını açıklayınız.



### Bilgi Kutusu

1. Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren, dört doğru parçasından oluşan kapalı şekle **dörtgen** denir. Dörtgenin temel elemanları açı, köşe ve kenardır.

2. Her bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den küçük olan dörtgene **dışbükey dörtgen**; herhangi bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den büyük olan dörtgene de **içbükey dörtgen** denir.

3. Bir dörtgenin komşu olmayan iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.

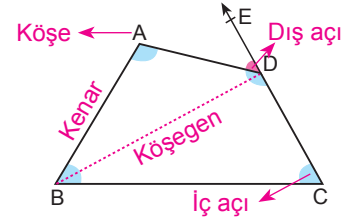


### Örnek

Bir dışbükey dörtgen çizerek temel elemanlarını adlandıralım.

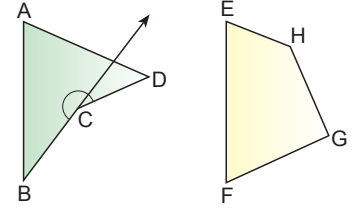
### Çözüm

Yandaki şekilde ABCD dışbükey dörtgeni çizilmiştir. Bu dörtgenin temel elemanları;  $[AB]$ : kenar,  $\widehat{C}$ : iç açı,  $\widehat{ADE}$ : dış açı, A: köşe,  $[BD]$ : köşegen şeklinde adlandırılır.



### Örnek

Yandaki şekilde verilen dörtgenlerin içbükey veya dışbükey olma durumları ile iç açılarının ölçüleri arasındaki ilişkiyi yorumlayalım.



### Çözüm

ABCD dörtgeninin BCD iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den büyük olduğundan bu dörtgen içbükeydir. EFGH dörtgeninin her bir iç açısı  $180^\circ$  den küçük olduğundan bu dörtgen dışbükeydir.



### Uyarı

Bundan sonra kitap genelinde dörtgen denilince **dışbükey dörtgen** anlaşılabacaktır.

### Örnek

Köşelerinin koordinatları  $A(-5, 3)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(-2, 2)$  ve  $D(-1, 4)$  olan ABCD dörtgenini analitik düzlemde çizerek  $[BC]$  ve  $[AD]$  kenarlarına ait orta taban uzunluğunu bulalım.

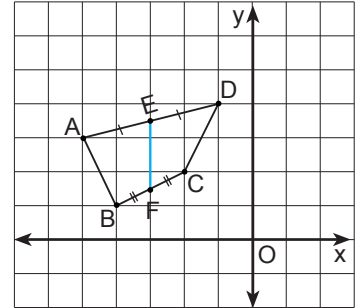
### Çözüm

Verilen noktaların belirttiği ABCD dörtgeni yandaki analitik düzlemde çizilmiştir.  $[AD]$  ve  $[BC]$  kenarlarının orta noktaları sırayla  $E(x_1, y_1)$  ve  $F(x_2, y_2)$  olsun.

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3 \text{ ve } y_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \text{ olduğundan } E\left(-3, \frac{7}{2}\right) \text{ dir.}$$

$$x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3 \text{ ve } y_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \text{ olduğundan } F\left(-3, \frac{3}{2}\right) \text{ dir.}$$

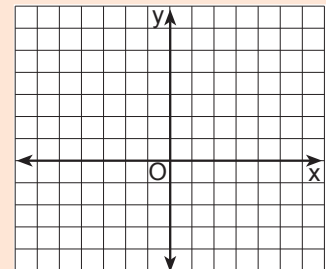
$$\text{Buradan } |EF| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + (-3 - (-3))^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ br bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

Köşelerinin koordinatları  $A(-2, 6)$ ,  $B(-6, -2)$ ,  $C(3, -4)$  ve  $D(1, 4)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çizerek aşağıdaki işlemleri yapınız.

- ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bulunuz.
- ABCD dörtgeninin köşegen uzunluklarını bulunuz.
- ABCD dörtgeninin orta tabanlarının uzunluklarını bulunuz.

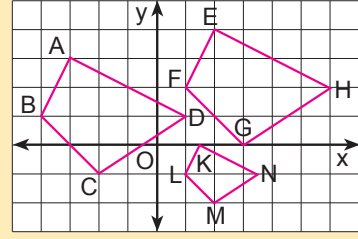






## Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde verilen ABCD, EFGH ve KLMN dörtgenlerinin temel ve yardımcı elemanlarını belirleyiniz.
2. Dörtgenlerin iç açılarının ölçülerini, kenar ve köşegen uzunluklarını hesaplayınız.
3. Bulduğunuz uzunluk ve açı değerlerini karşılaştırarak dörtgenlerin eş veya benzer olma durumlarını tartışınız.
4. Düzlemde dönüşümlerin özelliklerini göz önünde bulundurarak bu dörtgenlerin birinden diğerini elde etmek için hangi dönüşümlerin kullanıldığını sorgulayınız.



## Örnek

Köşelerinin koordinatları  $A(2, 5)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(5, 1)$  ve  $D(2, 2)$  olan ABCD dörtgeninin  $O(0, 0)$  merkezli ve  $k = 2$  oranlı homotetiğinin köşelerinin koordinatlarını bulalım ve ABCD dörtgeni ile homotetiğinin eş veya benzer olma durumunu belirleyelim.

## Çözüm

A, B, C ve D noktalarının O merkezli ve  $k = 2$  oranlı homotetikleri  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ve  $D'$  olarak alınırsa;  
 $A' = H(A) = O + 2(A - O) = (0, 0) + 2(2, 5) = (4, 10)$ ,  
 $B' = H(B) = O + 2(B - O) = (0, 0) + 2(4, 4) = (8, 8)$ ,  
 $C' = H(C) = O + 2(C - O) = (0, 0) + 2(5, 1) = (10, 2)$  ve  
 $D' = H(D) = O + 2(D - O) = (0, 0) + 2(2, 2) = (4, 4)$  elde edilir.  $k = 2$  oranlı homoteti dönüşümü, noktaların koordinatlarını iki katına çıkardığından dörtgenlerin kenar uzunlukları oranı 2 dir. Dörtgenlerin açılarının ölçüleri değişmediğinden ABCD ve  $A'B'C'D'$  dörtgenleri benzerdir.

## Örnek

Düzlemde köşelerinin koordinatları  $A(1, 5)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(4, 5)$  ve  $D(6, 3)$  olan ABCD dörtgeni ile bu dörtgenin orijin etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesi ile elde edilen  $A'B'C'D'$  dörtgenini analitik düzlemde çizelim ve bu dörtgenlerin eş veya benzerlik durumlarını belirleyelim.

## Çözüm

P noktasının orijin etrafında  $\alpha^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen  $P'$  noktası  
 $P' = R_\alpha(P) = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$  dir. Bundan dolayı ABCD dörtgeninin köşelerinin orijin etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen noktalar;

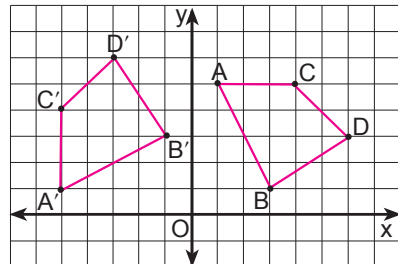
$$A' = R_{90^\circ}(A) = (1 \cdot \cos 90^\circ - 5 \cdot \sin 90^\circ, 1 \cdot \sin 90^\circ + 5 \cdot \cos 90^\circ) = (-5, 1),$$

$$B' = R_{90^\circ}(B) = (3 \cdot \cos 90^\circ - 1 \cdot \sin 90^\circ, 3 \cdot \sin 90^\circ + 1 \cdot \cos 90^\circ) = (-1, 3),$$

$$C' = R_{90^\circ}(C) = (4 \cdot \cos 90^\circ - 5 \cdot \sin 90^\circ, 4 \cdot \sin 90^\circ + 5 \cdot \cos 90^\circ) = (-5, 4) \text{ ve}$$

$$D' = R_{90^\circ}(D) = (6 \cdot \cos 90^\circ - 3 \cdot \sin 90^\circ, 6 \cdot \sin 90^\circ + 3 \cdot \cos 90^\circ) = (-3, 6) \text{ bulunur.}$$

Bulunan noktalar ile ABCD ve  $A'B'C'D'$  dörtgenleri yandaki analitik düzlemde çizilmiştir. Düzlemde dönme dönüşümü uzaklık ile açılardan yönlerini koruduğundan ABCD ile  $A'B'C'D'$  eş dörtgenlerdir. Bundan dolayı karşılıklı kenarlarının uzunlukları ve açılarının ölçüleri birbirine eşittir.







## Alıştırımlar

- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.
  - Homoteti dönüşümü uzaklıkları aynı oranda değiştirir, açıların ölçülerini korur. (.....)
  - Bir dörtgenin temel elemanları açı ve kenardır. (.....)
  - Bir dörtgenin kenar uzunlukları ile ötelenmişinin kenar uzunlukları birbirine eşittir. (.....)
  - Bir dörtgenin açılarının ölçüleri ile bu dörtgenin  $45^\circ$  döndürülmesi ile elde edilen dörtgenin açılarının ölçüleri farklıdır. (.....)

- Aşağıdaki fotoğraflar üzerinde kırmızı çizgilerle belirlenmiş dörtgenleri inceleyerek altlarındaki boşluklara ■ ve ● sembollerinden uygun olanını koyunuz.

■: Her bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den küçüktür.

●: Herhangi bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den büyüktür.



(....)



(....)

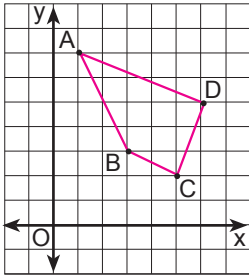


(....)

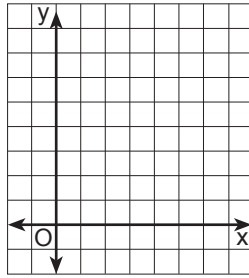
- Aşağıdaki analitik düzlemde verilen ABCD dörtgeni için istenilen dönüşümleri sırayla uygulayınız. Bu dörtgenlerin temel elemanlarını karşılaştırarak eş veya benzerlik durumlarını yorumlayınız.

Başlangıçtaki dörtgenin O merkezli ve  $k = \frac{1}{2}$  oranlı homotetiği

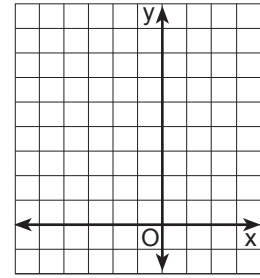
1. adımdaki dörtgenin orijin etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesi



Başlangıç



1. adım



2. adım

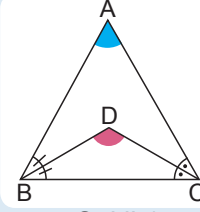
- Köşelerinin koordinatları  $A(4,2)$ ,  $B(2,4)$ ,  $C(1,0)$  ve  $D(-3,2)$  olan ABCD dörtgenini  $\vec{u} = (1,1)$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen dörtgenin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.
- Düzlemde koordinatları  $A(2,2)$ ,  $B(4,1)$ ,  $C(6,-3)$  ve  $D(-3,-1)$  olan ABCD dörtgeninin orta taban ve köşegen uzunluklarını bulunuz.



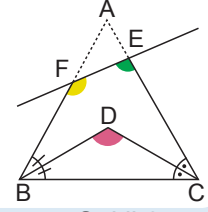
## 1.2. Dörtgenlerle İlgili Teoremler



Şekil 1'deki ABC üçgeninde  $m(\hat{A})$  ve  $m(\hat{D})$  arasında nasıl bir bağıntı olabilir? ABC üçgeni Şekil 2'deki gibi EF doğrusu ile kesilirse benzer bağıntı  $m(\hat{D})$ ,  $m(\hat{E})$  ve  $m(\hat{F})$  arasında da bulunabilir mi?



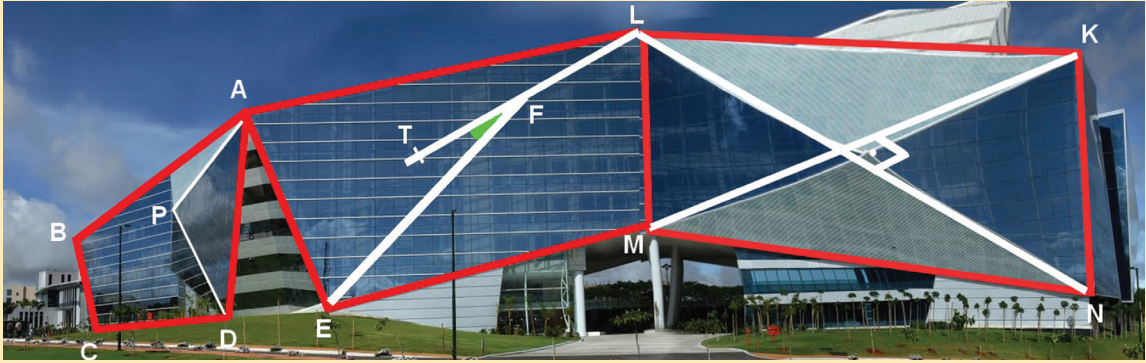
Şekil 1



Şekil 2



### Etkinlik



Yukarıdaki fotoğrafta dörtgen yüzeylere sahip bir bina verilmiştir. Bu binanın bazı yüzeyleri kırmızı çizgilerle belirlenerek ABCD, AEML ve KLMN şeklinde adlandırılmıştır. ABCD dörtgeninde A ve D açılarının iç açıortayları, AEML dörtgeninde L ve E açılarının iç açıortayları beyaz çizgilerle gösterilmiştir. KLMN dörtgeninde ise dik kesişen köşegenler beyaz çizgilerle gösterilmiştir. Buna göre aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. KLM ve KMN üçgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamalarını göz önünde bulundurarak KLMN dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını yorumlayınız. Benzer şekilde KLMN dörtgeninin dış açılarının ölçüleri toplamı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.
2. ABCD dörtgeninde B ve C açılarının ölçülerinin sırayla  $100^\circ$  ve  $96^\circ$  olduğunu kabul ederek APD açısının ölçüsünü hesaplayınız. APD açısının ölçüsü ile B ve C açılarının ölçüleri toplamını karşılaştırınız.
3. Bir dörtgenin komşu iki iç açısının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü ile ilgili bir genelleme elde ediniz.
4. AEML dörtgeninde M ve A açılarının ölçülerinin sırayla  $110^\circ$  ve  $80^\circ$  olduğunu kabul ederek TFE açısının ölçüsünü hesaplayınız. TFE açısının ölçüsü ile M ve A açılarının ölçüleri farkını karşılaştırınız.
5. Bir dörtgenin karşı iki iç açısının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü ile ilgili bir genelleme elde ediniz.
6. KLMN dörtgeninde  $|KN| = 24$  br,  $|KL| = 15$  br ve  $|MN| = 20$  br olduğunu kabul ederek Pisagor teoremi yardımıyla  $|LM|$  nu bulunuz. KLMN dörtgeninin karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamını birbiri ile karşılaştırınız.
7. Köşegenleri dik kesişen bir dörtgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.



### Hatırlatma

Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı  $360^\circ$ , dış açılarının ölçüleri toplamı  $360^\circ$  dir.



### İnceleyelim

Bir dörtgende, bir kenarın iki uç noktasındaki iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsünün, diğer iki iç açının ölçüleri toplamının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

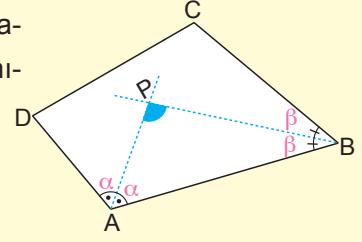
**Verilen:** ABCD dörtgen, [AP] ve [BP] iç açıortaylar

**İstenen:**  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$

$m(\widehat{DAP}) = m(\widehat{PAB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{PBC}) = \beta$  olarak alınırsa APB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $m(\widehat{APB}) + \alpha + \beta = 180^\circ$  olur. Bu eşitlikte  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri eşitliğin diğer tarafına geçirilirse  $m(\widehat{APB}) = 180^\circ - \alpha - \beta$  elde edilir. (\*)

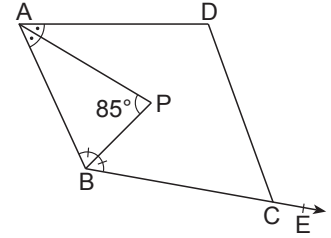
ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı  $360^\circ$  olduğundan  $2\alpha + 2\beta + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$  dir. Bu eşitlikte  $2\alpha$  ve  $2\beta$  değerleri eşitliğin diğer tarafına geçirilerek eşitliğin sağ tarafı 2 parantezine alınırsa  $m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 2(180^\circ - \alpha - \beta)$  bulunur. Eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünürse,  $\frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta$  elde edilir. (\*\*)

(\*) ve (\*\*) eşitliklerinden  $m(\widehat{APB}) = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde, [AP] ve [PB] sırayla A ve B açılarının iç açıortaylarıdır.  $m(\widehat{APB}) = 85^\circ$  ve  $3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ$  olduğuna göre, DCE açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

Bir dörtgende aynı kenar üzerindeki iç açların açıortaylarının oluşturduğu açıdan  $85^\circ = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} \Rightarrow m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 170^\circ \Rightarrow m(\widehat{D}) = 170^\circ - m(\widehat{C})$  elde edilir.

Bu eşitlik  $3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

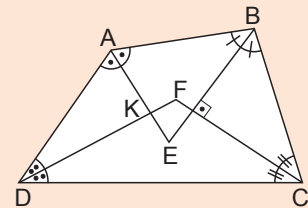
$3.m(\widehat{C}) - m(\widehat{D}) = 70^\circ \Rightarrow 3.m(\widehat{C}) - (170^\circ - m(\widehat{C})) = 70^\circ \Rightarrow 4.m(\widehat{C}) = 240^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 60^\circ$  olur.

C köşesindeki bütünler açılardan

$m(\widehat{C}) + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{DCE}) = 120^\circ$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

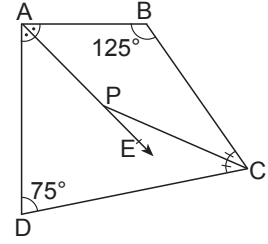
Yandaki şekilde ABCD dörtgeninin iç açılarının açıortayları çizilmiştir.  $[CF] \perp [BE]$  olduğuna göre, FKE açısının ölçüsünü bulunuz.





### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde [AE] ve [CP] sırayla A ve C açılarının açıortaylarıdır.  $m(\widehat{ADC}) = 75^\circ$  ve  $m(\widehat{ABC}) = 125^\circ$  olduğuna göre, EPC açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAB}) = a$  ve  $m(\widehat{DCP}) = m(\widehat{PCB}) = b$  olsun.

APCB dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından,

$$a + b + 125^\circ + m(\widehat{APC}) = 360^\circ \Rightarrow a + b = 235^\circ - m(\widehat{APC}) \text{ dir. } (*)$$

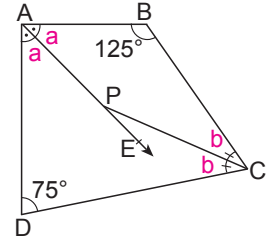
ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından,

$$2a + 2b + 75^\circ + 125^\circ = 360 \Rightarrow 2a + 2b = 160^\circ \Rightarrow a + b = 80^\circ \text{ dir. } (**)$$

(\*) eşitliği (\*\*) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$a + b = 235^\circ - m(\widehat{APC}) \Rightarrow 80^\circ = 235^\circ - m(\widehat{APC}) \Rightarrow m(\widehat{APC}) = 155^\circ \text{ elde edilir. P köşesindeki bütün-}$$

ler açılardan,  $m(\widehat{APC}) + m(\widehat{EPC}) = 180^\circ \Rightarrow 155^\circ + m(\widehat{EPC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{EPC}) = 25^\circ$  bulunur.

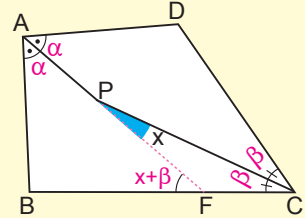


### İnceleyelim

Bir dörtgende, karşılıklı iki iç açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsünün, diğer iki iç açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dörtgen, [AP] ve [CP] iç açıortaylar

**İstenen:**  $m(\widehat{FPC}) = \frac{|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|}{2}$



ABCD dörtgeninde [AP] nı doğrusal olacak şekilde [BC] ile kesiştirip kesim noktasını F olarak adlandıralım.  $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{DAF}) = \alpha$ ,  $m(\widehat{BCP}) = m(\widehat{DCP}) = \beta$  ve  $m(\widehat{FPC}) = x$  olarak alınırsa PFC üçgeninde dış açı özelliğinden  $m(\widehat{AFB}) = x + \beta$  ve AFB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $\alpha + m(\widehat{B}) + x + \beta = 180^\circ$  elde edilir. (\*)

ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı  $360^\circ$  olduğundan  $2\alpha + 2\beta + m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$  veya  $2\alpha + 2\beta = 360^\circ - m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})$  dür. Bu eşitlikte  $\alpha + \beta$  ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$2(\alpha + \beta) = 360^\circ - m(\widehat{B}) - m(\widehat{D}) \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{360^\circ - m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})}{2} \text{ elde edilir. } (**)$$

(\*) eşitliği (\*\*) eşitliğinde yerine yazılırsa,

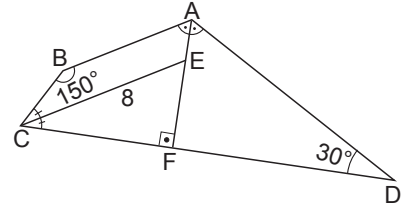
$$\frac{360^\circ - m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})}{2} + m(\widehat{B}) + x = 180^\circ \Rightarrow 360^\circ - m(\widehat{B}) - m(\widehat{D}) + 2m(\widehat{B}) + 2x = 360^\circ$$

$$2x = m(\widehat{D}) - m(\widehat{B}) \Rightarrow x = \frac{|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|}{2} \text{ bulunur.}$$



### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde [AF] ve [CE] sırayla A ve C iç açılarının açıortaylarıdır.  $[AF] \perp [CD]$ ,  $|EC| = 8$  br,  $m(\widehat{ABC}) = 150^\circ$  ve  $m(\widehat{ADC}) = 30^\circ$  olduğuna göre,  $|EF|$  nu bulalım.

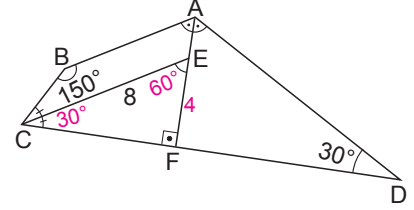


### Çözüm

CEF açısı, ABCD dörtgeninin karşılıklı açılarının açıortayları arasındaki dar açı olduğundan,

$$m(\widehat{CEF}) = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})|}{2} = \frac{|150^\circ - 30^\circ|}{2} = 60^\circ \text{ elde edilir.}$$

$$\text{EFC dik üçgeninden } \cos 60^\circ = \frac{|EF|}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EF|}{8} \Rightarrow |EF| = 4 \text{ br bulunur.}$$

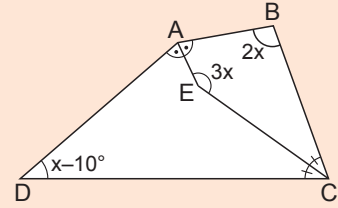


### Araştırma Sorusu

Hayyam Dörtgenlerini araştırınız. Araştırma sonuçlarınızı sınıfınızda paylaşarak Ömer Hayyam'ın geometrinin gelişimine katkılarını tartışınız.

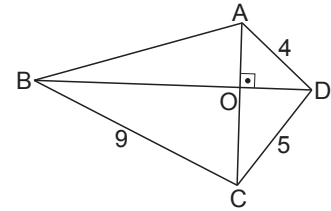
### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD dörtgeninde, [AE] ve [CE] A ve C açılarının iç açıortaylarıdır.  $m(\widehat{ADC}) = x - 10^\circ$  ve  $m(\widehat{AEC}) = 3x$  ve  $m(\widehat{ABC}) = 2x$  olduğuna göre, x değerini bulunuz.



### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AC] \perp [BD]$  dir.  $|BC| = 9$  br,  $|DC| = 5$  br ve  $|AD| = 4$  br olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



### Çözüm

$|AO| = a$  br,  $|BO| = b$  br,  $|CO| = c$  br,  $|DO| = d$  br ve  $|AB| = x$  br olsun.

AOB ve COD dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden  $a^2 + b^2 = x^2$  ve  $c^2 + d^2 = 5^2$  olur.

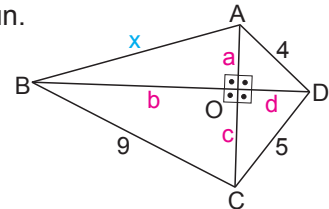
Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + 5^2$  elde edilir. (★)

AOD ve BOC dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden  $a^2 + d^2 = 4^2$  ve  $b^2 + c^2 = 9^2$  olur.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4^2 + 9^2$  elde edilir. (★★)

(★) ve (★★) eşitliklerinden  $x^2 + 5^2 = 4^2 + 9^2 \Rightarrow x^2 + 25 = 16 + 81 \Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$  br bulunur.

Bundan dolayı  $|AB| = 6\sqrt{2}$  br dir.





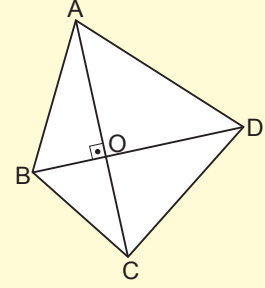


### İnceleyelim

Herhangi bir dörtgende köşegenler birbirine dik ise dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dörtgen,  $[AC] \perp [BD]$

**İstenen:**  $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$



#### İfadeler

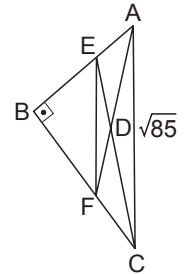
1.  $[AC] \perp [BD]$
2.  $|AO|^2 + |BO|^2 = |AB|^2$
3.  $|AO|^2 + |DO|^2 = |AD|^2$
4.  $|BO|^2 + |CO|^2 = |BC|^2$
5.  $|CO|^2 + |DO|^2 = |CD|^2$
6.  $|AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 + |DO|^2 = |AB|^2 + |CD|^2$
7.  $|AO|^2 + |DO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$
8.  $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$

#### Gerekçeler

1. Verilen
2. AOB dik üçgeninde Pisagor teoreminden
3. AOD dik üçgeninde Pisagor teoreminden
4. BOC dik üçgeninde Pisagor teoreminden
5. COD dik üçgeninde Pisagor teoreminden
6. 2 ve 5. ifadelerin toplamından
7. 3 ve 4. ifadelerin toplamından
8. 6 ve 7. ifadelerdeki eşitliklerden

### Örnek

Şekildeki ABC dik üçgeninde  $[AB] \perp [BC]$ ,  $|EC| = 11br$ ,  $|AF| = 8br$  ve  $|AC| = \sqrt{85}br$  olduğuna göre,  $|EF|$  nu bulalım.



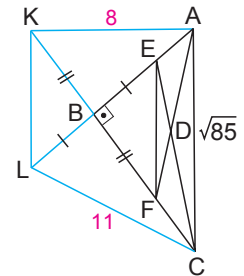
### Çözüm

$|BE| = |BL|$  ve  $|BF| = |BK|$  olacak şekilde AKLC dörtgeni oluşturulduğunda,  $\widehat{BEF} \cong \widehat{BLK}$  olduğundan  $|EF| = |KL|$  dur.

ECL ve AFK üçgenlerinde yükseklikler aynı zamanda kenarortaylar olduğundan bu üçgenler ikizkenardır. Buradan  $|EC| = |CL| = 11br$  ve  $|AF| = |AK| = 8br$  elde edilir.

AKLC dörtgeninde  $[AL]$  ve  $[CK]$  köşegenleri dik kesiştiğinden  $|KL|^2 + (\sqrt{85})^2 = 11^2 + 8^2 \Rightarrow |KL|^2 + 85 = 185 \Rightarrow |KL|^2 = 100 \Rightarrow |KL| = 10br$  olur.

Bundan dolayı  $|EF| = |KL| = 10br$  bulunur.



### Araştırma Sorusu

Ebul Vefa'nın düzlem geometri ile ilgili çalışmalarını araştırarak sınıfta paylaşınız.





## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- a. Aynı kenar üzerindeki iki iç açısı  $75^\circ$  ve  $95^\circ$  olan dörtgenin diğer iki iç açısının açıortayları arasındaki açının ölçüsü ..... derecedir.
- b. Köşegenleri dik kesişen bir ABCD dörtgeninde  $|AB| = 3$  br,  $|DC| = 4$  br ve  $|AD| = 2$  br ise  $|BC| = \dots$  br dir.
- c. Karşılıklı iki iç açısının ölçüsü  $130^\circ$  ve  $70^\circ$  olan dörtgenin diğer iki iç açısının açıortaylarının oluşturduğu geniş açının ölçüsü ..... derecedir.

2. Şekildeki ABDC

dörtgeninde,

$$|AE| = |EC|,$$

$$|DF| = |FC|,$$

$$|AB| = 6 \text{ br ve}$$

$$|BD| = 8 \text{ br dir.}$$

Bu dörtgende  $|AC| + |DC|$  toplamını bulabilmek için  $[AD] \perp [BC]$  bilgisine ek olarak aşağıdakilerden tek başına bilinmesi yeterli olanları bularak yanlarındaki boşluklara (✓) işaretini koyunuz.

- $|GE|$  ile  $|GF|$  tam sayı (....)    ►  $|DG|$  (....)  
 ►  $|GE|$  (....)    ►  $|GC|$  (....)    ►  $|GF|$  (....)

3. Şekildeki ABCD

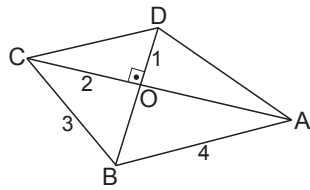
dörtgeninde,

$$[BD] \perp [AC],$$

$$|AB| = 4 \text{ br,}$$

$$|OD| = 1 \text{ br, } |BC| = 3 \text{ br ve } |OC| = 2 \text{ br oldu-}$$

ğuna göre,  $|AD|$  kaç br dir?



4. Şekildeki ABCD

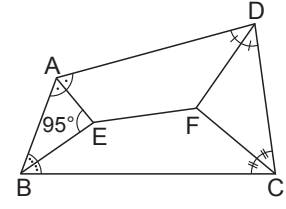
dörtgeninde,

A ve B açılarının

açıortayları E

noktasında,

D ve C açılarının açıortayları F noktasında kesişmektedir.  $m(\widehat{AEB}) = 95^\circ$  olduğuna göre  $m(\widehat{DFC})$  kaç derecedir?



5. Şekildeki ABCD

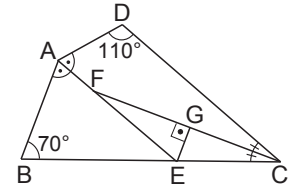
dörtgeninde,

A ve C açılarının

açıortayları F

noktasında kesişmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$ ,  $m(\widehat{ADC}) = 110^\circ$ ,  $[EG] \perp [FC]$  ve A, F, E noktaları doğrusal olduğuna göre,  $m(\widehat{FEG})$  kaç derecedir?



6. Şekildeki ABCD

dörtgeninde,

$$[BD] \perp [AC],$$

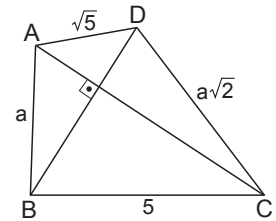
$$|AD| = \sqrt{5} \text{ br,}$$

$$|AB| = a \text{ br,}$$

$$|BC| = 5 \text{ br ve}$$

$$|DC| = a\sqrt{2} \text{ br olduğuna göre,}$$

$$|AB| \text{ kaç br dir?}$$



7. Şekildeki ABCD

dörtgeninde

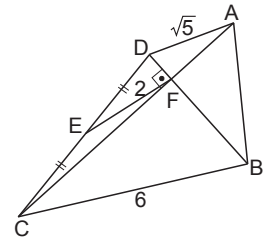
$$[AC] \perp [BD] \text{ ve}$$

$$|CE| = |ED| \text{ dur.}$$

$$|AD| = \sqrt{5} \text{ br,}$$

$$|BC| = 6 \text{ br ve}$$

$$|FE| = 2 \text{ br olduğuna göre, } |AB| \text{ kaç br dir?}$$

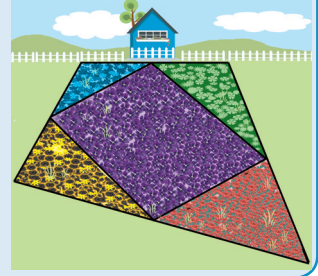




### 1.3. Dörtgenin Çevre Uzunluğu ve Dörtgensel Bölgenin Alanı



Yandaki resimde çiçeklerle kaplanmış dörtgen bir bahçe verilmiştir. Bu bahçedeki mor çiçeklerle kaplı bölge, bahçenin kenar orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. Mor çiçeklerle kaplı bölgenin alanı ile bahçenin alanı arasında nasıl bir bağıntı elde edilebilir? Resimdeki farklı renkte çiçeklerle kaplı bölgelerin alanları arasındaki ilişkileri sorgulayınız.



#### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-4, -4)$ ,  $B(-1, -4)$ ,  $C(2, 0)$  ve  $D(-2, 3)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çizin.

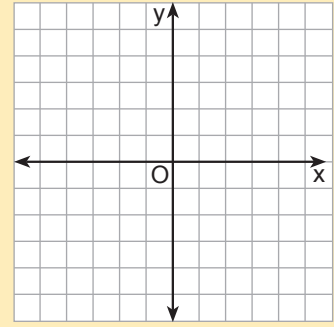
2. ABCD dörtgeninin kenarlarına ait her bir doğru parçasının eğimini ve köşegenlerinin uzunluklarını bulunuz.

3. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanarak ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bulunuz ve dörtgenin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

4. ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgeni çizin. Bu dörtgenin çevre uzunluğu ile ABCD dörtgeninin köşegen uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

5. Yukarıda yaptığınız her bir adımı köşelerinin koordinatları  $E(-3, 3)$ ,  $F(4, 2)$ ,  $G(1, -1)$  ve  $H(1, -3)$  olan EFGH dörtgeni için de uygulayarak bulduğunuz sonuçları tartışınız.

6. Bir dörtgenin çevresini bulmak için hangi yöntemlerin kullanılabileceğini açıklayınız.

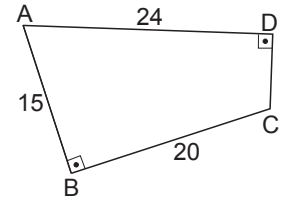


#### Bilgi Kutusu

Bir dörtgensel bölgenin çevre uzunluğu kenar uzunluklarının toplamına eşittir.

#### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde,  $[AD] \perp [DC]$  ve  $[AB] \perp [BC]$  dir.  $|AD| = 24$  br,  $|AB| = 15$  br ve  $|BC| = 20$  br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin çevre uzunluğunu bulalım.

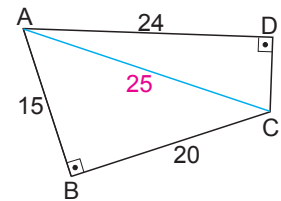


#### Çözüm

$[AC]$  köşegeni çizildiğinde oluşan ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,  $|AC|^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow |AC|^2 = 625 \Rightarrow |AC| = 25$  br dir.

ADC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,  $25^2 = 24^2 + |DC|^2 \Rightarrow 625 = 576 + |DC|^2 \Rightarrow 49 = |DC|^2 \Rightarrow |DC| = 7$  br dir.

Buradan ABCD dörtgeninin çevre uzunluğu,  $\mathcal{C}(ABCD) = 20 + 15 + 7 + 24 = 66$  br bulunur.





### Örnek

Düzlemde köşelerinin koordinatları  $A(-5, -2)$ ,  $B(-3, 3)$ ,  $C(3, 4)$  ve  $D(1, 0)$  olan ABCD dörtgeni veriliyor. Bu dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölgenin çevresi ile ABCD dörtgensel bölgesinin köşegenlerinin uzunluklarını karşılaştıralım.

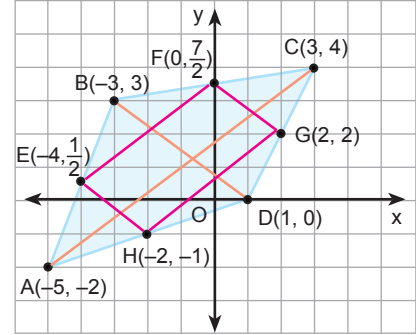
### Çözüm

ABCD dörtgenin kenar orta noktaları şekildeki gibi E, F, G ve H olarak adlandırılırsa, koordinatları bilinen iki nokta arasındaki orta nokta formülünden,

$$E\left(\frac{-5-3}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) \Rightarrow E\left(-4, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) \Rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right),$$

$$G\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \Rightarrow G(2, 2) \text{ ve } H\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \Rightarrow H(-2, -1)$$

elde edilir.



Koordinatları bilinen iki nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$$|EF| = \sqrt{(0 - (-4))^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ br}, |FG| = \sqrt{(2 - 0)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \text{ br ve}$$

$$|GH| = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ br}, |EH| = \sqrt{(-2 - (-4))^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \text{ br}$$

bulunur. Bundan dolayı  $\text{Ç(EFGH)} = 5 + \frac{5}{2} + 5 + \frac{5}{2} = 15 \text{ br}$  dir.

ABCD dörtgeninin köşegenlerinin uzunlukları,

$$|AC| = \sqrt{(3 - (-5))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ br ve}$$

$$|BD| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ br dir.}$$

Buradan  $|AC| + |BD| = 10 + 5 = 15 \text{ br}$  elde edilir. O hâlde,  $\text{Ç(EFGH)} = |AC| + |BD|$  dur.



### Uyarı

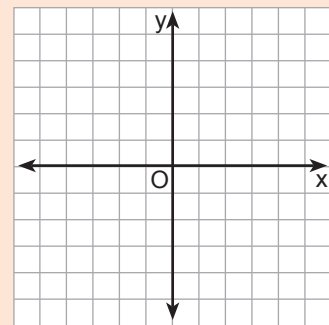
Bir ABCD dörtgensel bölgesinin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin çevresi ABCD dörtgeninin köşegen uzunluklarının toplamına eşittir.



### Uygulama Köşesi

Köşelerinin koordinatları  $A(-4, 2)$ ,  $B(0, 4)$ ,  $C(5, -1)$  ve  $D(3, 3)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çizerek aşağıdaki işlemleri yapınız.

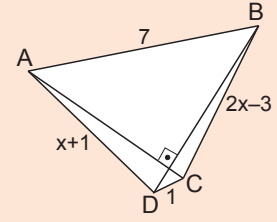
- ▶ ABCD dörtgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.
- ▶ ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgeni çizerek KLMN şeklinde adlandırınız.
- ▶ KLMN dörtgeninin kenarlarını taşıyan doğruların eğimlerini bularak bu dörtgenin paralelkenar olduğunu gösteriniz.
- ▶ KLMN dörtgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.



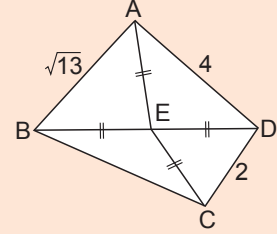


## Uygulama Köşesi

1. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AC] \perp [BD]$  dir.  $|AB| = 7$  br,  $|AD| = (x + 1)$  br,  $|BC| = (2x - 3)$  br ve  $|DC| = 1$  br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.

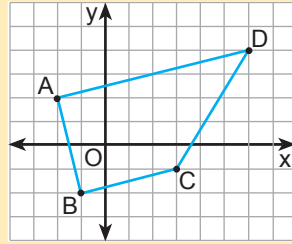
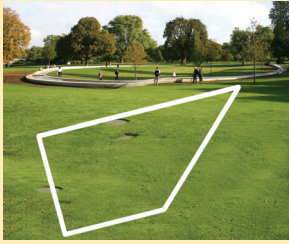


2. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $|AE| = |BE| = |ED| = |EC|$  dir.  $|AB| = \sqrt{13}$  br,  $|AD| = 4$  br ve  $|DC| = 2$  br ise  $|BC|$  nu bulunuz.

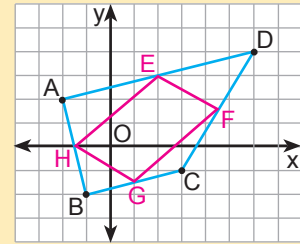


## Etkinlik

Aşağıdaki fotoğrafta beyaz çizgilerle belirlenmiş alan üzerine park yapılacaktır. Dörtgenel bölge şeklindeki parkın kenar orta noktaları birleştirilerek oluşturulan dörtgenel bölgeye jimnastik aletleri yerleştirilecektir. Parkın yapılacağı ve jimnastik aletlerinin yerleştirileceği alanlar analitik düzlemlerde ABCD ve EFGH dörtgenel bölgeleri ile modellenmiştir. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:



Şekil 1



Şekil 2

1. ABCD dörtgenel bölgesinin köşegen uzunluklarını Şekil 1 üzerinde çizip köşegenlerin kesişim noktasını P, aralarındaki dar açığı  $\alpha$  olarak adlandırınız.

2. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanarak ABCD dörtgeninin köşegen uzunluklarını hesaplayınız.

3. Üçgenin sinüslü alan bağıntısından yararlanarak PAB, PBC, PCA ve PDA üçgenel bölgelerinin alanlarını hesaplayınız.

4. Bulduğunuz alan değerlerini toplayarak ABCD dörtgenel bölgesinin alanını bulunuz.

5. Uyguladığınız adımları göz önünde bulundurarak bir dörtgenel bölgenin alanı ile köşegen uzunlukları arasında bir bağıntı elde ediniz.

6. Şekil 2 üzerinde ABCD dörtgenel bölgesinin köşegenlerini çiziniz.

7. Üçgenlerde benzerlik oranı ile alanlar oranı arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak EFGH ve ABCD dörtgenel bölgelerinin alanları arasında bir bağıntı elde ediniz.

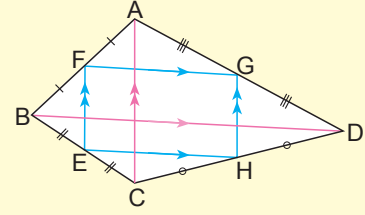
8. Jimnastik aletlerinin yerleştirildiği alan ile park alanı arasında kalan üçgenel bölgelerin alanları arasındaki ilişkileri açıklayınız.



## İnceleyelim

Bir ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölgenin alanının ABCD dörtgensel bölgesinin alanının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden EFGH dörtgeni, [AC] ve [BD] köşegenleri



**İstenen:**  $A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2}$

ABD üçgeninde [FG] orta taban olduğundan  $[FG] \parallel [BD]$  ve 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AG|}{|AD|} = \frac{|FG|}{|BD|} = \frac{1}{2}$  dir. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranını karesi olduğundan  $\frac{A(\widehat{AFG})}{A(\widehat{ABD})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A(\widehat{AFG}) = \frac{A(\widehat{ABD})}{4}$  elde edilir. Benzer yaklaşımla BCD üçgeninde

$$\frac{A(\widehat{ECH})}{A(\widehat{BCD})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A(\widehat{ECH}) = \frac{A(\widehat{BCD})}{4}, \text{ ADC üçgeninde } \frac{A(\widehat{GDH})}{A(\widehat{ADC})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A(\widehat{GDH}) = \frac{A(\widehat{ADC})}{4}$$

ve ABC üçgeninde  $\frac{A(\widehat{FBE})}{A(\widehat{ABC})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A(\widehat{FBE}) = \frac{A(\widehat{ABC})}{4}$  eşitliği elde edilir.

Bütün-parça ilişkisinden  $A(ABCD) = A(\widehat{AFG}) + A(\widehat{ECH}) + A(\widehat{GDH}) + A(\widehat{FBE}) + A(EFGH)$  eşitliği elde edilir. Yukarıdaki alan ifadeleri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$A(ABCD) = \frac{A(\widehat{ABD})}{4} + \frac{A(\widehat{BCD})}{4} + \frac{A(\widehat{ADC})}{4} + \frac{A(\widehat{ABC})}{4} + A(EFGH) \text{ olup payda eşitleme özelliğinden } A(ABCD) = \frac{A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{BCD}) + A(\widehat{ADC}) + A(\widehat{ABC})}{4} + A(EFGH) \text{ bulunur. } (*)$$

Bütün parça ilişkisinden  $A(ABCD) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{BCD})$  ve  $A(ABCD) = A(\widehat{ADC}) + A(\widehat{ABC})$  dir. Bu ifadeler (\*) eşitliğinde yerine yazılırsa  $A(ABCD) = \frac{A(ABCD) + A(ABCD)}{4} + A(EFGH)$  olup top-

lama ve sadeleştirme işlemlerinden  $A(ABCD) = \frac{A(ABCD)}{2} + A(EFGH)$  elde edilir.

$A(EFGH)$  ifadesi yalnız bırakılırsa  $A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.

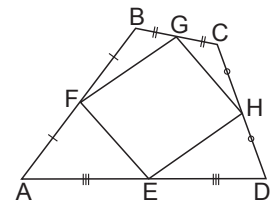
## Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(\widehat{FBG}) = 10 \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{CGH}) = 5 \text{ br}^2$  ve  $A(ABCD) = 100 \text{ br}^2$  olduğuna göre, aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a.  $A(EFGH)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

b.  $A(\widehat{AFE})$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

c.  $A(\widehat{EDH})$  kaç  $\text{br}^2$  dir?





### Çözüm

a. EFGH dörtgensel bölgesi, ABCD dörtgensel bölgesinin kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesiyle elde edildiğinden

$$A(\widehat{EFGH}) = \frac{A(\widehat{ABCD})}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

b. ABCD dörtgeninin [BD] köşegenini şekildeki gibi çizildiğinde [EF], ABD üçgeninin orta tabanı olduğundan 2. Thales teoremi gereğince  $[EF] \parallel [BD]$  ve  $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|FE|}{|BD|} = \frac{1}{2}$  elde edilir.

$A(\widehat{AFE}) = S$  olarak alınırsa benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan  $\frac{A(\widehat{AFE})}{A(\widehat{ABD})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{A(\widehat{ABD})} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\widehat{ABD}) = 4S \text{ br}^2 \text{ olur.}$

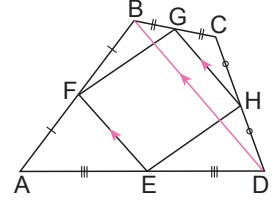
$$\text{Benzer şekilde CBD üçgeninde } \frac{A(\widehat{CGH})}{A(\widehat{CBD})} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{A(\widehat{CBD})} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\widehat{CBD}) = 20 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } A(\widehat{ABCD}) = A(\widehat{CBD}) + A(\widehat{ABD}) \Rightarrow 100 = 20 + 4S \Rightarrow 4S = 80 \Rightarrow S = 20 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

O hâlde  $A(\widehat{AFE}) = 20 \text{ br}^2$  bulunur.

$$\text{c. } A(\widehat{ABCD}) = A(\widehat{AFE}) + A(\widehat{FBG}) + A(\widehat{CGH}) + A(\widehat{EDH}) + A(\widehat{EFGH})$$

$$100 = 20 + 10 + 5 + A(\widehat{EDH}) + 50 \Rightarrow A(\widehat{EDH}) = 15 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

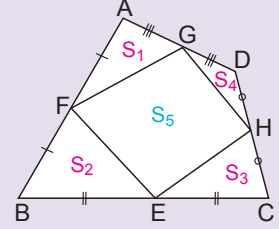


### Sonuçlar

Bir ABCD dörtgensel bölgesinin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölge EFGH olsun.  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ve  $S_5$  bulundukları bölgelerin alanları olmak üzere, bu çokgensel bölgelerin alanları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

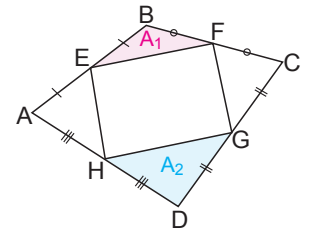
$$1. S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

$$2. S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5$$



### Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A_1$  ve  $A_2$  bulundukları bölgelerin alanları olmak üzere,  $\frac{A(\widehat{ABCD})}{A_1 + A_2}$  oranını bulalım.



### Çözüm

$A(\widehat{AEH}) = A_3, A(\widehat{FGC}) = A_4$  ve  $A(\widehat{EFGH}) = A_5$  olarak alınırsa,

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \text{ ve } A_1 + A_2 + (A_3 + A_4) = A_5 \Rightarrow A_1 + A_2 + (A_1 + A_2) = A_5 \Rightarrow 2A_1 + 2A_2 = A_5 \text{ olur. } (*)$$

$$\text{Aynı zamanda } A_5 = \frac{A(\widehat{ABCD})}{2} \Rightarrow A(\widehat{ABCD}) = 2A_5 \text{ tir. } (**)$$

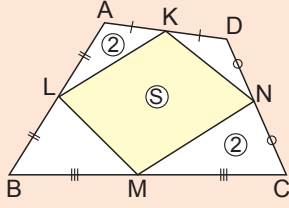
(\*) eşitliği (\*\*) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$A(\widehat{ABCD}) = 2(2A_1 + 2A_2) \Rightarrow A(\widehat{ABCD}) = 4(A_1 + A_2) \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABCD})}{A_1 + A_2} = 4 \text{ bulunur.}$$

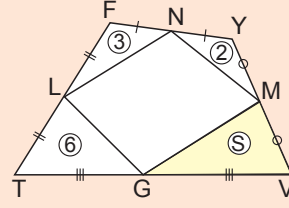


## Uygulama Köşesi

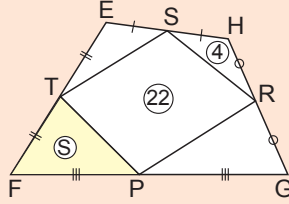
Aşağıdaki dörtgensel bölgelerde verilen değerler bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir. Buna göre, her dörtgensel bölgedeki “S” değerini bulunuz.



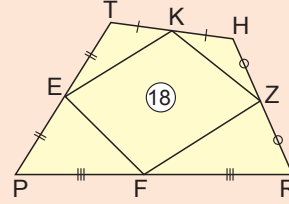
$$A(KLMN) = S$$



$$A(\widehat{GMV}) = S$$



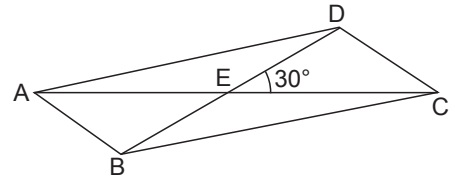
$$A(\widehat{FTP}) = S$$



$$A(TPRS) = S$$

## Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeninde  $|AC| = 5$  br ve  $|BD| = 8$  br ve  $m(\widehat{DEC}) = 30^\circ$  olduğuna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.



## Çözüm

$|EC| = x$  br ve  $|DE| = y$  br olarak alınırsa,  $|AE| = (5 - x)$  br ve  $|BE| = (8 - y)$  br olur.

Bütünler ve ters açı özelliklerinden,

$$m(\widehat{BEC}) = 150^\circ, m(\widehat{AED}) = 150^\circ \text{ ve } m(\widehat{AEB}) = 30^\circ \text{ dir.}$$

Aynı zamanda bütün parça ilişkisinden,

$A(ABCD) = A(\widehat{AED}) + A(\widehat{DEC}) + A(\widehat{BEC}) + A(\widehat{AEB})$  dir. Bu eşitlikteki üçgenlerin sinüslü alan bağıntıları yazılarak gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$A(ABCD) = A(\widehat{AED}) + A(\widehat{DEC}) + A(\widehat{BEC}) + A(\widehat{AEB})$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (5 - x) \cdot y \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot (8 - y) \cdot x \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot (5 - x) \cdot (8 - y) \cdot \sin 30^\circ$$

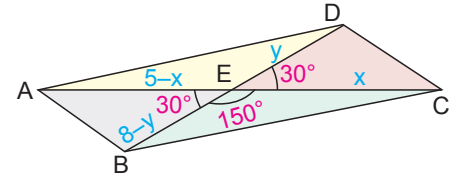
$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (5 - x) \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (8 - y) \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (5 - x) \cdot (8 - y) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A(ABCD) = \frac{5y - xy}{4} + \frac{xy}{4} + \frac{8x - xy}{4} + \frac{40 - 5y - 8x + xy}{4}$$

$$A(ABCD) = \frac{5y - xy + xy + 8x - xy + 40 - 5y - 8x + xy}{4}$$

$$A(ABCD) = \frac{40}{4}$$

$$A(ABCD) = 10 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



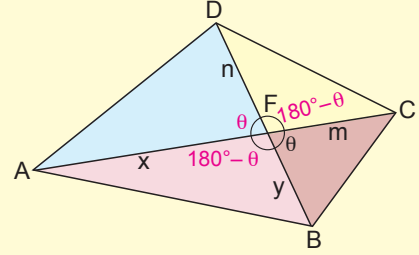


## İnceleyelim

Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanının, köşegen uzunlukları ile köşegenleri arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dışbükey dörtgensel bölgesi,  $m(\widehat{BFC}) = \theta$

**İstenen:**  $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \theta$



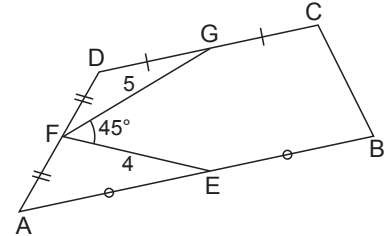
$|DF| = n$  br,  $|FB| = y$  br,  $|FC| = m$  br ve  $|AF| = x$  br olsun. Bütünler ve ters açı özelliklerinden,  $m(\widehat{AFB}) = 180^\circ - \theta$ ,  $m(\widehat{AFD}) = \theta$  ve  $m(\widehat{DFC}) = 180^\circ - \theta$  olur. Sinüs fonksiyonunun özelliğinden,  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$  dır. Bütün-parça ilişkisinden  $A(ABCD) = A(\widehat{AFB}) + A(\widehat{BFC}) + A(\widehat{CFD}) + A(\widehat{AFD})$  eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki üçgenlerin sinüslü alan bağıntıları yazıldığında,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{AFB}) + A(\widehat{BFC}) + A(\widehat{CFD}) + A(\widehat{AFD}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot y \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot n \cdot m \cdot \sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot n \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \theta [xy + my + nm + xn] = \frac{1}{2} \cdot \sin \theta [y(x + m) + n(x + m)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \theta [(x + m)(y + n)] \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$|AC| = x + m$  ve  $|BD| = y + n$  olduğundan  $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \theta$  bulunur.

## Örnek

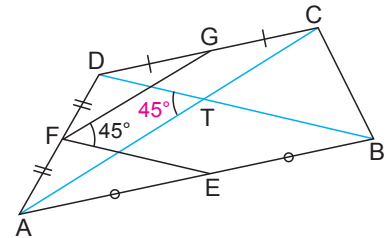
Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F ve G bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $|EF| = 4$  br,  $|FG| = 5$  br ve  $m(\widehat{EFG}) = 45^\circ$  olduğuna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.



## Çözüm

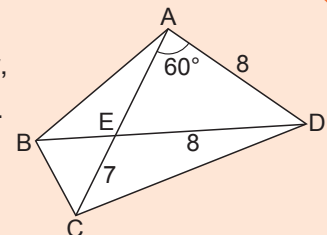
ABCD dörtgensel bölgesinin  $[BD]$  ve  $[AC]$  köşegenleri çizildiğinde oluşan ABD üçgeninde  $[EF]$  orta taban olduğundan,  $|BD| = 8$  br dir. Benzer şekilde ADC üçgeninde  $[FG]$  orta taban olduğundan  $|AC| = 10$  br dir.  $[AC] \parallel [FG]$  ve  $[BD] \parallel [FE]$  olduğundan  $m(\widehat{ATD}) = 45^\circ$  dir.

Buradan  $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$  br<sup>2</sup> bulunur.



## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD dörtgeninde,  $m(\widehat{CAD}) = 60^\circ$ ,  $|AD| = |DE| = 8$  br,  $|EC| = 7$  br ve  $A(ABCD) = 45\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> olduğuna göre,  $|EB|$  nu bulunuz.

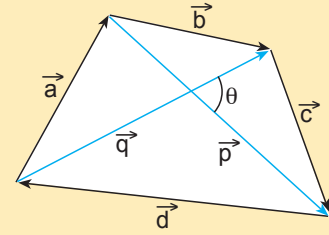






## Etkinlik

1. Yandaki şekilde bir dörtgensel bölgenin kenar ve köşegen vektörleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki işlemleri inceleyerek boşlukları doğru olacak şekilde tamamlayınız.



► Dışbükeysel bir dörtgensel bölgenin alanı köşegen uzunlukları ile köşegenler arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı olduğundan  $A = \frac{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cdot \sin \theta}{2}$  dir.

► Eşitliğin her iki yanındaki ifadelerin kareleri alınırsa,  $A^2 = \dots\dots\dots$  olur.

► Buradan  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  eşitliği kullanılırsa,  $A^2 = \dots\dots\dots$  olup çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğinden  $A^2 = \dots\dots\dots$  elde edilir.

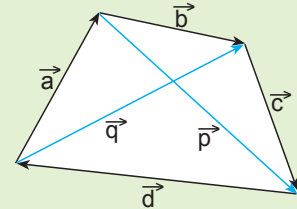
►  $\|\vec{p}\|^2 \cdot \|\vec{q}\|^2 \cdot \cos^2 \theta = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle^2$  olduğundan  $A^2 = \dots\dots\dots$  bulunur. Eşitliğin her iki yanındaki ifadelerin karekökleri alınırsa,  $A = \dots\dots\dots$  olur.

2. Bulduğunuz A ifadesine göre, bir dörtgensel bölgenin alanının köşegen vektörleri yardımıyla nasıl bulunabileceğini açıklayınız.



## Bilgi Kutusu

$\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  bir dörtgenin köşegen vektörleri olmak üzere, bu dörtgensel bölgenin alanının vektörel ifadesi  $A = \frac{\sqrt{\|\vec{p}\|^2 \cdot \|\vec{q}\|^2 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle^2}}{2}$  dir.



## Örnek

$\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  bir dörtgenin köşegen vektörleridir.  $\|\vec{p}\| = 3$  br,  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 6$  ve  $\vec{p}$  ile  $\vec{q}$  nün arasındaki açı  $60^\circ$  dir. Buna göre, dörtgensel bölgenin alanını bulalım.

## Çözüm

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 6 \Rightarrow \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cdot \cos 60^\circ = 6 \Rightarrow 3 \cdot \|\vec{q}\| \cdot \frac{1}{2} = 6 \Rightarrow \|\vec{q}\| = 4 \text{ br dir.}$$

Dörtgensel bölgenin vektörel alan bağıntısından,

$$A = \frac{\sqrt{\|\vec{p}\|^2 \cdot \|\vec{q}\|^2 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 4^2 - 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{9 \cdot 16 - 36}}{2} = \frac{\sqrt{144 - 36}}{2} = \frac{\sqrt{108}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

## Örnek

Bir ABCD dörtgensel bölgesinin köşegen vektörleri  $\vec{AC} = (2, -2)$  ve  $\vec{BD} = (4, 0)$  olarak veriliyor. Buna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.



## Çözüm

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ br}, \|\vec{BD}\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \text{ br} \text{ ve } \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = 2 \cdot 4 + 0(-2) = 8 \text{ dir.}$$

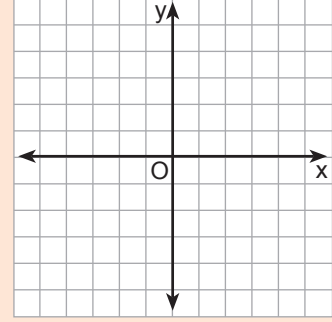
Bir dörtgensel bölgenin alanının vektörel ifadesinden,

$$A(ABCD) = \frac{\sqrt{\|\vec{AC}\|^2 \cdot \|\vec{BD}\|^2 - \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 \cdot 4^2 - 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{8 \cdot 16 - 64}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

## Uygulama Köşesi

Köşelerinin koordinatları  $A(-2, 4)$ ,  $B(-2, -3)$ ,  $C(2, -3)$  ve  $D(3, 2)$  olan dörtgeni yandaki analitik düzlemde çizin. Buna göre;

- ABCD dörtgeninin köşegen uzunluklarını bulunuz.
- Dörtgensel bir bölgenin alanının vektörel ifadesinden yararlanarak ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulunuz.
- ABCD dörtgensel bölgesinin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölgenin alanını bulunuz.



## Alıştırmalar

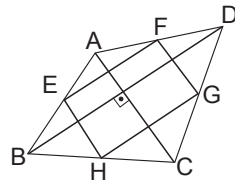
1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

a. Bir dörtgenin köşegen uzunlukları 10 br ve 20 br ise bu dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin çevre uzunluğu ..... br dir.

b. Köşegen uzunlukları 6 br ve 8 br, köşegenlerinin arasındaki açı  $60^\circ$  olan dörtgensel bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölgenin alanı .....  $\text{br}^2$  dir.

c. Bir dörtgensel bölgenin köşegen vektörlerinin uzunlukları 3 br ve 4 br dir. Bu vektörlerin iç çarpımı  $6\sqrt{3}$  ise dörtgensel bölgenin alanı .....  $\text{br}^2$  dir.

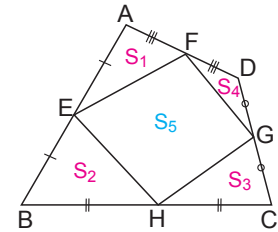
2. Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktalarıdır.



$[AC] \perp [BD]$ ,  $|AC| = 4$  br ve  $|BD| = 7$  br olduğuna göre,  $A(\widehat{AEF}) + A(\widehat{GHC})$  toplamı kaçtır?

3. Köşegen vektörleri  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  olan dörtgensel bir bölgede  $\|\vec{p}\| = 5$  br,  $\|\vec{q}\| = 2$  br ve  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 5\sqrt{3}$  olduğuna göre, dörtgensel bölgenin alanı kaç  $\text{br}^2$  dir?

4. Şekildeki ABCD dörtgensel bölgesinde E, F, G ve H bulundukları kenarların orta



noktaları,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  ve  $S_5$  bulundukları bölgelerin alanlarını göstermek üzere aşağıdaki ifadelerin yanlarına doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- a.  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$  (.....)
- b.  $2S_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$  (.....)
- c.  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$  (.....)
- ç.  $2S_5 = A(ABCD)$  (.....)
- d.  $4(S_2 + S_4) = A(ABCD)$  (.....)
- e.  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$  (.....)





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

1. Bir dörtgenin komşu olmayan iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına ..... denir.
2. Her bir açısının ölçüsü  $180^\circ$  den küçük olan bir dörtgene ..... denir.
3. Bir dörtgenin karşılıklı iki iç açısının ölçüleri  $100^\circ$  ve  $60^\circ$  ise dörtgenin diğer iki iç açısının açılı ortayları arasındaki dar açının ölçüsü ..... derecedir.
4. Bir dörtgenin aynı kenar üzerinde bulunan iki iç açısının açılı ortayları arasındaki dar açının ölçüsü  $80^\circ$  ise bu dörtgenin diğer iki iç açısının ölçüleri toplamı ..... derecedir.
5. Köşegenleri dik kesişen bir dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının ..... birbirine eşittir.
6. Bir dörtgenin köşegenlerinin uzunluklarının toplamı bu dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin ..... eşittir.
7. Köşegen vektörlerinin uzunlukları 4 br ve 6 br olan bir dörtgensel bölgenin alanı  $6\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> ise köşegen vektörlerinin iç çarpımı ..... dir.
8. Köşegenleri arasındaki açı  $60^\circ$  ve köşegen uzunlukları 3 br, 8 br olan dörtgensel bölgenin alanı ..... br<sup>2</sup> dir.

B. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

1. Bir dörtgen ile homotetiği eştir. (.....)
2. Bir içbükey dörtgenin  $180^\circ$  den büyük bir iç açısı vardır. (.....)
3. Bir dörtgenin üç dış açısının ölçüleri  $75^\circ$ ,  $55^\circ$  ve  $110^\circ$  ise diğer iç açısının ölçüsü  $65^\circ$  dir. (.....)
4. Bir dörtgenin kenar orta noktaları bir paralelkenarın köşeleridir. (.....)
5. Bir dörtgende bir kenar üzerindeki iki iç açının açılı ortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü diğer iki iç açının ölçüleri farkının yarısına eşittir. (.....)
6. Köşelerinin koordinatları A(-4, 4), B(2, 2), C(-2, -2) ve D(3, -3) olan ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin çevresi  $11\sqrt{2}$  br dir. (.....)
7. Köşegenleri dik kesişen ve köşegen uzunlukları 10 br, 24 br olan dörtgenin orta taban uzunluğu 26 br dir. (.....)
8. Köşegenleri dik kesişen bir dikdörtgensel bölgenin alanı köşegen uzunluklarının çarpımının iki katına eşittir. (.....)
9. Alanı 100 br<sup>2</sup> olan bir dörtgensel bölge ile bu dörtgensel bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgensel bölge arasında kalan bölgelerin alanları toplamı 50 br<sup>2</sup> dir. (.....)

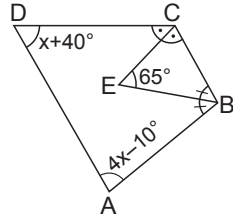




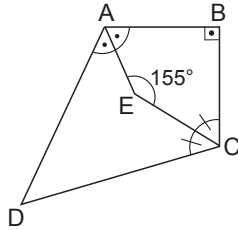
## ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

1. Köşelerinin koordinatları  $A(2, 4)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(5, 2)$  ve  $D(2, 1)$  olan ABCD dörtgeninin  $O(0, 0)$  merkezli ve  $k = 3$  oranlı homotetiğinin  $\vec{u} = (-1, -6)$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen dörtgenin köşe koordinatlarının apsisi toplamı kaçtır?  
A) 22 B) 35 C) 45 D) 50 E) 52

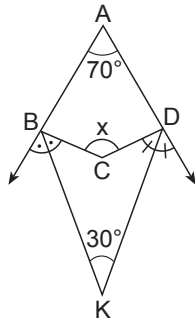
2. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[CE]$  ve  $[BE]$  iç açıortaylardır.  $m(\widehat{BEC}) = 65^\circ$ ,  $m(\widehat{ADC}) = x + 40^\circ$  ve  $m(\widehat{DAB}) = 4x - 10^\circ$  olduğuna göre,  $x$  aşağıdakilerden hangisidir?  
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50



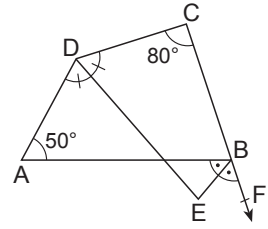
3. Şekildeki ABCD dörtgeninde,  $[AE]$  ve  $[CE]$  iç açıortaylardır.  $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$  ve  $m(\widehat{AEC}) = 155^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{ADC})$  kaç derecedir?  
A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10



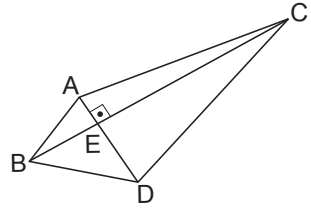
4. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[BK]$  ve  $[DK]$  dış açıortaylardır.  $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$  ve  $m(\widehat{BKD}) = 30^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{BCD})$  kaç derecedir?  
A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150



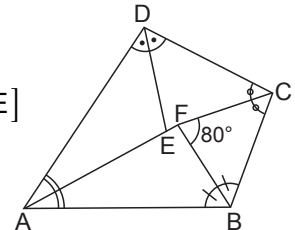
5. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[DE]$  ve  $[BE]$  açıortaylardır.  $m(\widehat{DCF}) = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{DAB}) = 50^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{DEB})$  kaç derecedir?  
A) 75 B) 85 C) 95 D) 100 E) 105



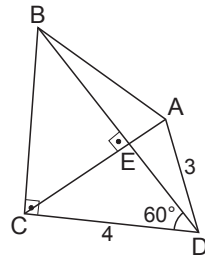
6. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AD] \perp [BC]$ ,  $|DC| = 3|AB|$  ve  $|AC| = 2|BD|$  olduğuna göre,  $\frac{|BD|}{|AB|}$  oranı kaçtır?  
A)  $\sqrt{2}$  B) 2 C) 3 D)  $3\sqrt{2}$  E) 5



7. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AE]$ ,  $[BF]$ ,  $[CF]$  ve  $[DE]$  iç açıortaylardır.  $m(\widehat{CFB}) = 80^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{DEA})$  kaç derecedir?  
A) 70 B) 80 C) 90 D) 100 E) 110



8. Şekildeki ABCD dörtgeninde  $[AC] \perp [BD]$ ,  $[BC] \perp [CD]$ ,  $m(\widehat{BDC}) = 60^\circ$ ,  $|AD| = 3$  br ve  $|CD| = 4$  br olduğuna göre,  $|AB|$  kaç br dir?  
A) 8 B)  $\sqrt{51}$  C) 7  
D)  $\sqrt{43}$  E)  $\sqrt{41}$





9. Şekildeki ABCD

dörtgeninde,

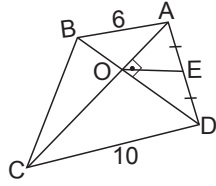
$$[AC] \perp [BD],$$

$$|AB| = 6 \text{ br},$$

$$|CD| = 10 \text{ br},$$

$$|OE| = 3\sqrt{2} \text{ br ve } |AE| = |ED| \text{ olduğuna göre, } |BC| \text{ kaç br dir?}$$

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8



10. Şekildeki ABCD

dörtgeninde E, F,

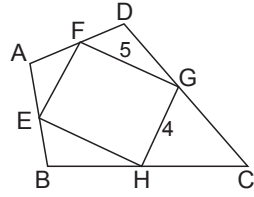
G ve H bulundukları

kenarların orta

noktalarıdır.

$$|GH| = 4 \text{ br ve } |FG| = 5 \text{ br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin köşegenlerinin uzunluklarının toplamı kaç br dir?}$$

- A) 9 B) 2 C) 15 D) 18 E) 21



11. Şekildeki ABCD

dörtgeninde,

$$[AC] \perp [BD],$$

$$|AE| = |EB|,$$

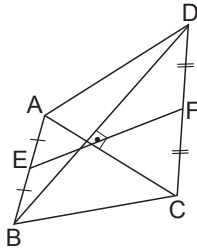
$$|DF| = |FC|,$$

$$|AC| = 18 \text{ br ve}$$

$$|BD| = 24 \text{ br olduğuna göre,}$$

$$|EF| \text{ kaç br dir?}$$

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16



12. Şekildeki ABCD

dörtgeninde

E, F, G ve H

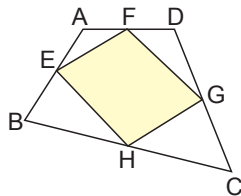
bulundukları

kenarların orta

noktalarıdır.

$$A(\widehat{AEF}) = 4 \text{ br}^2 \text{ ve } A(\widehat{GHC}) = 6 \text{ br}^2 \text{ olduğuna göre, } A(EFGH) \text{ kaç br}^2 \text{ dir?}$$

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30



13. Şekildeki ABCD

dörtgeninde

$$[AC] \cap [BD] = \{E\} \text{ ve}$$

$$[AC] \perp [BC] \text{ dir.}$$

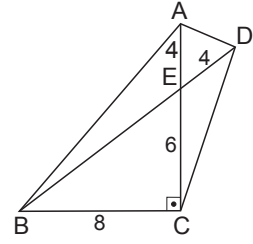
$$|EC| = 6 \text{ br},$$

$$|BC| = 8 \text{ br ve}$$

$$|AE| = |ED| = 4 \text{ br}$$

$$\text{olduğuna göre, } A(ABCD) \text{ kaç br}^2 \text{ dir?}$$

- A) 56 B) 52 C) 50 D) 48 E) 42



14. Şekildeki ABCD

dörtgeninde

E, F, K, L

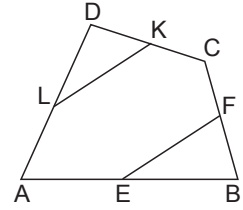
bulundukları

kenarların orta

noktalarıdır.

$$A(AEFCKL) = 60 \text{ br}^2 \text{ olduğuna göre, } A(ABCD) \text{ kaç br}^2 \text{ dir?}$$

- A) 70 B) 75 C) 80 D) 85 E) 90



15. Şekildeki ABCD

dörtgeninin

$$[AC] \text{ ve } [BD]$$

köşegenlerinin

orta noktaları

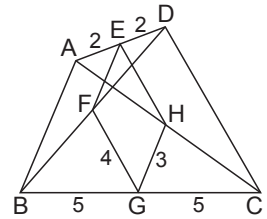
sırasıyla H ve F dir.

$$|AE| = |ED| = 2 \text{ br, } |BG| = |GC| = 5 \text{ br,}$$

$$|FG| = 4 \text{ br ve } |HG| = 3 \text{ br olduğuna göre,}$$

$$ABCD \text{ dörtgenel bölgesinin çevresi kaç br dir?}$$

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28



16. Şekildeki ABCD

dörtgeninin iç

açıortayları K

noktasında

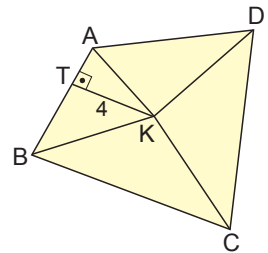
kesişmektedir.

$$[KT] \perp [AB],$$

$$|KT| = 4 \text{ br ve } \angle(ABCD) = 26 \text{ br olduğuna}$$

$$\text{göre, } A(ABCD) \text{ kaç br}^2 \text{ dir?}$$

- A) 25 B) 26 C) 50 D) 52 E) 60

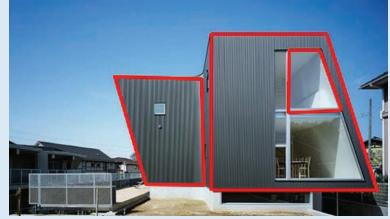




## 2. ÜNİTE

# ÖZEL DÖRTGENLER

### 2.1. Yamuk ve Özellikleri



Yukarıda verilen resimleri inceleyiniz. Resimlerdeki işaretli bölgelerin hangi geometrik şekil olduğunu belirleyiniz. Bu geometrik şekillerin benzer ve farklı yönlerinin neler olduğunu söyleyiniz? Siz de günlük yaşamda karşılaştığınız benzer geometrik şekillerden örnekler veriniz.



#### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-3, 1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(2, 7)$  ve  $D(-2, 6)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

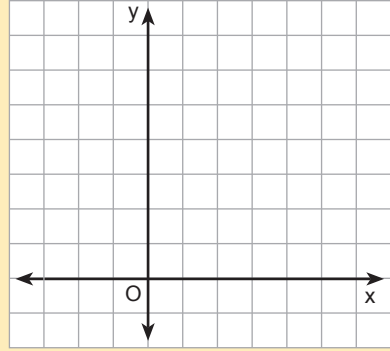
2. ABCD dörtgeninin kenarlarının eğimlerini bulunuz. Bulduğunuz eğimleri karşılaştırarak karşılıklı kenarların birbirine göre durumlarını belirleyiniz.

3. ABCD dörtgeninin kenarlarının birbirine göre durumunu göz önünde bulundurarak  $\widehat{ABC}$  ile  $\widehat{BCD}$  ve  $\widehat{BAD}$  ile  $\widehat{ADC}$  nın ölçüleri toplamalarını yorumlayınız.

4.  $[AD]$  ve  $[BC]$  kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz. Bu noktaları E ve F şeklinde adlandırarak  $[EF]$  nı çiziniz.

5.  $[EF]$  nın eğimini bularak  $[AB]$  ve  $[DC]$  na göre durumunu belirleyiniz.

6.  $[AB]$ ,  $[DC]$  ve  $[EF]$  nın uzunluklarını bularak bu uzunluklar arasında nasıl bir bağıntı elde edilebileceğini tartışınız.



#### Bilgi Kutusu

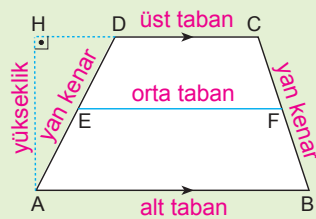
1. Karşılıklı kenarlarından sadece ikisi paralel olan dörtgene **yamuk** denir. Yamuğun paralel olmayan kenarlarına **yan kenarlar** (ayaklar), paralel olan kenarlarına ise **tabanlar** denir.

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  olmak üzere;

\*  $[DC]$  üst taban,  $[AB]$  alt taban,  $[BC]$  ve  $[AD]$  yan kenarlardır.

\*  $[AH]$  yamuğun yüksekliğidir.

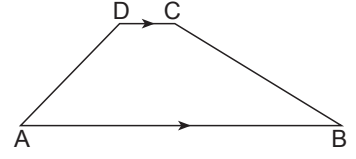
2. Bir yamukta yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun **orta tabanı** denir. Şekildeki ABCD yamuğunda  $[EF]$  orta tabandır.





### Örnek

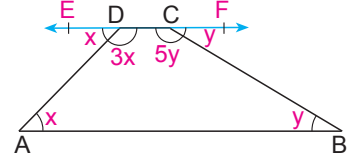
Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $m(\widehat{D}) = 3m(\widehat{A})$  ve  $m(\widehat{C}) = 5m(\widehat{B})$  olduğuna göre, ABCD yamuğunun iç açılarının ölçülerini bulalım.



### Çözüm

$m(\widehat{A}) = x$  ve  $m(\widehat{B}) = y$  olsun.  $m(\widehat{D}) = 3m(\widehat{A}) \Rightarrow m(\widehat{D}) = 3x$  ve  $m(\widehat{C}) = 5m(\widehat{B}) \Rightarrow m(\widehat{C}) = 5y$  dir.

$[DC]$  nı taşıyan EF doğrusu şekildeki gibi çizildiğinde  $[AB] \parallel EF$  olur. Paralel doğruların bir kesenle yaptığı iç ters açılarının eşitliğinden  $m(\widehat{ADE}) = x$  ve  $m(\widehat{BCF}) = y$  elde edilir.



Doğru açının ölçüsü  $180^\circ$  olduğundan,

$$x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \text{ ve } y + 5y = 180^\circ \Rightarrow 6y = 180^\circ \Rightarrow y = 30^\circ \text{ dir.}$$

Bundan dolayı ABCD yamuğunun iç açılarının ölçüleri;

$$m(\widehat{A}) = x = 45^\circ, m(\widehat{B}) = y = 30^\circ, m(\widehat{C}) = 5y = 150^\circ, m(\widehat{D}) = 3x = 135^\circ \text{ bulunur.}$$

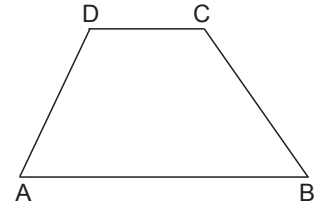


### Bilgi Kutusu

Bir yamukta bir yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açların ölçüleri toplamı  $180^\circ$  dir.

### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  dir.  $m(\widehat{D}) = m(\widehat{A}) + 50^\circ$  ve  $m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{B}) + 15^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$  toplamını bulalım.



### Çözüm

Yamukta bir yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açların ölçüleri toplamı  $180^\circ$  olduğundan,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{A}) + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2m(\widehat{A}) = 130^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 65^\circ \text{ ve}$$

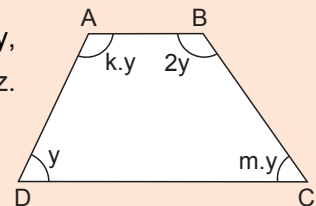
$$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) + 2m(\widehat{B}) + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3m(\widehat{B}) = 165^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = 55^\circ \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Buradan } m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 65^\circ + 55^\circ = 120^\circ \text{ bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

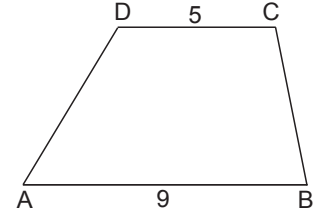
Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $m(\widehat{ADC}) = y$ ,  $m(\widehat{ABC}) = 2y$ ,  $m(\widehat{DAB}) = k.y$  ve  $m(\widehat{BCD}) = m.y$  olduğuna göre,  $k - m$  farkını bulunuz.





### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  dir.  $|DC| = 5$  br ve  $|AB| = 9$  br olduğuna göre, ABCD yamuğunun orta tabanının uzunluğunu bulalım.



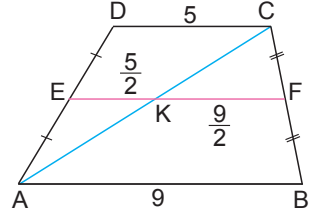
### Çözüm

$[AD]$  ve  $[BC]$  nın orta noktaları sırasıyla E ve F olsun.  $[EF]$  orta tabanını ve  $[AC]$  köşegenini çizerek kesim noktasını K olarak adlandıralım.  $[EK] \parallel [DC] \parallel [AB]$  olduğundan ADC ve ABC üçgenlerinde

$$2. \text{ Tales teoremi gereğince } \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EK|}{|DC|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EK|}{5} \Rightarrow |EK| = \frac{5}{2} \text{ br}$$

$$\text{ve } \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{|KF|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|KF|}{9} \Rightarrow |KF| = \frac{9}{2} \text{ br elde edilir.}$$

$$\text{Bundan dolayı } |EF| = |EK| + |KF| = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{5+9}{2} \Rightarrow |EF| = 7 \text{ br bulunur.}$$

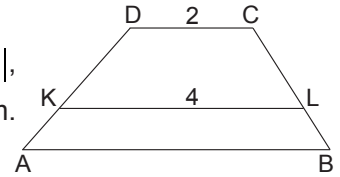


### Bilgi Kutusu

Bir yamukta orta taban uzunluğu, alt ve üst taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir.

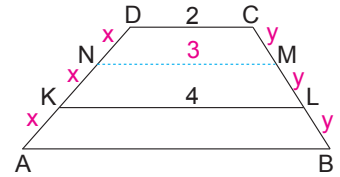
### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[KL] \parallel [AB] \parallel [DC]$  dir.  $|DK| = 2|KA|$ ,  $|CL| = 2|LB|$ ,  $|DC| = 2$  br ve  $|KL| = 4$  br olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



### Çözüm

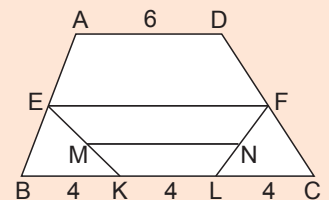
$|KA| = x$  br ve  $|LB| = y$  br olsun.  $|DK| = 2|KA| \Rightarrow |DK| = 2x$  br ve  $|CL| = 2|LB| \Rightarrow |CL| = 2y$  br dir. KLCD yamuğunun  $[NM]$  orta tabanını şekildeki gibi çizildiğinde  $|DN| = |NK| = |KA| = x$  br ve  $|CM| = |ML| = |LB| = y$  br olur.



$[NM]$ , KLCD yamuğunun orta tabanı olduğundan  $|NM| = \frac{2+4}{2} = 3$  br elde edilir.  $[KL]$ , ABMN yamuğunun orta tabanı olduğundan  $4 = \frac{3+|AB|}{2} \Rightarrow 8 = 3+|AB| \Rightarrow |AB| = 5$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

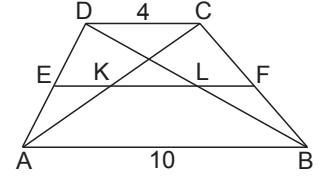
Yandaki şekilde  $[EF]$ , ABCD yamuğunun  $[MN]$ , EKLF yamuğunun orta tabanıdır.  $|BK| = |KL| = |LC| = 4$  br ve  $|AD| = 6$  br olduğuna göre,  $|MN|$  nu bulunuz.





### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $[EF]$  orta taban,  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerdir.  $|DC| = 4$  br ve  $|AB| = 10$  br olduğuna göre,  $|KL|$  nu bulalım.

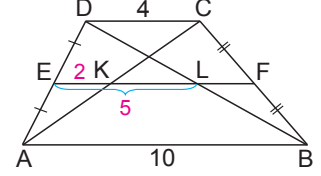


### Çözüm

$[EF]$ , ABCD yamuğunun orta tabanı olduğundan  $[EK] \parallel [DC]$  ve  $[EL] \parallel [AB]$  dir. ADC ve DAB üçgenlerinde 2. Tales teoremi gereğince,

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EK|}{|DC|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EK|}{4} \Rightarrow |EK| = 2 \text{ br ve}$$

$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|EL|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EL|}{10} \Rightarrow |EL| = 5 \text{ br olur. Buradan } |KL| = |EL| - |EK| = 5 - 2 = 3 \text{ br bulunur.}$$

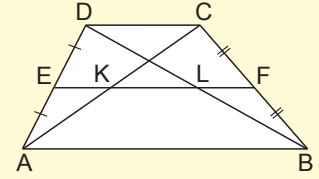


### İnceleyelim

Bir yamukta orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğunun taban uzunlukları farkının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD yamuk,  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $[EF]$  orta taban,  
 $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegen

**İstenen:**  $|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2}$



#### İfadeler

1.  $[EF]$  orta taban
2.  $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EK|}{|DC|} = \frac{1}{2}$
3.  $|EK| = \frac{|DC|}{2}$
4.  $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|EL|}{|AB|} = \frac{1}{2}$
5.  $|EL| = \frac{|AB|}{2}$
6.  $|EL| = |EK| + |KL|$
7.  $\frac{|AB|}{2} = \frac{|DC|}{2} + |KL|$
8.  $|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2}$

#### Gerekçeler

1. Verilen
2. ADC üçgeninde 2. Tales teoreminden
3. 2. ifadedeki orantının özelliğinden
4. DAB üçgeninde 2. Tales teoreminden
5. 4. ifadedeki orantının özelliğinden
6. Bütün-parça ilişkisinden
7. 3 ve 5. ifadelerin 6. ifadede yerine yazılmasından
8. 7. ifadedeki eşitlikte  $|KL|$  nun yalnız bırakılmasından



### Örnek

Bir yamuğun alt tabanının uzunluğu 7 br ve orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu 2 br olduğuna göre, yamuğun orta tabanının uzunluğunu bulalım.

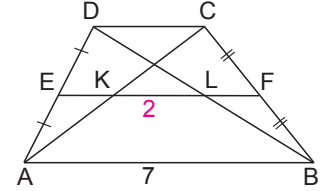
### Çözüm

Verilenlere uygun ABCD yamuğu yandaki şekilde çizilmiştir.

$$|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2} = \frac{7 - |DC|}{2} = 2 \Rightarrow 4 = 7 - |DC| \Rightarrow |DC| = 3 \text{ br dir.}$$

[EF] orta taban olduğundan,

$$|EF| = \frac{|AB| + |DC|}{2} \Rightarrow |EF| = \frac{7 + 3}{2} \Rightarrow |EF| = 5 \text{ br bulunur.}$$

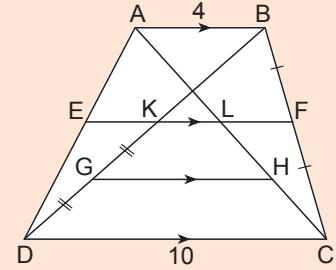


### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD yamuğunun orta tabanı [EF], KLCD yamuğunun orta tabanı [GH] dir. |GH| nu bulabilmek için aşağıda verilen işlem basamaklarındaki boş bırakılan yerleri doğru olacak şekilde tamamlayınız.

► ABCD yamuğunda orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu taban uzunlukları ..... olduğundan  $|KL| = \dots\dots$  br dir.

► KLCD yamuğunda [GH], ..... olduğundan  $|GH| = \dots\dots$  br dir.



### Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde verilen ABCD yamuğunun yan kenar uzunluklarını bularak bu uzunlukları karşılaştırınız.

2. ABCD yamuğunun köşegen uzunluklarını bularak bu uzunlukları karşılaştırınız.

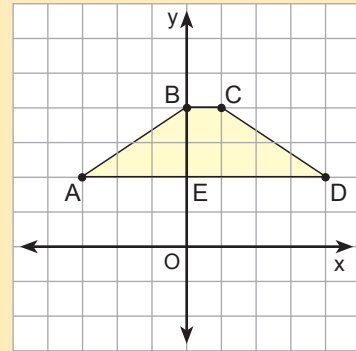
3. ABCD yamuğunun yan kenarlarının eğimlerini göz önünde bulundurarak bu yamuğun taban açılarının ölçüleri hakkında neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

4. ABCD yamuğunun yan kenarını [AB] yerine [BE] olarak seçtiğinizde oluşan BEDC yamuğunun taban açılarının ölçülerini yorumlayınız.

5. BEDC yamuğunun köşegenleri arasındaki açıyı bulunuz.

6. BEDC yamuğunun yükseklik ve taban uzunluklarını bulunuz. Bu uzunluklar ile etkinliğin 5. adımında bulduğunuz açı değerini ilişkilendirerek BEDC yamuğunun taban uzunlukları ve yükseklik uzunlukları arasında bir bağıntı elde ediniz.

7. ABCD ve BEDC yamuklarının benzer ve farklı yönlerini tartışınız.

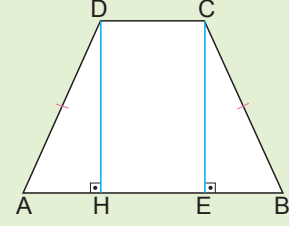




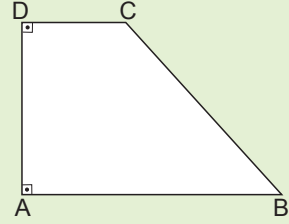


### Bilgi Kutusu

1. Yan kenar uzunlukları birbirine eşit olan yamuğa **ikizkenar yamuk** denir. Yandaki şekilde  $|AD| = |BC|$  olmak üzere,  $[DH]$  ve  $[CE]$  ikizkenar yamuğun yükseklikleridir. İkizkenar yamuk, yamuğun tüm özelliklerini taşır.

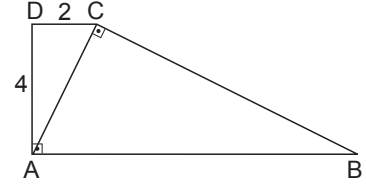


2. Yan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa **dik yamuk** denir. Yandaki şekilde  $[DA] \perp [AB]$  olmak üzere,  $[DA]$  dik yamuğun yüksekliğidir. Dik yamuk, yamuğun tüm özelliklerini taşır.



### Örnek

Şekildeki ABCD dik yamuğunda  $[DA] \perp [AB]$  ve  $[AC] \perp [CB]$  dir.  $|DC| = 2$  br ve  $|DA| = 4$  br olduğuna göre,  $|CB|$  nu bulalım.

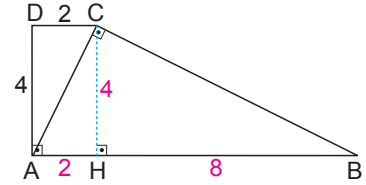


### Çözüm

$[CH]$  yüksekliği çizildiğinde oluşan DAHC dikdörtgeninde  $|AH| = 2$  br ve  $|CH| = 4$  br olur. CAB dik üçgeninde Öklid'in yükseklik bağıntısından  $4^2 = 2 \cdot |HB| \Rightarrow |HB| = 8$  br elde edilir.

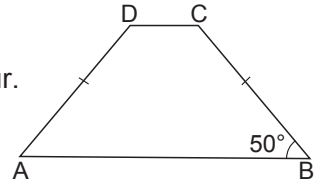
HCB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|CB|^2 = 4^2 + 8^2 \Rightarrow |CB| = 4\sqrt{5} \text{ br bulunur.}$$



### Örnek

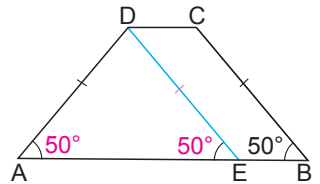
Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $|AD| = |BC|$  dur.  $m(\widehat{B}) = 50^\circ$  olduğuna göre, A açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

$[DE] \parallel [CB]$  olacak şekilde  $[DE]$  çizildiğinde yöndeş açıların eşliğinden  $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{B}) = 50^\circ$  olur. Paralel doğrular arasında kalan paralel doğru parçalarının uzunlukları eşit olduğundan,  $|AD| = |BC| = |DE|$  dur. Bundan dolayı AED ikizkenar üçgendir.

Buradan  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{AED}) = 50^\circ$  bulunur.



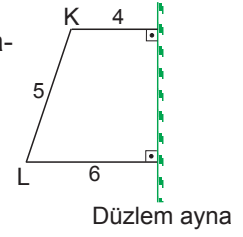


### Örnek

Şekilde uzunluğu 5 br olan  $[KL]$  ile bir düzlem ayna verilmiştir. K ve L noktalarının düzlem aynaya olan uzaklıkları sırasıyla 4 br ve 6 br olduğuna göre;

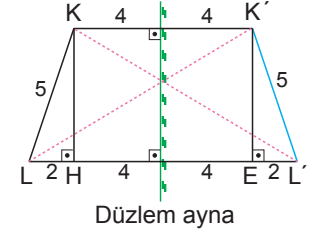
a. K ve L noktalarının düzlem aynadaki görüntüleri  $K'$  ve  $L'$  olmak üzere,  $KLL'K'$  dörtgeninin türünü belirleyelim.

b.  $|KL'|$  ve  $|K'L|$  nu bulalım.



### Çözüm

a. K ve L noktalarının düzlem aynaya olan uzaklıkları ile  $K'$  ve  $L'$  görüntü noktalarının düzlem aynaya uzaklıkları eşit olduğundan,  $|KK'| = 8$  br,  $|LL'| = 12$  br dir. Cismin düzlem aynadaki görüntüsünün uzunluğu kendi uzunluğuna eşit olduğundan  $|K'L'| = 5$  br dir. Aynı zamanda  $KHL$  ve  $K'EL'$  üçgenleri eş olduğundan  $m(\widehat{KLH}) = m(\widehat{K'LE})$  dür. Şekilde görüldüğü gibi  $KLL'K'$  ikizkenar yamuktur.



b.  $[KH] \perp [LL']$  ve  $[K'E] \perp [LL']$  olacak şekilde yamuğun yükseklikleri çizildiğinde  $KHEK'$  dikdörtgen olduğundan  $|HE| = 8$  br olur. Bu durumda  $|LH| = |EL'| = 2$  br olur.  $KLH$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $5^2 = 2^2 + |KH|^2 \Rightarrow |KH| = \sqrt{21}$  br bulunur.

$KHL'$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|KL'| = (\sqrt{21})^2 + 10^2 \Rightarrow |KL'| = 11$  br ve  $K'EL$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|K'L| = (\sqrt{21})^2 + 10^2 \Rightarrow |K'L| = 11$  br elde edilir.

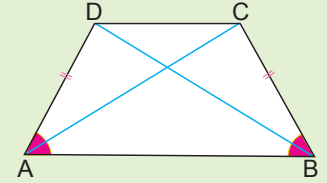
O hâlde  $|KL'| = |K'L| = 11$  br dir.



### Bilgi Kutusu

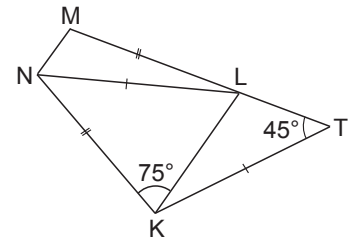
1. İkizkenar yamuğun taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir. Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$  dir.

2. İkizkenar yamuğun köşegenlerinin uzunlukları birbirine eşittir. Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda  $|AC| = |BD|$  dur.



### Örnek

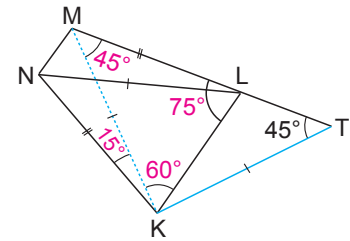
Şekildeki KLMN ikizkenar yamuğunda  $[NM] \parallel [KL]$  dir.  $|NK| = |ML|$ ,  $|NL| = |KT|$ ,  $m(\widehat{NKL}) = 75^\circ$  ve  $m(\widehat{MTK}) = 45^\circ$  olduğuna göre, NLM açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

İkizkenar yamuğun köşegenleri eşit uzunlukta olduğundan KLMN yamuğunda  $[KM]$  köşegeni çizildiğinde  $|KT| = |KM| = |NL|$  olur. Bu durumda KMT ikizkenar üçgen ve  $m(\widehat{KMT}) = 45^\circ$  dir.

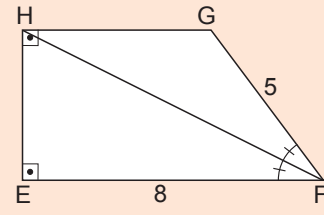
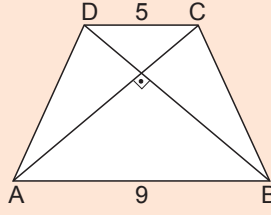
İkizkenar yamuğun taban açılarının ölçüleri birbirine eşit olduğundan  $m(\widehat{NKL}) = m(\widehat{KLM}) = 75^\circ$  dir. KLM üçgeninin iç açıları toplamından  $45^\circ + 75^\circ + m(\widehat{MKL}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{MKL}) = 60^\circ$  dir. Buradan  $m(\widehat{NKM}) = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$  elde edilir. K.K.K. eşlik teoreminden,  $\widehat{KNM} \cong \widehat{LMN}$  dir. Bundan dolayı,  $m(\widehat{NLM}) = m(\widehat{NKM}) = 15^\circ$  bulunur.





## Uygulama Köşesi

Yandaki şekillerde ABCD ikizkenar yamuğu ile EFGH ise dik yamuğu verilmiştir. Şekiller üzerinde verilen bilgilerden yararlanarak  $|AD|$  ve  $|EH|$  nu bulunuz.



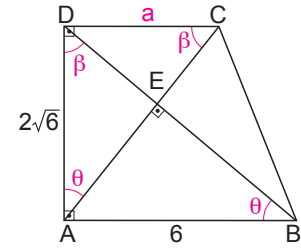
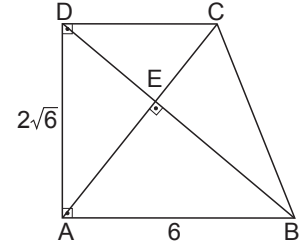
## Örnek

Şekildeki ABCD dik yamuğunda  $[DA] \perp [AB]$ ,  $[DB] \perp [AC]$  ve  $[AC] \cap [DB] = \{E\}$  dir.  $|DA| = 2\sqrt{6}$  br ve  $|AB| = 6$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulalım.

## Çözüm

$|DC| = a$  br,  $m(\widehat{ADB}) = \beta$  ve  $m(\widehat{DAC}) = \theta$  olsun. DAE üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $\beta + \theta = 90^\circ$  olur. DAC ve ABD üçgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamından  $m(\widehat{DCA}) = \beta$  ve  $m(\widehat{ABD}) = \theta$  olur. A.A. benzerlik teoreminden  $\widehat{DAC} \sim \widehat{ABD}$  dir.

$$\text{Buradan } \frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AD|} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{6}} \Rightarrow 24 = 6a \Rightarrow a = 4 \text{ br bulunur.}$$



## İnceleyelim

Köşegenleri dik kesişen bir dik yamuğun yüksekliği  $h$  br, paralel olan kenar uzunlukları  $a$  br ve  $c$  br ise  $h^2 = a \cdot c$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dik yamuk,  $|DA| = h$  br,  $|DC| = a$  br,  $|AB| = c$  br,  
 $m(\widehat{ADB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{DAC}) = \beta$

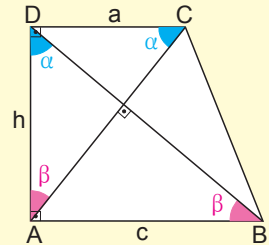
**İstenen:**  $h^2 = a \cdot c$

### İfadeler

1.  $m(\widehat{ADB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{DAC}) = \beta$
2.  $m(\widehat{DBA}) = \beta$  ve  $m(\widehat{DCA}) = \alpha$
3.  $\widehat{DAC} \sim \widehat{ABD}$
4.  $\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AD|}$
5.  $\frac{h}{c} = \frac{a}{h}$
6.  $h^2 = a \cdot c$

### Gerekçeler

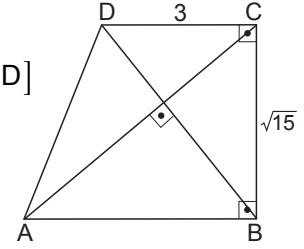
1. Verilen
2.  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ve DAC ile ABD üçgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamının  $180^\circ$  olmasından
3. A.A. benzerlik teoreminden
4. 3. ifadeden
5. Yerine koyma yönteminden
6. Orantı özelliğinden





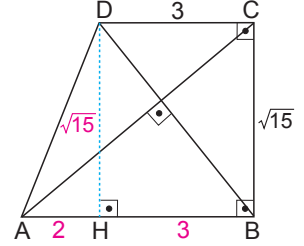
### Örnek

Şekildeki ABCD dik yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$ ,  $[CB] \perp [AB]$  ve  $[AC] \perp [BD]$  dir.  $|DC| = 3$  br ve  $|CB| = \sqrt{15}$  br olduğuna göre,  $|DA|$  nu bulalım.



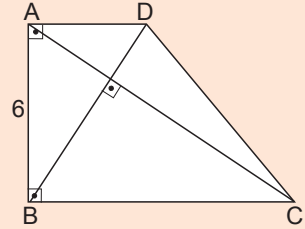
### Çözüm

ABCD dik yamuğunun köşegenleri dik kesiştiğinden  $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot |AB| \Rightarrow |AB| = 5$  br dir.  $[DH]$  yüksekliği çizildiğinde oluşan DHBC bir dikdörtgeştir. Buradan  $|HB| = 3$  br,  $|DH| = \sqrt{15}$  br ve  $|AH| = 5 - 3 = 2$  br elde edilir. HDA dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|DA|^2 = 2^2 + (\sqrt{15})^2 \Rightarrow |DA|^2 = 19 \Rightarrow |DA| = \sqrt{19}$  br bulunur.



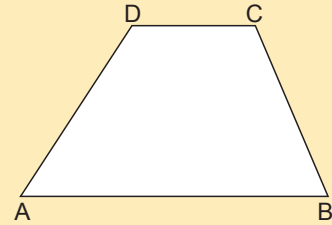
### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD dik yamuğunda  $[AD] \parallel [BC]$ ,  $[AD] \perp [AB]$  ve  $[BD] \perp [AC]$  dir.  $|AB| = 6$  br ve  $|AD|^2 + |BC|^2 = 136$  olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulunuz.



### Etkinlik

- Şekildeki ABCD yamuğunun köşegenlerini çizerek kesim noktasını E olarak adlandırınız.
- E noktasından geçen ve ABCD yamuğunun tabanlarına paralel olan doğruyu çiziniz. Doğrunun, yamuğun yan kenarlarını kestiği noktaları F ve G olarak adlandırınız.
- $|AB| = c$  br,  $|DC| = a$  br kabul edip DEC ve BEA üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak  $\frac{|AE|}{|AC|}$  ve  $\frac{|BE|}{|BD|}$  oranlarını bulunuz.
- AFE ile ADC ve BGE ile BCD üçgenlerin benzerliğinden yararlanarak  $|FE|$  ve  $|GE|$  nun a ve c türünden değerlerini bulunuz.
- $|FE| + |GE|$  toplamını bulup  $|AB|$  ve  $|DC|$  ile karşılaştırınız.
- Bir yamuğun köşegenlerinin kesim noktasından tabanlarına çizilen paralel doğru parçasının yamuğun taban uzunlukları türünden nasıl yazılabileceğini açıklayınız.
- Yamuğun E noktasından geçen yüksekliğini çiziniz ve uzunluğunu h br olarak alınız. DEC ve BEA üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak E noktasının  $[DC]$  ve  $[AB]$  na olan uzaklıklarını a, c ve h türünden bulunuz.
- Bir yamuğun köşegenlerinin kesim noktasının tabanlarına olan uzaklıklarının, yamuğun yüksekliği ve taban uzunlukları türünden nasıl ifade edilebileceğini açıklayınız.



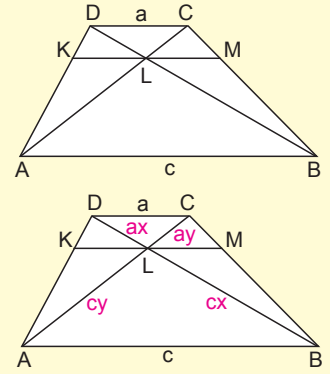


## İnceleyelim

Bir yamukta, paralel olan kenar uzunlukları  $a$  ve  $c$  olmak üzere, yamuğun köşegenlerinin kesim noktasından tabanlara çizilen paralel doğru parçasının uzunluğunun  $\frac{2ac}{a+c}$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD yamuk,  $[DC] \parallel [AB] \parallel [KM]$ ,  $|DC| = a$ ,  $|AB| = c$

**İstenen:**  $|KM| = \frac{2ac}{a+c}$



$[DC] \parallel [AB]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|DL|}{|BL|} = \frac{|LC|}{|AL|} = \frac{|DC|}{|AB|}$  olur.

Yerine koyma yönteminden  $\frac{|DL|}{|BL|} = \frac{|CL|}{|AL|} = \frac{a}{c}$  dir. Orantı özelliğinden  $|DL| = ax$ ,  $|BL| = cx$ ,  $|CL| = ay$  ve  $|AL| = cy$  elde edilir.  $[KL] \parallel [DC]$  olduğundan ADC üçgeninde 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|AL|}{|AC|} = \frac{|KL|}{|DC|}$  olur. Yerine koyma yönteminden ve gerekli cebirsel işlemlerden

$$\frac{cy}{cy + ay} = \frac{|KL|}{a} \Rightarrow \frac{cy}{y(c+a)} = \frac{|KL|}{a} \Rightarrow |KL| = \frac{ac}{a+c} \text{ elde edilir. (★)}$$

$[LM] \parallel [DC]$  olduğundan BDC üçgeninde 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|BL|}{|BD|} = \frac{|LM|}{|DC|}$  olur.

Yerine koyma yönteminden ve gerekli cebirsel işlemlerden

$$\frac{cx}{cx + ax} = \frac{|LM|}{a} \Rightarrow \frac{cx}{x(c+a)} = \frac{|LM|}{a} \Rightarrow |LM| = \frac{ac}{a+c} \text{ elde edilir. (★ ★)}$$

Bütün-parça ilişkisinden  $|KM| = |KL| + |LM|$  dur. (★ ★ ★)

(★) ve (★ ★) eşitlikleri (★ ★ ★) eşitliğinde yerine yazılarak gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$|KM| = \frac{ac}{a+c} + \frac{ac}{a+c} = \frac{2ac}{a+c} \text{ bulunur.}$$

## Örnek

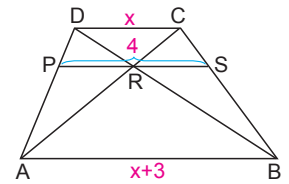
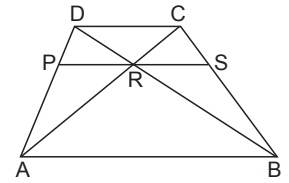
Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB] \parallel [PS]$ ,  $[AC] \cap [BD] \cap [PS] = \{R\}$  dir.  $|PS| = 4$  br ve  $|AB| = |DC| + 3$  olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.

## Çözüm

$|DC| = x$  br olarak alınırsa  $|AB| = (x + 3)$  br olur. Yamuğun taban uzunlukları  $a$  br ve  $c$  br olmak üzere,  $|PS| = \frac{2ac}{a+c}$  olduğundan,

$$4 = \frac{2x(x+3)}{x+x+3} \Rightarrow 8x + 12 = 2x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ ve } x_2 = -2 \text{ dir.}$$

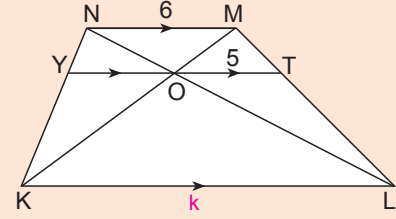
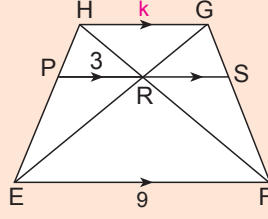
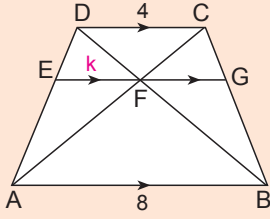
Kenar uzunluğu pozitif olduğundan  $x = 3$  olmalıdır. Bundan dolayı  $|AB| = x + 3 = 3 + 3 = 6$  br bulunur.





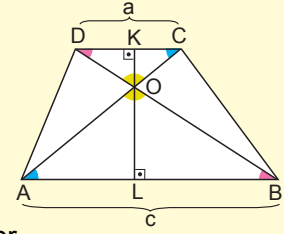
## Uygulama Köşesi

Aşağıdaki yamuklarda verilen kenar uzunluklarından yararlanarak  $k$  değerlerini bulunuz.



## İnceleyelim

ABCD yamuğunda  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $[KL] \perp [AB]$ ,  $|DC| = a$  br,  $|AB| = c$  br ve  $|KL| = h$  br olmak üzere,  $|OK| = \frac{a}{a+c} \cdot h$  ve  $|OL| = \frac{c}{a+c} \cdot h$  olduğunu gösterelim:



**Verilen:** ABCD yamuk,  $[KL] \perp [AB]$ ,  $|DC| = a$  br,  $|AB| = c$  br,  $|KL| = h$  br

**İstenen:**  $|OK| = \frac{a}{a+c} \cdot h$ ,  $|OL| = \frac{c}{a+c} \cdot h$

### İfadeler

- $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DBA})$ ,  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CAB})$  ve  $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOB})$
- $\widehat{DOC} \sim \widehat{BOA}$
- $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|OK|}{|OL|}$
- $\frac{a}{c} = \frac{|OK|}{|OL|}$
- $\frac{a+c}{c} = \frac{|OK|+|OL|}{|OL|}$
- $h = |OK| + |OL|$
- $\frac{a+c}{c} = \frac{h}{|OL|}$
- $|OL| = \frac{c}{a+c} \cdot h$
- $|OK| = h - |OL|$
- $|OK| = h - \frac{c}{a+c} \cdot h$   
 $|OK| = \frac{a}{a+c} \cdot h$

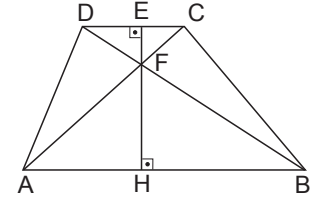
### Gerekçeler

- İç ters açılar ve ters açılar eşliğinden
- A.A. benzerlik teoreminden
- Benzer üçgenlerin yüksekliklerinin oranının benzerlik oranına eşit olmasından
- Yerine koyma yönteminden
- Orantının özelliğinden
- Bütün-parça ilişkisinden
6. ifadedeki eşitliğin 5. ifadede yerine yazılmasından
- Orantının özelliğinden
6. ifadedeki eşitlikte  $|OK|$  nun yalnız bırakılmasından
8. ifadedeki eşitliğin 9. ifadede yerine yazılmasından ve payda eşitleme özelliğinden



### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$ ,  $[EH] \perp [AB]$  ve  $[AC] \cap [BD] \cap [EH] = \{F\}$  dir.  $|DC| = 2 \text{ br}$ ,  $|AB| = 8 \text{ br}$  ve  $|EH| = 5 \text{ br}$  olduğuna göre,  $|EF|$  ve  $|FH|$  nu bulalım.

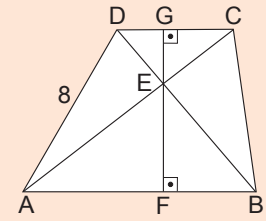


### Çözüm

$|EF| = \frac{|DC|}{|DC| + |AB|} \cdot h \Rightarrow |EF| = \frac{2}{2+8} \cdot 5 = 1 \text{ br}$  ve  $|FH| = \frac{|AB|}{|DC| + |AB|} \cdot h \Rightarrow |FH| = \frac{8}{2+8} \cdot 5 = 4 \text{ br}$  bulunur.

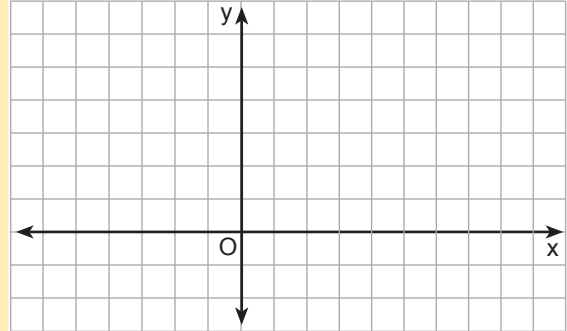
### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$ ,  $[AC] \cap [DB] = \{E\}$  ve  $[GF] \perp [AB]$  dir.  $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ ,  $|DA| = 8 \text{ br}$ ,  $|DC| = 5 \text{ br}$  ve  $|AB| = 10 \text{ br}$  olduğuna göre,  $|GE|$  ve  $|EF|$  nu bulunuz.



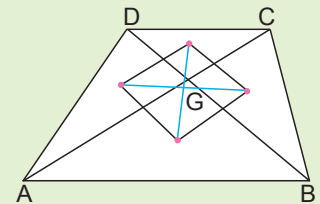
### Etkinlik

- Köşelerinin koordinatları  $A(-6, 0)$ ,  $B(9, 0)$ ,  $C(6, 6)$  ve  $D(3, 6)$  olan ABCD yamuğunu yandaki analitik düzlemde çiziniz.
- ABCD yamuğunun köşegenlerini çizerek köşegenlerin kesim noktasını E olarak adlandırınız. E noktasının koordinatlarını bulunuz.
- Oluşan DEC, DEA, AEB ve BEC üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezlerini sırayla  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  ve  $G_4$  şeklinde adlandırarak bu ağırlık merkezlerinin koordinatlarını bulunuz.
- Köşe noktaları  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  ve  $G_4$  olan dörtgeni ve bu dörtgenin köşegenlerini çiziniz.
- $G_1G_2G_3G_4$  dörtgeninin köşegenlerini taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz.
- Bulduğunuz denklemlerin ortak çözümünden köşegenlerin kesim noktasının koordinatlarını hesaplayınız.
- Uyguladığınız adımlara göre, bir dörtgenin ağırlık merkezinin koordinatlarının nasıl bulunacağını açıklayınız.



### Bilgi Kutusu

Bir yamuğun köşegenlerinin oluşturduğu dört üçgensel bölgenin ağırlık merkezini köşe kabul eden dörtgenin köşegenlerinin kesiştiği noktaya **yamuğun ağırlık merkezi** denir. Şekildeki G noktası, ABCD yamuğunun ağırlık merkezidir.





### Örnek

Köşelerinin koordinatları A(2, 1), B(11, 1), C(6, 5) ve D(3, 5) olan ABCD yamuğunun ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

### Çözüm

Verilen ABCD yamuğu yandaki analitik düzlemde çizilmiştir. ABCD yamuğunun köşegenlerinin kesim noktasını E ile adlandıralım ve E noktasının koordinatlarını bulalım.

[AC] nı taşıyan doğrunun denklemi,

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow x-2 = y-1 \Rightarrow y = x-1 \text{ ve}$$

[DB] nı taşıyan doğrunun denklemi,

$$\frac{x-11}{3-11} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x-11}{-8} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow \frac{x-11}{-2} = y-1 \Rightarrow y = \frac{-x+13}{2} \text{ bulunur. [AC] ve [DB] nı taşıyan}$$

doğruların denklemlerinin ortak çözümünden  $x-1 = \frac{-x+13}{2} \Rightarrow 2x-2 = -x+13 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$  bulunur.  $y = x-1$  denkleminde  $x = 5$  için  $y = 4$  olduğundan E(5, 4) elde edilir.

ABCD yamuğunun köşegenlerinin çizilmesiyle oluşan DEC, DEA, AEB, BEC üçgensel bölgelerin ağırlık merkezleri sırayla  $G_1, G_2, G_3$  ve  $G_4$  olmak üzere,

$$G_1\left(\frac{3+6+5}{3}, \frac{5+5+4}{3}\right) = G_1\left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$G_2\left(\frac{3+2+5}{3}, \frac{5+1+4}{3}\right) = G_2\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

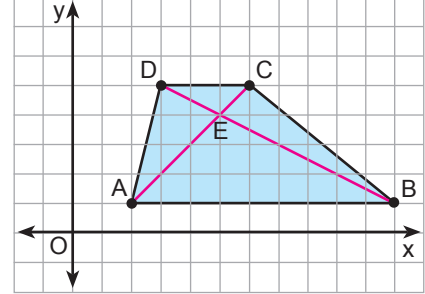
$$G_3\left(\frac{2+11+5}{3}, \frac{1+1+4}{3}\right) = G_3(6, 2)$$

$$G_4\left(\frac{11+6+5}{3}, \frac{1+5+4}{3}\right) = G_4\left(\frac{22}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ dir.}$$

ABCD yamuksal bölgesinin ağırlık merkezi G olsun. G noktası,  $G_1, G_2, G_3, G_4$  noktalarını köşe kabul eden dörtgenin köşegenlerinin kesim noktası olduğundan  $[G_1G_3]$  ve  $[G_2G_4]$  nı taşıyan doğruların denklemlerini bularak ortak çözüm yapalım.  $[G_1G_3]$  nı taşıyan doğrunun denklemi,

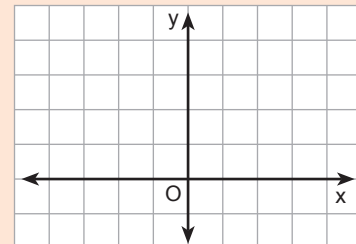
$$\frac{x-6}{\frac{14}{3}-6} = \frac{y-2}{\frac{14}{3}-2} \Rightarrow \frac{x-6}{-\frac{4}{3}} = \frac{y-2}{\frac{8}{3}} \Rightarrow x-6 = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow y = -2x+14 \text{ bulunur. } G_2 \text{ ve } G_4 \text{ noktalarının}$$

ordinatları eşit olduğundan  $[G_2G_4]$  nı taşıyan doğrunun denklemi  $y = \frac{10}{3}$  doğrusudur. Elde edilen doğru denklemlerinin ortak çözümünden  $-2x+14 = \frac{10}{3} \Rightarrow -6x+42 = 10 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$  ve  $y = \frac{10}{3}$  elde edilir. O hâlde,  $G\left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right)$  dir.



### Uygulama Köşesi

Köşelerinin koordinatları A(-1, 0), B(4, 0), C(3, 4) ve D(1, 4) olan ABCD yamuğunu yandaki analitik düzlemde çizerek ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.







## Etkinlik

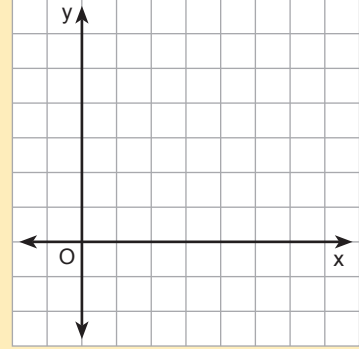
1. Köşelerinin koordinatları  $A(1, 1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(4, 4)$  ve  $D(2, 3)$  olan ABCD yamuğunu yandaki analitik düzlemde çiziniz.

2. ABCD yamuğunun  $f(x, y) = (x, y) + (1, 1) = (x + 1, y + 1)$  ile verilen öteleme altındaki  $A'B'C'D'$  görüntüsünü aynı analitik düzlemde çiziniz. ABCD yamuğu ile  $A'B'C'D'$  dörtgeninin eşlik durumunu tartışınız.

3.  $A'B'C'D'$  yamuğunu  $\vec{v} = (-2, -3)$  vektörü doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen  $A''B''C''D''$  yamuğunun nasıl çizilebileceğini tartışınız.

4. Etkinliğin 2 ve 3. adımlarındaki öteleme vektörlerinin toplamını bulup  $\vec{u}$  olarak adlandırınız. ABCD yamuğunun  $\vec{u}$  vektörü doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen EFGH yamuğunun nasıl çizilebileceğini tartışınız.

5. EFGH yamuğu ile  $A''B''C''D''$  yamuğunu karşılaştırarak nasıl bir sonuca ulaşabilirsiniz? Tartışınız.



## Uyarı

Bir ABCD yamuğunun  $\vec{u}$  doğrultusunda ötelenmesiyle elde edilen görüntüsü  $A'B'C'D'$  olsun.  $A'B'C'D'$  yamuğunun  $\vec{v}$  doğrultusunda ötelenmesinden elde edilen görüntü ile ABCD yamuğunun  $\vec{u} + \vec{v}$  doğrultusunda ötelenmesinden elde edilen görüntü aynı yamuktur.



## Örnek

Köşelerinin koordinatları  $A(-1, 5)$ ,  $B(1, 5)$ ,  $C(5, 2)$  ve  $D(-2, 2)$  noktaları olan yamuğun  $\vec{u} = (1, -2)$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünün ( $A'B'C'D'$  yamuğunun) köşelerinin koordinatlarını bulalım.



## Çözüm

Herhangi bir  $X$  noktasının  $\vec{u}$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen görüntüsü  $T_{\vec{u}}(X) = X + \vec{u}$  olduğundan  $T_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(A) = (-1, 5) + (1, -2) \Rightarrow T_{\vec{u}}(A) = (0, 3) \Rightarrow A'(0, 3)$ ,

$$T_{\vec{u}}(B) = B + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(B) = (1, 5) + (1, -2) \Rightarrow T_{\vec{u}}(B) = (2, 3) \Rightarrow B'(2, 3),$$

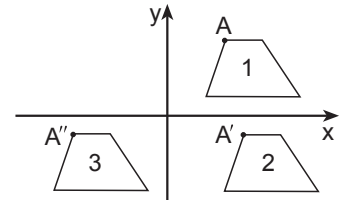
$$T_{\vec{u}}(C) = C + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(C) = (5, 2) + (1, -2) \Rightarrow T_{\vec{u}}(C) = (6, 0) \Rightarrow C'(6, 0) \text{ ve}$$

$$T_{\vec{u}}(D) = D + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(D) = (-2, 2) + (1, -2) \Rightarrow T_{\vec{u}}(D) = (-1, 0) \Rightarrow D'(-1, 0) \text{ elde edilir.}$$



## Örnek

Yandaki analitik düzlemde verilen 1 numaralı yamuk  $\vec{u} = (0, -5)$  doğrultusunda ötelenerek 2 numaralı yamuk elde ediliyor. 2 numaralı yamuk  $\vec{v} = (-7, 0)$  doğrultusunda ötelenerek 3 numaralı yamuk elde ediliyor.  $A(3, 4)$  olduğuna göre,  $A''$  noktasının koordinatlarını bulalım.



## Çözüm

$\vec{u} + \vec{v} = (0, -5) + (-7, 0) = (-7, -5)$  dir. Bir yamuğun ötelenmesiyle elde edilen görüntüsünün tekrar ötelenmesi, ilk yamuğun öteleme vektörlerinin toplamı kadar ötelenmesi olduğundan 1 numaralı yamuk  $\vec{u} + \vec{v}$  doğrultusunda ötelenerek 3 numaralı yamuk elde edilmiştir. Bundan dolayı  $T_{\vec{u}+\vec{v}}(A) = A'' \Rightarrow (3, 4) + (-7, -5) = A'' \Rightarrow A''(-4, -1)$  bulunur.





## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” harfini yazınız.

a. Taban açıları farklı olan bir yamukta küçük açıdan çizilen köşegen diğer köşegen-den daha kısadır. (.....)

b. İkizkenar yamuğun köşegen uzunlukları birbirine eşittir. (.....)

c. Bir yamukta orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu, taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir. (.....)

2. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

a. Köşegenleri dik kesişen bir dik yamuğun taban uzunlukları 2 br ve 8 br ise yüksekliğinin uzunluğu ..... br dir.

b. Köşegenleri dik kesişen bir ikizkenar yamuğun taban uzunlukları 4 br ve 6 br ise yüksekliğinin uzunluğu ..... br dir.

c. Bir yamuğunun ötelenmişinin ötelenmiş öteleme vektörlerinin ..... kadar ötelenmiştir.

3. Şekildeki ABCD

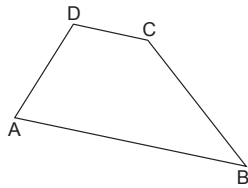
yamuğunda

$$[DC] \parallel [AB],$$

$$m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{A}) - 10^\circ$$

$$m(\widehat{D}) = 2m(\widehat{B}) + 10^\circ$$

olduğuna göre,  $m(\widehat{B})$  kaç derecedir?



4. Şekildeki ABCD dik

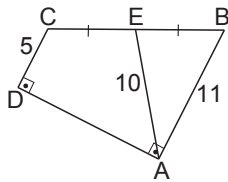
yamuğunda

$$[DC] \parallel [AB]$$

$$[DA] \perp [AB] \text{ dir.}$$

$$|DC| = 5 \text{ br,}$$

$|AE| = 10 \text{ br}$   $|AB| = 11 \text{ br}$  ve  $|CE| = |EB|$  olduğuna göre,  $|DA|$  kaç br dir?



5. Şekildeki ABCD

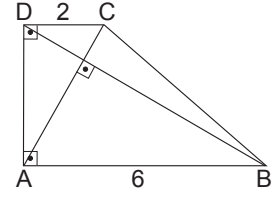
dik yamuğunda

$$[DC] \parallel [AB],$$

$$[DA] \perp [AB] \text{ ve}$$

$$[AC] \perp [DB] \text{ dir.}$$

$|DC| = 2 \text{ br}$  ve  $|AB| = 6 \text{ br}$  olduğuna göre,  $|CB|$  kaç br dir?



6. Şekildeki ABCD

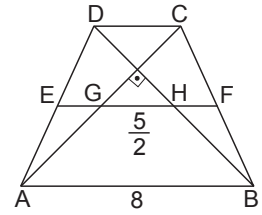
ikizkenar

yamuğunda

$$[DC] \parallel [AB],$$

$$[AC] \perp [DB],$$

$|GH| = \frac{5}{2} \text{ br}$  ve  $|AB| = 8 \text{ br}$  olduğuna göre, ABCD yamuğunun yüksekliği kaç br dir?



7. Taban uzunlukları 2 br ve 6 br olan bir yamuğun köşegenlerinin kesim noktasından tabanlarına çizilen paralel doğrunun uzunluğu kaç br dir?

8. Üst taban uzunluğu alt taban uzunluğunun yarısı olan bir yamuğun yüksekliği alt taban uzunluğuna eşittir. Bu yamuğun köşegenlerinin kesim noktasının üst tabana uzaklığı  $\frac{4}{3} \text{ br}$  ise köşegenlerin kesim noktasının alt tabana olan uzaklığı kaç br dir?

9. Köşelerinin koordinatları  $A(0, 0)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(5, 4)$  ve  $D(2, 3)$  olan ABCD yamuğunun ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

10. Bir ABCD yamuğunun A köşesinin koordinatları  $A(-4, 7)$  dir. ABCD yamuğu  $\vec{v}_1 = (a, b)$  vektörü doğrultusunda ötelenildiğinde A köşesinin görüntüsünün koordinatları  $B(1, 3)$  olduğuna göre,  $a + b$  toplamı kaçtır?



## 2.2. Yamuksal Bölgenin Alanı

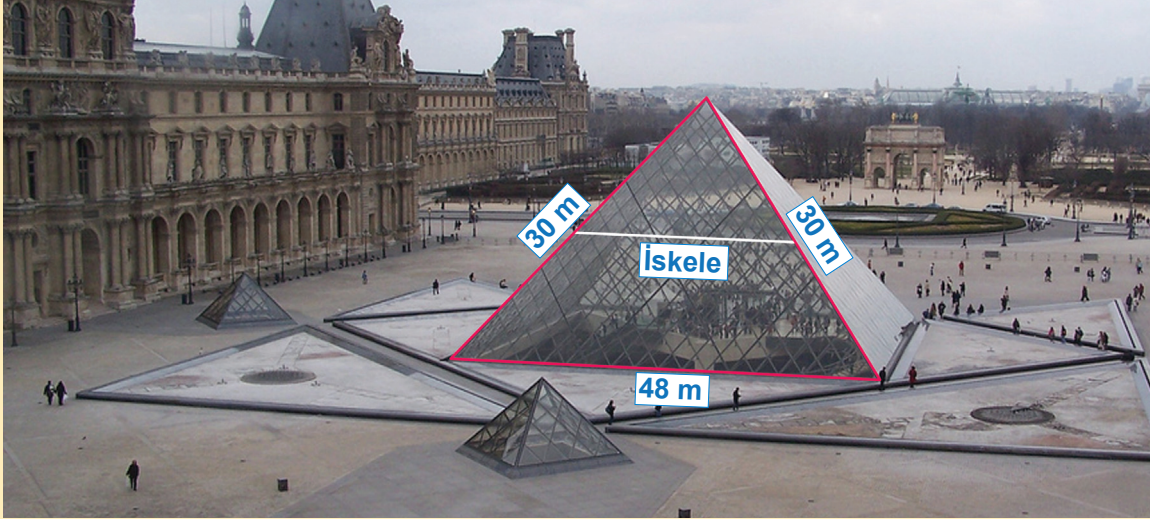


Yandaki fotoğrafta yamuk şeklinde dokunan bir kumaş ve bu kumaşın kenar uzunlukları verilmiştir. Doku-  
ma işlemi bittikten sonra kumaşın çevresi farklı renkte  
bir iple çevrileceğine göre, bu işlem için kullanılacak ip  
miktarını bulunuz.

Metre karesi 25 liradan satılacak olan bu kumaşın  
satış fiyatını bulmak için hangi uzunluklarının bilinmesi  
gerektiğini tartışınız.



### Etkinlik



Louvre (Lovur) Piramidi, Paris'teki Louvre Müzesi'nin avlusunda bulunan cam ve metalden  
inşa edilmiş piramit şeklinde bir yapıdır. Louvre Piramidi'nin her yan yüzeyi ikizkenar üçgendir.  
Piramidin bir yan yüzeyinin camlarını silecek olan iki temizlik işçisi, yüzeyin orta tabanına şekil-  
deki gibi bir iskele kurarak yüzeyi iki parçaya ayırmaktadırlar. Piramidin bir yan yüzeyinin kenar  
uzunluklarını 30 m, 30 m ve 48 m kabul ederek aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. İkizkenar üçgenin özelliklerini göz önünde bulundurarak silinecek toplam yüzeyin yüksekli-  
ğini ve alanını bulunuz.
2. Birinci işçinin sileceği üstteki üçgensel bölgenin taban uzunluğunu, yüksekliğini ve alanını  
hesaplayınız.
3. Silinecek toplam yüzeyin alanından birinci işçinin sileceği yüzeyin alanını çıkararak ikinci iş-  
çinin sileceği yamuksal bölgenin alanını bulunuz.
4. Yamuksal bölgenin yüksekliğini hesaplayınız. Etkinliğin 3. adımında bulduğunuz alanın, ya-  
muksal bölgenin taban uzunlukları ve yüksekliği türünden nasıl ifade edilebileceğini açıklayınız.





### İnceleyelim

Bir yamuksal bölgenin alanının, paralel olan kenarların uzunlukları toplamının yarısı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD yamuk,  $|DC| = a$  br,  $|AB| = c$  br,  $|CH| = h$  br

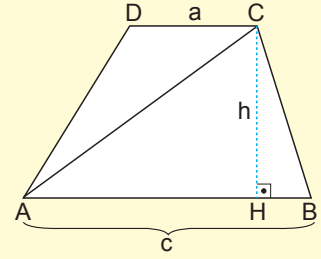
**İstenen:**  $A(ABCD) = \frac{(a+c)}{2} \cdot h$

#### İfadeler

1. ABCD yamuk
2.  $A(\widehat{ACD}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ ,  $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$
3.  $A(ABCD) = A(\widehat{ACD}) + A(\widehat{ABC})$
4.  $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$
5.  $A(ABCD) = \frac{(a+c)}{2} \cdot h$

#### Gerekçeler

1. Verilen
2. Yardımcı ek çizimden ve üçgensel bölgenin alan bağıntısından
3. Bütün-parça ilişkisinden
4. 2. ifadedeki eşitliklerin 3. ifadedeki eşitlikte yerlerine yazılmasından
5. Dağılma özelliğinden



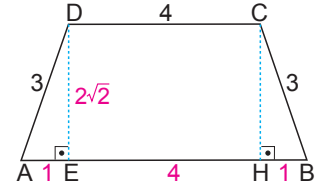
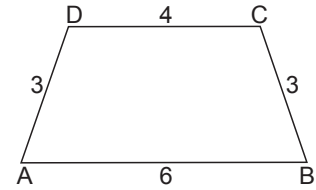
### Örnek

Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  dir.  $|DA| = |CB| = 3$  br,  $|DC| = 4$  br ve  $|AB| = 6$  br olduğuna göre, ABCD yamuğunun alanını bulalım.

### Çözüm

ABCD yamuğunun  $[DE]$  ve  $[CH]$  yükseklikleri çizildiğinde  $|AE| = |HB| = \frac{6-4}{2} = 1$  br elde edilir. EAD dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $3^2 = 1^2 + |DE|^2 \Rightarrow |DE| = 2\sqrt{2}$  br olur.

Buradan  $A(ABCD) = \frac{(4+6) \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$  br<sup>2</sup> bulunur.



### Örnek

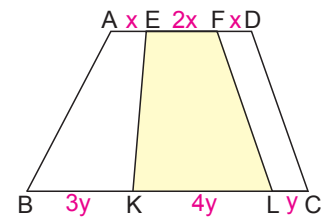
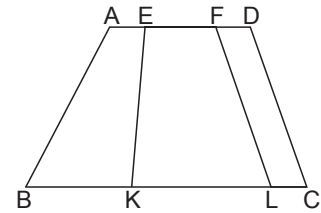
Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AD] \parallel [BC]$  dir.  $2|AE| = |EF| = 2|FD|$  ve  $4|BK| = 3|KL| = 12|LC|$  olduğuna göre,  $\frac{A(EKLF)}{A(ABCD)}$  oranını bulalım.

### Çözüm

$2|AE| = |EF| = 2|FD| \Rightarrow |AE| = x$  br,  $|EF| = 2x$  br ve  $|FD| = x$  br dir.  $4|BK| = 3|KL| = 12|LC| \Rightarrow |BK| = 3y$  br,  $|KL| = 4y$  br ve  $|LC| = y$  br dir.

Yamuksal bölgenin alan bağıntısından,

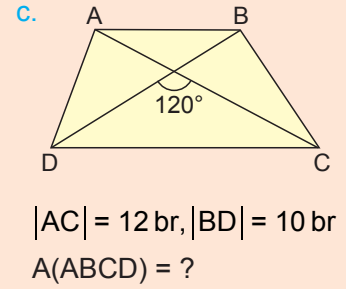
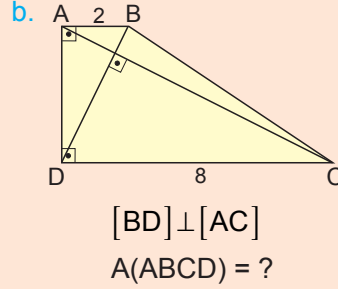
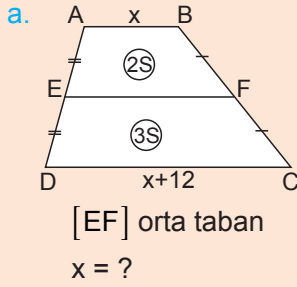
$$\frac{A(EKLF)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{(|EF| + |KL|) \cdot h}{2}}{\frac{(|AD| + |BC|) \cdot h}{2}} = \frac{2x + 4y}{4x + 8y} = \frac{2(x + 2y)}{4(x + 2y)} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$





## Uygulama Köşesi

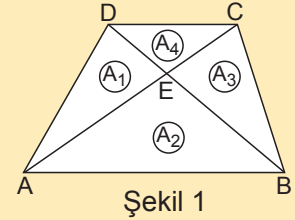
1. Aşağıdaki yamuklarda verilen değerlerden yararlanarak istenenleri bulunuz.



2. Köşelerinin koordinatları  $A(-1, 2)$ ,  $B(\frac{9}{2}, 2)$ ,  $C(1, 5)$  ve  $D(0, 5)$  olan ABCD yamuğunu analitik düzlemde çizerek yamuğun, köşegen uzunluklarını, alanını ve çevresini hesaplayınız.

## Etkinlik

1. Şekil 1'de, ABCD yamuğunun köşegenleri çizilip oluşan üçgensel bölgelerin alanları  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  olarak adlandırılmıştır.  $|AB| = c \text{ br}$  ve  $|DC| = a \text{ br}$  olmak üzere, yamuğun yüksekliğini çiziniz ve  $h$  olarak adlandırınız.



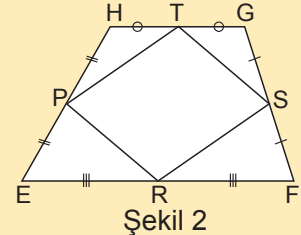
2. DAB ve CAB üçgensel bölgelerinin alanlarını  $c$  ve  $h$  türünden bularak  $A_1$  ile  $A_3$  alanları arasında bir bağıntı elde ediniz.

3. DEC ve AEB üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak  $\frac{|CE|}{|EA|}$  ve  $\frac{|DE|}{|EB|}$  oranlarının  $a$  ve  $c$  türünden ifadesini yazınız.

4. Elde ettiğiniz bağıntıyı ve oranları kullanarak  $A_1$  alanını  $A_2$  ve  $A_4$  alanları türünden ifade ediniz.

5. ABCD yamuksal bölgesinin alanının  $A_2$  ve  $A_4$  alanları türünden nasıl ifade edilebileceğini açıklayınız.

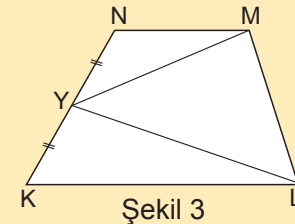
6. Şekil 2'deki EFGH yamuksal bölgesinin [PS] orta tabanını çiziniz. Oluşan PTS ve PRS üçgensel bölgelerinin yüksekliklerini çizip sırayla  $h_1$  ve  $h_2$  olarak adlandırınız.



7. PTS ve PRS üçgensel bölgelerinin alanları ile EFGH yamuksal bölgesinin alanını bulunuz.

8. Üçgensel bölgelerin alanları toplamının PRST dörtgensel bölgesinin alanına eşit olduğunu göz önünde bulundurarak EFGH ve PRST bölgelerinin alanları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

9. Şekil 3'teki KLMN yamuğunda  $|NY| = |YK|$  olmak üzere,  $[MN]$  ve  $[YL]$  nin uzantılarını çizip kesim noktasını F olarak adlandırınız.



10. FNY ve LKY üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak  $A(\widehat{FNY}) = A$  için  $A(\widehat{LKY})$  değerini  $A$  türünden ifade ediniz.

11.  $|FY|$  nun  $|YL|$  na oranını bulunuz.  $A(\widehat{YNM}) = B$  kabul edip bulduğunuz orandan yararlanarak  $A(\widehat{YML})$  değerini  $A$  ve  $B$  türünden ifade ediniz.

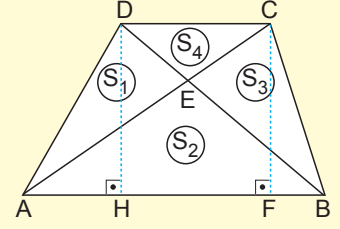
12.  $A(KLMN)$  ve  $A(\widehat{YML})$  arasındaki ilişkiyi açıklayınız.





## İnceleyelim

Bir ABCD yamuksal bölgesinde  $[DC] \parallel [AB]$  ve köşegenlerin yamuk üzerinde ayırdığı üçgensel bölgelerin alanları  $A(\widehat{DEA}) = S_1$ ,  $A(\widehat{AEB}) = S_2$ ,  $A(\widehat{BEC}) = S_3$  ve  $A(\widehat{DEC}) = S_4$  olmak üzere,



a.  $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ ,

b.  $A(ABCD) = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$  olduğunu gösterelim:

a. **Verilen:** ABCD yamuk ve  $S_1, S_2, S_3, S_4$  alanları

**İstenen:**  $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$

### İfadeler

1.  $[DC] \parallel [AB]$
2.  $|DH| = |CF|$
3.  $A(\widehat{DAB}) = \frac{|DH| \cdot |AB|}{2}$ ,  $A(\widehat{CAB}) = \frac{|CF| \cdot |AB|}{2}$
4.  $A(\widehat{DAB}) = A(\widehat{CAB})$
5.  $S_1 + S_2 = S_3 + S_2$
6.  $S_1 = S_3$
7.  $\frac{S_1}{S_4} = \frac{|AE|}{|EC|}$ ,  $\frac{S_2}{S_3} = \frac{|AE|}{|EC|}$
8.  $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3}$
9.  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
10.  $(S_1)^2 = S_2 \cdot S_4$
11.  $S_1 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$

### Gerekçeler

1. Verilen
2. Paralel iki doğru arasındaki uzaklığın eşitliğinden
3. Üçgenin alan bağıntısından
4. 2. ifadedeki eşitliğin 3. ifadedeki ilk eşitliğin yerine yazılmasından
5. Bütün-parça ilişkisinden ve yerine koyma yönteminden
6. Sadeleştirme özelliğinden
7. Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanlarının oranının tabanlarının oranına eşit olmasından
8. 7. ifadedeki eşitliklerden
9. Orantının özelliğinden ve  $S_1 = S_3$  olmasından
10. Kuvvet alma işleminden
11. Karekök alma işleminden

b. **Verilen:** ABCD yamuk ve  $S_1, S_2, S_3, S_4$  alanları

**İstenen:**  $A(ABCD) = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$

### İfadeler

1.  $A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$
2.  $A(ABCD) = S_2 + S_4 + 2S_1$
3.  $A(ABCD) = S_2 + S_4 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4}$
4.  $A(ABCD) = (\sqrt{S_2})^2 + (\sqrt{S_4})^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4}$
5.  $A(ABCD) = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$

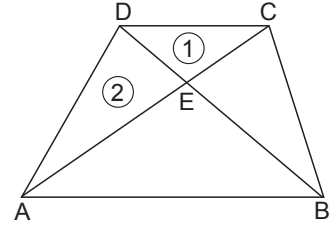
### Gerekçeler

1. Bütün-parça ilişkisinden
2.  $S_3 = S_1$  olmasından
3.  $S_1 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$  olmasından
4. Karekökün kuvvet özelliğinden
5. Tam kare özdeşliğinden



### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$ ,  $[AC] \cap [BD] = \{E\}$ ,  $A(\widehat{AED}) = 2 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{DEC}) = 1 \text{ br}^2$  dir. Yamuğun yüksekliği 3 br olduğuna göre, taban uzunlukları toplamını bulalım.

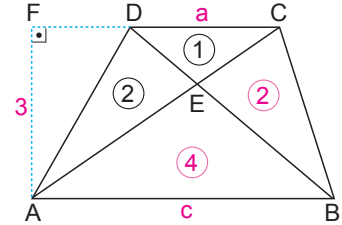


### Çözüm

Yamuğun köşegenlerinin oluşturduğu üçgensel bölgelerin alan bağıntılarından  $A(\widehat{AED}) = A(\widehat{BEC}) = 2 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{AEB}) \cdot 1 = 2 \cdot 2 \Rightarrow A(\widehat{AEB}) = 4 \text{ br}^2$  dir. Buradan  $A(ABCD) = 9 \text{ br}^2$  elde edilir.

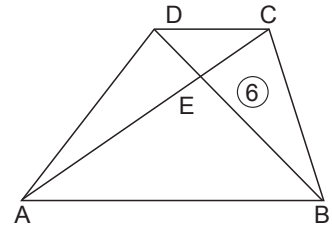
Yamuğun taban uzunlukları a br ve c br olmak üzere, yamuksal bölgenin alan bağıntısından,

$$A(ABCD) = \frac{(a+c) \cdot h}{2} \Rightarrow 9 = \frac{(a+c) \cdot 3}{2} \Rightarrow a+c = 6 \text{ br bulunur.}$$



### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $[AC] \cap [BD] = \{E\}$  dir.  $A(\widehat{BEC}) = 6 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{AEB}) = 2A(\widehat{DEC}) + 1$  olduğuna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.



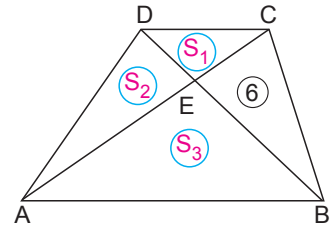
### Çözüm

$A(\widehat{DEC}) = S_1$ ,  $A(\widehat{AED}) = S_2$  ve  $A(\widehat{AEB}) = S_3$  olsun. Bu durumda,  $S_2 = 6 \text{ br}^2$  dir.  $A(\widehat{AEB}) = 2A(\widehat{DEC}) + 1$  olduğundan  $S_3 = 2S_1 + 1$  olur.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{S_1 \cdot S_3} \Rightarrow 6 = \sqrt{S_1 \cdot (2S_1 + 1)} \Rightarrow 36 = 2S_1^2 + S_1 \\ &\Rightarrow 2S_1^2 + S_1 - 36 = 0 \Rightarrow (2S_1 + 9) \cdot (S_1 - 4) = 0 \\ &\Rightarrow S_1 = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{R}^+ \text{ ve } S_1 = 4 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

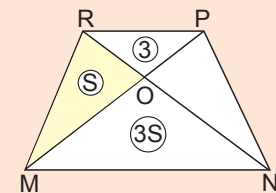
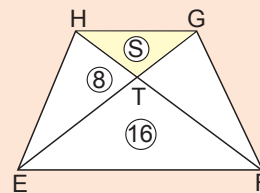
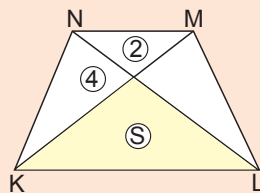
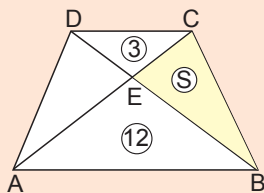
Bundan dolayı  $S_3 = 2S_1 + 1 = 9 \text{ br}^2$  olur.

$$\text{Buradan } A(ABCD) = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2 = (\sqrt{4} + \sqrt{9})^2 = 25 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

Aşağıdaki yamuqlarda verilen sayılar ve harfler içinde bulundukları üçgensel bölgelerin alanlarını göstermektedir. Buna göre, her yamuksal bölgedeki "S" değerini bulunuz.







### İnceleyelim

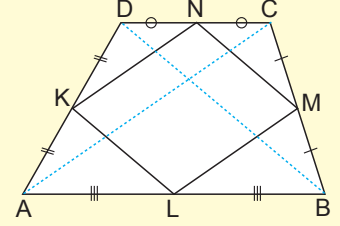
Bir ABCD yamuksal bölgesinde  $[DC] \parallel [AB]$ , K, L, M, N bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere;

- a. KLMN bir paralelkenardır.      b.  $A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{2}$  olduğunu gösterelim:

a. **Verilen:** ABCD yamuksal bölge, K, L, M, N bulundukları kenarların orta noktaları

**İstenen:** KLMN bir paralelkenar

ABCD yamuğunda  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenleri çizildiğinde oluşan DAB üçgeninde  $[KL]$ ,  $[AD]$  ve  $[AB]$  nı eşit oranda böldüğünden,  $[KL] \parallel [DB]$  dir. DCB üçgeninde  $[NM]$ ,  $[DC]$  ve  $[CB]$  nı eşit oranda böldüğünden  $[NM] \parallel [DB]$  dir.  $[KL] \parallel [DB]$  ve  $[NM] \parallel [DB]$  olduğundan geçişme özelliği kullanılarak  $[KL] \parallel [NM]$  bulunur.

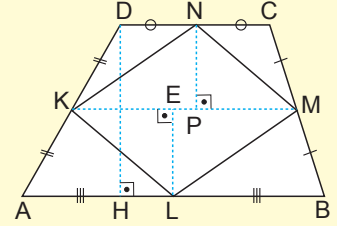


Benzer şekilde DAC üçgeninde  $[KN] \parallel [AC]$  ve BAC üçgeninde  $[LM] \parallel [AC]$  dir. Buradan  $[KN] \parallel [LM]$  elde edilir.  $[KL] \parallel [NM]$  ve  $[KN] \parallel [LM]$  olduğundan KLMN bir paralelkenardır.

- b. **Verilen:** ABCD yamuksal bölge, K, L, M, N bulundukları kenarların orta noktaları

**İstenen:**  $A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{2}$

K ve M yan kenarların orta noktaları olduğundan  $[KM]$  orta tabandır. Buradan  $|KM| = \frac{|AB| + |AC|}{2}$  dir. Yamuğun orta tabanı tabanlara eşit uzaklıkta olduğundan  $|NP| = |LE| = \frac{|DH|}{2}$  dir. Üçgenin alan bağıntısından



$$A(\widehat{KML}) = \frac{|KM| \cdot |LE|}{2} = \frac{\frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot \frac{|DH|}{2}}{2} = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{8}$$

$$\text{ve } A(\widehat{KMN}) = \frac{|KM| \cdot |NP|}{2} = \frac{\frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot \frac{|DH|}{2}}{2} = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{8} \text{ bulunur.}$$

Bütün-parça ilişkisinden  $A(KLMN) = A(\widehat{KMN}) + A(\widehat{KLM})$  dir. Yukarıda bulunan

$A(\widehat{KMN})$  ve  $A(\widehat{KLM})$  değerleri bu eşitlikte yerine yazılarak gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$A(KLMN) = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{8} + \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{8} = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{4} \text{ elde edilir. (★)}$$

Yamuğun alan bağıntısından  $A(ABCD) = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{2}$  dir. (★ ★)

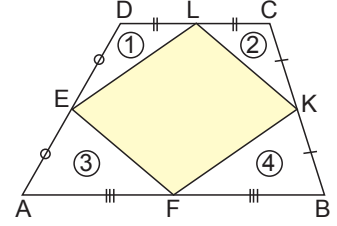
$$(★) \text{ eşitliğinin } (★ ★) \text{ eşitliğine oranı } \frac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{4}}{\frac{(|AB| + |DC|) \cdot |DH|}{2}} \text{ olup sadeleştirme işleminin}$$

$$\text{den } \frac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \frac{1}{2} \text{ dir. Orantının özelliğinden } A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ bulunur.}$$



### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  ve E, F, K, L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(\widehat{AEF}) = 3 \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{BFK}) = 4 \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{CLK}) = 2 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{DEL}) = 1 \text{ br}^2$  olduğuna göre, EFKL paralelkenarının alanını bulalım.



### Çözüm

$$A(ABCD) = A(\widehat{AEF}) + A(\widehat{BFK}) + A(\widehat{CLK}) + A(\widehat{DEL}) + A(EFKL) \text{ dir. } (*)$$

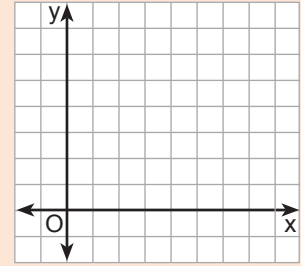
EFKL paralelkenarı ABCD yamuğunun kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle oluştuğundan,

$$A(EFKL) = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 2A(EFKL) \text{ dir. } (**)$$

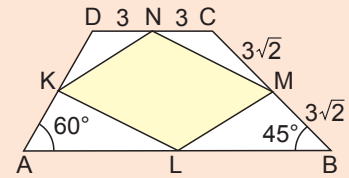
$$(*) \text{ ve } (**) \text{ eşitliklerinden } 2A(EFKL) = 3 + 4 + 2 + 1 + A(EFKL) \Rightarrow A(EFKL) = 10 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

### Uygulama Köşesi

1. Köşelerinin koordinatları A(2, 1), B(8, 3), C(6, 6) ve D(3, 5) olan ABCD yamuğunu yandaki analitik düzlemde çiziniz. ABCD yamuğunun kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen dörtgenin bir paralelkenar olduğunu analitik yaklaşımla gösteriniz.

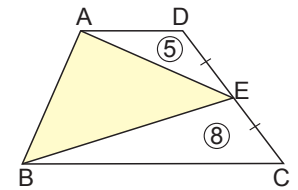


2. Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$  ve K, L, M, N bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ ,  $m(\widehat{B}) = 45^\circ$ ,  $|DN| = |NC| = 3 \text{ br}$  ve  $|CM| = |MB| = 3\sqrt{2} \text{ br}$  olduğuna göre, KLMN dörtgeninin alanını bulunuz.



### Örnek

Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AD] \parallel [BC]$  ve  $|DE| = |EC|$  dur.  $A(\widehat{ADE}) = 5 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{BEC}) = 8 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ABE üçgeninin alanını bulalım.



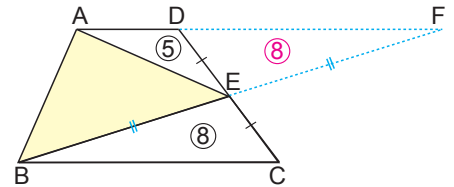
### Çözüm

$[AD]$  ve  $[BE]$  ni uzatıp kesim noktasını F olarak adlandıralım. Bu durumda  $[DF] \parallel [BC]$  ve  $|DE| = |EC|$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince DEF ve BEC üçgenlerinin benzerlik oranı 1 olur.

Benzerlik oranının karesi alanların oranına eşit olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{DEF})}{A(\widehat{BEC})} = 1 \Rightarrow A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{BEC}) = 8 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

ABF üçgeninde  $|BE| = |EF|$  olduğundan  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AEF}) = 5 + 8 = 13 \text{ br}^2$  bulunur.





### İnceleyelim

Bir ABCD yamuksal bölgesinde,  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $|DE| = |EA|$  ise  $A(\widehat{EBC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD yamuk,  $|DE| = |EA|$

**İstenen:**  $A(\widehat{EBC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$

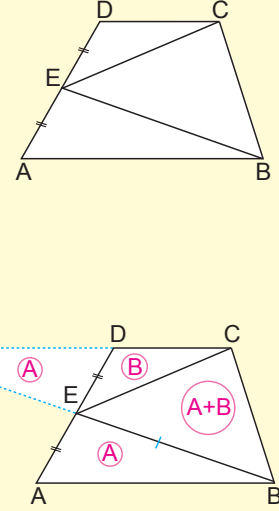
$[CD]$  ve  $[BE]$  ni uzatarak kesim noktasını K şeklinde adlandıralım.  $[KD] \parallel [AB]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince,  $|KE| = |EB|$  ve KED ile BEA üçgenlerinin benzerlik oranı 1 olur.

Benzerlik oranının karesi alanlar oranına eşit olduğundan,  $\frac{A(\widehat{KED})}{A(\widehat{BEA})} = 1 \Rightarrow A(\widehat{KED}) = A(\widehat{BEA})$  dir.  $A(\widehat{KED}) = A(\widehat{BEA}) = A$  ve  $A(\widehat{DEC}) = B$  olsun. KCB üçgeninde  $|KE| = |EB|$  olduğundan  $A(\widehat{EBC}) = A + B$  olur. (★)

Bütün-parça ilişkisinden ve yerine koyma yönteminden

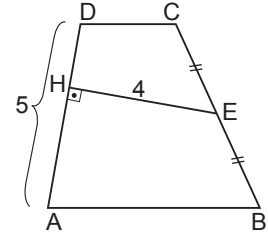
$A(ABCD) = B + A + B + A \Rightarrow A(ABCD) = 2(A + B)$  elde edilir. (★ ★)

(★) eşitliği (★ ★) eşitliğine bölünürse  $\frac{A(EBC)}{A(ABCD)} = \frac{A+B}{2(A+B)} \Rightarrow A(\widehat{EBC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.



### Örnek

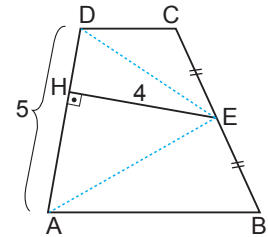
Şekildeki ABCD yamuğunda  $[DC] \parallel [AB]$ ,  $[EH] \perp [DA]$  ve  $|CE| = |EB|$  dir.  $|EH| = 4$  br ve  $|DA| = 5$  br olduğuna göre, ABCD yamuğunun alanını bulalım.



### Çözüm

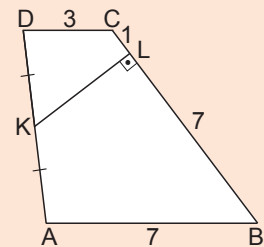
E noktası A ve D noktaları ile birleştirilerek ADE üçgeni oluşturulduğunda  $A(\widehat{ADE}) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  br<sup>2</sup> olur.

Buradan  $A(\widehat{ADE}) = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow 10 = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 20$  br<sup>2</sup> bulunur.



### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD yamuğunda,  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $[KL] \perp [CB]$  dir.  $|DK| = |KA|$ ,  $|DC| = 3$  br,  $|CL| = 1$  br ve  $|LB| = |AB| = 7$  br olduğuna göre, ABCD yamuğunun alanını bulunuz.

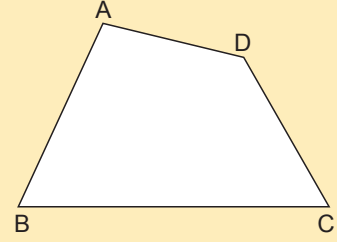






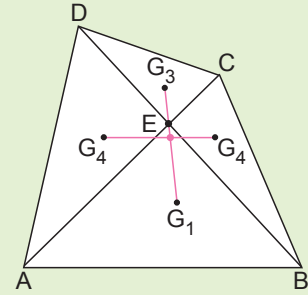
## Etkinlik

1. Yandaki ABCD dörtgeninin köşegenlerini çiziniz. Köşegenlerin kesim noktasını E olarak adlandırınız.
2. Oluşan AEB, BEC, CED ve AED üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezlerini belirleyerek sırayla  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  ve  $G_4$  olarak adlandırınız.
3. Ağırlık merkezlerini birleştirerek  $G_1G_2G_3G_4$  dörtgensel bölgesini oluşturunuz.
4.  $G_1G_2G_3G_4$  dörtgensel bölgesinin köşegenlerini çizerek köşegenlerin kesim noktasını G olarak adlandırınız.
5. G noktası ile ABCD dörtgensel bölgesinin ağırlık merkezi arasında nasıl bir ilişki vardır? Tartışınız.



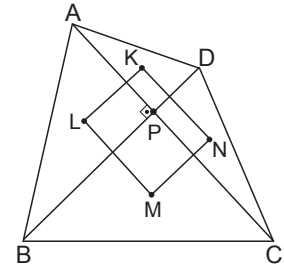
## Bilgi Kutusu

Bir dörtgensel bölgenin köşegenlerinin çizilmesiyle dört üçgensel bölge meydana gelmektedir. Bu üçgensel bölgelerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu dörtgenin, köşegenlerinin kesiştiği noktaya, dörtgensel bölgenin **ağırlık merkezi** denir.



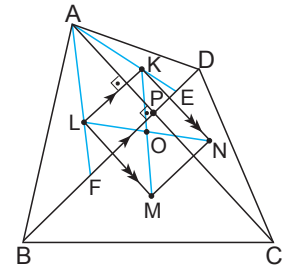
## Örnek

Yandaki şekilde ABCD dörtgeni ile bu dörtgenin köşegenlerinin oluşturduğu üçgensel bölgelerin ağırlık merkezlerini köşe kabul eden KLMN dörtgeni verilmiştir.  $[AC] \cap [BD] = \{P\}$ ,  $[AC] \perp [BD]$ ,  $|KL| = 6$  br ve  $|KN| = 8$  br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin ağırlık merkezinin K noktasına uzaklığını bulalım.



## Çözüm

APD ve APB üçgenlerinin sırayla  $[AE]$  ve  $[AF]$  kenarortayları çizildiğinde  $\frac{|AK|}{|KE|} = 2$  ve  $\frac{|AL|}{|LF|} = 2$  olur. Buradan AFE üçgeninde  $[KL]$ ,  $[AF]$  ve  $[AE]$  nı aynı oranda böldüğünden  $[KL] \parallel [FE]$  ve  $[KL] \perp [AC]$  olur. Benzer işlemler APD ve CPD üçgenlerine de uygulandığında  $[KN] \parallel [AC]$  ve  $[LK] \perp [KN]$  bulunur.



LKN dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|LN|^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow |LN| = 10$  br elde edilir. ABCD dörtgeninin ağırlık merkezi KLMN dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktası olan O noktasıdır.  $[KO]$ , KLN dik üçgeninin kenarortayı olduğundan  $|LO| = |ON| = 5$  br dir. Dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısı olduğundan  $|OK| = 5$  br bulunur.





## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

a. Bir yamuksal bölgenin alanı, taban uzunlukları toplamı ile yüksekliğinin çarpımının yarısıdır. (.....)

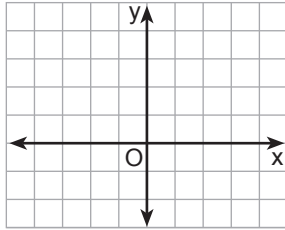
b. Bir yamuğun paralelkenarlarını taban, köşegenlerinin kesim noktasını köşe kabul eden üçgensel bölgelerin alanları eşittir. (.....)

c. Bir yamuksal bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen paralelkenardır. (.....)

ç. Bir yamuksal bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin alanı, bu dörtgen ile yamuksal bölge arasında kalan üçgensel bölgelerin alanları toplamının iki katıdır. (.....)

d. Taban uzunlukları 4 br ve 9 br olan bir dik yamuksal bölgenin köşegenleri dik kesişiyorsa alanı  $39 \text{ br}^2$  dir. (.....)

2.



Köşelerinin koordinatları  $A(-2, 2)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(4, -1)$  ve  $D(2, 3)$  olan ABCD dörtgenini yukarıdaki analitik düzlemde çizerek ABCD dörtgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını ve alanını bulunuz.

3. Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda

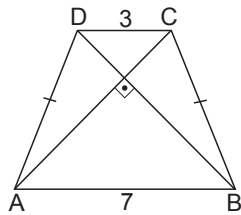
$$|AD| = |BC| \text{ ve}$$

$$[DB] \perp [AC] \text{ dır.}$$

$$|DC| = 3 \text{ br ve}$$

$$|AB| = 7 \text{ br olduğuna göre,}$$

$$A(ABCD) \text{ kaç } \text{br}^2 \text{ dir?}$$



4. Şekildeki ABCD

dik yamuğunda

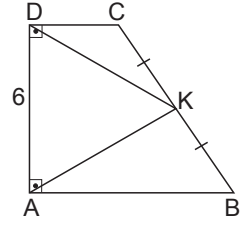
$$[DA] \perp [AB],$$

$$|CK| = |KB| \text{ ve}$$

$$|DA| = 6 \text{ br dir.}$$

DKA eşkenar

üçgen olduğuna göre,  $A(\widehat{DKC}) + A(\widehat{AKB})$  toplamı kaç  $\text{br}^2$  dir?



5. Şekildeki ABCD

yamuğunda

$$[DC] \parallel [EF] \parallel [AB],$$

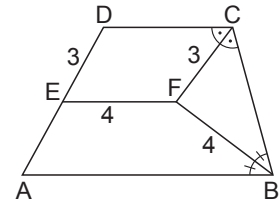
$$[CF] \text{ ve } [BF]$$

açıortaydır.

$$|CF| = 3 \text{ br, } |BF| = 4 \text{ br, } |EF| = 4 \text{ br, ve}$$

$$|DE| = 3 \text{ br olduğuna göre,}$$

$$\angle(ABCD) \text{ kaç br dir?}$$



6. Şekildeki ABCD

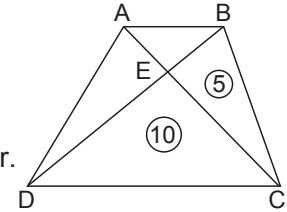
yamuğunda

$$[AB] \parallel [DC] \text{ ve}$$

$$[AC] \cap [BD] = \{E\} \text{ dir.}$$

$$A(\widehat{BEC}) = 5 \text{ br}^2 \text{ ve}$$

$$A(\widehat{DEC}) = 10 \text{ br}^2 \text{ olduğuna göre, } A(ABCD) \text{ kaç } \text{br}^2 \text{ dir?}$$



7. Şekildeki ABCD

yamuğunda,

$$[AB] \cap [AC] = \{E\} \text{ ve}$$

$$K, L, M, N$$

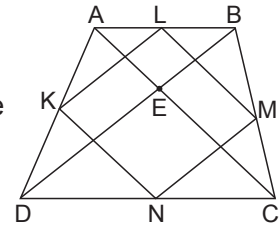
bulundukları

kenarların

orta noktalarıdır.

$$A(KLMN) = \frac{81}{2} \text{ br}^2 \text{ ve } A(\widehat{AEB}) = 16 \text{ br}^2 \text{ ol-}$$

$$\text{duğuna göre, } A(\widehat{EDC}) \text{ kaç } \text{br}^2 \text{ dir?}$$





## 2.3. Paralelkenar ve Özellikleri



“Paralel cetvel” deniz seyir haritalarında bir çizginin paralel olarak kaydırılması amacı ile kullanılan bir çizim ve ölçüm aletidir. Paralel cetvel, birbirine eşit uzunlukta iki küçük parça ile birbirine bağlanmış iki düz cetvelden oluşur.

Rota hattı, geminin bulunduğu yerden gideceği yöne doğru çizilen çizgidir. Bu çizginin çizilebilmesi için paralel cetvel, haritanın pusula gülü üzerinde geminin gideceği yöne doğru yerleştirilir ve cetvel kaydırılarak yön hattı geminin konumuna taşınır. Cetvel geminin konumu üzerine gelince gideceği yöne doğru bir çizgi çizilir. Böylelikle rota hattı belirlenir.

Rota hattı belirleme işleminde paralelkenarın hangi özelliklerinden dolayı paralel cetvel kullanıldığını yorumlayınız.



### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-2, 1)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(3, 4)$  ve  $D(-1, 4)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

2. Dörtgenin kenarlarını taşıyan doğruların eğimlerini bulunuz. Bulduğunuz eğimleri karşılaştırarak ABCD dörtgeninin kenarlarının birbirine göre durumunu belirleyiniz.

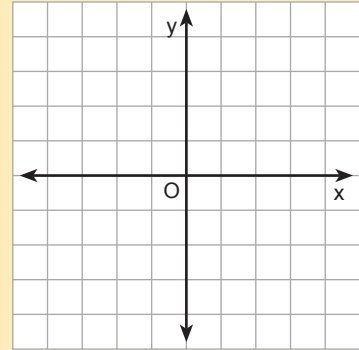
3. Yaptığınız belirlemeyi göz önünde bulundurarak ABCD dörtgeninin karşı ve komşu açılarının ölçülerini yorumlayınız.

4. ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bularak karşılıklı kenarların uzunluklarını karşılaştırınız.

5. ABCD dörtgeninin köşegenlerinin uzunluklarını bulunuz. Köşegenlerin kesim noktasını E olarak adlandırınız ve E noktasının koordinatlarını bulunuz.

6.  $|AE|$  ve  $|CE|$  nu bularak bu uzunluklar arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Aynı ilişki  $|DE|$  ve  $|BE|$  arasında da geçerli midir? Tartışınız.

7. ABCD dörtgeninin başka hangi özellikleri elde edilebilir? Tartışınız.



### Bilgi Kutusu

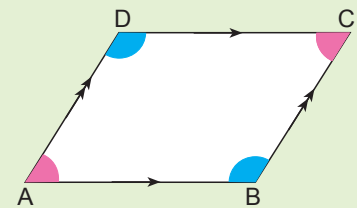
Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.

Şekildeki ABCD paralelkenarında;

\*  $[AB] \parallel [DC]$  ve  $[AD] \parallel [BC]$  dır.

\*  $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ ,  $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$

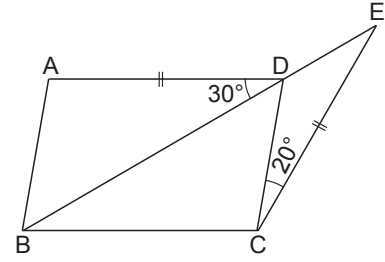
\* Herhangi bir kenarın başlangıç ve bitim noktalarını köşe kabul eden açılar birbirinin bütünleridir.





### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında B, D, E noktaları doğrusaldır.  $|AD| = |CE|$ ,  $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{DCE}) = 20^\circ$  olduğuna göre, A açısının ölçüsünü bulalım.



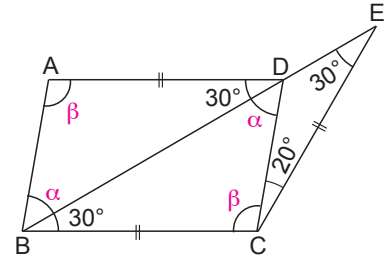
### Çözüm

$m(\widehat{ABD}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{BAD}) = \beta$  olsun.  $[AD] \parallel [BC]$  ve  $[AB] \parallel [DC]$  olduğundan iç ters açılarının eşitliği gereğince,  $m(\widehat{EBC}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BDC}) = \alpha$  olur.

Paralelkenarda karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olduğundan,  $m(\widehat{BCD}) = \beta$  dir. A.A. benzerlik teoreminden  $\widehat{BAD} \sim \widehat{DCB}$  dir.

Buradan  $\frac{|BA|}{|DC|} = \frac{|AD|}{|CB|} = \frac{|BD|}{|DB|}$  elde edilir ve  $|BD| = |DB|$  olduğundan  $|BA| = |DC|$  ve  $|AD| = |CB|$  bulunur.  $|AD| = |CE|$  verildiğinden  $|BC| = |CE|$  olur. Bundan dolayı BEC ikizkenar üçgendir ve  $m(\widehat{BEC}) = 30^\circ$  dir.

BEC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $30^\circ + 30^\circ + \beta + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 100^\circ$  bulunur.

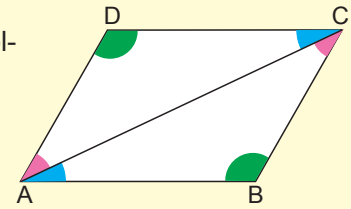


### İnceleyelim

Bir paralelkenarda karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar

**İstenen:**  $|DA| = |BC|$ ,  $|DC| = |BA|$



#### İfadeler

1. ABCD paralelkenar
2.  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACB})$ ,  $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{BAC})$
3.  $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC})$
4.  $\widehat{DAC} \cong \widehat{BCA}$
5.  $|DA| = |BC|$ ,  $|DC| = |BA|$

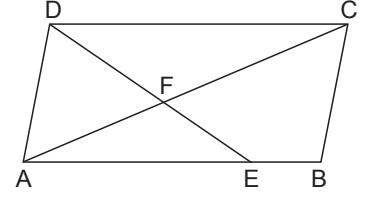
#### Gerekçeler

1. Verilen
2. İç ters açılarının eşitliğinden
3. Paralelkenarda karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olmasından
4. A.A. eşlik teoreminden
5. 4. ifadeden



### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AC] \cap [DE] = \{F\}$  ve  $|AE| = 3|EB|$  dir.  $|AC| = 14$  br olduğuna göre,  $|FC|$  nu bulalım.



### Çözüm

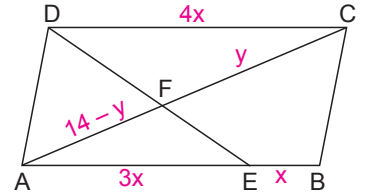
$|EB| = x$  br ve  $|FC| = y$  br olsun.  $|EB| = x$  br  $\Rightarrow |AE| = 3x$  br ve  $|FC| = y$  br  $\Rightarrow |AF| = (14 - y)$  br dir.

Paralelkenarda karşılıklı kenarlar eşit uzunlukta olduğundan,  $|DC| = 3x + x = 4x$  br elde edilir.

$[AB] \parallel [DC]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince,

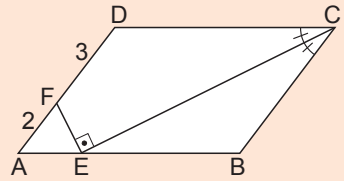
$$\frac{|AE|}{|DC|} = \frac{|AF|}{|FC|} \Rightarrow \frac{3x}{4x} = \frac{14 - y}{y}$$

$$\Rightarrow 3y = 56 - 4y \Rightarrow 7y = 56 \Rightarrow y = 8 \text{ br bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[FE] \perp [EC]$  ve  $[EC]$ , C açısının iç açıortayıdır.  $|AF| = 2$  br ve  $|FD| = 3$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulmak için aşağıda verilen çözüm basamaklarındaki boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz. Bulduğunuz her değeri şekil üzerinde gösteriniz.



#### Çözüm:

►  $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{AEF}) = \beta$  olsun. İç ters açılarının eşitliğinden  $m(\widehat{CEB}) = \dots\dots$  olur.

► Paralelkenarda karşılıklı kenarların uzunlukları birbirine  $\dots\dots$  olduğundan  $|BC| = \dots\dots$  br dir.

► EBC  $\dots\dots$  üçgendir ve  $|EB| = \dots\dots$  br dir.

► Paralelkenarda karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olduğundan  $m(\widehat{DAB}) = \dots\dots$  dir.

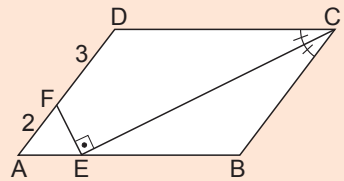
► E noktasındaki doğru açıdan  $\alpha + \beta = \dots\dots$  olur. (\*)

► AFE üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı  $180^\circ$  olduğundan  $2\alpha + \beta + \dots\dots = 180^\circ$  dir. (\*\*)

► (\*) ve (\*\*) eşitliklerinden  $m(\widehat{AFE}) = \dots\dots$  elde edilir.

► AFE ikizkenar üçgen olduğundan  $|AE| = \dots\dots$  br ve  $|AB| = \dots\dots$  br olur.

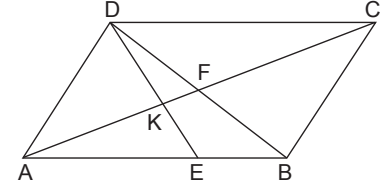
► Paralelkenarda karşılıklı kenar uzunlukları  $\dots\dots$  olduğundan  $|DC| = \dots\dots$  br bulunur.





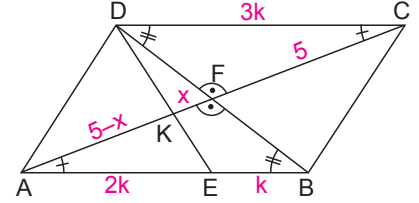
### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[DB] \cap [AC] = \{F\}$  ve  $[DE] \cap [AC] = \{K\}$  dir.  $|AE| = 2|EB|$  ve  $|AC| = 10$  br olduğuna göre,  $|KF|$  nu bulunuz.



### Çözüm

$[AB] \parallel [DC]$  olduğundan iç ters açılarının eşitliğinden  $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{BAC})$  ve  $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{ABD})$  dür. Ters açılarının eşitliğinden  $m(\widehat{DFC}) = m(\widehat{AFB})$  dür. Aynı zamanda  $|AB| = |DC|$  olduğundan A.K.A. eşlik teoremi gereğince  $\widehat{AFB} \cong \widehat{CFD}$  olur.



Bundan dolayı  $|DF| = |FB|$  ve  $|AF| = |FC|$  dur.

$|AC| = 10$  br verildiğinden  $|AF| = |FC| = 5$  br dir.  $|KF| = x$  br alınırsa  $|AK| = (5 - x)$  br olur.

$|AE| = 2|EB|$  verildiğinden  $|EB| = k$  br alınırsa  $|AE| = 2k$  br ve  $|DC| = k + 2k = 3k$  br olur.

$[AE] \parallel [DC]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince,

$$\frac{|AE|}{|DC|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{2k}{3k} = \frac{5-x}{x+5} \Rightarrow 2x + 10 = 15 - 3x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \text{ br bulunur.}$$

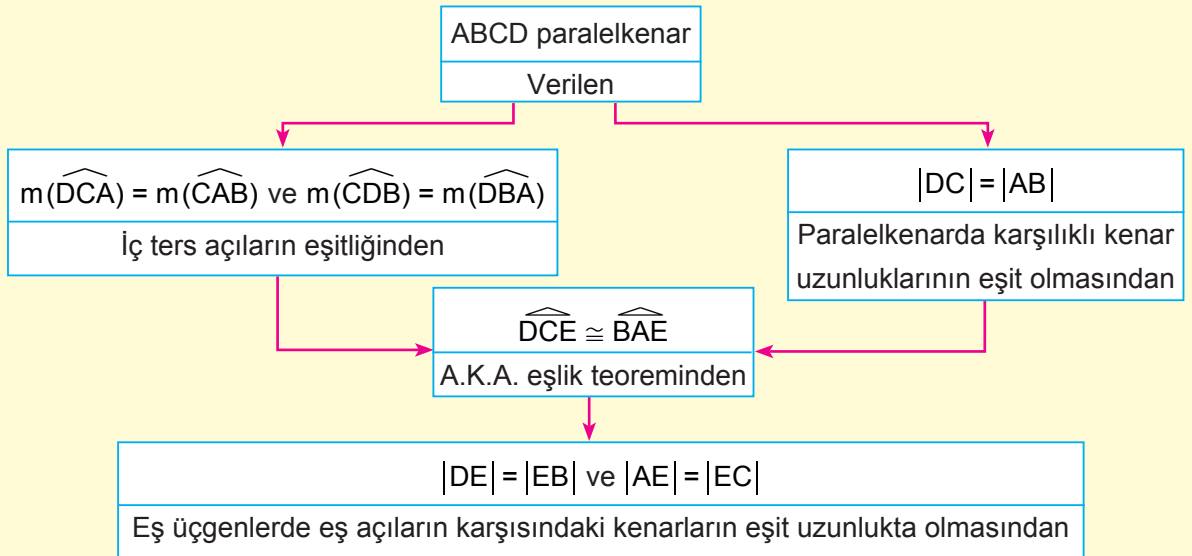
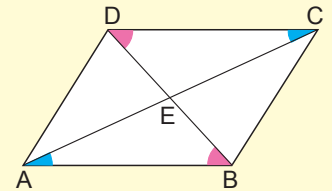
O hâlde,  $|KF| = x = 1$  br dir.

### İnceleyelim

Bir paralelkenarda köşegenlerin birbirini ortaladığını gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar,  $[AC]$  ve  $[DB]$  köşegenler

**İstenen:**  $|DE| = |EB|$ ,  $|AE| = |EC|$





### Örnek

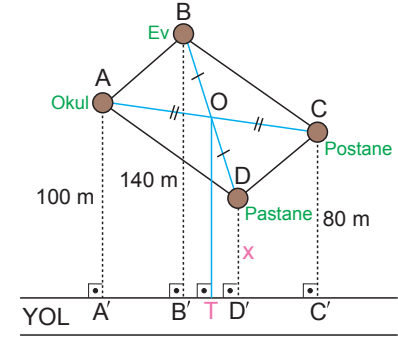
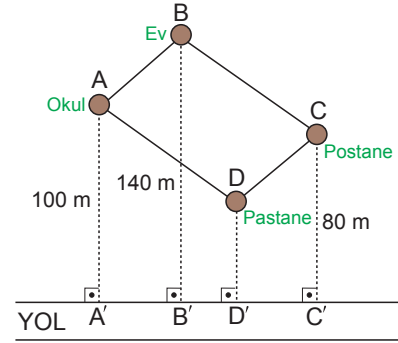
Yandaki krokide verilen okul, ev, postane ve pastane bir paralelkenar oluşturmaktadır. Okul, ev ve postanenin yola olan uzaklıkları sırayla 100 m, 140 m ve 80 m olduğuna göre, pastanenin yola olan uzaklığını bulalım.

### Çözüm

Pastanenin yola olan uzaklığı  $x$  m olsun. ABCD paralelkenarının köşegenleri çizilerek kesim noktası O olarak adlandırılırsa  $|AO| = |OC|$  ve  $|BO| = |OD|$  olur.

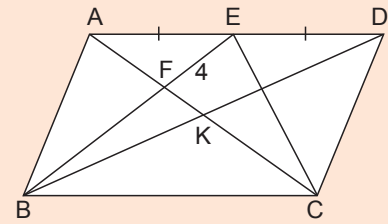
$[OT]$ ,  $AA'C'C$  yamuğunun orta tabanıdır. Bundan dolayı  $|OT| = \frac{100 + 80}{2} = 90$  m elde edilir.

$[OT]$  aynı zamanda  $BB'D'D$  yamuğunun orta tabanıdır. Buradan  $|OT| = \frac{x + 140}{2} \Rightarrow 90 = \frac{x + 140}{2} \Rightarrow x + 140 = 180 \Rightarrow x = 40$  m bulunur.

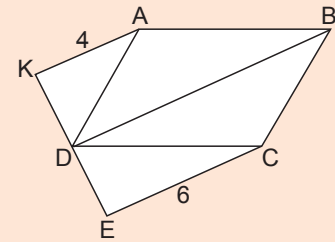


### Uygulama Köşesi

1. Yandaki şekilde ABCD paralelkenar ve ABCE ikizkenar yamuktur.  $[AC] \cap [BE] = \{F\}$ ,  $|AE| = |ED|$  ve  $|FE| = 4$  br olduğuna göre,  $|FK|$  nu bulunuz.



2. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[DB]$  köşegen, K, D ve E noktaları doğrusaldır.  $[KA] \parallel [DB] \parallel [EC]$ ,  $|AK| = 4$  br ve  $|EC| = 6$  br olduğuna göre,  $|DB|$  nu bulunuz.



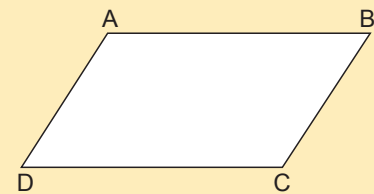
### Etkinlik

1. Şekildeki ABCD paralelkenarının D ve C açılarını iç içe açkırtaylarını çiziniz ve kesim noktasını E olarak adlandırınız.

2.  $m(\widehat{ADE}) = a$  ve  $m(\widehat{BCE}) = b$  kabul edip D ve C açılarının birbirine göre durumunu belirleyerek  $a + b$  toplamını bulunuz.

3. DEC üçgeninin iç açıların ölçüleri toplamını kullanarak DEC açısının ölçüsünü hesaplayınız.

4. Uyguladığınız adımlara göre, bir paralelkenarın komşu iki iç açısının açıortaylarının oluşturduğu açının türünü açıklayınız.



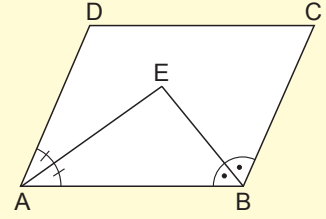


## İnceleyelim

Bir paralelkenarda komşu açılarının açıortaylarının birbirine dik olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar, [AE] ve [BE] açıortaylar

**İstenen:**  $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$



### İfadeler

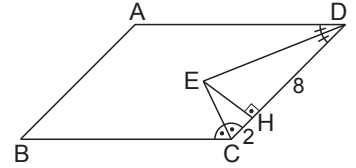
- $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$
- $\frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{AEB}) = 180^\circ$
- $\frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{AEB}) = 180^\circ$
- $90^\circ + m(\widehat{AEB}) = 180^\circ$
- $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$

### Gerekçeler

- Paralelkenarda bir kenarın başlangıç ve bitim noktalarını köşe kabul eden açılarının birbirinin bütünleri olmasından
- [AE] ve [BE] açıortay olmasından ve AEB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından
- Payda eşitleme özelliğinden
1. ifadedeki eşitliğin 3. ifadede yerine yazılmasından
4. ifadede  $m(\widehat{AEB})$  nün yalnız bırakılmasından

## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında C ve D iç açılarının iç açıortayları E noktasında kesişmektedir.  $[EH] \perp [DC]$ ,  $|CH| = 2$  br ve  $|HD| = 8$  br olduğuna göre, ABCD paralelkenarının yüksekliğinin uzunluğunu bulalım.



## Çözüm

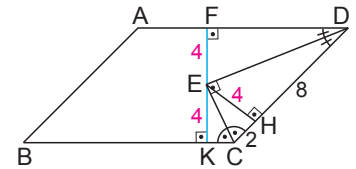
[CE] ve [DE] iç açıortaylar olduğundan  $m(\widehat{CED}) = 90^\circ$  dir.

CED dik üçgeninde Öklid'in yükseklik bağıntısından,

$$|EH|^2 = 2.8 \Rightarrow |EH|^2 = 16 \Rightarrow |EH| = 4 \text{ br bulunur.}$$

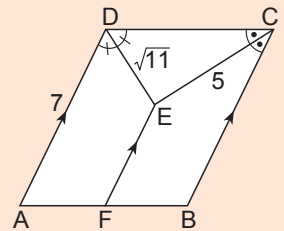
E noktasından geçecek şekilde  $[KF] \perp [AD]$  çizildiğinde D açısının açıortayına göre  $|EF| = 4$  br olur. Benzer şekilde açısının açıortayına göre,  $|EK| = 4$  br dir. Bundan dolayı  $|FK| = |EF| + |EK| \Rightarrow |FK| = 4 + 4 = 8$  br bulunur.

O hâlde, ABCD paralelkenarının yüksekliğinin uzunluğu 8 br dir.



## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında D ve C açılarının iç açıortayları E noktasında kesişmektedir.  $[EF] \parallel [DA]$ ,  $|DE| = \sqrt{11}$  br,  $|CE| = 5$  br ve  $|DA| = 7$  br olduğuna göre,  $|EF|$  nu bulunuz.



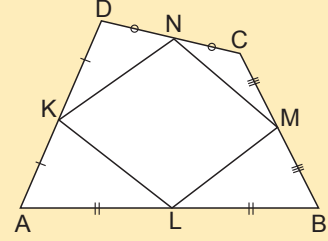




## Etkinlik

Yandaki şekilde ABCD dörtgeni ile bu dörtgenin kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan KLMN dörtgeni verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. ABCD dörtgeninin  $[AC]$  köşegenini çiziniz. Oluşan ADC ve ABC üçgenlerinden yararlanarak  $[KN]$  ve  $[LM]$  nın birbirine göre durumunu belirleyiniz.
2. ABCD dörtgeninin  $[BD]$  köşegenini çiziniz. Oluşan DCB ve DAB üçgenlerinden yararlanarak  $[NM]$  ve  $[KL]$  nın birbirine göre durumunu belirleyiniz.
3. Yaptığınız belirlemeleri göz önünde bulundurarak bir dörtgenin kenar orta noktalarının, hangi özel dörtgenin köşeleri olduğunu söyleyiniz.

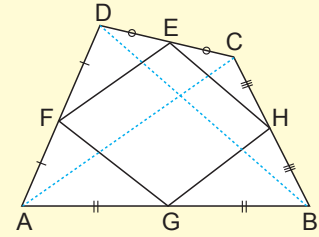


## İnceleyelim

Herhangi bir dörtgenin kenar orta noktalarının bir paralelkenarın köşeleri olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD dörtgen, E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları

**İstenen:** EFGH paralelkenar



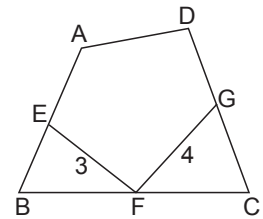
ABCD dörtgeninde  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerini çizelim. CDB üçgeninde  $[EH]$ ,  $[CD]$  ve  $[CB]$  nı eşit oranda böldüğünden  $[EH] \parallel [DB]$  dır. ADB üçgeninde  $[FG]$ ,  $[AD]$  ve  $[AB]$  nı eşit oranda böldüğünden  $[FG] \parallel [DB]$  dır. Buradan geçişme özelliği yardımıyla  $[EH] \parallel [FG]$  bulunur. (★)

Benzer şekilde DAC üçgeninde  $[FE] \parallel [AC]$  ve BAC üçgeninde  $[GH] \parallel [AC]$  olduğundan,  $[FE] \parallel [GH]$  olur. (★ ★)

(★) ve (★ ★) ifadelerinden EFGH dörtgeninin karşılıklı kenarları paraleldir. Bundan dolayı EFGH dörtgeni bir paralelkenardır.

## Örnek

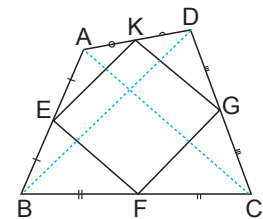
Şekildeki ABCD dörtgeninde E, F ve G bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $|EF| = 3$  br ve  $|FG| = 4$  br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin köşegenlerinin uzunlukları toplamını bulalım.



## Çözüm

ABCD dörtgeninde  $[AD]$  nın orta noktasını K olarak adlandıralım ve EFGK dörtgenini oluşturalım. EFGK dörtgeni ABCD'nin kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle oluştuğundan bir paralelkenardır. ABCD dörtgeninin köşegenlerinin toplamı EFGK paralelkenarının çevresine eşit olduğundan  $\text{Ç}(\text{EFGK}) = |AC| + |BD| \Rightarrow 2(3 + 4) = |AC| + |BD|$

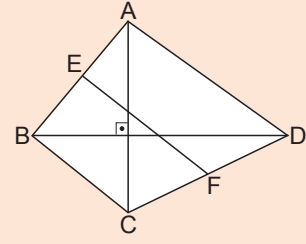
$$\Rightarrow |AC| + |BD| = 14 \text{ br bulunur.}$$





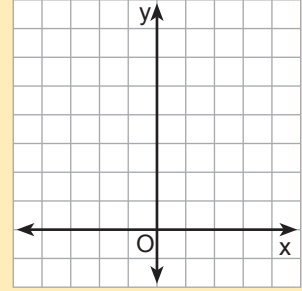
## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD dörtgeninde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları ve  $[AC] \perp [BD]$  dir.  $|EF| = 10$  br ve  $|AC| = 12$  br olduğuna göre, ABCD dörtgeninin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin kenar uzunluklarının toplamını bulunuz.



## Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-4, 3)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(4, 4)$  ve  $D(-1, 6)$  olan ABCD paralelkenarını yandaki analitik düzlemde çiziniz.
2. ABCD paralelkenarının köşegenlerini çiziniz. Köşegenlerin kesim noktasını G olarak adlandırınız ve G noktasının koordinatlarını bulunuz.
3. Köşegenlerin çizilmesiyle oluşan ABG, ADG, DCG ve CBG üçgenlerinin ağırlık merkezlerini belirleyerek ağırlık merkezlerinin koordinatlarını bulunuz.
4. Üçgensel bölgelerin ağırlık merkezlerini köşe kabul eden dörtgeni ve bu dörtgenin köşegenlerini çiziniz.
5. Çizdiğiniz köşegenleri taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz. Doğru denklemlerinin ortak çözümünden köşegenlerin kesim noktasının koordinatlarını hesaplayınız.
6. Köşegenlerin kesim noktası ile G noktasını karşılaştırınız.
7. Uyguladığınız adımlara göre, bir paralelkenarın ağırlık merkezinin koordinatlarının nasıl bulunabileceğini açıklayınız.



## Bilgi Kutusu

Bir paralelkenarın ağırlık merkezi köşegenlerinin kesim noktasıdır.

## Örnek

Köşelerinin koordinatları  $A(1, 1)$ ,  $B(8, 2)$ ,  $C(n, 6)$  ve  $D(3, m)$  olan ABCD paralelkenarı veriliyor. Buna göre,  $m + n$  değeri ile ABCD paralelkenarının ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

## Çözüm

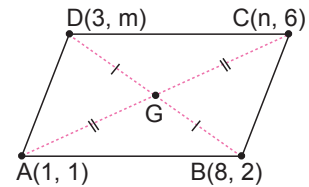
Bir paralelkenarın ağırlık merkezi köşegenlerinin kesim noktası olduğundan şekildeki G noktası ABCD paralelkenarının ağırlık merkezidir. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından B ile D noktaları için  $G\left(\frac{3+8}{2}, \frac{m+2}{2}\right) = G\left(\frac{11}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$  ve A ile C noktaları için

$$G\left(\frac{3+8}{2}, \frac{m+2}{2}\right) = G\left(\frac{11}{2}, \frac{m+2}{2}\right) \text{ ve A ile C noktaları için}$$

$$G\left(\frac{n+1}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = G\left(\frac{n+1}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ elde edilir. Sıralı ikililerin eşitliğinden}$$

$$G\left(\frac{11}{2}, \frac{m+2}{2}\right) = G\left(\frac{n+1}{2}, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow \frac{11}{2} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow n = 10 \text{ ve } \frac{m+2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ olur. Bundan dolayı}$$

$m + n = 15$  tir. Buradan ABCD paralelkenarının ağırlık merkezi  $G\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$  bulunur.





## PROJE ÇALIŞMASI

İçerik	Sınıf Düzeyi	Beklenen Beceriler	Hazırlama Süresi	Değerlendirme Aracı
Dörtgenin ağırlık merkezi	11	İletişim, İlişkilendirme, Akıl yürütme	2 Hafta	Proje Değerlendirme Formu

Sevgili öğrenciler,

Bu projede sizlerden dörtgenlerin ağırlık merkezlerinin farklı yollardan nasıl bulunabileceğine ilişkin çıkarımlar yapmanız beklenmektedir. Projenizi hazırlarken aşağıdaki adımları izleyebilirsiniz:

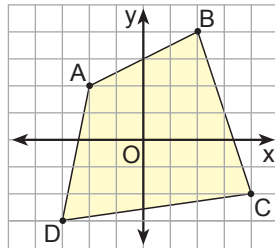
1. Projenizi bireysel çalışma olarak hazırlayınız.
2. Dörtgenlerin ağırlık merkezinin nasıl bulunduğunu tekrar ediniz.
3. Pierre Varignon ve Ferdinand Wittenbauer' in geometriye olan katkılarını ve dörtgenlerin ağırlık merkezi ile ilgili çalışmalarını araştırınız.
4. Bulduğunuz yöntemlerin aşamalarını gösteren afişler hazırlayınız.
5. Çalışmanızı yaparken öğretmeninizle iş birliği içinde olunuz.
6. Raporunuzu çizgisiz kağıda yazarak belirtilen süre içinde teslim ediniz.
7. Kitabınızın sonundaki proje değerlendirme formunu inceleyiniz.
8. Çalışmanızı sunu biçiminde hazırlayarak sınıf içinde paylaşınız.



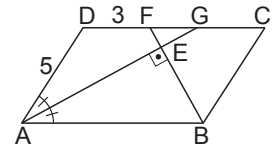
### Ağırlık Merkezleri

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.
  - a. Bir paralelkenarın köşegen uzunlukları birbirine eşittir. (.....)
  - b. Bir paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşittir. (.....)
  - c. Bir paralelkenarın karşılıklı açılarının iç açıortayları birbirine diktir. (.....)
  - ç. Bir dörtgenin kenar orta noktaları bir paralelkenarın köşeleridir. (.....)
  - d. Bir paralelkenarın köşegenleri arasındaki açı  $90^\circ$  dir. (.....)
  - e. Bir paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar. (.....)

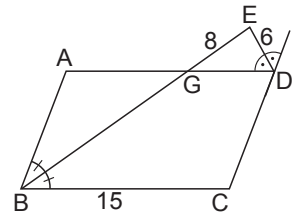
2. Aşağıdaki analitik düzlemde bir ABCD dörtgeni çizilmiştir. Bu dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.



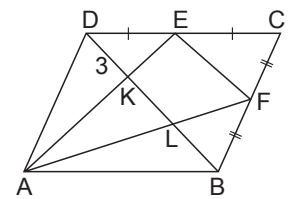
3. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AG] \cap [BF] = \{E\}$  ve  $[AG] \perp [BF]$  dir.  $[AG]$  açıortay,  $|AD| = 5$  br ve  $|DF| = 3$  br olduğuna göre,  $|GC|$  kaç br dir?



4. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[BE]$  iç açıortaydır.  $|EG| = 8$  br,  $|ED| = 6$  br ve  $|BC| = 15$  br olduğuna göre,  $|DC|$  kaç br dir?



5. Şekildeki ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $[DB]$  köşegen ve  $|DK| = 3$  br olduğuna göre,  $|EF|$  kaç br dir?





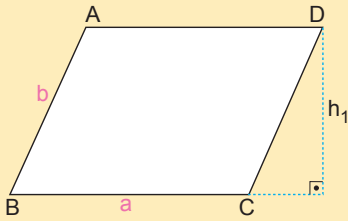
## 2.4. Paralelkenarsal Bölgenin Alanı



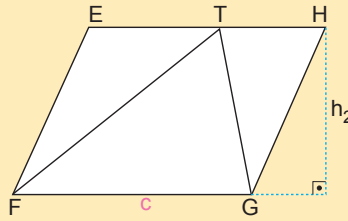
Yukarıdaki fotoğrafta paralelkenar şeklinde inşa edilen bir yapı görülmektedir. Bu yapının, paralelkenar olan yüzeyinin inşasında kaç  $m^2$  cam kullanıldığını bulabilmek için yapının hangi uzunluklarının bilinmesi gerektiğini sorgulayınız.



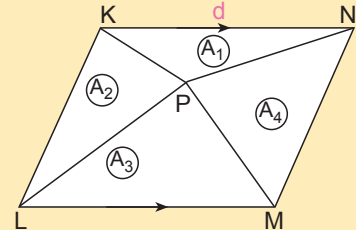
### Etkinlik



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

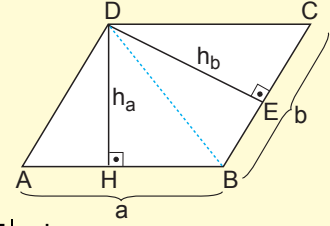
1. Şekil 1'deki ABCD paralelkenarında  $[AC]$  köşegenini çizerek iki üçgensel bölge oluşturunuz. Bu üçgensel bölgelerin alan bağıntılarını  $a$  ve  $h_1$  türünden yazınız.
2. Üçgensel bölgelerin alanlarını toplayıp ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulunuz.
3. Bir paralelkenarsal bölgenin alanının, herhangi bir kenarı ile bu kenara ait yükseklik yardımıyla nasıl bulunabileceğini açıklayınız.
4. Şekil 2'deki TFG üçgensel bölgesi ile EFGH paralelkenarsal bölgesinin alanlarını  $c$  ve  $h_2$  türünden yazınız.
5. Bir paralelkenarsal bölgenin bir kenarını taban, bu kenarın karşısındaki kenarın bir noktasını da köşe kabul eden üçgensel bölgenin alanı ile paralelkenarsal bölgenin alanı arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
6. Şekil 3'teki  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  değerleri bulundukları bölgelerin alanlarını göstermek üzere, KLMN yamuksal bölgesinin P noktasından geçen yüksekliğini çizin. Bu yüksekliğin P noktasının üstünde kalan parçasını  $h_1$ , altında kalan parçasını  $h_2$  olarak adlandırınız.
7.  $A_1$  ve  $A_3$  değerlerini  $h_1$  ve  $h_2$  türünden bulup toplayınız.
8.  $A(KLMN)$  değerini bularak  $A_1 + A_3$  toplamı ile karşılaştırınız.
9.  $A(KLMN) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  eşitliğini göz önünde bulundurarak  $A_2 + A_4$  toplamını bulunuz ve bu toplamı  $A_1 + A_3$  ile karşılaştırınız.
10. Bir paralelkenarsal bölge içinde alınan bir noktanın, paralelkenarın köşelerine birleştirilmesiyle elde edilen üçgensel bölgelerin alanları arasında hangi bağıntıların olduğunu açıklayınız.





## İnceleyelim

Bir paralelkenarsal bölgenin alanının, bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu gösterelim:



**Verilen:** ABCD paralelkenar,  $|AB| = a$  br,  $|BC| = b$  br,  $|DH| = h_a$ ,  $|DE| = h_b$

**İstenen:**  $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Bir paralelkenarda karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan  $|AB| = |DC| = a$  br ve  $|AD| = |BC| = b$  br dir.  $[DB]$  nın ortak kenar olmasından  $\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB}$  dir. Bundan dolayı  $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{CDB})$  olur. Üçgenin alan bağıntısından  $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{CDB}) = \frac{a \cdot h_a}{2}$  elde edilir. (★)

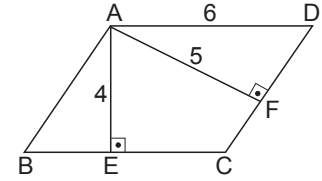
Bütün-parça ilişkisinden  $A(ABCD) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{CDB})$  dir. (★ ★)

(★) ve (★ ★) eşitliklerinden  $A(ABCD) = \frac{a \cdot h_a}{2} + \frac{a \cdot h_a}{2} = a \cdot h_a$  bulunur.

Aynı yöntemle  $A(ABCD) = b \cdot h_b$  olduğu gösterilebilir.

## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında,  $[AE] \perp [BC]$  ve  $[AF] \perp [DC]$  dir.  $|AE| = 4$  br,  $|AD| = 6$  br ve  $|AF| = 5$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulalım.

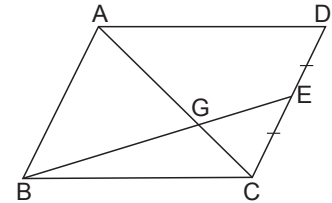


## Çözüm

Paralelkenarın alanı bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımına eşit olduğundan  $A(ABCD) = |BC| \cdot |AE| = |DC| \cdot |AF| \Rightarrow 6 \cdot 4 = |DC| \cdot 5 \Rightarrow |DC| = 4,8$  br bulunur.

## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AC] \cap [BE] = \{G\}$ ,  $|DE| = |EC|$  ve  $A(\widehat{BGC}) = 8$  br<sup>2</sup> olduğuna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.



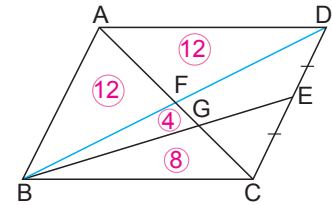
## Çözüm

ABCD paralelkenarında  $[BD]$  çizildiğinde, köşegenler birbirini eşit oranda böldüğünden  $|AF| = |FC|$  ve  $|BF| = |FD|$  olur. BCD üçgeninde  $[BE]$  ve  $[CF]$  kenarortay olduklarından G noktası bu üçgenin ağırlık merkezidir. Bu durumda  $|CG| = 2|GF|$  olur.

Buradan  $A(\widehat{BGC}) = 8$  br<sup>2</sup>  $\Rightarrow A(\widehat{BGF}) = 4$  br<sup>2</sup> ve  $A(\widehat{BFC}) = 12$  br<sup>2</sup> olur.

$|AF| = |FC|$ ,  $|BF| = |FD|$  eşitliklerinden  $A(\widehat{AFB}) = A(\widehat{AFD}) = A(\widehat{DFC}) = 12$  br<sup>2</sup> elde edilir.

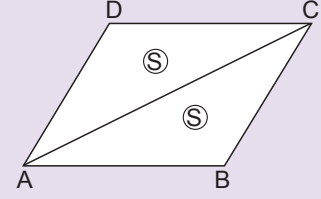
Bundan dolayı,  $A(ABCD) = A(\widehat{BFC}) + A(\widehat{AFB}) + A(\widehat{AFD}) + A(\widehat{DFC}) = 12 + 12 + 12 + 12 = 48$  br<sup>2</sup> bulunur.



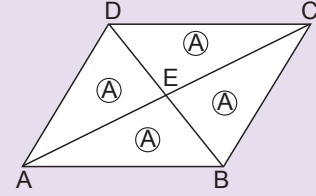


## Sonuçlar

1. Paralelkenarın herhangi bir köşegeninin oluşturduğu iki üçgensel bölgenin alanları birbirine eşittir. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(\widehat{DAC}) = A(\widehat{BCA})$  dır.

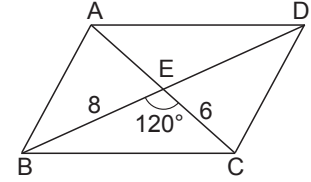


2. Paralelkenarın köşegenlerinin oluşturduğu dört üçgensel bölgenin alanı birbirine eşittir. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(\widehat{DAE}) = A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{BCE}) = A(\widehat{DCE})$  dır.



## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında E köşegenlerin kesim noktasıdır.  $|EB| = 8 \text{ br}$ ,  $|EC| = 6 \text{ br}$  ve  $m(\widehat{BEC}) = 120^\circ$  olduğuna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.



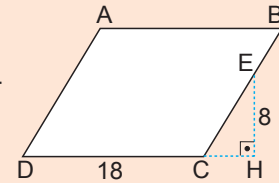
## Çözüm

Üçgenin sinüslü alan bağıntısından  $A(\widehat{BEC}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ br}^2$  elde edilir. Bir paralelkenarda köşegenlerin oluşturduğu dört üçgensel bölgenin alanları birbirine eşit olduğundan  $A(\widehat{DEC}) = A(\widehat{AEB}) = A(\widehat{AED}) = A(\widehat{BEC}) = 12\sqrt{3} \text{ br}^2$  dir.

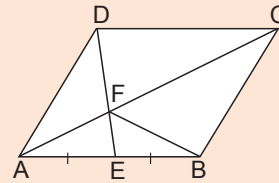
$$\begin{aligned} \text{Bundan dolayı } A(ABCD) &= 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \\ &= 48\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

## Uygulama Köşesi

1. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[EH] \perp [DH]$  ve  $2|BE| = |EC|$  dur.  $|EH| = 8 \text{ br}$  ve  $|DC| = 18 \text{ br}$  olduğuna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulunuz.



2. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AC] \cap [DE] = \{F\}$ ,  $|AE| = |EB|$  ve  $A(ABCD) = 60 \text{ br}^2$  olduğuna göre, FEB üçgeninin alanını bulunuz.

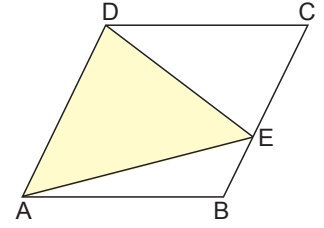


3. Bir paralelkenarsal bölgenin alanının hangi ek çizimlerle iki eşit alanlı ve dört eşit alanlı bölgelere ayrılacağını belirleyiniz.



### Örnek

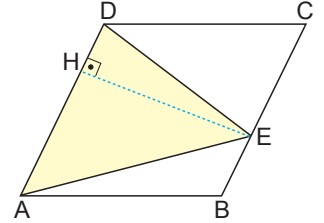
Şekildeki ABCD paralelkenarının alanı  $32 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ADE üçgeninin alanını bulalım.



### Çözüm

ABCD paralelkenarının  $[AD]$  kenarına ait yüksekliği şekildeki gibi çizildiğinde  $A(ABCD) = |AD| \cdot |EH| = 32 \text{ br}^2$  olur.

$$\text{Buradan } A(\widehat{ADE}) = \frac{|AD| \cdot |EH|}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



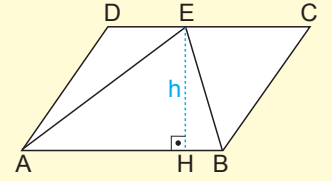
### İnceleyelim

Bir paralelkenarın herhangi bir kenarının üzerinde alınan bir noktanın karşısındaki köşelere birleştirilmesiyle elde edilen üçgenin alanının paralelkenarın alanının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar,  $[EH] \perp [AB]$

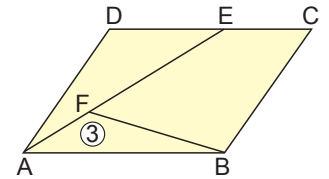
**İstenen:**  $A(\widehat{AEB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$

Paralelkenarsal ve üçgensel bölgenin alan bağıntılarından  $A(ABCD) = h \cdot |AB|$  ve  $A(\widehat{AEB}) = \frac{h \cdot |AB|}{2}$  elde edilir. Yerine koyma yönteminden  $A(\widehat{AEB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $2|AF| = |FE|$  ve  $A(\widehat{AFB}) = 3 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ABCD paralelkenarının alanını bulalım.



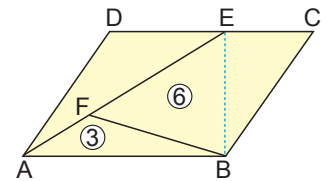
### Çözüm

Yükseklik uzunlukları eşit olan üçgenlerin tabanlarının oranı alanlarının oranına eşit olduğundan  $[EB]$  çizildiğinde

$$\frac{A(\widehat{FEB})}{A(\widehat{AFB})} = \frac{|FE|}{|AF|} \Rightarrow \frac{A(\widehat{FEB})}{3} = \frac{2 \cdot |AF|}{|AF|} \Rightarrow A(\widehat{FEB}) = 6 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

Bundan dolayı  $A(\widehat{AEB}) = 3 + 6 = 9 \text{ br}^2$  dir.

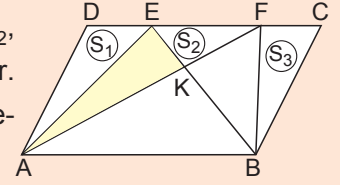
$$\text{Buradan } A(\widehat{AEB}) = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow 9 = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 18 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$





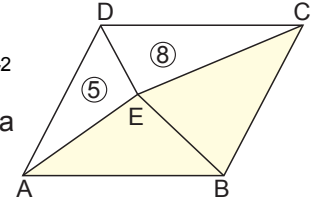
## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AF] \cap [BE] = \{K\}$  dir.  $S_1, S_2, S_3$  içinde bulundukları üçgensel bölgelerin alanlarını göstermektedir.  $A(ABCD) = 50 \text{ br}^2$  ve  $S_1 + S_2 + S_3 = 20 \text{ br}^2$  olduğuna göre, AEK üçgeninin alanını bulunuz.



## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(ABCD) = 40 \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{DEC}) = 8 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{DEA}) = 5 \text{ br}^2$  dir. E, paralelkenarsal bölge içinde herhangi bir nokta olduğuna göre, AEB ve BEC üçgenlerinin alanlarını bulalım.



## Çözüm

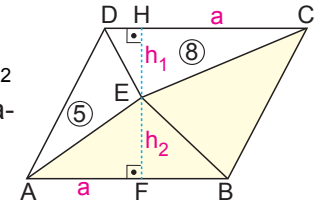
ABCD paralelkenarında  $|DC| = |AB| = a$  olsun.  $|EH| = h_1$  ve  $|EF| = h_2$  yükseklikleri çizildiğinde üçgensel ve paralelkenarsal bölgelerin alan bağıntılarından  $A(\widehat{DEC}) = \frac{a \cdot h_1}{2} \Rightarrow 8 = \frac{a \cdot h_1}{2} \Rightarrow 16 = a \cdot h_1$  ve

$$A(ABCD) = a \cdot (h_1 + h_2) \Rightarrow 40 = a \cdot h_1 + a \cdot h_2 \Rightarrow 40 = 16 + a \cdot h_2 \Rightarrow a \cdot h_2 = 24 \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Buradan } A(\widehat{AEB}) = \frac{a \cdot h_2}{2} \Rightarrow A(\widehat{AEB}) = \frac{24}{2} = 12 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

$$\text{Bütün-parça ilişkisinden, } A(ABCD) = A(\widehat{DEC}) + A(\widehat{DEA}) + A(\widehat{AEB}) + A(\widehat{BEC})$$

$$40 = 8 + 5 + 12 + A(\widehat{BEC}) \Rightarrow A(\widehat{BEC}) = 15 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



## İnceleyelim

Paralelkenarsal bölge içinde alınan bir noktanın köşelere birleştirilmesiyle elde edilen üçgensel bölgelerin alanları arasında  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{A(ABCD)}{2}$  bağıntısının olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar ve  $S_1, S_2, S_3, S_4$  üçgensel bölgeleri

**İstenen:**  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{A(ABCD)}{2}$

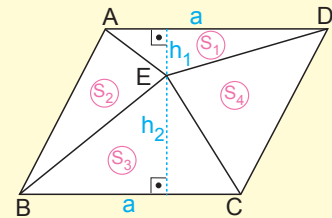
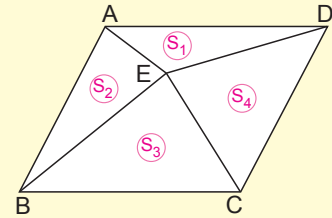
$|AD| = |BC| = a$  olsun. E noktasından geçecek şekilde  $h_1$  ve  $h_2$  yükseklikleri çizildiğinde  $S_1 = \frac{a \cdot h_1}{2}$  ve  $S_3 = \frac{a \cdot h_2}{2}$  olduğundan,  $S_1 + S_3 = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} \Rightarrow S_1 + S_3 = \frac{a \cdot (h_1 + h_2)}{2}$  elde edilir. (★)

Paralelkenarsal bölgenin alan bağıntısından  $A(ABCD) = a \cdot (h_1 + h_2)$  olur. (★ ★)

(★) ve (★ ★) eşitliklerinden  $S_1 + S_3 = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.

Bütün-parça ilişkisinden  $A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$  tür.

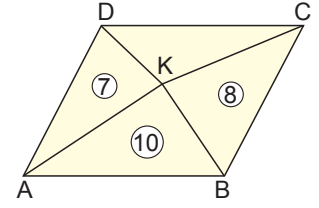
Yerine koyma yönteminden  $A(ABCD) = \frac{A(ABCD)}{2} + S_2 + S_4 \Rightarrow S_2 + S_4 = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.





### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarsal bölgesinde  $A(\widehat{DAK}) = 7 \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{ABK}) = 10 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{BCK}) = 8 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.

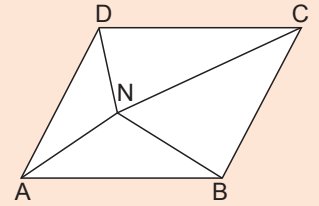


### Çözüm

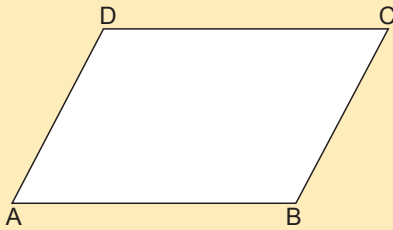
$A(\widehat{DAK}) + A(\widehat{BCK}) = A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{DCK}) \Rightarrow 7 + 8 = 10 + A(\widehat{DCK}) \Rightarrow A(\widehat{DCK}) = 5 \text{ br}^2$  dir. Bundan dolayı  $A(ABCD) = 10 + 8 + 7 + 5 = 30 \text{ br}^2$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

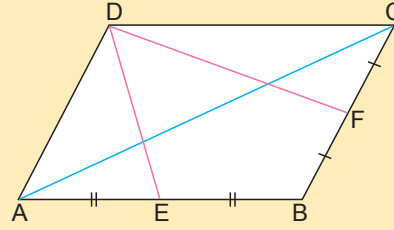
Şekildeki ABCD paralelkenarında N, paralelkenarsal bölge içinde herhangi bir noktadır.  $A(\widehat{DNC}) = A(\widehat{ANB}) + 3$ ,  $A(\widehat{BNC}) = 2A(\widehat{DAN}) - 1$  ve  $A(ABCD) = 70 \text{ br}^2$  olduğuna göre, üçgensel bölgelerin alanlarını bulunuz.



### Etkinlik



Şekil 1



Şekil 2

- Şekil 1'deki ABCD paralelkenarının  $[AB]$  ve  $[BC]$  kenarlarının orta noktalarını belirleyip sırayla E ve F olarak adlandırınız.
- $[DE]$ ,  $[DF]$  ve  $[DB]$  nı çiziniz.  $A(\widehat{ADE}) = S$  kabul ederek DEB, DBF ve DFC üçgensel bölgelerinin alanlarının S türünden ifadelerini bulunuz.
- ADE üçgensel bölgesinin ve DEBF dörtgensel bölgesinin alanlarının, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanı ile ilişkisini açıklayınız.
- Şekil 2'deki E ve F bulundukları kenarların orta noktaları ve  $[AC]$  köşegen olmak üzere, Tales teoremlerinden yararlanarak  $[DE]$  ve  $[DF]$  nın,  $[AC]$  nı hangi oranlarda böldüğünü bulunuz.
- $A(ABCD) = A$  kabul ederek paralelkenarsal bölge üzerindeki her bölgenin alanını S türünden ifade ediniz.
- Şekil 2 üzerinde  $[EF]$  nı çizerek oluşan yeni bölgelerin alanlarının A türünden ifadelerini bulunuz.
- Bir paralelkenarsal bölgenin komşu iki kenarının orta noktalarını karşı köşeye birleştiren doğru parçalarının ve bu doğru parçalarını kesen köşegenin, paralelkenarsal bölgenin alanını hangi oranlarda böldüğünü açıklayınız.

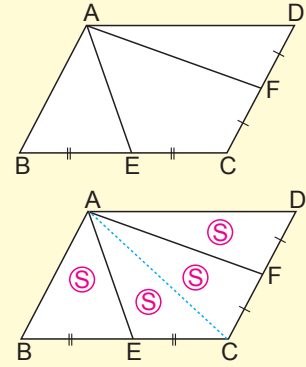


### İnceleyelim

Bir ABCD paralelkenarında  $|BE| = |EC|$  ve  $|DF| = |FC|$  olmak üzere,  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AFD}) = \frac{A(ABCD)}{4}$  ve  $A(AECF) = \frac{A(ABCD)}{2}$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar,  $|BE| = |EC|$  ve  $|DF| = |FC|$

**İstenen:**  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AFD}) = \frac{A(ABCD)}{4}$  ve  $A(AECF) = \frac{A(ABCD)}{2}$

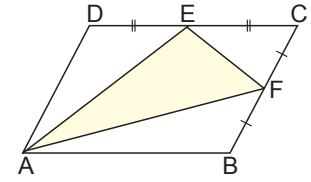


ABCD paralelkenarının  $[AC]$  köşegeni çizildiğinde,  $[AC]$  köşegeni ABCD paralelkenarsal bölgesini eşit alanlı iki üçgene ayırdığından  $A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ADC})$  dır.  $|BE| = |EC|$  ve  $|DF| = |FC|$  eşitliklerinden  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AEC}) = A(\widehat{AFC}) = A(\widehat{AFD})$  elde edilir. Bu alanlar  $S \text{ br}^2$  alınırsa  $A(ABCD) = 4S \text{ br}^2$  olur. Buradan  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AFD}) = \frac{A(ABCD)}{4}$  elde edilir.

$A(AECF) = 2S \text{ br}^2$  olduğundan  $A(AECF) = \frac{A(ABCD)}{2}$  bulunur.

### Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $|DE| = |EC|$  ve  $|BF| = |FC|$  dur.  $A(ABCD) = 80 \text{ br}^2$  olduğuna göre, AEF üçgeninin alanını bulalım.



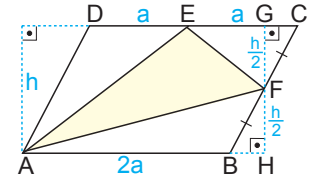
### Çözüm

$|DE| = |EC| = a$  olsun. ABCD paralelkenarının F noktasından geçen yüksekliğini şekildeki gibi çizerek bu yüksekliğin uzunluğunu  $h$  olarak alalım. GCF ve HBF üçgenlerinde 2. Tales teoremi gereğince,  $|GF| = |FH| = \frac{h}{2}$  br olur.

$|BF| = |FC|$  olduğundan paralelkenarsal ve üçgensel bölgelerin alan bağıntılarından,

$A(ABCD) = 2a \cdot h \Rightarrow 80 = 2ah \Rightarrow ah = 40 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{EFC}) = \frac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{a \cdot h}{4} \Rightarrow A(\widehat{EFC}) = \frac{40}{4} = 10 \text{ br}^2$  bulunur.  $A(AECF) = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ br}^2$  dir.

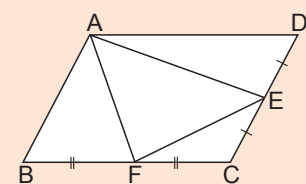
Bütün-parça ilişkisinden  $A(AECF) = A(\widehat{AEF}) + A(\widehat{EFC}) \Rightarrow 40 = A(\widehat{AEF}) + 10 \Rightarrow A(\widehat{AEF}) = 30 \text{ br}^2$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $|BF| = |FC|$  ve  $|DE| = |EC|$  dur.  $A(\widehat{FEC}) = 7 \text{ br}^2$  olduğuna göre, aşağıdaki bölgelerin alanlarını bulunuz.

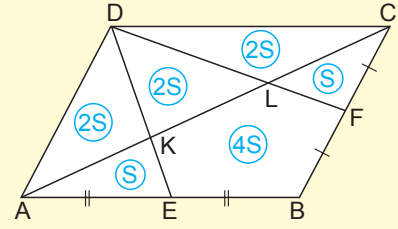
- $\widehat{ABF}$
- $\widehat{AFE}$
- $\widehat{FEC}$
- ABCD





## İnceleyelim

E ve F bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere, bir ABCD paralelkenarsal bölgesinde şekilde verilen alan dağıntılarının olduğunu gösterelim:



**Verilen:** ABCD paralelkenar, E ve F bulundukları kenarların orta noktaları

**İstenen:**  $4A(\widehat{AEK}) = 4A(\widehat{CLF}) = 2A(\widehat{DAK}) = 2A(\widehat{DKL}) = 2A(\widehat{DLC}) = A(\widehat{KEBFL})$

DAL ve FCL üçgenlerinde 2. Tales teoreminden  $\frac{|DA|}{|FC|} = \frac{|AL|}{|CL|} \Rightarrow 2 = \frac{|AL|}{|CL|} \Rightarrow |AL| = 2|CL|$  dur. (\*)

DKC ve EKA üçgenlerinde 2. Tales teoreminden  $\frac{|DC|}{|EA|} = \frac{|KC|}{|KA|} \Rightarrow 2 = \frac{|KC|}{|KA|} \Rightarrow |KC| = 2|KA|$  dur. (\*\*)

(\*) ve (\*\*) eşitliklerinden  $|AK| = |KL| = |LC|$  olur. Buradan  $A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{DLC})$  dir. Benzer üçgenlerin alanlarının oranının, benzerlik oranının karesine eşit olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{DAL})}{A(\widehat{FCL})} = \left(\frac{|DA|}{|FC|}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\widehat{DAL})}{A(\widehat{FCL})} = 2^2 \Rightarrow A(\widehat{DAL}) = 4A(\widehat{FKL}) \text{ bulunur.}$$

$A(\widehat{FCL}) = S \text{ br}^2$  olarak alınırsa  $A(\widehat{DAL}) = 4S \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{DLC}) = 2S \text{ br}^2$  olur.

$A(\widehat{DFC}) = A(\widehat{DAE}) = \frac{A(\widehat{DEBF})}{2}$  olduğundan  $A(\widehat{DAE}) = 3S \text{ br}^2$ ,  $A(\widehat{EKA}) = S \text{ br}^2$  ve

$A(\widehat{DEBF}) = 6S \text{ br}^2$  olur.

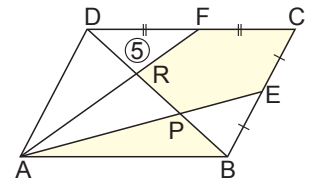
Buradan  $A(\widehat{DEBF}) = A(\widehat{DKL}) + A(\widehat{KEBFL}) \Rightarrow 6S = 2S + A(\widehat{KEBFL}) \Rightarrow A(\widehat{KEBFL}) = 4S \text{ br}^2$  bulunur.

Bundan dolayı  $4A(\widehat{AEK}) = 4A(\widehat{CLF}) = 2A(\widehat{DAK}) = 2A(\widehat{DKL}) = 2A(\widehat{DLC}) = A(\widehat{KEBFL})$  dir.

## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{DFR}) = 5 \text{ br}^2$  olduğuna göre,  $A(\widehat{FRPEC}) + A(\widehat{APB})$  toplamını bulalım.



## Çözüm

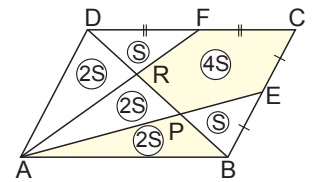
ABCD paralelkenarsal bölgesi üzerindeki alanların S türünden değerleri şekil üzerinde gösterilmiştir.

Buna göre,  $A(\widehat{DFR}) = S = 5 \text{ br}^2$  dir.

Buradan  $A(\widehat{FRPEC}) = 4S = 4 \cdot 5 = 20 \text{ br}^2$  ve

$A(\widehat{APB}) = 2S = 2 \cdot 5 = 10 \text{ br}^2$  elde edilir.

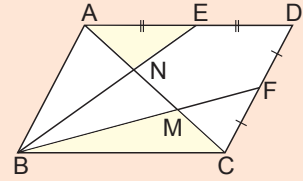
Bundan dolayı  $A(\widehat{FRPEC}) + A(\widehat{APB}) = 20 + 10 = 30 \text{ br}^2$  bulunur.





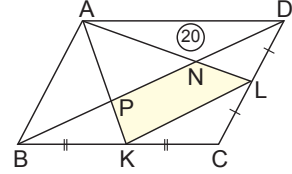
## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $|AE| = |ED|$  ve  $|DF| = |FC|$  dur.  $A(ENMFD) = 24 \text{ br}^2$  olduğuna göre, BMC ve AEN üçgensel bölgelerin alanları farkını bulunuz.



## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AK] \cap [BD] = \{P\}$  ve  $[AL] \cap [BD] = \{N\}$  dir. K ve L bulundukları kenarların orta noktaları ve  $A(\widehat{AND}) = 20 \text{ br}^2$  olduğuna göre, KPNL dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.



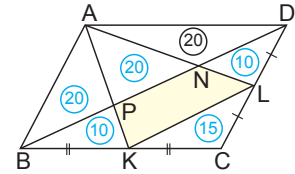
## Çözüm

Bir önceki özellik gereğince  $A(\widehat{ABP}) = A(\widehat{APN}) = A(\widehat{AND}) = 20 \text{ br}^2$  ve

$$A(\widehat{BPK}) = A(\widehat{DNL}) = \frac{A(\widehat{AND})}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Bundan dolayı  $A(\widehat{CBD}) = A(\widehat{ADB}) = 60 \text{ br}^2$  olur. K ve L bulundukları kenarları eşit oranda böldüğünden  $[KL] \parallel [BD]$  dir. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşit olduğundan  $\frac{A(\widehat{CKL})}{A(\widehat{CBD})} = \left(\frac{|CK|}{|CB|}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\widehat{CKL})}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A(\widehat{CKL}) = 15 \text{ br}^2$  elde edilir.

Buradan  $A(\widehat{BCD}) = 10 + 10 + 15 + A(KPNL) \Rightarrow 60 = 35 + A(KPNL) \Rightarrow A(KPNL) = 25 \text{ br}^2$  bulunur.



## İnceleyelim

E ve F bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere, ABCD paralelkenarsal bölgesinde  $\frac{A(KEFL)}{A(ABCD)} = \frac{5}{24}$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar, E ve F bulundukları kenarların orta noktaları

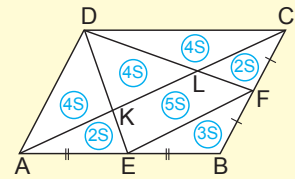
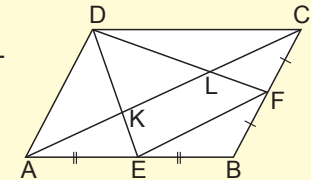
**İstenen:**  $\frac{A(KEFL)}{A(ABCD)} = \frac{5}{24}$

$A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{DLC}) = 4S \text{ br}^2$  olsun. AKE ve CKD üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{|KE|}{|KD|} = \frac{1}{2}$  olup  $A(\widehat{AKE}) = \frac{A(\widehat{AKD})}{2} = \frac{4S}{2} = 2S \text{ br}^2$  dir.

$A(\widehat{CFL}) = A(\widehat{AKE})$  olduğundan  $A(\widehat{CFL}) = 2S \text{ br}^2$  dir.  $A(\widehat{ADC}) = A(\widehat{BAC}) = 12S \text{ br}^2$  olduğundan,  $A(KEBFL) = 8S \text{ br}^2$  dir. ABC üçgeninde E ve F bulundukları kenarları eşit oranda böldüğünden,  $[EF] \parallel [AC]$  olur. Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{BEF})}{A(\widehat{BAC})} = \left(\frac{|BE|}{|BA|}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\widehat{BEF})}{A(\widehat{BAC})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\widehat{BEF})}{12S} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\widehat{BEF}) = 3S \text{ br}^2 \text{ elde edilir. Bundan do-}$$

layı  $A(KEFL) = 8S - 3S = 5S \text{ br}^2$  dir.  $A(ABCD) = 24S \text{ br}^2$  olduğundan  $\frac{A(KEFL)}{A(ABCD)} = \frac{5}{24}$  bulunur.





## Örnek

Fatih Bey, yeni kurduğu şirketi için logo tasarımı yaptırmak amacıyla bir reklam ajansı ile anlaşıyor. Fatih Bey, reklam ajansına logonun tasarımıyla ilgili aşağıdaki isteklerini söylüyor:

- Logo, alanı  $24 \text{ br}^2$  olan bir paralelkenar şeklinde olmalıdır.
- Logo, paralelkenarın kenar orta noktaları yardımıyla 7 bölgeye ayrılarak şirketinin telefon numarasının her bir rakamı bu bölgelere yerleştirilmelidir.
- Her rakam, içinde bulunduğu çokgensel bölgenin alanı ile orantılı olmalıdır.

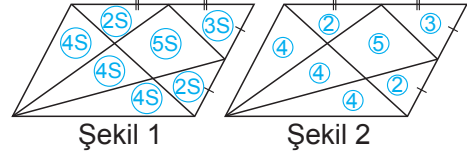
Fatih Bey'in şirketinin telefon numarası 444 25 23 olduğuna göre, bu numaranın rakamlarını logo üzerine doğru olacak şekilde yerleştirelim.

## Çözüm

Şekil 1'deki paralelkenarda alanlar, 444 25 23 numaraları ile orantılı olacak şekilde S türünden verilmiştir.

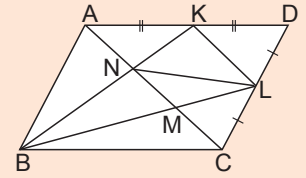
Logonun alanı  $24 \text{ br}^2$  olduğundan,

$A(ABCD) = 24S = 24 \Rightarrow S = 1 \text{ br}^2$  olur. Verilen özellikleri sağlayan logo Şekil 2'deki gibi olur.



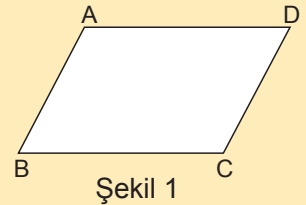
## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(ABCD) = 60 \text{ br}^2$  olduğuna göre, NKL üçgeninin alanını bulunuz.

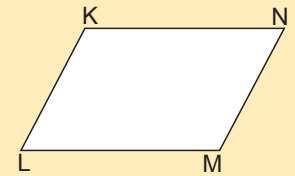


## Etkinlik

- Şekil 1'deki ABCD paralelkenarının  $[BD]$  köşegenini çizerek bu köşegen üzerinde bir nokta seçiniz. Seçtiğiniz noktayı K olarak adlandırınız.
- K noktasından  $[AD]$  na paralel bir doğru parçası çizerek bu doğru parçasının  $[DC]$  ve  $[AB]$  ile kesim noktalarını sırayla E ve F olarak adlandırınız.
- K noktasından  $[AB]$  na paralel bir doğru parçası çizerek bu doğru parçasının  $[AD]$  ve  $[BC]$  ile kesim noktalarını sırayla M ve N olarak adlandırınız.
- Elde ettiğiniz DEKM ve KFBN dörtgensel bölgelerin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Tartışınız.
- Şekil 2'deki KLMN paralelkenarının L ve N köşelerinden sırayla  $[KN]$  ve  $[LM]$  nın orta noktalarına birer doğru parçası çiziniz. Çizdiğiniz bu doğru parçalarının birbirine göre durumunu yorumlayınız.
- KLMN paralelkenarının K ve M köşelerinden sırayla  $[MN]$  ve  $[KL]$  nın orta noktalarına birer doğru parçası çiziniz. Çizdiğiniz doğru parçaları ile etkinliğin 5. adımında çizdiğiniz doğru parçalarının kesim noktalarını E, F, G ve H şeklinde adlandırınız.
- EFGH dörtgensel bölgesi ile KLMN paralelkenarsal bölgesinin alanları arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.



Şekil 1



Şekil 2







## İnceleyelim

ABCD paralelkenarsal bölgesinde E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere,  $A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{5}$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar ve E, F, G, H kenar orta noktaları

**İstenen:**  $A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{5}$

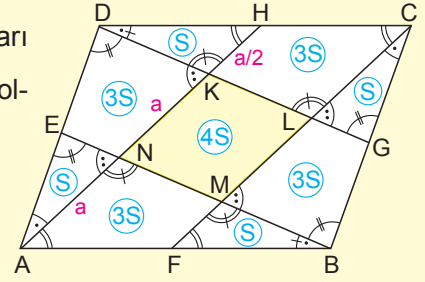
ABCD paralelkenarında E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan,  $[DG] \parallel [EB]$  ve  $[HA] \parallel [CF]$  dir. Paralel doğruların bir kesenle yaptığı açılar eşlikleri şekildeki gibi gösterilirse A.K.A. eşlik teoreminden  $\widehat{DKH} \cong \widehat{BMF}$  olur.

$A(\widehat{DKH}) = A(\widehat{BMF}) = S \text{ br}^2$  olsun.  $[KH] \parallel [LC]$  olduğundan  $\widehat{DKH} \sim \widehat{DLC}$  dir. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan,

$\frac{A(\widehat{DKH})}{A(\widehat{DLC})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{A(\widehat{DLC})} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\widehat{DLC}) = 4S \text{ br}^2$  bulunur. DLC ve BNA eş üçgenleri için  $A(HKLC) = A(AFMN) = 3S \text{ br}^2$  dir.  $|AN| = |NK| = a \text{ br}$  olarak alınırsa  $[MF]$ , BNA üçgeninin kenarlarını eşit oranda böldüğünden  $|MF| = \frac{|AN|}{2} = \frac{a}{2} \text{ br}$  olur.  $\widehat{BMF} \cong \widehat{DKH}$  olduğundan  $|HK| = |MF| = \frac{a}{2} \text{ br}$  elde edilir. Yükseklikleri eşit uzunlukta olan üçgenlerin tabanlarının oranı alanlarının oranına eşit olduğundan  $\frac{|HK|}{|KA|} = \frac{A(\widehat{DKH})}{A(\widehat{DAK})} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{A(\widehat{DKH})}{A(\widehat{DAK})} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{S}{A(\widehat{DAK})} \Rightarrow A(\widehat{DAK}) = 4S \text{ br}^2$  bulunur.  $|AN| = |NK|$  ve  $[EN] \parallel [DK]$  olduğundan  $A(\widehat{AEN}) = S \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{ENKD}) = 3S \text{ br}^2$  dir.

A.K.A. eşlik teoreminden  $\widehat{AEN} \cong \widehat{CGL}$  olduğu için  $A(\widehat{AEN}) = A(\widehat{CGL}) = S \text{ br}^2$  elde edilir. Buradan  $A(\widehat{BGLM}) = 3S \text{ br}^2$  olur.  $|CG| = |GB|$  olduğundan  $A(ABCD) = 4A(\widehat{DGC}) = 4.5S = 20S \text{ br}^2$  dir.

Bundan dolayı  $A(KLMN) = 20S - 16S = 4S \text{ br}^2$  olur. O hâlde,  $A(KLMN) = \frac{A(ABCD)}{5}$  olur.



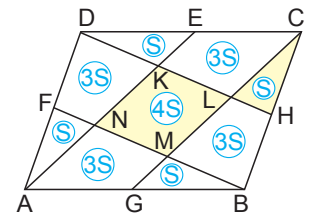
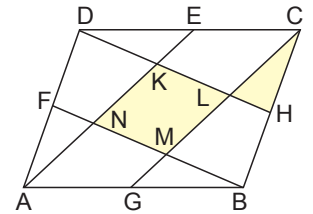
## Örnek

Şekildeki ABCD paralelkenarında E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(ABCD) = 60 \text{ br}^2$  olduğuna göre, KLMN dörtgensel bölgesi ile CLH üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

## Çözüm

Verilen bilgilere göre, ABCD paralelkenarsal bölgenin içinde oluşan alanlar S türünden yandaki şekil üzerinde gösterilmiştir. Buna göre,  $A(ABCD) = 60 = 20S \Rightarrow S = 3 \text{ br}^2$  dir.

Buradan  $A(KLMN) = 4S \Rightarrow A(KLMN) = 4.3 = 12 \text{ br}^2$  ve  $\frac{A(KLMN)}{A(\widehat{CLH})} = \frac{4S}{S} \Rightarrow \frac{12}{A(\widehat{CLH})} = 4 \Rightarrow A(\widehat{CLH}) = 3 \text{ br}^2$  bulunur.

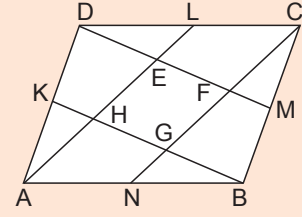




### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD paralelkenarında K, L, M ve N bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(EFGH) = 15 \text{ br}^2$  olduğuna göre, aşağıdaki bölgelerin alanlarını bulunuz.

- ABCD    ►  $\widehat{DEL}$     ► FGBM



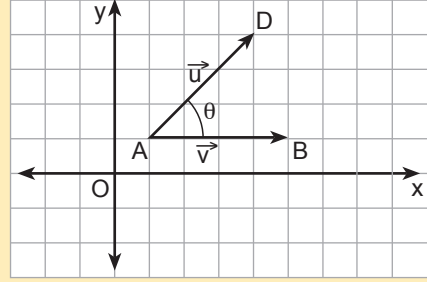
### Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde başlangıç noktaları  $A(1, 1)$  ve aralarındaki açı  $\theta$  olan  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  verilmiştir. Bu vektörler yardımıyla bir ABCD paralelkenarsal bölge oluşturunuz.

2.  $[DH] \perp \vec{AB}$  olacak şekilde  $[DH]$  nı çizerek  $|DH|$  nu hesaplayınız.

3.  $\vec{AH}$  izdüşüm vektörünü belirleyerek  $\|\vec{AH}\|$  nu hesaplayınız.

4. Yaptığınız işlemler sonucunda ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanıyla ilgili nasıl bir bağlantı bulabilirsiniz? Tartışınız.

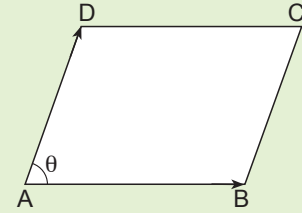


### Bilgi Kutusu

Bir ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanı;

$$S = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 \cdot \|\vec{AD}\|^2 - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle^2}$$

$$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \sin \theta \text{ bağıntıları ile hesaplanabilir.}$$



### Örnek

Bir ABCD paralelkenarının köşelerinin koordinatları  $A(-3, 1)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(6, 5)$  ve  $D(0, 5)$  tir. ABCD paralelkenarsal bölgesi  $\vec{AD}$  ve  $\vec{AB}$  üzerine kurulduğuna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.

### Çözüm

Verilen bilgilere göre, ABCD paralelkenarı yandaki şekilde çizilmiştir.

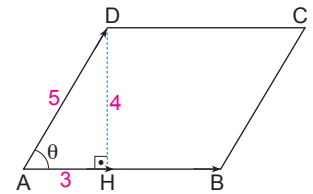
$\vec{AB} = (3 - (-3), 1 - 1) = (6, 0)$  ve  $\vec{AD} = (0 - (-3), 5 - 1) = (3, 4)$  tür.

$[DH] \perp \vec{AB}$  olacak şekilde  $[DH]$  çizildiğinde  $\vec{AD}$  nün  $\vec{AB}$  üzerindeki

dik izdüşüm vektörü  $\vec{AH}$  olur. Buradan  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \text{ br}$ ,

$\|\vec{AD}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ br}$  ve  $\|\vec{AH}\| = \frac{\langle \vec{AD}, \vec{AB} \rangle}{\|\vec{AB}\|} = \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 0}{6} = 3 \text{ br}$  elde edilir. DAH dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $5^2 = 3^2 + |DH|^2 \Rightarrow |DH| = 4 \text{ br}$  olur.  $m(\widehat{DAH}) = \theta$  olsun. Bu durumda  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  tir.

Bundan dolayı  $A(ABCD) = \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \sin \theta \Rightarrow A(ABCD) = 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 24 \text{ br}^2$  bulunur.

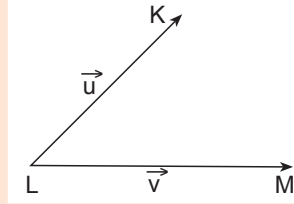




### Uygulama Köşesi

1. Yandaki şekilde K(1, 6), L(-3, 2) ve M(4, 2) noktaları ile başlangıç noktaları L olan  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  verilmiştir.

Buna göre,  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  üzerine kurulan KLMN paralelkenarsal bölgesini çizerek bu bölgenin alanını bulunuz.



2. Aşağıdaki vektörler üzerine kurulan paralelkenarsal bölgelerin alanlarını bulunuz.

►  $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$  ve  $\vec{v} = (2\sqrt{3}, 2)$

►  $\vec{p} = (1, 2)$  ve  $\vec{q} = (3, -2)$

### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları A(-2, 4), B(6, 2), C(2, -4) ve D(-6, -2) noktaları olan ABCD paralelkenarını yandaki analitik düzlemde çiziniz.

2. ABCD paralelkenarının köşegenlerini taşıyan doğruların denklemlerini yazarak bu doğruların kesim noktasının koordinatlarını bulunuz. Bulduğunuz noktanın konumunu tartışınız.

3. ABCD paralelkenarsal bölgenin alanını bulunuz.

4. ABCD paralelkenarının köşe noktalarının orijin merkezli ve  $k = \frac{1}{2}$  oranlı homotetiklerini kullanarak bu noktaları A'B'C'D' şeklinde adlandırınız. A'B'C'D' paralelkenarını çizerek alanını hesaplayınız.

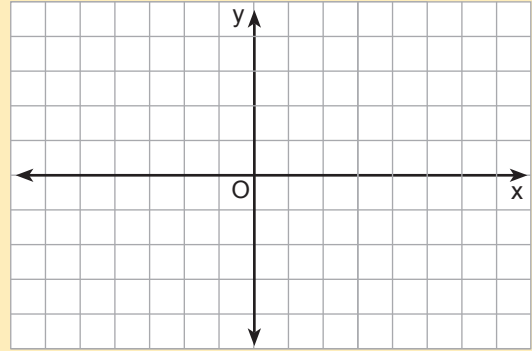
5. ABCD paralelkenarının kenarlarını taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz. Bulduğunuz denklemlerin  $f(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  benzerlik dönüşümü altında görüntülerini kullanarak bu görüntülerin oluşturduğu A''B''C''D'' paralelkenarının alanını bulunuz.

6. ABCD ve A''B''C''D'' paralelkenarsal bölgelerinin alanlarını karşılaştırarak elde ettiğiniz sonuçları yorumlayınız.

7. ABCD paralelkenarının saat yönünde 45° döndürülmesi ile elde edilen paralelkenarsal bölgenin köşelerini E, F, G, H şeklinde adlandırarak EFGH paralelkenarsal bölgesinin alanını hesaplayınız.

8. ABCD ve EFGH paralelkenarsal bölgelerin alanlarını karşılaştırınız.

9. Uyguladığınız adımlara göre, bir paralelkenarsal bölgenin k oranlı homotetiğinin alanının, paralelkenarsal bölgenin alanına oranını k türünden ifade ediniz.



### Uyarı

ABCD paralelkenarının kenar uzunluklarını k katına dönüştüren homoteti (benzerlik) dönüşümü  $f(x, y) = (kx, ky)$  dir. Bu dönüşüm altında elde edilen görüntünün alanı ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanının  $k^2$  katıdır.



### Örnek

Köşelerinin koordinatları  $A(-5, 0)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $C(5, 0)$  ve  $D(1, 2)$  olan ABCD paralelkenarının;

a.  $f(x, y) = \left(\frac{3x}{2}, \frac{3y}{2}\right)$  homoteti dönüşümü altındaki görüntüsünü analitik düzlemde çizerek bu görüntünün alanının ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanına oranını bulalım.

b. Saat yönünde  $90^\circ$  döndürülmesi ile elde edilen dörtgensel bölgenin alanı ile ABCD dörtgensel bölgesinin alanını karşılaştıralım.

### Çözüm

a. Verilen koordinatlara göre ABCD paralelkenarı yandaki analitik düzlemde çizilmiştir. ABCD paralelkenarının kenarlarını taşıyan doğru denklemlerini bulalım.

AB doğrusunun denklemi,  
 $\frac{-2-0}{-1-(-5)} = \frac{y-0}{x-(-5)} \Rightarrow \frac{-2}{4} = \frac{y}{x+5} \Rightarrow 4y + 2x + 10 = 0$  dır. Benzer şekilde BC, CD ve AD doğrularının denklemleri  $3y - x + 5 = 0$ ,  $2y + x - 5 = 0$  ve  $3y - x - 5 = 0$  şeklinde bulunur.

$A(x, y)$  noktasının  $f(x, y) = \left(\frac{3x}{2}, \frac{3y}{2}\right)$  dönüşümü altındaki görüntüsü  $A'(x', y')$  olmak üzere,  
 $x' = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = \frac{2x'}{3}$  ve  $y' = \frac{3y}{2} \Rightarrow y = \frac{2y'}{3}$  bulunur. Bu değerler AB doğrusunun denkleminde yerine yazılırsa  $A'B'$  doğrusunun denklemi  $4y + 2x + 10 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{2y'}{3} + 2 \cdot \frac{2x'}{3} + 10 = 0 \Rightarrow 8y' + 4x' + 30 = 0$  bulunur. Benzer şekilde BC, CD ve AD doğrularının görüntüleri  $B'C'$ ,  $C'D'$  ve  $A'D'$  olmak üzere,  $6y' - 2x' + 15 = 0$ ,  $4y' + 2x' - 15 = 0$  ve  $6y' - 2x' - 15 = 0$  şeklinde elde edilir.

Bu doğruların oluşturduğu  $A'B'C'D'$  paralelkenarı yukarıdaki analitik düzlemde çizilmiştir.

$f(x, y) = \left(\frac{3x}{2}, \frac{3y}{2}\right)$  homoteti dönüşümünde  $k = \frac{3}{2}$  olduğundan alanlar oranı  $k^2 = \frac{9}{4}$  olmalıdır.

O hâlde  $\frac{A(A'B'C'D')}{A(ABCD)} = \frac{9}{4}$  bulunur.

b. ABCD dörtgeninin saat yönünde  $90^\circ$  döndürülmesiyle oluşan dörtgenin köşelerinin koordinatlarını bularak  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ve  $D'$  şeklinde adlandıralım. (Bir  $P(x, y)$  noktasının orijin etrafında pozitif yönde  $\alpha$  açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen nokta  $R_\alpha(P) = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)$  dır.)

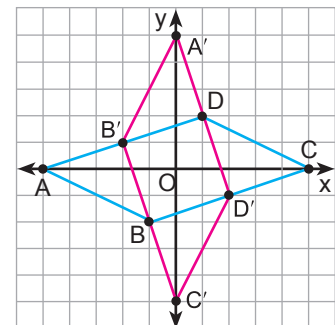
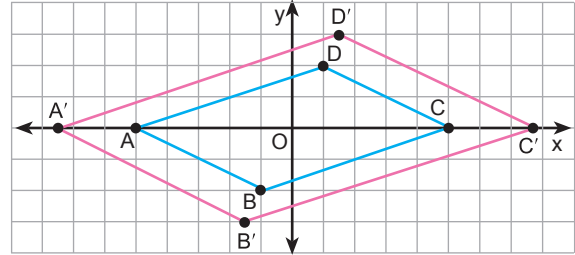
$$A' = (-5 \cdot \cos(-90^\circ) - 0 \cdot \sin(-90^\circ), -5 \cdot \sin(-90^\circ) + 0 \cdot \cos(-90^\circ)) = (0, 5)$$

$$B' = (-1 \cdot \cos(-90^\circ) - (-2) \cdot \sin(-90^\circ), -1 \cdot \sin(-90^\circ) + (-2) \cdot \cos(-90^\circ)) = (-2, 1)$$

$$C' = (5 \cdot \cos(-90^\circ) - 0 \cdot \sin(-90^\circ), 5 \cdot \sin(-90^\circ) + 0 \cdot \cos(-90^\circ)) = (0, -5)$$

$$D' = (1 \cdot \cos(-90^\circ) - 2 \cdot \sin(-90^\circ), 1 \cdot \sin(-90^\circ) + 2 \cdot \cos(-90^\circ)) = (2, -1)$$

$A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ve  $D'$  noktalarının birleştirilmesiyle oluşan  $A'B'C'D'$  dörtgeni yandaki analitik düzlemde çizilmiştir. Dönme dönüşümü uzaklık ile açılar yönlerini koruduğundan  $A'B'C'D'$  dörtgeni ABCD paralelkenarına eş bir paralelkenardır. Bundan dolayı  $A(ABCD) = A(A'B'C'D')$  eşitliği geçerlidir.







## Alıştırımlar

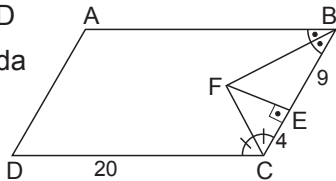
1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

- a. Bir paralelkenarsal bölgenin alanı bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir. (.....)
- b. Bir paralelkenarının köşegenlerinin oluşturduğu dört üçgensel bölgenin alanı birbirine eşittir. (.....)
- c. Bir paralelkenarsal bölge içinde alınan bir noktanın köşelere birleştirilmesiyle elde edilen üçgensel bölgelerden karşılıklı olanların alanları toplamı birbirine eşittir. (.....)
- ç. Başlangıç noktaları aynı olan iki vektör üzerine kurulan paralelkenarsal bölgenin alanı vektörlerin uzunlukları ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımına eşittir. (.....)
- d. Bir paralelkenarsal bölgenin alanı dönme dönüşümü sonucunda değişmez. (.....)

2. Köşelerinin koordinatları  $A(-3, -3)$ ,  $B(4, -2)$ ,  $C(3, 3)$  ve  $D(-4, 2)$  olan ABCD dörtgeni için aşağıdaki işlemleri yapınız:

- a. ABCD dörtgeninin  $f(x, y) = (2x, 2y)$  dönüşümü altındaki görüntüsünü ve bu görüntünün alanını bulunuz.
- b. ABCD dörtgenini pozitif yönde  $60^\circ$  döndürerek elde edeceğiniz dörtgenin köşelerinin koordinatlarını ve alanını bulunuz.

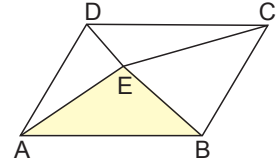
3. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[BF]$  ve  $[FC]$  açıortaylardır.  $[FE] \perp [BC]$ ,  $|BE| = 9$  br,  $|EC| = 4$  br ve  $|DC| = 20$  br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $br^2$  dir?



4. Şekildeki ABCD paralelkenarında E herhangi bir noktadır.

$$A(\widehat{EBC}) = 9 br^2$$

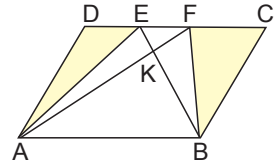
$$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DEC}) + 1 \text{ olduğuna göre, } A(\widehat{AEB}) \text{ kaç } br^2 \text{ dir?}$$



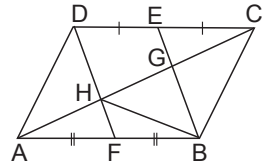
5. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[AF] \cap [BE] = \{K\}$ ,  $A(\widehat{AKB}) = 15 br^2$  ve

$$A(\widehat{EFK}) = 2 br^2 \text{ olduğuna göre,}$$

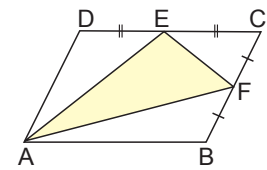
taralı alanlar toplamı kaç  $br^2$  dir?



6. Şekildeki ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(\widehat{GHB}) = 4 br^2$  ise  $A(ABCD)$  kaç  $br^2$  dir?



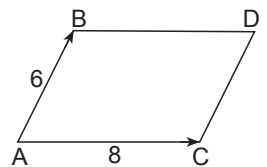
7. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $A(ABCD) = 80 br^2$  ise  $A(\widehat{AEF})$  kaç  $br^2$  dir?



8. Şekilde  $\vec{AB}$  ve  $\vec{AC}$  üzerine kurulan bir ABCD paralelkenarsal bölge verilmiştir.

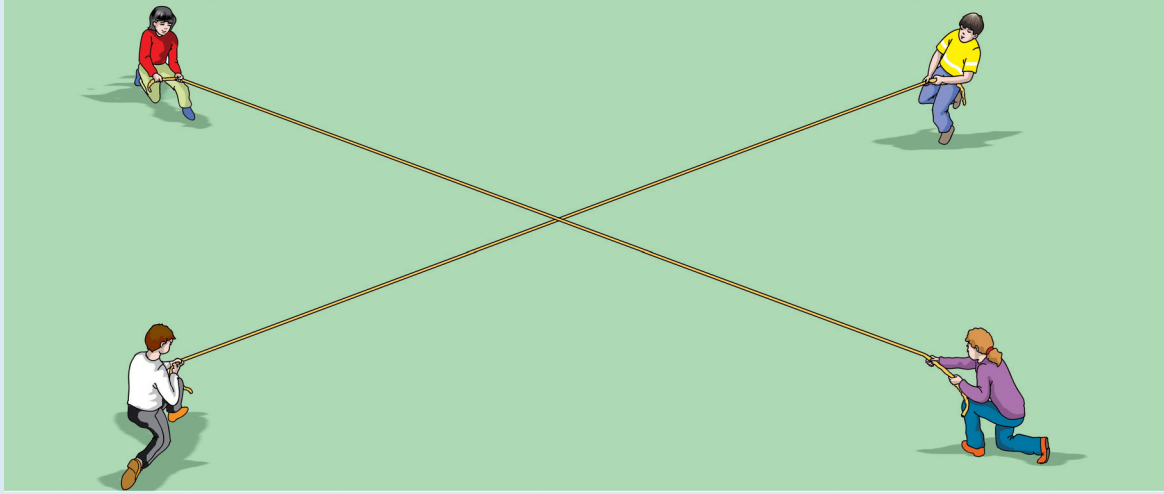
$$\|\vec{AB}\| = 6 \text{ br, } \|\vec{AC}\| = 8 \text{ br ve}$$

$$A(ABCD) = 24\sqrt{2} br^2 \text{ ise } \vec{AB} \text{ nün } \vec{AC} \text{ üzerindeki dik izdüşüm uzunluğu kaç br dir?}$$





## 2.5. Dikdörtgen ve Özellikleri



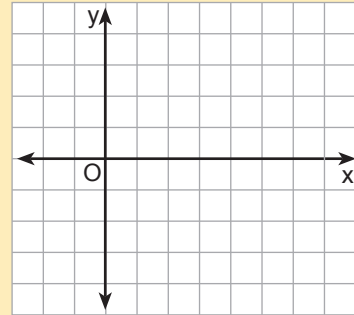
Dört çocuk oynayacakları oyun alanının sınırlarını belirlemek için eşit uzunlukta iki halat alarak resimdeki gibi konumlanıyorlar. Halatları düz ve gergin olacak şekilde çektiklerinde halatların kesiştikleri nokta her çocuğa eşit uzaklıkta olmaktadır.

Buna göre, çocukların bulundukları konumları oyun alanının köşeleri olarak düşünüldüğünde, oyun alanı hangi geometrik şekli gösterir? Bu geometrik şeklin özelliklerini belirleyiniz.



### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-1, -3)$ ,  $B(7, -1)$ ,  $C(6, 3)$  ve  $D(-2, 1)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.
2. ABCD dörtgeninin kenarlarını taşıyan doğruların eğimlerini bularak bu doğruların birbirine göre durumlarını belirleyiniz.
3.  $\overrightarrow{AB}$  ve  $\overrightarrow{AD}$  arasındaki açıyı bulunuz. Benzer şekilde ABCD dörtgeninin diğer iç açılarını hesaplayınız.
4. ABCD dörtgeninin köşegenlerini çizip kesim noktasını E olarak adlandırınız. Köşegen uzunluklarını ve E noktasının koordinatlarını bulunuz. E noktasının konumunu sorgulayınız.
5. Etkinliğin her bir adımından ABCD dörtgeni ile ilgili hangi özelliklere ulaşılabilir? Yorumlayınız.
6. ABCD dörtgeni ve paralelkenarın özelliklerinin benzer ve farklı yönlerini açıklayınız.



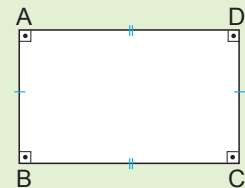
### Bilgi Kutusu

Açılarından biri dik açı olan paralelkenara **dikdörtgen** denir.

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde;

\*  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$  dir.

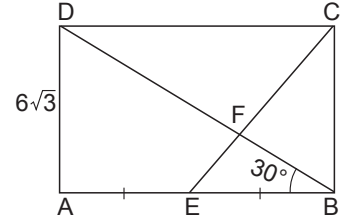
\*  $|AB| = |DC|$ ,  $|AD| = |BC|$  dur.





### Örnek

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[DB] \cap [CE] = \{F\}$  dir.  $|AE| = |EB|$ ,  $m(\widehat{DBA}) = 30^\circ$  ve  $|DA| = 6\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $|FB|$  nu bulalım.



### Çözüm

DAB üçgeninde  $\sin 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{|DB|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{|DB|} \Rightarrow |DB| = 12\sqrt{3}$  br dir.

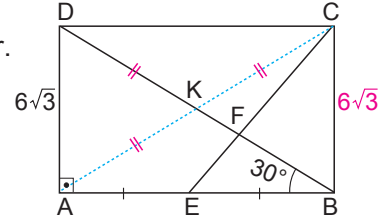
ABCD dikdörtgeninin  $[AC]$  köşegenini çizerek  $[DB]$  ile kesim noktasını K olarak adlandıralım.

$|AD| = |BC| = 6\sqrt{3}$  br olduğundan DAK ve CKB üçgenlerinde

2. Tales teoremin gereğince  $|DK| = |KB| = |AK| = |KC| = 6\sqrt{3}$  br elde edilir.

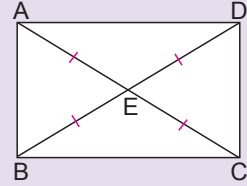
$|AK| = |KC|$  ve  $|AE| = |EB|$  olduğundan F noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.

Bundan dolayı  $|FB| = \frac{2}{3} \cdot |KB| = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  br bulunur.



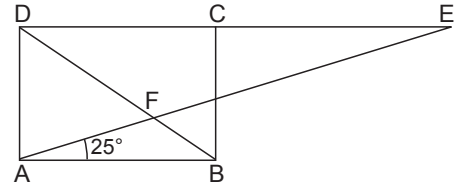
### Sonuçlar

1. Dikdörtgenin köşegen uzunlukları birbirine eşittir. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $|AC| = |BD|$  dur.
2. Dikdörtgenin köşegenleri birbirini ortalar. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $|AE| = |EC| = |DE| = |EB|$  dur.
3. Köşegenlerin kesim noktası olan E noktası dikdörtgenin ağırlık merkezidir.



### Örnek

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[DB] \cap [AE] = \{F\}$  ve D, C, E doğrusal noktalardır.  $|DB| = |CE|$  ve  $m(\widehat{EAB}) = 25^\circ$  olduğuna göre, AFB açısının ölçüsünü bulalım.



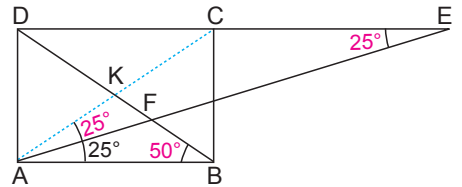
### Çözüm

ABCD dikdörtgeninin  $[AC]$  köşegenini çizerek  $[DB]$  ile kesim noktasını K olarak adlandıralım. Dikdörtgenin köşegenleri eşit uzunlukta olduğundan  $|AC| = |DB| = |CE|$  olur. Bu durumda ACE ikizkenar üçgendir.

İç ters açıların eşitliğinden  $m(\widehat{AEC}) = 25^\circ$  ve  $|AC| = |CE|$  eşitliğinden  $m(\widehat{EAC}) = 25^\circ$  dir.

Köşegenler birbirini ortalağından  $|AK| = |KB|$  dur. Bundan dolayı AKB ikizkenar üçgendir ve  $m(\widehat{KBA}) = 50^\circ$  dir.

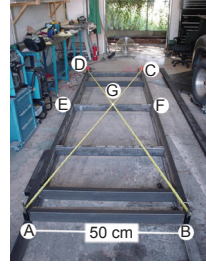
AFB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $25^\circ + 50^\circ + m(\widehat{AFB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AFB}) = 105^\circ$  bulunur.





### Örnek

Yandaki fotoğrafta dikdörtgen biçiminde bir merdiven verilmiştir. Köşegenlerini gösteren iplerin kesim noktası olan G, merdivenin ağırlık merkezidir.  $[EF] \parallel [AB]$  ve  $|AB| = 50$  cm olduğuna göre,  $|EG|$  nu bulalım.

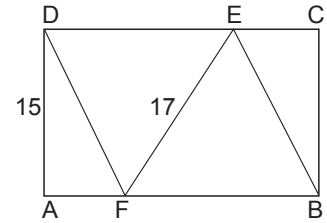


### Çözüm

G noktası, ABCD dikdörtgeninin ağırlık merkezi olduğundan  $|DG| = |GB|$  dur.  $[EF] \parallel [AB]$  olduğundan DAB üçgeninde 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|DG|}{|DB|} = \frac{|EG|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EG|}{50} \Rightarrow |EG| = 25$  cm bulunur.

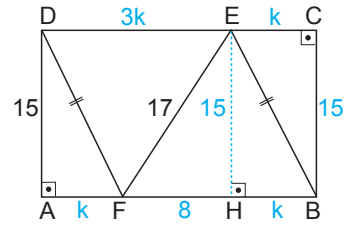
### Örnek

Yandaki şekilde ABCD dikdörtgen ve DFBE paralelkenardır.  $|DE| = 3|EC|$ ,  $|DA| = 15$  br ve  $|FE| = 17$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulalım.



### Çözüm

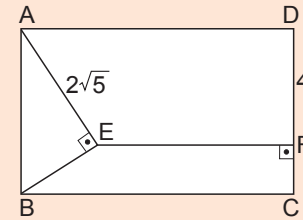
$[EH] \perp [AB]$  olacak şekilde  $[EH]$  çizildiğinde oluşan AHED ve HBCE birer dikdörtgendir. Buradan  $|EH| = 15$  br ve EFH dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $17^2 = 15^2 + |FH|^2 \Rightarrow |FH| = 8$  br elde edilir.  $|DE| = 3|EC|$  verildiğinden,  $|EC| = k$  br olarak alınırsa  $|DE| = 3k$  br olur.



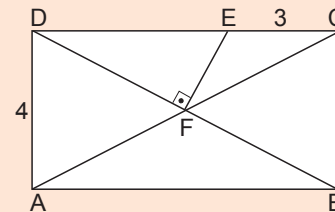
EHBC dikdörtgen olduğundan  $|HB| = k$  br ve DFBE paralelkenar olduğundan  $|FB| = |DE|$  dur. Bundan dolayı  $|FB| = |DE| \Rightarrow 3k = k + 8 \Rightarrow k = 4$  br elde edilir. Buradan  $|DC| = 4k = 16$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

1. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[AE] \perp [EB]$ ,  $[EF] \perp [DC]$ ,  $|DF| = 4$  br ve  $|AE| = 2\sqrt{5}$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulunuz.



2. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[AC]$  ile  $[BD]$  köşegenleri ve  $[EF] \perp [BD]$  dir.  $|EC| = 3$  br ve  $|DA| = 4$  br olduğuna göre,  $|DB|$  kaç br dir?

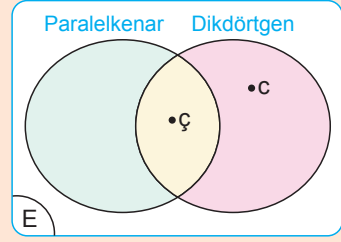




## Uygulama Köşesi

Aşağıda verilen özellikleri inceleyiniz. Her bir özelliğin paralelkenar ve dikdörtgende olup olmasına göre, yandaki Venn şemasını tamamlayınız.

- |  |   |
|--|---|
| a. Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. | e. Her bir iç açısı diktir.                         |
| b. Karşılıklı açıları eşitir.            | f. Köşegenleri dik kesişir.                         |
| c. Köşegenleri eşit uzunluktadır.        | g. Ardışık açıları bütünlerdir.                     |
| ç. İç açıların toplamı $360^\circ$ dir.  | h. Köşegenleri birbirini ortalar.                   |
| d. Köşegenleri birbirini ortalar.        | i. Köşegenlerinin kesim noktası ağırlık merkezidir. |

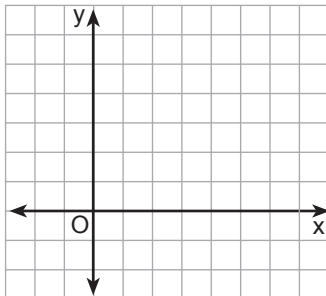


## Alıştırımlar

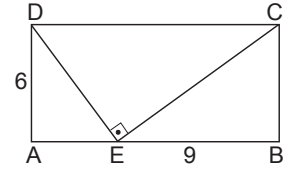
1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- Dikdörtgenin köşegen uzunlukları birbirine eşittir. (.....)
- Dikdörtgenin ağırlık merkezi köşegenlerini iki eşit parçaya böler. (.....)
- Dikdörtgenin köşegenleri açıortaydır. (.....)
- Dikdörtgenin karşılıklı köşelerinin apsisi toplamı birbirine eşittir. (.....)
- Paralelkenar dikdörtgenin tüm özelliklerini sağlar. (.....)
- Kısa kenar uzunluğu 6 br ve ağırlık merkezinin herhangi bir köşesine uzaklığı 5 br olan dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu 8 br dir. (.....)

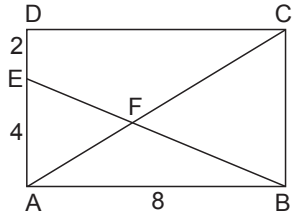
2. Köşelerinin koordinatları  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(7, 2)$  olan ABCD dikdörtgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizin. Dikdörtgenin D köşesinin ve ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.



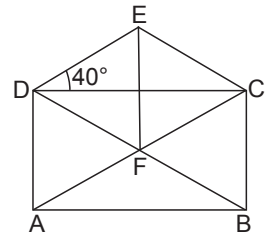
3. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[DE] \perp [EC]$ ,  $|DA| = 6$  br ve  $|EB| = 9$  br olduğuna göre,  $|DC|$  kaç cm dir?



4. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[EB] \cap [AC] = \{F\}$ ,  $|DE| = 2$  br,  $|EA| = 4$  br ve  $|AB| = 8$  br olduğuna göre,  $|AF|$  kaç br dir?



5. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[AC] \cap [DB] = \{F\}$ , DEF eşkenar üçgen ve  $m(\widehat{EDC}) = 40^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{ECD})$  kaç derecedir?

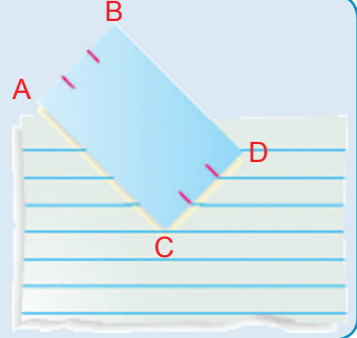




## 2.6. Dikdörtgensel Bölgenin Alanı



Yandaki şekilde bir çizgili kâğıt ile dikdörtgen biçimde bir kart verilmiştir. Bu şekle göre, kartın D köşesi kağıdın ilk çizgisine, C köşesi ise 4. çizgisine denk gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Kartın 2 ve 3. çizgilere denk gelen noktaları kırmızı renkle işaretlenmiştir. Aynı işlemler  $[AB]$  kenarı için de uygulanmıştır. Buna göre, karşılıklı olan kırmızı çizgiler cetvelle birleştirildiğinde dikdörtgenin alanı hangi oranlarda bölünmüş olur? Neden?



### Etkinlik

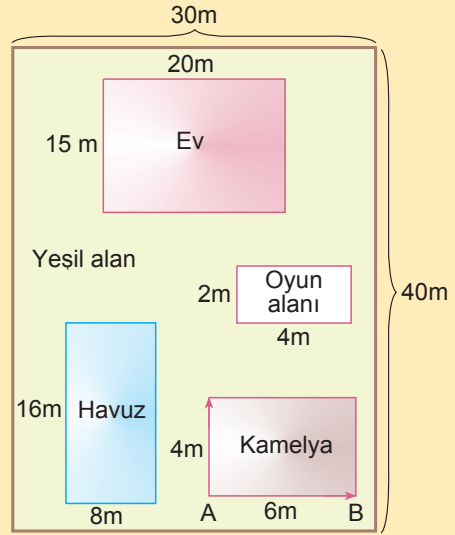
1. Yandaki krokide görülen dikdörtgensel şeklindeki arazi içinde ev, havuz, kamelya, oyun alanı ve yeşil alan bulunmaktadır. Bu arazinin ve içindeki bölümlerin çevrelerini hesaplayınız.

2. Paralelkenarsal bölgenin vektörel alan bağıntısından yararlanarak kamelyanın kapladığı alanın  $\|\vec{AB}\|$  ve  $\|\vec{AC}\|$  cinsinden ifadesini yazınız.

3. Bulduğunuz ifadeden yararlanarak arazinin ve diğer bölümlerin alanlarını hesaplayınız.

4. Havuz ve evin kapladığı alanın, arazinin alanının yüzde kaçını bulunuz.

5. Krokide yer alan tüm dikdörtgensel bölgeleri inceleyerek bu dikdörtgensel bölgelerin eş veya benzer olma durumlarını tartışınız.

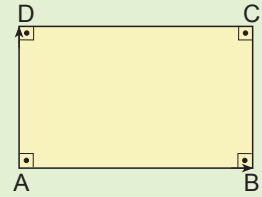


### Bilgi Kutusu

Bir ABCD dikdörtgensel bölgesinin alanı aşağıdaki bağıntılarla hesaplanabilir:

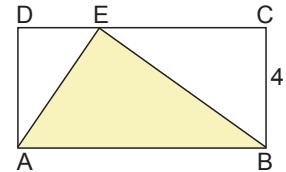
$$A(ABCD) = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 \cdot \|\vec{AD}\|^2 - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle^2}$$

$$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\|$$



### Örnek

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,  $|BC| = 4$  br ve  $A(\widehat{AEB}) = 18 \text{ br}^2$  olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



### Çözüm

Dikdörtgen özel bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.

$$\text{Buradan } A(\widehat{AEB}) = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow 18 = \frac{|AB| \cdot 4}{2} \Rightarrow 36 = 4|AB| \Rightarrow |AB| = 9 \text{ br bulunur.}$$



### Örnek

Bir reklam firması boyutları 4 cm x 6 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir afişi fotokopi makinesinin büyüt (küçült) tuşuyla farklı boyutlarda çoğaltabilmektedir. Örneğin fotokopi makinesinin büyüt (küçült) tuşu %200 e ayarlandığında afişin boyutları iki katına çıkmaktadır. Buna göre, alanı 384 cm<sup>2</sup> olan bir afiş elde etmek için fotokopi makinesinin büyüt (küçült) tuşu % kaçta ayarlanmalıdır?



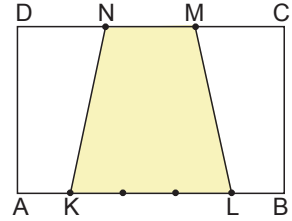
### Çözüm

Fotokopi makinesinin büyüt (küçült) tuşu % k00 olarak ayarlansın. Bu durumda afişin her bir kenarı orijinal boyutlarının k katına çıkacağından afişin boyutları 4k cm ve 6k cm olur.

Buradan  $4k \cdot 6k = 384 \Rightarrow 24k^2 = 384 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$  bulunur. Bundan dolayı fotokopi makinesinin büyüt (küçült) tuşu % 400 e ayarlanmalıdır.

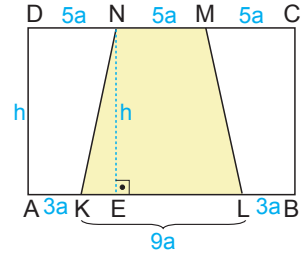
### Örnek

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde [DC] kenarı 3 ve [AB] kenarı 5 eşit parçaya bölünmüştür. Buna göre, KLMN dörtgensel bölgesinin alanının ABCD dörtgensel bölgesinin alanına oranını bulalım.



### Çözüm

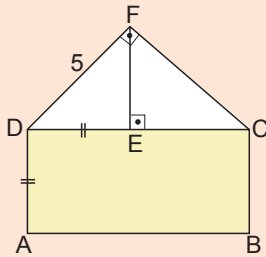
$|AD| = h$  br olsun. N noktasından [AB] na [NE] dikmesi çizildiğinde  $|NE| = h$  br olur. [DC] kenarı 3 ve [AB] kenarı 5 eşit parçalı olduğundan ve OKEK(3, 5) = 15 olduğundan  $|DC| = |AB| = 15a$  olarak alınırsa  $|DN| = |NM| = |MC| = 5a$  br,  $|AK| = |LB| = 3a$  br ve  $|KL| = 9a$  br elde edilir.  $[NM] \parallel [KL]$  olduğundan KLMN bir yamuktur.



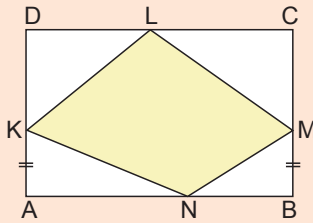
$$\text{Buradan } \frac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{(5a + 9a) \cdot h}{2}}{15a \cdot h} \Rightarrow \frac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \frac{7a \cdot h}{15a \cdot h} \Rightarrow \frac{A(KLMN)}{A(ABCD)} = \frac{7}{15} \text{ bulunur.}$$

### Uygulama Köşesi

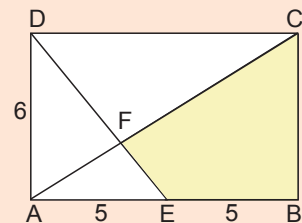
Aşağıdaki şekillerdeki boyalı bölgelerin alanlarını bulunuz.



ABCD dikdörtgen,  
 $|DA| = |DE|$ ,  $|DF| = 5$  br



ABCD dikdörtgen,  $|AK| = |MB|$ ,  
 $|AB| = 6$  br ve  $|AD| = 4$  br



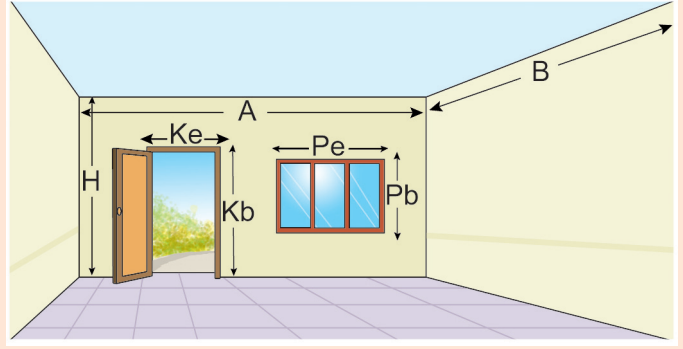
ABCD dikdörtgen,  $|DA| = 6$  br,  
 $|AE| = |EB| = 5$  br



## Uygulama Köşesi

Yandaki resimde dikdörtgen şeklindeki duvarlara sahip boyanacak bir oda verilmiştir. Bu odanın bazı uzunluklarının isimleri resim üzerinde kodlarla gösterilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki değerleri kullanarak bu odanın boyanacak duvar alanının kaç  $m^2$  olduğunu hesaplayınız.



- ▶ A: Odanın eni 5m
- ▶ B: Odanın boyu 4m
- ▶ H: Odanın tavan yüksekliği 4m
- ▶ Ke: Kapı eni 1m
- ▶ Kb: Kapı boyu 2m
- ▶ Pe: Pencere eni 1,5m
- ▶ Pb: Pencere boyu 1m



## Alıştırırmalar

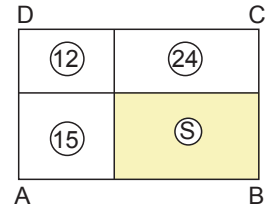
1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- a. Eş dikdörtgensel bölgelerin alanları eşittir. (.....)
- b. Kısa kenarının uzun kenarına oranı birbirine eşit olan dikdörtgenler benzerdir. (.....)
- c. Dikdörtgenlerin köşegenleri dik kesişir. (.....)
- ç. Köşegen uzunluğu 15 br olan bir dikdörtgenin herhangi bir köşesinden üzerinde olmadığı köşegene çizilen dikme, köşegeni  $1/3$  oranında bölüyorsa dikdörtgensel bölgenin alanı  $90 \text{ br}^2$  dir. (.....)

2. Kısa kenarı x cm, uzun kenarı y cm olan dikdörtgen şeklindeki bir levha ısıtıldıktan sonra her bir kenar uzunluğunun % 20 arttığı gözlenmiştir. Buna göre,

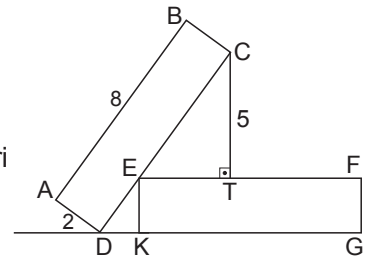
- a. Isıtıldıktan sonra levhanın alanı % kaç artmıştır?
- b. Isıtıldıktan sonra levhanın çevresinin uzunluğunun ısıtılmadan önceki çevresinin uzunluğuna oranı kaçtır?

3. Şekildeki ABCD dikdörtgeni 4 dikdörtgensel bölgeye ayrılmıştır.



Bu bölgelerin alanları üzerlerinde yazılı olduğuna göre, S kaç  $\text{br}^2$  dir?

4. Şekildeki ABCD ve EFGK dikdörtgenleri eşittir.

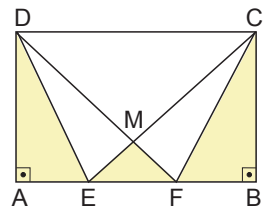


$$|AB| = 8 \text{ br},$$

$$|AD| = 2 \text{ br ve}$$

$$|CT| = 5 \text{ br olduğuna göre, } |DK| \text{ kaç br dir?}$$

5. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $A(\widehat{DMC}) = 15 \text{ br}^2$



olduğuna göre, taralı alanlar toplamı kaç  $\text{br}^2$  dir?

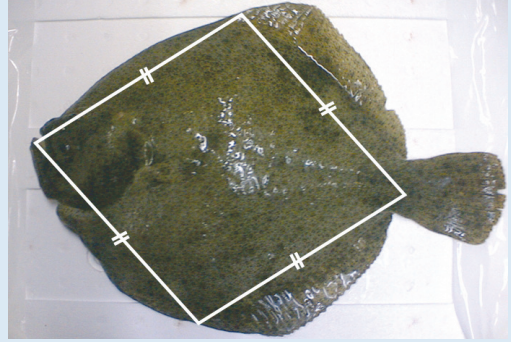


## 2.7. Eşkenar Dörtgen ve Özellikleri



Yandaki fotoğrafta Akdeniz, Ege Denizi, Marmara Denizi ve Karadeniz’de, 20–70 metre derinlikte yaşayan çivili kalkan (rhombus maximus) verilmiştir.

Çivili kalkanın vücut yüzeyi fotoğraf üzerinde gösterildiği gibi tüm kenar uzunlukları eşit olan bir paralelkenar oluşturmaktadır. Bu şeklin özelliklerini yorumlayınız.



### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-1, -3)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(1, 3)$  ve  $D(-6, 2)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

2. ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bulunuz.

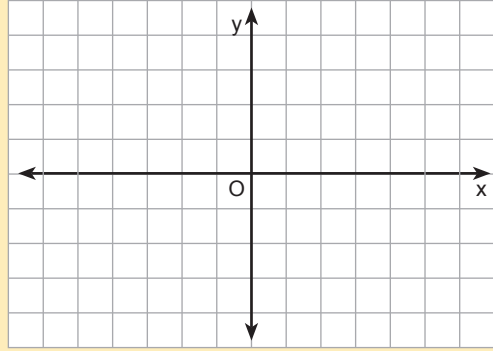
3. ABCD dörtgeninin kenarlarını taşıyan doğruların eğimlerini bularak karşılıklı kenarların birbirine göre durumlarını belirleyiniz.

4.  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerini çizerek bu köşegenleri taşıyan doğruların eğimlerini bulunuz ve köşegenlerin birbirine göre durumlarını belirleyiniz.

5.  $\overrightarrow{AB}$  ile  $\overrightarrow{AD}$  ve  $\overrightarrow{BA}$  ile  $\overrightarrow{BC}$  arasındaki açıları hesaplayarak karşılaştırınız. Benzer işlemleri ABCD dörtgeninin diğer köşelerindeki açılar için de tekrarlayarak elde ettiğiniz sonuçları tartışınız.

6.  $[AC]$  köşegeni A ve C açılarını hangi oranda böler? Aynı oran  $[BD]$  köşegeni için de geçerli midir? Tartışınız.

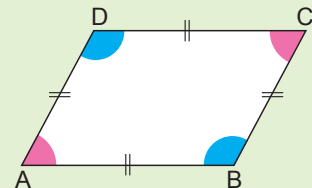
7. Ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak ABCD dörtgeni ile paralelkenar arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları yorumlayınız.



### Bilgi Kutusu

Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde;

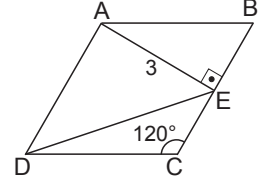
- \*  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$  dur.
- \*  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$  ve  $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$  dür.





### Örnek

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[AE] \perp [BC]$ ,  $m(\widehat{DCB}) = 120^\circ$  ve  $|AE| = 3$  br olduğuna göre,  $|DE|$  nu bulalım.

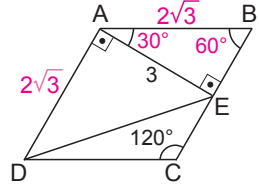


### Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeninde  $[AB] \parallel [DC]$  olduğundan,  
 $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = 60^\circ$  dir.

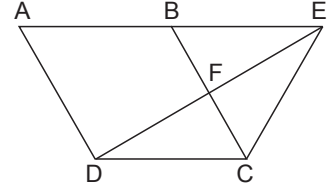
ABE üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $m(\widehat{BAE}) = 30^\circ$  olur.  
 Eşkenar dörtgenin karşılıklı açıların ölçüleri eşit olduğundan,  
 $m(\widehat{DAB}) = 120^\circ$  ve  $m(\widehat{DAE}) = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$  dir. BAE üçgeninden

$\cos 30^\circ = \frac{|AE|}{|AB|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 2\sqrt{3}$  br elde edilir. Dolayısıyla  $|AD| = 2\sqrt{3}$  br dir. DEA dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|DE|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 \Rightarrow |DE|^2 = 21 \Rightarrow |DE| = \sqrt{21}$  br bulunur.



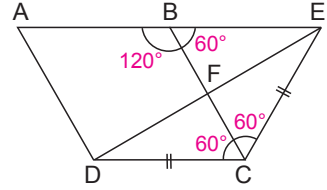
### Örnek

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde A, B ve E doğrusal noktalar, BEC eşkenar üçgen ve  $[BC] \cap [DE] = \{F\}$  olduğuna göre, DFC açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

BEC eşkenar üçgeninin iç açıları şekildeki gibi yerleştirildiğinde  $m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  olur. ABCD eşkenar dörtgen olduğundan  $m(\widehat{BCD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  dir. BCE ikizkenar üçgeninde  $[CF]$  açıortayı aynı zamanda yükseklik olduğundan  $m(\widehat{DFC}) = 90^\circ$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

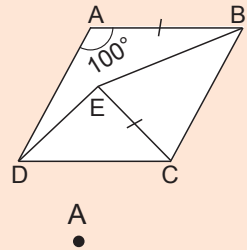
1. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $|EC| = |AB|$  ve  $m(\widehat{BAD}) = 100^\circ$  olduğuna göre, BED açısının ölçüsünü bulunuz.

2. Yandaki şekilde bir A noktası ve A noktasından geçmeyen bir d doğrusu verilmiştir. Buna göre aşağıdaki adımları uygulayınız:

► Pergelle, d doğrusunu kesen A merkezli bir yay çizerek kesim noktalarını B ve C olarak adlandırınız.

► Pergel açıklığını değiştirmeden B ve C merkezli birer yay çizerek bu yayların kesim noktasını D olarak adlandırınız.

► ABCD dörtgenini oluşturarak bu dörtgen özelliklerini tartışınız.



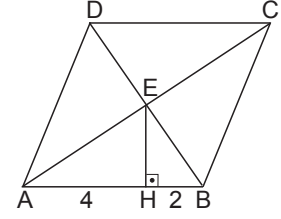
### Araştırma Sorusu

Eşkenar dörtgen çizimlerinin farklı yollarla nasıl yapılacağını araştırarak sınıfınızla paylaşınız.



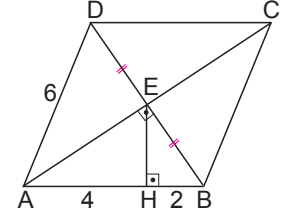
### Örnek

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[DB] \cap [AC] = \{E\}$  ve  $[EH] \perp [AB]$  dir.  $|AH| = 4$  br ve  $|HB| = 2$  br olduğuna göre,  $|EH|$  nu bulalım.



### Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeninde  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $|DC| = |AB|$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince  $|DE| = |EB|$  olur.  $|DA| = |AB| = 6$  br olduğundan DAB ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgende kenarortay aynı zamanda yükseklik olduğundan  $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$  dir. Bundan dolayı AEB üçgeninde Öklid'in yükseklik bağıntısından,  $|EH|^2 = 4 \cdot 2 \Rightarrow |EH|^2 = 8 \Rightarrow |EH| = 2\sqrt{2}$  br bulunur.



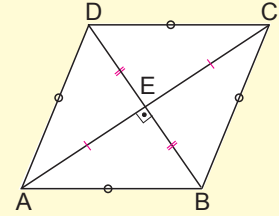
### İnceleyelim

Bir eşkenar dörtgende köşegenlerin birbirini dik kestiğini gösterelim:

**Verilen:** ABCD eşkenar dörtgen,  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenler

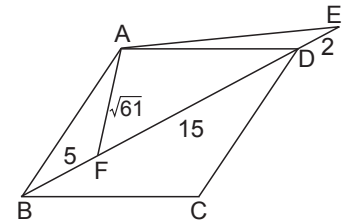
**İstenen:**  $[AC] \perp [BD]$

ABCD eşkenar dörtgeninde  $[DC] \parallel [AB]$  ve  $|DC| = |AB|$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince  $|DE| = |EB|$  olur.  $|AD| = |AB|$  olduğundan DAB ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgende tabana ait kenarortay aynı zamanda yükseklik olduğundan  $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$  dir. Bundan dolayı  $[AC] \perp [BD]$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde B, D ve E noktaları doğrusaldır.  $|AF| = \sqrt{61}$  br,  $|BF| = 5$  br,  $|FD| = 15$  br ve  $|DE| = 2$  br olduğuna göre,  $|AE|$  nu bulalım.

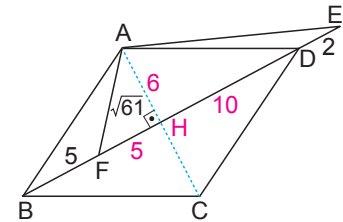


### Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeninde  $[AC]$  köşegenini çizerek bu köşegenin  $[BE]$  ile kesim noktasını H olarak adlandıralım. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik kestiğinden  $m(\widehat{AHB}) = 90^\circ$  olur.  $|BH| = |HD|$  olduğundan  $|FH| = 5$  br ve  $|HD| = 10$  br dir.

HFA dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $(\sqrt{61})^2 = 5^2 + |AH|^2 \Rightarrow |AH| = 6$  br elde edilir.

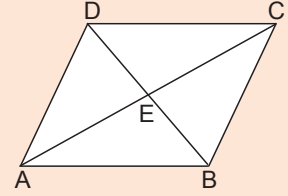
HEA dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|AE|^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow |AE|^2 = 180 \Rightarrow |AE| = 6\sqrt{5}$  br bulunur.





## Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[AC] \cap [BD] = \{E\}$  ve  $|AC|^2 + |BD|^2 = 400$  olduğuna göre, ABCD eşkenar dörtgeninin bir kenarının uzunluğunu bulunuz.

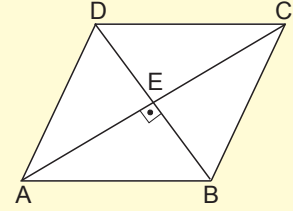


## İnceleyelim

Bir paralelkenarın köşegenlerinin kesim noktası dik ise bu paralelkenarın eşkenar dörtgen olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD paralelkenar,  $[AC] \perp [DB]$

**İstenen:** ABCD eşkenar dörtgen



### İfadeler

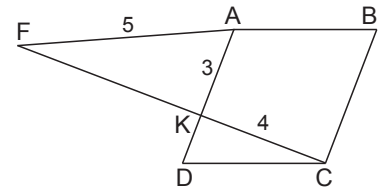
1. ABCD paralelkenar
2.  $\widehat{DEA} \cong \widehat{BEA}$
3.  $[AE] \cong [AE]$
4. ABCD dörtgeni paralelkenar
5.  $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAE})$
6.  $\widehat{ADE} \cong \widehat{ABE}$
7.  $[AD] \cong [AB]$
8. ABCD eşkenar dörtgen

### Gerekçeler

1. Verilen
2. Dik doğruların dik açılar oluşturmasından
3.  $[AE]$  nin ortak kenar olmasından
4. Verilen
5. Köşegenlerin her bir iç açığı iki eş parçaya bölmelerinden
6. K.A.K. eşlik teoreminden
7. Eş üçgenlerin karşılıklı kenarlarının eş olmasından
8. Eşkenar dörtgenin tanımından

## Örnek

Şekildeki ABCD dörtgeni köşegenleri dik kesişen bir paralelkenardır.  $[FC] \cap [AD] = \{K\}$ ,  $|AK| = 3$  br,  $|KC| = 4$  br ve  $|AF| = 5$  br olduğuna göre,  $|FK|$  nu bulalım.



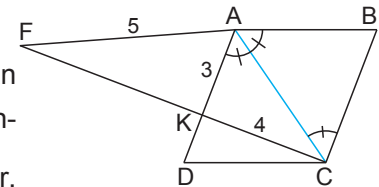
## Çözüm

Köşegenleri dik kesişen paralelkenar eşkenar dörtgen olduğundan ABCD bir eşkenar dörtgendir. Bu dörtgenin  $[AC]$  köşegeni çizildiğinde oluşan ABC üçgeni ikizkenar olduğundan  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA})$  dür.

$[BC] \parallel [AD]$  olduğundan iç ters açılarının eşitliğinden  $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CAD})$  elde edilir.

Dolayısıyla  $[AC]$ , DAB açısının açıortaydır. AFK üçgeninde dış açıortay teoremi gereğince,

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{|FK| + 4} \Rightarrow 3|FK| + 12 = 20 \Rightarrow 3|FK| = 8 \Rightarrow |FK| = \frac{8}{3} \text{ br bulunur.}$$





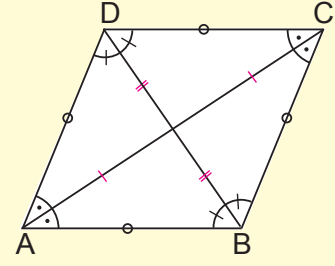


### İnceleyelim

Bir eşkenar dörtgende köşegenlerin iç açıortaylar olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD eşkenar dörtgen,  $[AC]$  ve  $[DB]$  köşegenler

**İstenen:**  $[AC]$  ve  $[DB]$  iç açıortaylar



#### İfadeler

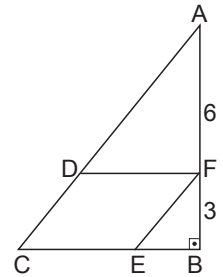
1.  $|DA| = |DC|$
2.  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA})$
3.  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACB})$  ve  $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{BAC})$
4.  $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ACB})$  ve  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC})$
5.  $|DA| = |AB|$
6.  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DBA})$
7.  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DBC})$  ve  $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{BDC})$
8.  $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC})$  ve  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$
9.  $[AC]$  ve  $[DB]$  iç açıortaylar

#### Gerekçeler

1. Eşkenar dörtgenin tanımından
2. İkizkenar üçgenin taban açılarının eşitliğinden
3. İç ters açılarının eşitliğinden
4. 2. ifadenin 3. ifadede yerine yazılmasından
5. Eşkenar dörtgenin tanımından
6. İkizkenar üçgenin taban açılarının eşitliğinden
7. İç ters açılarının eşitliğinden
8. 6. ifadenin 7. ifadede yerine yazılmasından
9. 4 ve 8. ifadelerden

### Örnek

Şekildeki ABC dik üçgeninde  $|AF| = 6$  br ve  $|BF| = 3$  br dir. CEFD eşkenar dörtgen olduğuna göre,  $|DF|$  nu bulalım.



### Çözüm

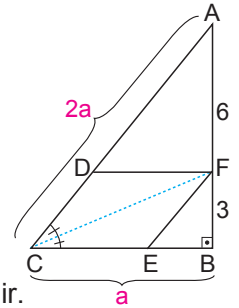
CEFD eşkenar dörtgen olduğundan  $[CF]$  köşegeni C köşesinin iç açıortayıdır.

ABC üçgeninde iç açıortay bağıntısından  $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |CA| = 2|CB|$  dur.

$|CB| = a$  br olarak alınırsa  $|CA| = 2a$  br olur. ABC dik üçgeninde

Pisagor teoreminden  $(2a)^2 = a^2 + 9^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + 81 \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$  br dir.

$[DF] \parallel [CB]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{6}{9} = \frac{|DF|}{|CB|} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{|DF|}{3\sqrt{3}} \Rightarrow |DF| = 2\sqrt{3}$  br elde edilir.





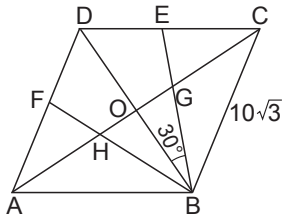


## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktali yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- Her eşkenar dörtgen bir paralelkenardır. (.....)
- Eşkenar dörtgenin iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir. (.....)
- Bazı paralelkenarlar eşkenar dörtgendir. (.....)
- Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirini dik ortalar. (.....)
- Bir eşkenar dörtgenin köşegen uzunluklarının kareleri toplamı dörtgenin bir kenar uzunluğunun karesinin iki katına eşittir. (.....)
- Kenar uzunluğu 8 br, köşegenlerinden biri diğerinin 2 katı olan bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesim noktasının herhangi bir kenarına uzaklığı 2 br ise köşegenlerinin uzunlukları toplamı  $12\sqrt{2}$  br dir. (.....)

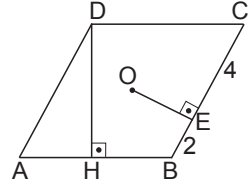
2.



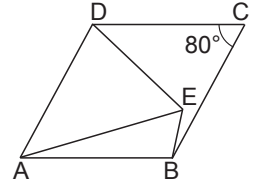
Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde G ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $m(\widehat{DBE}) = 30^\circ$ ,  $|BC| = 10\sqrt{3}$  br ve  $|BG| = |BH|$  olduğuna göre, aşağıdaki uzunlukları kullanarak doğru değerleriyle eşleştiriniz.

- |           |    |
|-----------|----|
| a. $ EG $ | 30 |
| b. $ GB $ | 15 |
| c. $ AH $ | 5  |
| ç. $ BF $ | 35 |
| d. $ AC $ | 20 |
| e. $ OG $ | 25 |
|           | 10 |

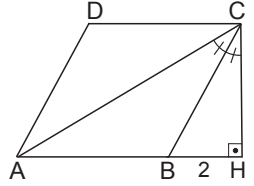
3. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde O noktası köşegenlerin kesim noktasıdır.  $[DH] \perp [AB]$ ,  $[OE] \perp [BC]$ ,  $|BE| = 2$  br ve  $|EC| = 4$  br olduğuna göre,  $|DH|$  kaç br dir?



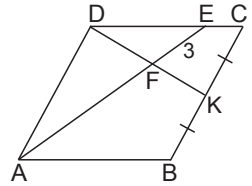
4. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde ADE eşkenar üçgen ve  $m(\widehat{DCB}) = 80^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{EBC})$  kaç derecedir?



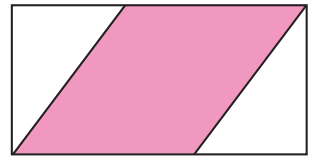
5. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[CH] \perp [AH]$  dir.  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCH})$  ve  $|BH| = 2$  br olduğuna göre,  $|AC|$  kaç br dir?



6. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[DK] \cap [EA] = \{F\}$  dir.  $|DE| = 3|EC|$ ,  $|CK| = |KB|$  ve  $|FE| = 3$  br olduğuna göre,  $|AF|$  kaç br dir?



7. Dikdörtgen şeklindeki beyaz bir kumaş boydan boya eşkenar dörtgen



şeklinde boyanarak bir okul flaması yapılmak isteniyor. Kumaşın eni 4 cm, boyu 8 cm olduğuna göre, boyanacak kısmın bir kenarının uzunluğu kaç cm dir?



## 2.8. Eşkenar Dörtgensel Bölgenin Alanı

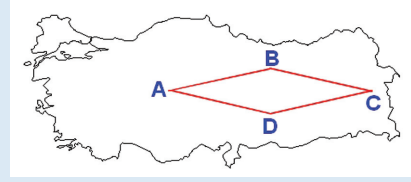


Şekildeki Türkiye haritası üzerinde verilen A, B, C ve D noktaları bazı illeri göstermektedir.

İllerin birbirlerine olan uzaklıkları ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

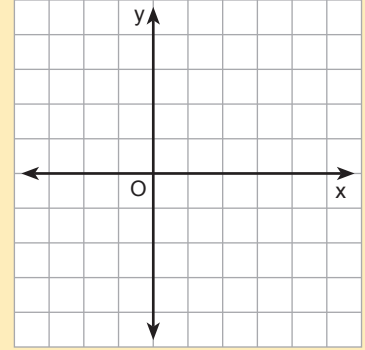
- ❖ A, B, C ve D illeri bir eşkenar dörtgenin köşeleridir.
- ❖ A ile C illeri arası 700 km ve B ile D illeri arası 300 km dir.

Yukarıda verilen bilgiler A, B, C ve D illerinin çevrelediği alanı bulmak için yeterli midir? Tartışınız.



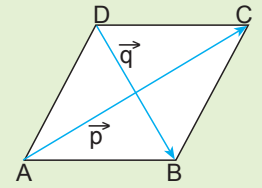
### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-3, -1)$ ,  $B(1, -4)$ ,  $C(5, -1)$  ve  $D(1, 2)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.
2. ABCD dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu gösteriniz.
3. ABCD dörtgeninin köşegen vektörlerini çizerek bu vektörlerin uzunluklarını ve aralarındaki açıyı bulunuz.
4. Dörtgensel bölgenin alanını veren vektörel bağıntıyı yazınız. Bu bağıntıyı ve bulduğunuz açı ve uzunluk değerlerini kullanarak ABCD dörtgensel bölgenin alan bağıntısını elde ediniz.
5. ABCD eşkenar dörtgeninin özelliklerini göz önünde bulundurarak eşkenar dörtgensel bölgenin alan bağıntısının kaç farklı şekilde bulunabileceğini tartışınız.



### Bilgi Kutusu

$\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  ABCD eşkenar dörtgensel bölgenin köşegen vektörleri olmak üzere, eşkenar dörtgensel bölgenin alanı  $A(ABCD) = \frac{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|}{2}$  bağıntısı ile bulunabilir.



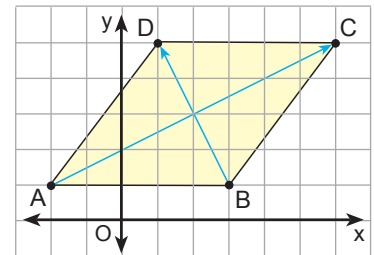
### Örnek

Bir ABCD eşkenar dörtgeninin köşelerinin koordinatları  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(6, 5)$  ve  $D(1, 5)$  olduğuna göre, ABCD eşkenar dörtgensel bölgenin alanını bulalım.

### Çözüm

Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgeni çizilmiştir.  $\vec{AC}$  ve  $\vec{DB}$  köşegen vektörlerini çizildiğinde bu vektörlerin uzunlukları  $\vec{AC} = (6 - (-2), 5 - 1) = (8, 4) \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$  br ve  $\vec{DB} = (3 - 1, 1 - 5) = (2, -4) \Rightarrow \|\vec{DB}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$  br olur.

Bundan dolayı  $A(ABCD) = \frac{\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{DB}\|}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 20$  br<sup>2</sup> bulunur.

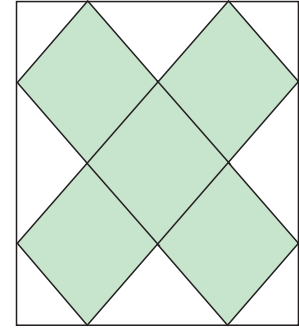




### Örnek

Yandaki şekilde boyutları 12 m x 16 m olan dikdörtgensel bölge şeklinde bir bahçe verilmiştir. Bu bahçenin eşkenar dörtgensel bölge şeklinde 5 bölümü bulunmaktadır. Buna göre;

- Her bir bölümün etrafı iki sıra tel örgüyle çevrileceğine göre, bölümlerin tamamını çevrelemek için kaç metre tel örgü gerektiğini bulalım.
- Her bölümün içi çimlendirileceğine göre, çim ekilecek toplam alanın kaç m<sup>2</sup> olduğunu bulalım.



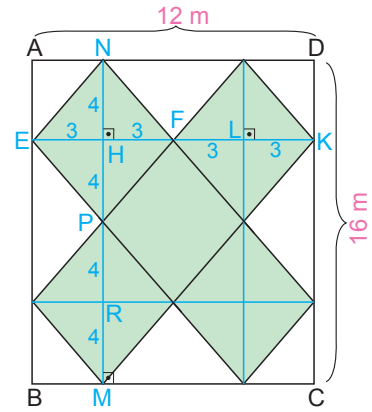
### Çözüm

Bahçenin köşelerini şekilde gösterildiği gibi adlandırarak bölümlerin köşegenlerini çizelim. Bu durumda AEKD ve ANMB birer dikdörtgendir. Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirini dik ortalarından  $|EH| = |HF| = |FL| = |LK| = 3$  m ve  $|NH| = |HP| = |PR| = |RM| = 4$  m olur. HNE dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|EN|^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow |EN| = 5$  m dir.

- Bölümün bir kenarının uzunluğu 5 m olduğundan çevresi  $4 \cdot 5 = 20$  m dir. Bir bölümü bir sıra tel örgüyle çevirmek için 20 m tel örgü gerektiğine göre iki sıra tel örgüyle çevirmek için 40 m tel örgü gerekmektedir.

Ortak bölüm diğer bölümlerle sınır olduğu için ortak bölümü ayrıca tel örgüyle çevirmeye gerek yoktur. Bundan dolayı  $4 \cdot 40 = 160$  m tel örgü gerekir.

- Bir bölümün alanı  $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$  m<sup>2</sup> olduğundan her bölümde 24 m<sup>2</sup> lik alan çimlendirilecektir. Bundan dolayı çim ekilecek toplam alan  $5 \cdot 24 = 120$  m<sup>2</sup> bulunur.



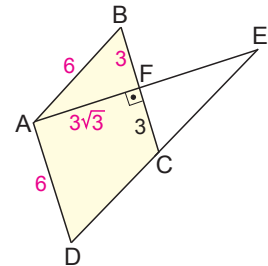
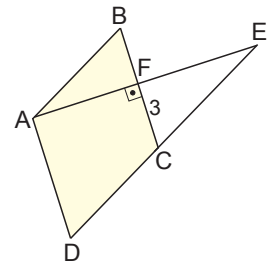
### Örnek

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinde  $[AE] \perp [BC]$  ve  $2|CE| = |DE|$  dir.  $|FC| = 3$  br olduğuna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

### Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeninde  $[CF] \parallel [AD]$  olduğundan 2. Tales teoremi gereğince  $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{|FC|}{|AD|} \Rightarrow \frac{|CE|}{2|CE|} = \frac{3}{|AD|} \Rightarrow |AD| = 6$  br olur. ABCD eşkenar dörtgen olduğundan  $|AB| = |BC| = 6$  br ve  $|BF| = 3$  br dir. ABF üçgeninde Pisagor teoreminden  $|AF|^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow |AF|^2 = 27 \Rightarrow |AF| = 3\sqrt{3}$  br elde edilir. Eşkenar dörtgen bir paralelkenar olduğundan alanı taban uzunluğu ile yükseklik uzunluğunun çarpımına eşittir.

Buradan  $A(ABCD) = 3\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> bulunur.







## Aıştırımalar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

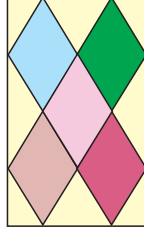
a. Eşkenar dörtgensel bölgenin alanı bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yükseklik uzunluğunun çarpımıdır. (.....)

b. Dörtgensel bölgenin vektörel alan bağıntısında köşegen vektörlerinin iç çarpımı 1 alınarak eşkenar dörtgensel bölgenin vektörel alan bağıntısı bulunur. (.....)

c. Köşegenleri, eşkenar dörtgensel bölgeyi eşit alanlı dört üçgensel bölgeye ayırır. (.....)

ç. Bir kenarının uzunluğu 6 br, ağırlık merkezinin herhangi bir kenarına uzaklığı 3 br olan eşkenar dörtgensel bölgenin alanı  $72 \text{ br}^2$  dir. (.....)

2.  $2,4 \text{ m} \times 3,2 \text{ m}$  boyutlarında olan dikdörtgensel bölge şeklindeki bir halı üzerine 5 eşkenar dörtgensel bölge şeklinde motif dokunmuştur. Buna göre;



a. Bu motiflerin her birinin çevresi farklı renkte bir ip ile dokunacaktır. 1 cm dokuma için 2 cm ip kullanıldığına göre motiflerin her birinin çevresinde kullanılacak ipin uzunluğunu hesaplayınız.

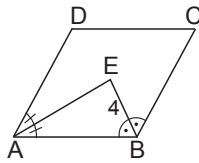
b. Motiflerden her birinin halı üzerinde kapladığı alanı hesaplayınız.

c. Halı ile motifler arasında kalan alanlar toplamını bulunuz.

3. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinde

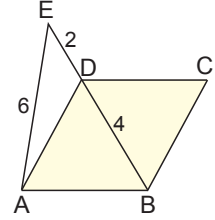
$[AE]$  ve  $[BE]$  açıortay,

$\angle(ABCD) = 8\sqrt{13} \text{ br}$  ve  $|EB| = 4 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

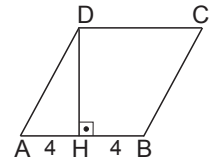


4. Bir ABCD eşkenar dörtgensel bölgenin köşegen uzunlukları e ve f olmak üzere,  $e^2 + f^2 = 89 \text{ br}^2$  ve  $A(ABCD) = 20 \text{ br}^2$  dir. Buna göre, e + f toplamı kaç br dir?

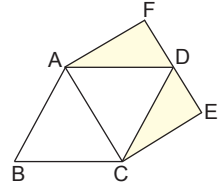
5. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinde B, D ve E noktaları doğrusaldır.  $|AE| = 6 \text{ br}$ ,  $|ED| = 2 \text{ br}$  ve  $|DB| = 4 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



6. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinde  $[DH] \perp [AB]$ ,  $|AH| = |HB| = 4 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

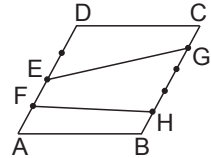


7. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgen ve ACEF dikdörtgendir. Taralı alanlar toplamı  $20 \text{ br}^2$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



8. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinde  $[BC]$  ve  $[AD]$  sırayla beş ve dört eş parçaya ayrılmıştır.

$A(EFGH) = 51 \text{ br}^2$  ve ABCD eşkenar dörtgenin bir köşegenin uzunluğu 20 br olduğuna göre, diğer köşegenin uzunluğu kaç br dir?



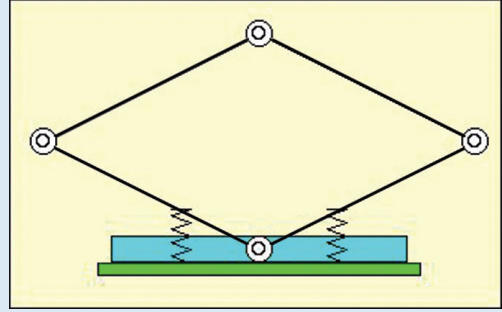


## 2.9. Kare ve Özellikleri



Yandaki şekilde bir süspansiyon düzeneği verilmiştir. Bu düzeneğin bir eşkenar dörtgen ile bu dörtgenin iki kenarına bağlı iki tane yaydan oluşmaktadır.

Düzeneğin yayları, eşkenar dörtgenin bir iç açısı dik konuma gelene kadar hareket ettirilirse düzenekte hangi dörtgen oluşur? Bu dörtgenin iç açılarının ölçülerini ve kenar uzunluklarını yorumlayınız.



### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-2, -3)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(2, 5)$  ve  $D(-4, 3)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

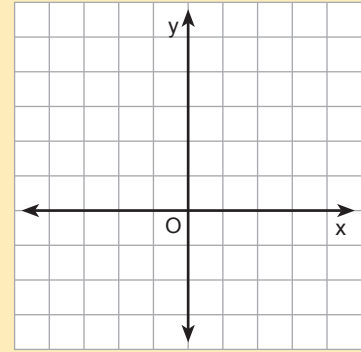
2. ABCD dörtgeninin kenarlarını taşıyan doğruların eğimlerini bulunuz. Bulduğunuz eğimleri karşılaştırarak ABCD dörtgeninin kenarlarının birbirine göre durumlarını belirleyiniz.

3. ABCD dörtgeninin kenar ve köşegen uzunluklarını bulunuz. Köşegen uzunluklarının kenar uzunluklarından yararlanarak nasıl bulunabileceğini tartışınız.

4.  $[AC]$  ve  $[BD]$  nı taşıyan doğru denklemlerini bulunuz. Bu denklemlerin ortak çözümünü yaparak kesim noktasının koordinatlarını hesaplayınız. Bu koordinatların başka yollardan nasıl bulunabileceğini tartışınız.

5.  $[AC]$  ve  $[BD]$  nı taşıyan doğruların eğimlerini kullanarak ABCD dörtgenin köşegenleri arasındaki açıyı belirleyiniz. Köşegenlerin ABCD dörtgeninin köşe açılarını hangi oranda böldüğünü bulunuz.

6. ABCD dörtgeninin özelliklerini paralelkenar ve eşkenar dörtgenin özellikleri ile karşılaştırarak bu dörtgenlerin benzer ve farklı yönlerini tartışınız.

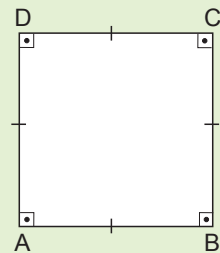


### Bilgi Kutusu

Kenar uzunlukları eşit olan dikdörtgene **kare** denir. Şekildeki ABCD karesinde;

\*  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$  dir.

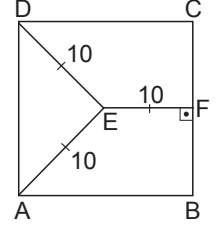
\*  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$  dur.





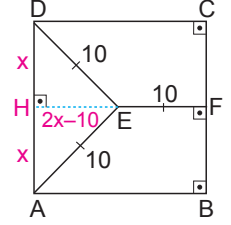
### Örnek

Şekildeki ABCD karesinde  $[EF] \perp [BC]$  ve  $|DE| = |EA| = |EF| = 10$  br olduğuna göre, ABCD karesinin bir kenarının uzunluğunu bulalım.



### Çözüm

$[DA] \perp [EH]$  olacak şekilde  $[EH]$  nı çizerek  $[DA]$  ile kesim noktasını H şeklinde adlandıralım. Bu durumda  $[EH]$ , DEA ikizkenar üçgeninin yüksekliği olduğundan aynı zamanda kenarortaydır. Bundan dolayı  $|DH| = |HA| = x$  br olarak alınırsa karenin bir kenarının uzunluğu  $2x$  br olur. DHFC dikdörtgen olduğundan  $|DC| = |HF| = 2x$  br dir. Dolayısıyla  $|HE| = |HF| - |EF| = (2x - 10)$  br elde edilir. HDE dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

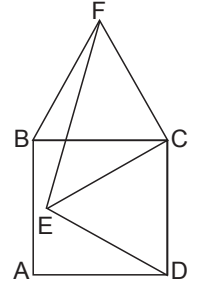


$$10^2 = x^2 + (2x - 10)^2 \Rightarrow 100 = x^2 + 4x^2 - 40x + 100 \Rightarrow 0 = 5x^2 - 40x \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 8 \text{ bulunur.}$$

$x = 0$  olamayacağından  $x = 8$  br olmalıdır. Karenin bir kenarının uzunluğu  $2x = 16$  br bulunur.

### Örnek

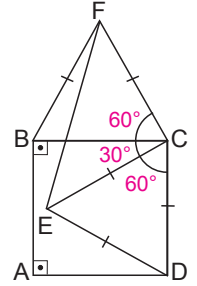
Şekildeki ABCD karesinde DEC ve BFC eşkenar üçgenler olduğuna göre, CEF açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

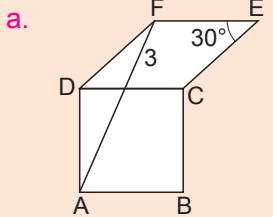
DEC ve BFC eşkenar üçgen olduklarından  $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{BCF}) = 60^\circ$  dir. ABCD karesinde  $m(\widehat{DCB}) = 90^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{ECB}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  elde edilir.

Eşkenar üçgenlerin birer kenarları aynı zamanda karenin de kenarları olduğundan  $|CF| = |EC| = |DC|$  dir. Bundan dolayı ECF ikizkenar üçgendir ve  $m(\widehat{CEF}) = m(\widehat{CFE})$  dür. Buradan  $m(\widehat{CEF}) = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$  bulunur.

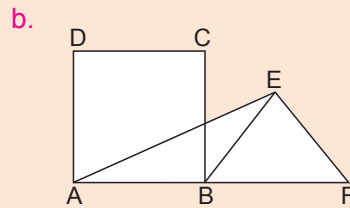


### Uygulama Köşesi

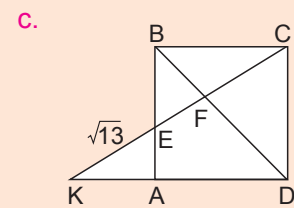
Aşağıdaki şekillerde verilen açı ve uzunluk değerlerini kullanarak karelerin köşegen uzunluklarını bulunuz.



ABCD kare, EFDC eşkenar dörtgen



ABCD kare,  $|EA| = 5\sqrt{3}$  br EBF eşkenar üçgen

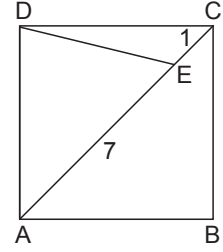


ABCD kare,  $3|EF| = 2|FC|$  D, A, K doğrusal noktalar



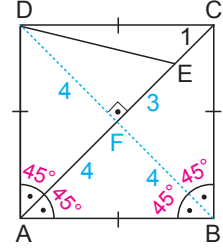
### Örnek

Şekildeki ABCD karesinde A, E ve C noktaları doğrusaldır.  $|AE| = 7$  br ve  $|EC| = 1$  br olduğuna göre,  $|DE|$  nu bulalım.



### Çözüm

Karenin kenar uzunlukları eşit ve iç açılarının ölçüleri  $90^\circ$  olduğundan ABC ve ADC üçgenleri birer ikizkenar dik üçgendir. Buradan  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC}$  olur. Bundan dolayı  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DAC}) = 45^\circ$  ve  $[AC]$  açıortaydır. ABCD karesinin  $[BD]$  köşegeni çizildiğinde  $\widehat{ABD} \cong \widehat{BCD}$  olacağından  $[BD]$  açıortaydır.



Köşegenler açıortay olduğundan köşegenlerin kesim noktası F olarak adlandırıldığında  $m(\widehat{F}) = 90^\circ$  olur. Bundan dolayı DAF, ABF, BCF ve CDF eş ikizkenar dik üçgenlerdir.

$|DF| = |CF| = |BF| = |AF| = 4$  br ve  $|AC| = |BD| = 8$  br dir.

$|EC| = 1$  br olarak verildiğinden  $|FE| = 3$  br dir. DFE dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|DE|^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow |DE| = 5$  br bulunur.

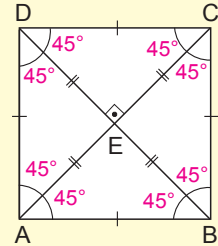


### İnceleyelim

Karenin köşegenlerinin iç açıortaylar olduğunu ve bu köşegenlerin eşit uzunlukta olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD kare,  $[BC]$  ve  $[BD]$  köşegenler

**İstenen:**  $[AC]$  ve  $[BD]$  iç açıortaylar,  $|AC| = |BD|$



#### İfadeler

- $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$
- $\widehat{DAC} \cong \widehat{BCA}, \widehat{ADB} \cong \widehat{CBD}$
- $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DBC})$   
 $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACD})$
- $[AC]$  ve  $[BD]$  iç açıortay
- $m(\widehat{E}) = 90^\circ$
- $\widehat{DEA} \cong \widehat{DEC} \cong \widehat{BEC} \cong \widehat{BEA}$
- $|AE| = |CE| = |BE| = |DE|$
- $|AC| = |BD|$

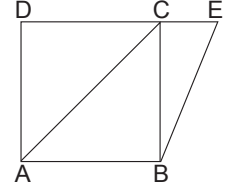
#### Gerekçeler

- Karenin tanımından
- Karenin tanımından
- 1 ve 2. ifadelerden ve K.A.K eşlik teoreminden
3. ifadeden
4. ifadeden
5. ifadeden ve ikizkenar üçgenlerde açıortayın yükseklik olmasından
- A.K.A eşlik teoreminden
7. ifadeden
8. ifadeden ve bütün-parça ilişkisinden



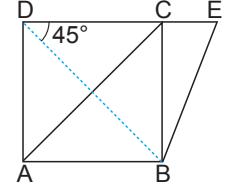
### Örnek

Şekildeki ABCD karesinde D, C, E noktaları doğrusaldır.  $|AC| = |DE|$  olduğuna göre, DEB açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

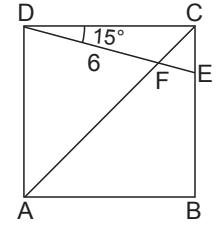
ABCD karesinde  $[DB]$  köşegen çizildiğinde  $|AC| = |DB|$  ve  $|AC| = |DE|$  olduğundan  $|DB| = |DE|$  dur. Bundan dolayı DEB ikizkenar üçgendir ve  $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DEB})$  dır. Karenin köşegenleri iç açılarını açıortayları olduğundan  $m(\widehat{BDE}) = 45^\circ$  dir.



$$\text{Buradan } m(\widehat{DEB}) = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} \Rightarrow m(\widehat{DEB}) = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ bulunur.}$$

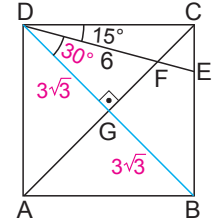
### Örnek

Şekildeki ABCD karesinde  $[DE] \cap [AC] = \{F\}$  dir.  $m(\widehat{CDE}) = 15^\circ$  ve  $|DF| = 6$  br olduğuna göre, karenin köşegen uzunluğunu bulalım.



### Çözüm

ABCD karesinin  $[BD]$  köşegenini çizerek  $[AC]$  ile kesim noktasını G olarak adlandıralım. Karenin köşegenleri dik kesiştiğinden  $m(\widehat{DGC}) = 90^\circ$  olur. Köşegen, açıortay olduğundan  $m(\widehat{GDC}) = 45^\circ$  ve  $m(\widehat{GDF}) = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$  dir.

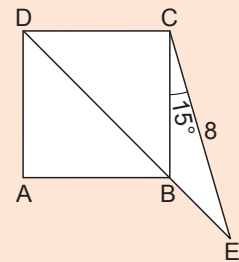


$$\text{DGF üçgeninden } \cos 30^\circ = \frac{|DG|}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|DG|}{6} \Rightarrow |DG| = 3\sqrt{3} \text{ br elde edilir.}$$

Karenin köşegenleri birbirini ortaladığından,  $|DG| = |GB| = 3\sqrt{3}$  br ve  $|DB| = 6\sqrt{3}$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

1. Şekildeki ABCD karesinde D, B ve E noktaları doğrusaldır.  $|CE| = 8$  br ve  $m(\widehat{ECB}) = 15^\circ$  olduğuna göre, ABCD karesinin kenar ve köşegen uzunluklarını bulunuz.



2.



Paralelkenar



Dikdörtgen



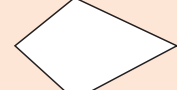
Kare



Eşkenar dörtgen



Yamuk



Deltoid

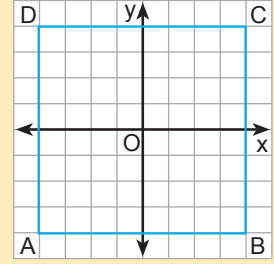
Yukarıda verilen dörtgenlerden hangilerinin kenar orta noktaları birleştirildiğinde oluşan şekil bir karedir? Verdiğiniz cevaba göre, dörtgenlerin kenar orta noktaları birleştirildiğinde oluşan şeklin kare olma koşullarını tartışınız.





## Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde verilen karenin köşe noktalarının koordinatlarını belirleyiniz.
2. Bulduğunuz koordinatları  $f(x, y) = (-y, x)$  ( $90^\circ$  lik dönme simetrisi) fonksiyonunda sırayla yerine yazarak  $f(A)$ ,  $f(B)$ ,  $f(C)$  ve  $f(D)$  görüntülerini bulunuz.
3. Bulduğunuz görüntülerin, karenin köşe noktaları olup olmadığını açıklayınız.
4. Etkinliğin 2. adımını  $180^\circ$  ve  $270^\circ$  lik dönme simetrileri için tekrarlayınız.
5. Uyguladığınız adımlara göre, bir karenin  $360^\circ$  den küçük olmak şartıyla kaç derecelik açılarla döndürüldüğünde yine kendisi ile çakıştığını açıklayınız.



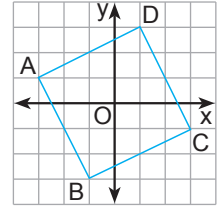
## Bilgi Kutusu

Bir şekil kendi merkezi etrafında döndürüldüğünde  $360^\circ$  den küçük açılı dönmelerde en az bir defa kendisi ile çakışıyorsa bu şekil dönme simetrisine sahiptir. Kare  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ve  $270^\circ$  döndürüldüğünde yine kendisi ile çakıştığından dönme simetrisine sahiptir.

Karenin simetri eksenleri köşegenlerin taşıyıcı doğruları ve karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçalarının taşıyıcı doğruları olmak üzere, dört tanedir.

## Örnek

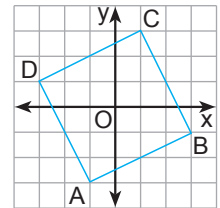
Yandaki analitik düzlemde verilen ABCD karesinin pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen görüntüsünü bulalım.



## Çözüm

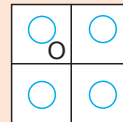
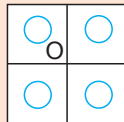
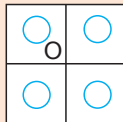
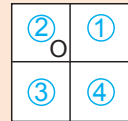
Değişken bir  $P(x, y)$  noktasının orijin etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen nokta,

$P' = R_{90^\circ}(x, y) = (x \cdot \cos 90^\circ - y \cdot \sin 90^\circ, x \cdot \sin 90^\circ + y \cdot \cos 90^\circ) = (-y, x)$  tir. Bu dönüşüm  $f(x, y) = (-y, x)$  olarak alınırsa,  $f(A) = f(-3, 1) = (-1, -3)$ ,  $f(B) = f(1, -3) = (3, -1)$ ,  $f(C) = f(3, -1) = (1, 3)$ ,  $f(D) = f(-1, 3) = (-3, 1)$  elde edilir. Bu görüntüler analitik düzlemde şekildeki gibi çizildiğinde,  $f(A) = B$ ,  $f(B) = C$ ,  $f(C) = D$  ve  $f(D) = A$  olduğu görülür.



## Uygulama Köşesi

Yandaki karenin simetri eksenleri çizilerek oluşan bölgeler rakamlarla gösterilmiştir. Bu karenin O noktası etrafında saat yönünde  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ve  $270^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen karelerin rakamlarını doğru olacak şekilde yerleştiriniz.







## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

- Karenin köşegenleri birbirini ortalar. (.....)
- Karenin köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranı  $\sqrt{2}$  dir. (.....)
- Karenin 3 tane simetri ekseni vardır. (.....)
- Karenin köşegenlerinin kesim noktasının herhangi bir kenarına olan uzaklığı kenar uzunluğunun yarısına eşittir. (.....)
- Karenin en küçük dönme simetri açısı  $45^\circ$  dir. (.....)
- Bir karenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen yine bir karedir. (.....)

2.

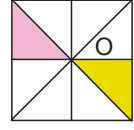


Beyzbol, dokuzar oyuncuya sahip iki takım arasında oynanan bir oyundur. Beyzbol sahası yukarıdaki fotoğrafta görüldüğü gibi kare şeklinde olup sahanın köşelerinde kaleler yer almaktadır.

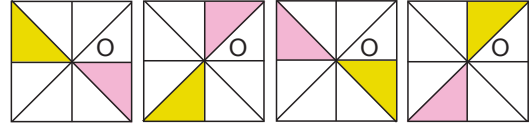
Bir beyzbol maçında fırlatıcının attığı topa tahta sopa ile vuran sayı kalesindeki oyuncu, top yere düşene kadar tüm kaleleri dolaşarak tekrar sayı kalesine gelebilirse 1 sayı turu yapmış sayılır.

Buna göre, fırlatıcının attığı topa vuran oyuncu 5 m/sn hızla tüm kaleleri dolaşarak topun yere düştüğü anda sayı turunu tamamlamaktadır. Topun hareketi 21,6 sn sürdüğüne göre, oyun sahasının çevresini bulunuz.

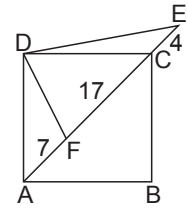
3. Yandaki karenin simetri eksenlerinin çizilmesiyle oluşan bölgelerinden bazıları renklendirilmiştir.



Bu karenin aşağıda verilen O merkezli dönmelerinin yönünü ve derecelerini belirleyiniz.

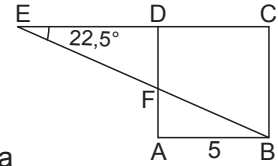


4. Şekildeki ABCD karesinde A, F, C ve E noktaları doğrusaldır.

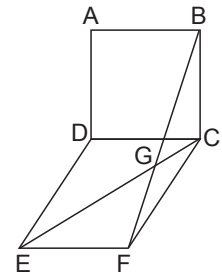


$|AF| = 7$  br,  
 $|FC| = 17$  br ve  $|CE| = 4$  br olduğuna göre,  
 $|DE| + |DF|$  toplamı kaç br dir?

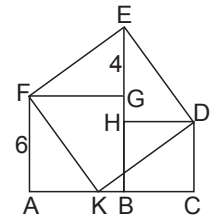
5. Şekildeki ABCD karesinde  $m(\widehat{BEC}) = 22,5^\circ$  ve  $|AB| = 5$  br olduğuna göre,  $|ED|$  kaç br dir?



6. Yandaki şekildeki ABCD karesi ve EFCD eşkenar dörtgeni verilmiştir.  $[BF] \cap [EC] = \{G\}$  olduğuna göre,  $m(\widehat{EGF})$  kaç derecedir?



7. Yandaki şekilde ABGF, BCDH ve EFKD kareleri verilmiştir. B, H, G ve E noktaları doğrusal,  $|EG| = 4$  br ve  $|AF| = 6$  br olduğuna göre,  $|CD|$  kaç br dir?





## 2.10. Karesel Bölgenin Alanı



Tüm sayısal görüntülerin en küçük parçası olan üçlü nokta grubuna “piksel (gözek)” denir. Pikseller kare şeklindedir ve digital görüntüler yana yana gelen piksellerden oluşur. Yandaki görüntü, fotoğrafı 16 kat büyüttüğümüzde görebildiğimiz piksellerdir.

PPC (Pixel Per Centimetre) şeklinde adlandırılan resmin piksel yoğunluğu, 1 inç karede (1 inç = 2.54 cm) bulunan piksel sayısı anlamına gelmektedir.

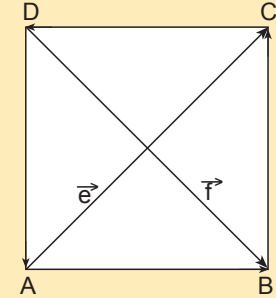
Buna göre, bir kenarı 10 cm olan kare şeklindeki bir görüntü 100 piksel yoğunluğuna sahip ise bu resimde kaç piksel olduğunu bulmak için karenin alanından nasıl yararlanılabileceğini yorumlayınız.



### Etkinlik

1. Yandaki şekilde köşegen vektörleri  $\vec{e}$  ve  $\vec{f}$  olan bir karesel bölge verilmiştir. “Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanının vektörel bağıntısı  $A = \frac{\sqrt{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 - \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle^2}}{2}$  dir.” bilgisini göz önünde bulundurarak aşağıdaki boş bırakılan yerleri doğru olacak şekilde tamamlayınız.

Karenin köşegen vektörleri arasındaki açı ..... derece olduğundan  $\langle \vec{e}, \vec{f} \rangle = \dots\dots$  dır. Buradan  $A = \dots\dots\dots$  elde edilir. Karekök alma işleminden  $A = \dots\dots\dots$  bulunur.

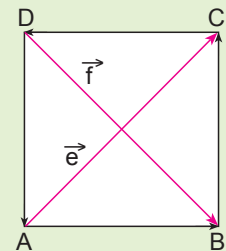


2. Karenin köşegen vektörlerinin uzunlukları ile kenar vektörlerinin uzunlukları arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak karesel bölgenin alanını kenar vektörü cinsinden veren vektörel bağıntıyı bulunuz.



### Bilgi Kutusu

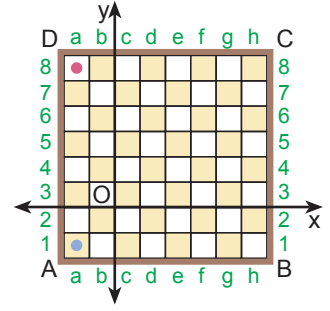
Köşegen vektörleri  $\vec{e}$  ve  $\vec{f}$  olan ABCD karesel bölgenin alanı  $A = \frac{\|\vec{e}\|^2}{2}$  veya  $A = \|\vec{AB}\|^2$  bağıntıları ile bulunabilir.





### Örnek

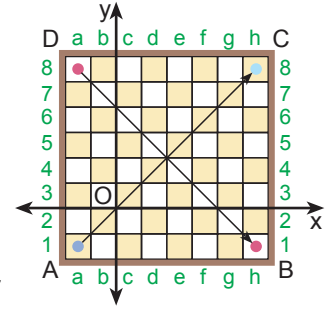
Analitik düzleme yerleştirilen şekildeki satranç tahtasının a1 ve a8 karelerinde bulunan iki filden birincisi h8, ikincisi h1 karesine hareket ettiriliyor. Buna göre fillerin hareketini belirten vektörleri kullanarak satranç tahtasının alanını karesel bölgenin vektörel alan bağıntısı yardımıyla bulalım..



### Çözüm

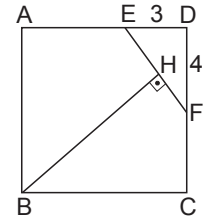
Satranç tahtası karesel bölge olduğundan fillerin hareketi bu bölgenin köşegen vektörleridir. Fillerin hareketleri  $\vec{AC}$  ve  $\vec{DB}$  ile gösterildiğinde  $A(-2, -2)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(6, 6)$  ve  $D(-2, 6)$  olmak üzere,  $\vec{AC} = (6 - (-2), 6 - (-2)) = (8, 8)$  ve  $\vec{DB} = (6 - (-2), -2 - 6) = (8, -8)$  elde edilir.

Buradan  $\|\vec{AC}\| = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$  br ve  $\|\vec{DB}\| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$  br elde edilir. Buradan  $A(ABCD) = \frac{\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{DB}\|}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 64 \text{ br}^2$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki ABCD karesinde  $[BH] \perp [EF]$  dir.  $|DF| = |FC| = 4$  br ve  $|ED| = 3$  br olduğuna göre,  $|BH|$  nu bulalım.



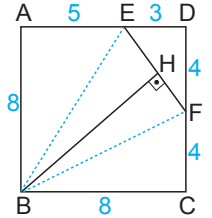
### Çözüm

Karenin kenar uzunlukları şekildeki gibi yerleştirildiğinde DEF dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|EF|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |EF| = 5$  br olur.

$A(ABCD) = 8^2 = 64 \text{ br}^2$  olduğundan bütün-parça ilişkisinden,

$$A(ABCD) = A(\widehat{AEB}) + A(\widehat{CBF}) + A(\widehat{DEF}) + A(\widehat{BEF})$$

$$64 = \frac{8 \cdot 5}{2} + \frac{8 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot |BH|}{2} \Rightarrow 64 = 20 + 16 + 6 + \frac{5 \cdot |BH|}{2} \Rightarrow 22 = \frac{5 \cdot |BH|}{2} \Rightarrow |BH| = \frac{44}{5} \text{ br bulunur.}$$



### Örnek

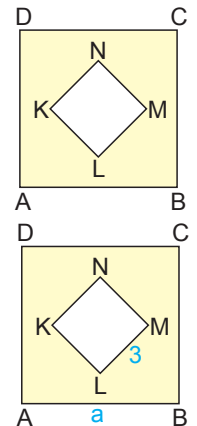
Şekildeki ABCD ve KLMN birer karedir.  $|KL| = 3$  br ve taralı bölgenin alanı  $72 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ABCD karesinin çevresinin uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

ABCD karesinin bir kenar uzunluğu  $a$  br olsun. Taralı bölgenin alanı, karesel bölgelerin alanları farkı olduğundan,

$$72 = A(ABCD) - A(KLMN) \Rightarrow 72 = a^2 - 3^2 \Rightarrow 72 = a^2 - 9 \Rightarrow 81 = a^2 \Rightarrow a = 9 \text{ br dir.}$$

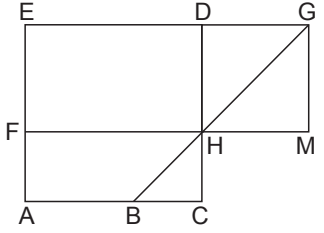
Buradan  $\mathcal{C}(ABCD) = 4 \cdot 9 = 36 \text{ br}$  bulunur.





### Örnek

Yandaki şekilde AEDC ve HMGD karesel bölgeleri verilmiştir. G, H ve B noktaları doğrusal,  $A(ABHF) = 10 \text{ br}^2$  ve  $A(AEDC) = 36 \text{ br}^2$  olduğuna göre, HMGD karesel bölgenin alanını bulalım.



### Çözüm

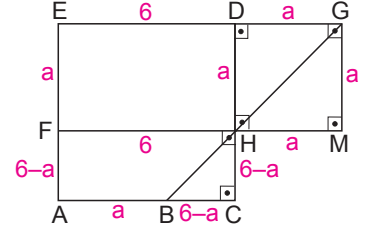
$A(AEDC) = 36 \text{ br}^2$  verildiğinden  $|AE| = |ED| = |DC| = |CA| = 6 \text{ br}$  olur. HMGD karesinin bir kenarı  $a \text{ br}$  olarak alınırsa  $|EF| = a \text{ br}$ ,  $|AF| = (6 - a) \text{ br}$  ve  $|HC| = (6 - a) \text{ br}$  elde edilir.

$[HG]$ , HMGD karesinin köşegeni olduğundan  $m(\widehat{GHM}) = 45^\circ$  dir. Buradan  $m(\widehat{BHC}) = 45^\circ$  bulunur. Bundan dolayı HCB ikizkenar üçgen ve  $|BC| = (6 - a) \text{ br}$  olur. Buradan  $|AB| = a \text{ br}$  dir.

ABHF yamuksal bölge olduğundan,

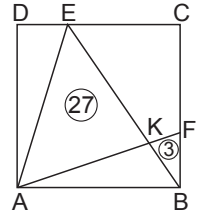
$$A(ABHF) = \frac{(a+6) \cdot (6-a)}{2} \Rightarrow 10 = \frac{36-a^2}{2} \Rightarrow 36-a^2 = 20 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ br} \text{ elde edilir.}$$

Bundan dolayı  $A(HMGD) = a^2 = 16 \text{ br}^2$  bulunur.



### Örnek

ABCD karesel bölgesinde  $[EB] \cap [AF] = \{K\}$  dir.  $|CF| = 3|FB|$ ,  $A(\widehat{KFB}) = 3 \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{AEK}) = 27 \text{ br}^2$  olduğuna göre, ABCD karesinin alanını ve çevresini bulalım.



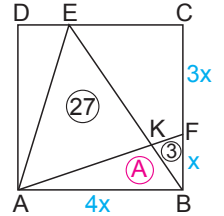
### Çözüm

$|FB| = x \text{ br}$  alınırsa  $|CF| = 3x \text{ br}$  ve  $|AB| = 4x \text{ br}$  olur.  $A(\widehat{AKB}) = A$  olarak alınırsa  $A(\widehat{ABF}) = A + 3 \Rightarrow \frac{4x \cdot x}{2} = A + 3 \Rightarrow 2x^2 = A + 3$  olur. (\*)

EAB üçgensel bölgenin alanı karesel bölgenin alanın yarısı olduğundan,

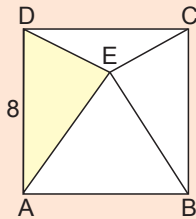
$$A(\widehat{EAB}) = \frac{(4x)^2}{2} \Rightarrow 27 + A = 8x^2 \text{ olur. (**)}$$

(\*) eşitliğinden (\*\*) çıkarılırsa  $6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ br}$  elde edilir. Buradan  $|AB| = 4x \Rightarrow |AB| = 8 \text{ br}$  olur.  $A(ABCD) = 8^2 = 64 \text{ br}^2$  ve  $\text{Ç}(ABCD) = 4 \cdot 8 = 32 \text{ br}$  bulunur.

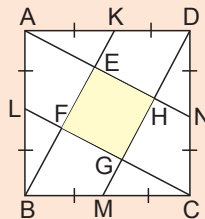


### Uygulama Köşesi

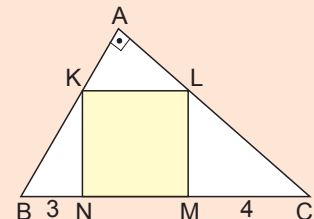
Aşağıdaki şekillerde verilen uzunluk değerlerini kullanarak boyalı bölgelerin alanlarını bulunuz.



ABCD karesel bölge,  
AEB eşkenar üçgen



ABCD karesel bölge,  
 $A(ABCD) = 40 \text{ br}^2$



KLMN karesel bölge,  
BAC dik üçgen



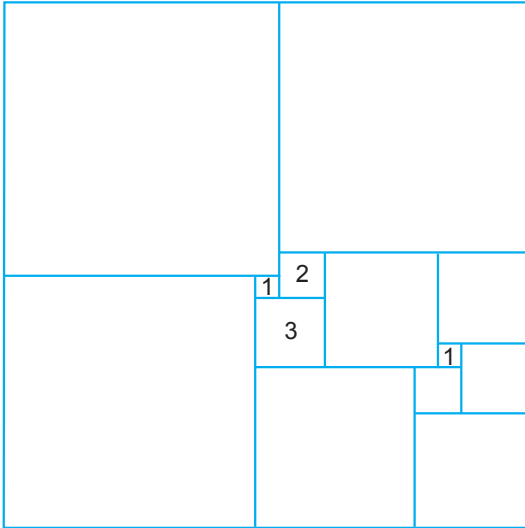


## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

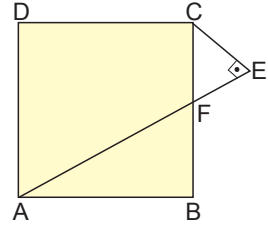
- a. Karesel bölgenin köşegenlerinin oluşturduğu üçgensel bölgelerin her birinin alanı karesel bölgenin alanının  $\frac{1}{4}$  tür. (.....)
- b. Karesel bölgenin içindeki herhangi bir noktanın köşelere birleştirilmesiyle elde edilen üçgensel bölgelerden karşılıklı olanların alanları çarpımı birbirine eşittir. (.....)
- c. Karesel bölgenin bir kenar uzunluğu % 10 arttırılırsa alanı % 10 artar. (.....)
- ç. Paralelkenarsal bölgenin alan bağıntıları karesel bölgede de geçerlidir. (.....)

2.

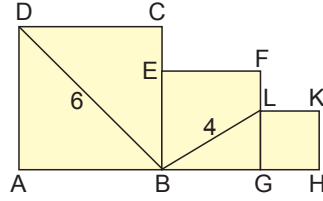


Yukarıdaki şekil karesel bölge içinde farklı kenar uzunluklarına sahip karesel bölgelerden oluşturulmuştur. Bu bölgelerin bazılarının çevreleri br cinsinden içlerine yazılmıştır. Buna göre, her karesel bölgenin çevresini bularak içlerine yazınız ve en büyük karesel bölgenin alanını hesaplayınız.

3. Şekildeki ABCD karesel bölgesinde  $[CB] \cap [AE] = \{F\}$ ,  $[CE] \perp [AE]$ ,  $m(\widehat{BCE}) = 15^\circ$  ve  $|CE| = 4$  br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $br^2$  dir?

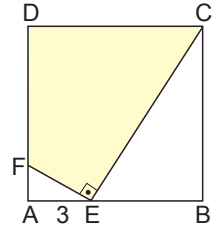


4.

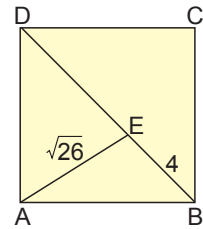


Şekildeki ABCD, BGFE ve GHKL birer karedir.  $|DB| = 6$  br ve  $|BE| = 4$  br olduğuna göre, karelerin alanları toplamı kaç  $br^2$  dir?

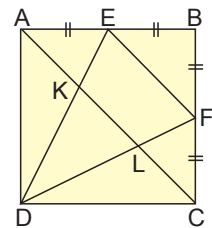
5. Şekildeki ABCD karesel bölgesinde  $[FE] \perp [EC]$ ,  $|AE| = 3$  br ve  $A(ABCD) = 81$   $br^2$  olduğuna göre, DFEC dörtgeninin alanı kaç  $br^2$  dir?



6. Şekildeki ABCD karesel bölgesinde  $[DB]$  köşegen,  $|AE| = \sqrt{26}$  br ve  $|EB| = 4$  br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $br^2$  dir?



7. Şekilde ABCD karesel bölgesinde E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(EFKL) = 25$   $br^2$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $br^2$  dir?





## 2.11. Deltoid ve Özellikleri



Yukarıdaki fotoğrafta verilen nesneler iki ikizkenar üçgenden oluşan dörtgenler şeklindedir. Bu dörtgenlerin özelliklerinin neler olabileceğini, ikizkenar üçgenlerin özelliklerini göz önünde bulundurarak yorumlayınız. Siz de çevrenizden bu dörtgenlere örnekler veriniz.



### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, -5)$ ,  $C(5, 1)$  ve  $D(2, 4)$  olan ABCD dörtgenini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

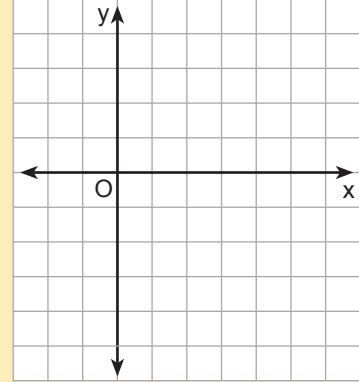
2. ABCD dörtgeninin kenarları taşıyan doğruların eğimlerini bularak kenarların paralellliğini tartışınız

3. ABCD dörtgeninin kenarlarının uzunluklarını bulunuz. Bu uzunluklar arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

4.  $\vec{AC}$  ve  $\vec{DB}$  nü çizerek bu vektörler arasındaki açının ölçüsünü bulunuz.

5. ABCD dörtgeninin  $\vec{AC}$  ile  $\vec{AD}$  ve  $\vec{AC}$  ile  $\vec{DC}$  arasındaki açılarını bularak karşılaştırınız. Benzer işlemleri A ve C köşelerinin diğer açıları için tekrarlayarak bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

6. ABCD dörtgeni ile ilgili elde ettiğiniz sonuçları kare ve eşkenar dörtgenin özellikleri ile karşılaştırınız.

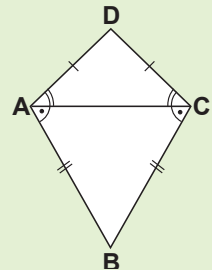


### Bilgi Kutusu

Köşegenlerinden biri, iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgene **deltoid** denir. Şekildeki ABCD deltoidinde;

\*  $|DA| = |DC|$  ve  $|BA| = |BC|$  dur.

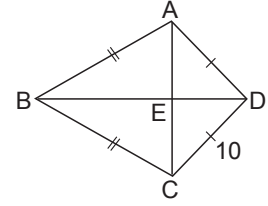
\*  $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$  dür.





### Örnek

Şekildeki ABCD deltoidinde  $|AB| = |BC|$  ve  $|AD| = |DC| = 10$  br dir.  $|AC| = 16$  br ve  $|DB| = 21$  br olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



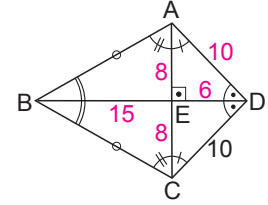
### Çözüm

ABCD deltoidinde ikizkenar üçgenlerin taban açıları şekildeki gibi gösterildiğinde K.A.K eşlik teoremi gereğince  $\triangle ADB \cong \triangle CDB$  olur.

Buradan  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CDB})$  ve  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$  bulunur. Bu durumda  $[DB]$  köşegeni ABCD deltoidinin açıortayıdır.

ADC ikizkenar üçgeninin  $[DE]$  açıortayı aynı zamanda yüksekliği ve kenarortayı olduğundan,  $[DB] \perp [AC]$  ve  $|AE| = |EC| = 8$  br elde edilir.

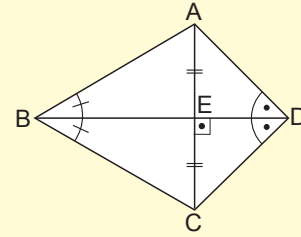
AED dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $10^2 = 8^2 + |DE|^2 \Rightarrow |DE| = 6$  br ve  $|EB| = 21 - 6 = 15$  br elde edilir. AEB dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|AB|^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow |AB| = 17$  br bulunur.



### Özellikler

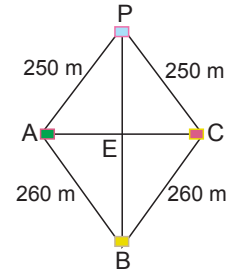
Şekildeki ABCD deltoidinde;

- \*  $[AC] \perp [DB]$  dir.
- \*  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CDB})$  ve  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$  dür.
- \*  $|AE| = |EC|$  dur.



### Örnek

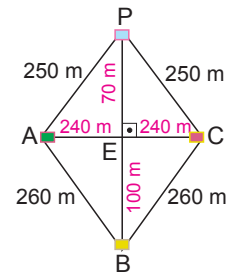
Bir kargo şirketi görevlisi A, B ve C evlerine gelen paketleri dağıtmak üzere şirkettinden hareket ediyor. Görevli dakikada 100 m sabit hızla yürüyebilmektedir. Şirket ve evler arasındaki en kısa yollar ve uzunlukları yandaki şekil üzerinde gösterilmiştir. Görevli paketleri A, B ve C sırasıyla teslim etmek yerine B, A ve C sırasıyla teslim ederse kaç dakika zaman kaybedeceğini bulalım. (A ve C evleri arasındaki uzaklık 480 metredir.)



### Çözüm

Kargo şirketi ve evler arasındaki mesafeler incelediğinde P, A, B ve C konumlarını birleştiren yolların bir deltoid oluşturduğu görülür. Deltoidin köşegenleri dik kesiştiğinden,  $[PB] \perp [AC]$  dir. Aynı zamanda deltoidin özelliğinden,  $|AE| = |EC| = 240$  m dir. PEC ve CEB dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden  $|PE|^2 + 240^2 = 250^2 \Rightarrow |PE|^2 = 250^2 - 240^2 \Rightarrow |PE|^2 = (250 - 240) \cdot (250 + 240) \Rightarrow |PE|^2 = 4900 \Rightarrow |PE| = 70$  m ve  $|EB|^2 + 240^2 = 260^2 \Rightarrow |EB|^2 = 260^2 - 240^2 \Rightarrow |EB|^2 = (260 - 240) \cdot (260 + 240) \Rightarrow |EB|^2 = 10000 \Rightarrow |EB| = 100$  m dir.

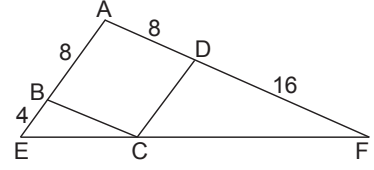
O hâlde görevli, paketleri A, B, C sırasıyla teslim etseydi 770 m, B, A, C sırasıyla teslim etseydi 910 m yol gidecekti. Dolayısıyla 140 m fazladan yol gitmiştir. Görevli, dakikada 100 m yol yürüyebildiğine göre 1,4 dk zaman kaybetmiştir.





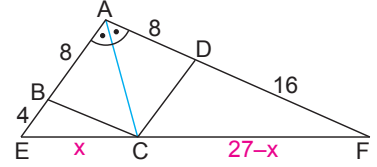
### Örnek

Şekildeki AEF üçgeninde  $|BC| = |CD|$  ve  $|AB| = |AD| = 8$  br dir.  $|BE| = 4$  br,  $|DF| = 16$  br ve  $|EF| = 27$  br olduğuna göre,  $|EC|$  nu bulalım.



### Çözüm

$|AB| = |AD|$  ve  $|BC| = |CD|$  olarak verildiğinden ABCD bir deltoidtir.  $[AC]$  köşegeni çizildiğinde bu köşegen açıortay olacağından,  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$  olur.

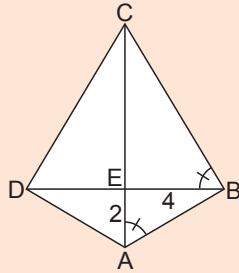


$|EC| = x$  br olarak alınırsa  $|CF| = (27 - x)$  br olur. AEF üçgeninde iç açıortay teoreminden  $\frac{12}{24} = \frac{x}{27-x} \Rightarrow 2x = 27 - x \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

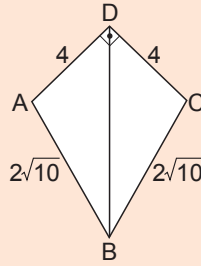
Aşağıdaki şekillerde verilenler yardımıyla istenilen açı ve uzunluk değerlerini bulunuz.

a.



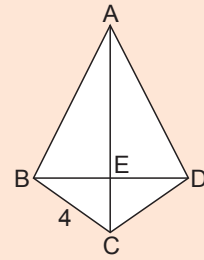
ABCD deltoid,  $|AD| = |AB|$ ,  
 $|BC| = ?$

b.



ABCD deltoid,  
 $|DB| = ?$

c.



ABCD deltoid,  $|AE| = 3|EC|$ ,  
 $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ ,  $|BD| = ?$

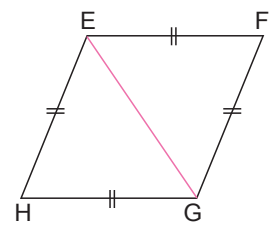
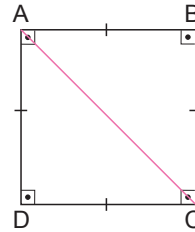
### Örnek

Kare ve eşkenar dörtgenin ortak tabanlı iki ikizkenar üçgenden oluştuğunu gösterelim.

### Çözüm

Yandaki şekillerde ABCD karesi ve EFGH eşkenar dörtgeni ile bu dörtgenlerin  $[AC]$  ve  $[EG]$  köşegenleri çizilmiştir.

Bir karenin kenar uzunlukları birbirine eşit olduğundan ABCD karesinde ABC ve ADC üçgenleri ortak tabanlı ikizkenar üçgenlerdir.



Bir eşkenar dörtgenin kenar uzunlukları birbirine eşit olduğundan EFG ve EHG ortak tabanlı ikizkenar üçgenlerdir. Bundan dolayı kare ve eşkenar dörtgen ortak tabanlı iki ikizkenar üçgenden oluşmuştur.

### Uyarı

Kare ve eşkenar dörtgen özel bir deltoidtir.



## Uygulama Köşesi

**Araç ve gereç:** cetvel, pergel

1. Çizim için ayrılan yandaki alana herhangi bir doğru parçası çizerek uç noktalarını A ve C olarak adlandırınız.

2. Pergelinizin arasını  $\frac{|AC|}{2}$  den büyük olacak şekilde açınız.  $[AC]$  nın üst kısmında yer alacak biçimde A ve C merkezli birer yay çizerek bu yayların kesim noktasını D olarak adlandırınız.

3. Pergelinizin açıklığını biraz daha artırarak  $[AC]$  nın alt kısmında yer alacak biçimde A ve C merkezli birer yay çiziniz. Bu yayların kesim noktasını B olarak adlandırınız.

4. A, B, C ve D noktalarını sırayla birleştirerek ABCD dörtgenini elde ediniz.

5. Oluşan ABCD dörtgeninin özellikleri hakkında ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.

## Araştırma Sorusu

Deltoid çizimlerinin farklı yollarla nasıl yapılacağını araştırarak sınıfınızda paylaşınız.

## Alıştırmalar

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

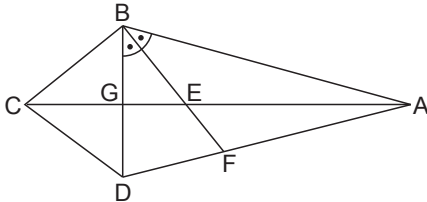
a. Köşegenlerinden biri ..... tabanı olan dörtgene deltoid denir.

b. Deltoidin köşegenleri arasındaki açı ..... derecedir.

c. Kare ve ..... özel bir deltoiddir.

ç. Dik kenarları 4 br olan ikizkenar bir dik üçgen ile kenar uzunluğu  $4\sqrt{2}$  br olan bir eşkenar üçgenden deltoid oluşturulursa deltoidin köşegenlerinin kesim noktasının kısa kenarına olan uzaklığı ..... br olur.

2.



Şekildeki ABCD deltoidinde  $|BC| = |CD|$  ve  $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{FBD})$  dür.  $2|FD| = |AF|$  ve  $|AG| = 3\sqrt{15}$  br olduğuna göre,  $|EG|$  kaç br dir?

3. Yukarıdaki ABCD

deltoidinde  $[AC]$  ve

$[BD]$  köşegenlerdir.

$|AD| = |AB|$  olduğuna

göre, aşağıda verilen

ifadelerin sonlarındaki noktalı yerlere ifade doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

•  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$  (.....)

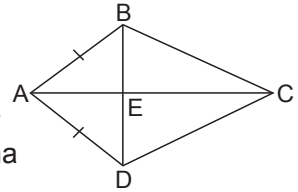
•  $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBE})$  (.....)

•  $|BE| = |ED|$  (.....)

•  $|AE| = |EC|$  (.....)

•  $[AD] \perp [DC]$  (.....)

•  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$  (.....)



4. Şekildeki ABCD

deltoidinde  $|AB| = |BC|$ ,

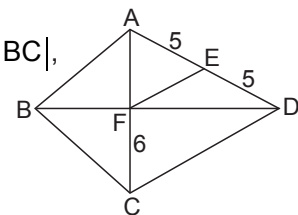
$|AE| = |ED| = 5$  br,

$|FC| = 6$  br dir.

ABCD deltoidinin

köşegen uzunlukları toplamı 25 br olduğuna

göre,  $|BF|$  kaç br dir?



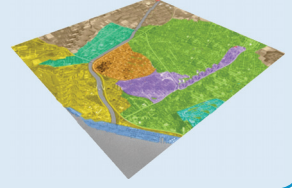


## 2.12. Deltoidsel Bölgenin Alanı



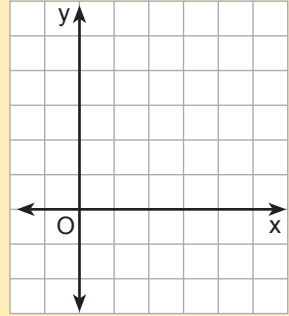
Yandaki fotoğrafta bir şehrin kuş bakışı görünümü verilmiştir. Bu şehrin sınırladığı alan bir deltoidsel bölge oluşturmaktadır.

Buna göre, şehrin sınırladığı alanı bulmak için deltoidin hangi uzunluklarının bilinmesi gerekir? Tartışınız.



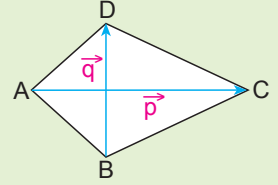
### Etkinlik

1. Köşelerinin koordinatları  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, -2)$ ,  $C(5, 0)$  ve  $D(2, 5)$  olan ABCD deltoidini yandaki analitik düzlemde çizin.
2. ABCD deltoidinin köşegen vektörlerini çizerek  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  şeklinde adlandırınız ve  $\|\vec{p}\|$  ve  $\|\vec{q}\|$  değerlerini bulunuz.
3.  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  köşegen vektörleri arasındaki açıdan yararlanarak  $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$  değerini bulunuz.
4. Dörtgensel bölgenin alanını veren vektörel ifadeyi yazınız.
5. Etkinliğin 2 ve 3. adımlarında bulduğunuz değerleri dörtgensel bölgenin vektörel alan ifadesinde yerine yazarak ABCD deltoidsel bölgenin alanını hesaplayınız.
6. ABCD deltoidsel bölgenin alanının farklı yollardan nasıl bulunabileceğini tartışınız.



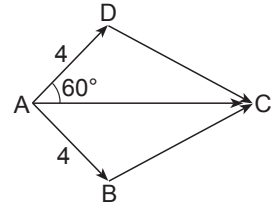
### Bilgi Kutusu

Köşegen vektörleri  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  olan ABCD deltoidsel bölgesinin alanı  $A(ABCD) = \frac{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|}{2}$  bağıntısı ile bulunur.



### Örnek

Şekildeki deltoidsel bölgede  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = 4$  br ve  $\|\vec{CD}\| = \|\vec{CB}\|$  dur.  $\langle \vec{AD}, \vec{AC} \rangle = 14$  ve  $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$  olduğuna göre, ABCD deltoidsel bölgenin alanını bulalım.



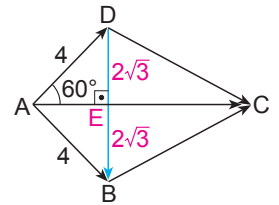
### Çözüm

Vektörlerin iç çarpımından  $\langle \vec{AD}, \vec{AC} \rangle = 14 \Rightarrow \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos 60^\circ = 14 \Rightarrow 4 \|\vec{AC}\| \cdot \frac{1}{2} = 14 \Rightarrow \|\vec{AC}\| = 7$  br dir.  $\vec{DB}$  köşegen vektörü çizilerek  $\vec{AC}$  ile kesim noktası E olarak adlandırılırsa  $m(\widehat{DEA}) = 90^\circ$  ve  $\|\vec{DE}\| = \|\vec{EB}\|$  olur.

DEA dik üçgeninden  $\sin 60^\circ = \frac{\|\vec{DE}\|}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\|\vec{DE}\|}{4} \Rightarrow \|\vec{DE}\| = 2\sqrt{3}$  br elde edilir.

Bundan dolayı  $\|\vec{DB}\| = 4\sqrt{3}$  br dir.

Buradan  $A(ABCD) = \frac{\|\vec{DB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}{2} \Rightarrow A(ABCD) = \frac{4\sqrt{3} \cdot 7}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 14\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> bulunur.





### Örnek

Uzunlukları 52 cm ve 67 cm olan iki çita ile deltoid şeklinde bir uçurtma yapılacaktır. Uçurtmanın iplerini bağlamak için uçurtmanın köşelerinde ikişer cm boşluk bırakılmıştır.

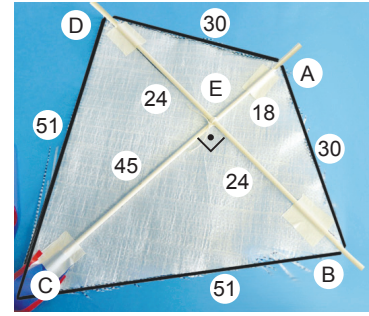
Uzun çita kısa çita tarafından 2 ve 5 ile orantılı olacak şekilde bölündüğüne göre;

a. Düğümlenen ipleri göz ardı ederek uçurtmayı çevrelemek için kullanılacak ipin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.

b. Uçurtmayı kaplamak için kaç  $\text{cm}^2$  naylon kullanılacağını bulalım. (Katlanan bölgeler göz ardı edilecektir.)

### Çözüm

Deltoidin köşelerini A, B, C ve D olarak adlandıralım. Çıtalar deltoidsel bölgenin köşegenlerini oluşturur. Bu yüzden çıtaların arasındaki açı  $90^\circ$  dir. Çıtaların kesim noktası E olsun. Köşelerde ikişer cm boşluk bırakıldığı için  $|BE| = |ED| = \frac{52 - 4}{2} = 24$  cm olur. Uzun çita 2 ve 5 ile orantılı iki parçaya bölündüğünden  $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{2}{5} \Rightarrow |AE| = 2k$ ,  $|EC| = 5k$  ve  $|AC| = 63$  cm  $\Rightarrow 7k = 63 \Rightarrow k = 9$  cm dir.



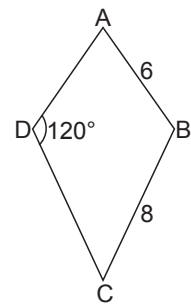
Buradan  $|AE| = 18$  cm bulunur. AEB ve BEC dik üçgenlerinde Pisagor teoremlerinden  $|AB|^2 = 18^2 + 24^2 \Rightarrow |AB| = 30$  cm ve  $|BC|^2 = 24^2 + 45^2 = 51$  cm bulunur.

a. Uçurtmayı çevrelemek için kullanılacak ipin uzunluğu deltoidin çevresinin uzunluğu kadar olduğundan  $2 \cdot (30 + 51) = 162$  cm ip kullanılacaktır.

b. Kaplamada kullanılacak naylon miktarı deltoidsel bölgenin alanı kadar olduğundan,  $\frac{48.63}{2} = 1512 \text{ cm}^2$  naylon kullanılacaktır.

### Örnek

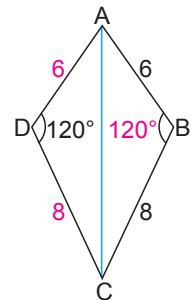
Şekildeki ABCD deltoidsel bölgesinde  $|AB| = 6$  br ve  $|BC| = 8$  br dir.  $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$  olduğuna göre, ABCD deltoidsel bölgenin alanını bulalım.



### Çözüm

ABCD deltoid bölge olduğundan  $|BC| = |CD| = 8$  br ve  $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 120^\circ$  dir.  $[AC]$  köşegeni çizildiğinde oluşan ABC ve ACD üçgenlerinde sinüslü alan bağıntılarından

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{ADC}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ \\ &= 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$





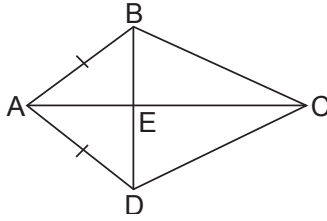


## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- a. Bir deltoidsel bölgenin alanı köşegen uzunlukları ..... eşittir.
- b. Bir deltoidsel bölgenin alanı  $200 \text{ br}^2$  ve köşegenlerinden birinin uzunluğu  $10 \text{ br}$  ise diğer köşegeninin uzunluğu .....  $\text{br}$  dir.
- c. Bir deltoidsel bölgenin farklı uzunluktaki iki kenarı arasındaki açı  $30^\circ$  derece ise bu deltoidsel bölgenin alanı kenar uzunlukları çarpımının ..... eşittir.

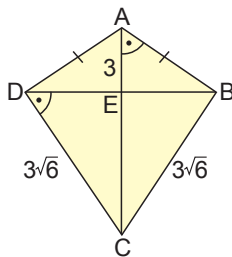
2.



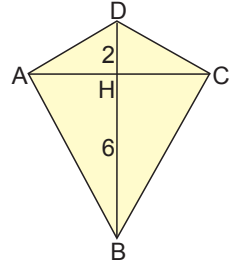
Yukarıdaki ABCD deltoidinde  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerdir.  $|AD| = |AB|$  olduğuna göre, aşağıda verilen ifadelerin yanlarındaki noktalı yerlere ifade doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- ▶  $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{AED})$  (.....)
- ▶  $A(ABCD) = 2(A\widehat{ABC})$  (.....)
- ▶  $A(\widehat{BCD}) = A(\widehat{BAD})$  (.....)
- ▶  $2A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{CDE})$  (.....)

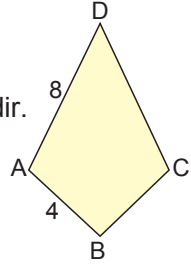
3. Şekildeki ABCD deltoidsel bölgesinde  $|AB| = |AD|$ ,  $|AE| = 3 \text{ br}$ ,  $|BC| = |CD| = 3\sqrt{6} \text{ br}$  ve  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



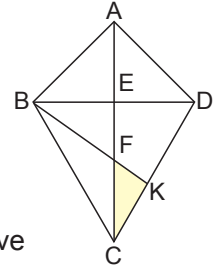
4. Şekildeki ABCD deltoidsel bölgesinde  $|AD| = |DC|$  ve  $[AC] \cap [DB] = \{H\}$  dir.  $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$ ,  $|DH| = 2 \text{ br}$  ve  $|HB| = 6 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



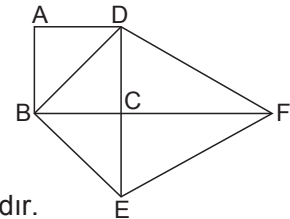
5. Şekildeki ABCD deltoidsel bölgesinde  $m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$  dir.  $|AD| = |DC| = 8 \text{ br}$  ve  $|AB| = |BC| = 4 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



6. Şekildeki ABCD deltoidsel bölgesinde  $|AB| = |AD|$ ,  $[AC] \cap [BD] = \{E\}$  ve  $[AC] \cap [BK] = \{F\}$  dir.  $|AE| = |EF| = |FC| = 4 \text{ br}$  ve  $|BD| = 8 \text{ br}$  olduğuna göre,  $A(\widehat{FCK})$  kaç  $\text{br}^2$  dir?



7. Yandaki şekilde ABCD kare, DBEF deltoid,  $|DF| = |FE|$  ve  $[DE] \cap [BF] = \{C\}$  dir.  $\widehat{C}(ABCD) = 12 \text{ br}$  ve  $A(DBEF) = 30 \text{ br}^2$  olduğuna göre,  $|CF|$  kaç  $\text{br}$  dir?

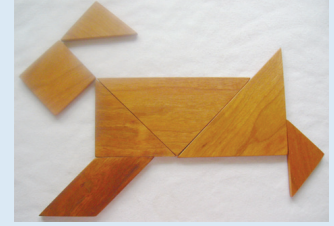




## 2.13. Dörtgenlerin Sınıflandırılması



Tangram Çin’de ortaya çıkan ve Türkçeye “Bilgelik Oyunu” şeklinde çevirilen yaratıcı bir zekâ oyunudur. Tangramda amaç yedi farklı geometrik şekli kullanarak birbirinden farklı şekiller oluşturmaktır. Tangram ile oluşturulan şekiller bir bütün olarak görünse bile her parçasının kendine ait özellikleri vardır.



Yandaki tangramda kullanılan geometrik şekilleri belirleyiniz. Dörtgenlerle ilgili öğrendiğiniz özellikleri göz önünde bulundurarak bu geometrik şekillerin farklı ve benzer yönlerini sorgulayınız.

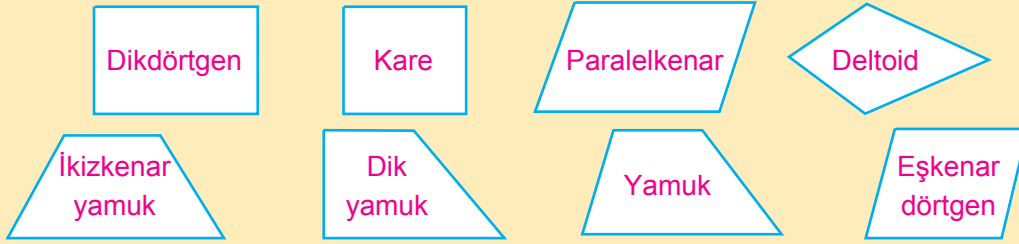


### Etkinlik

1. Yandaki şekilde bir dörtgen verilmiştir. Bu dörtgenin paralel olan kenarları var mıdır? Açıklayınız.



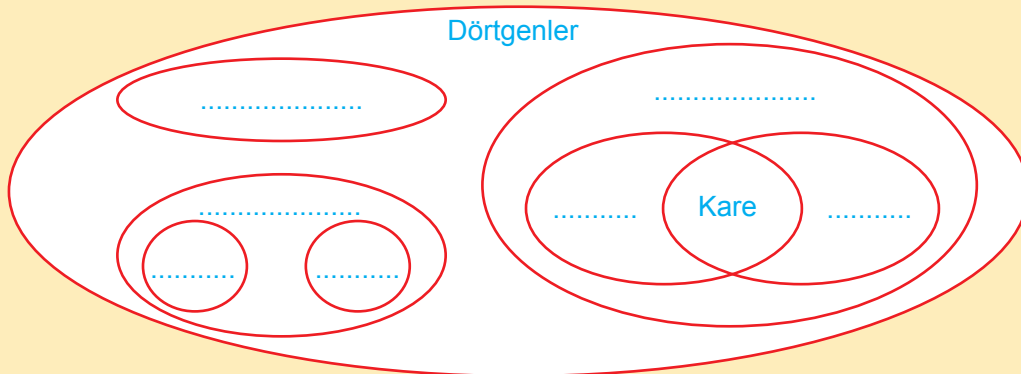
2. Aşağıdaki özel dörtgenlerin kenarlarının birbirine göre durumlarını inceleyerek tablo 2.13.1’i doldurunuz.



Karşılıklı kenar çiftleri paralel olan dörtgenler	
Karşılıklı kenar çiftleri paralel olmayan dörtgenler	

Tablo: 2.13.1

3. Yukarıda doldurduğunuz tabloyu göz önünde bulundurarak dörtgenlerin karşılıklı kenar çiftlerinin paralellik durumu ile ilgili verilen aşağıdaki Venn şemasını tamamlayınız.



4. Karşılıklı kenarların paralellik durumlarına göre sınıflandırdığınız dörtgenleri farklı özelliklerine göre sınıflandırarak bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.



### Örnek

Dörtgenleri, karşılıklı kenar çiftlerinin paralel olup olmamasına ve paralel olan kenar çiftlerinin sayısına göre sınıflandırılalım.

### Çözüm

Paralel olan kenar çiftlerinin sayısı 4 tane olan dörtgenler

- ▶ Paralelkenar
- ▶ Eşkenar dörtgen
- ▶ Dikdörtgen
- ▶ Kare

Paralel olan kenar çiftlerinin sayısı 2 tane olan dörtgenler

- ▶ Yamuk
- ▶ Dik yamuk
- ▶ İkizkenar yamuk

Paralel olan kenar çifti bulunmayan dörtgenler

- ▶ Deltoid

### Örnek

Dörtgenleri karşılıklı açılarının eş olup olmamasına göre sınıflandırılalım.

### Çözüm

Karşılıklı açıları eş olanlar

- ▶ Paralelkenar
- ▶ Eşkenar dörtgen
- ▶ Dikdörtgen
- ▶ Kare

Karşılıklı açıları eş olmayanlar

- ▶ Yamuk
- ▶ İkizkenar yamuk
- ▶ Dik yamuk
- ▶ Deltoid



### Alıştırmalar

1. Aşağıdaki tabloda verilen özellikleri inceleyerek tablodaki dörtgenlerin bu özellikleri sağlayıp sağlamama durumuna göre, “✓” veya “X” işaretlerinden uygun olanının yazınız.

DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ						
ÖZELLİKLER	Yamuk	Paralelkenar	Dikdörtgen	Eşkenar Dörtgen	Kare	Deltoid
Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.						
Bütün kenar uzunlukları eşittir.						
Karşılıklı kenarları paraleldir.						
Her bir açısı diktir.						
Köşegenleri birbirini ortalar.						
Köşegenleri eşittir.						
Köşegenleri dik kesişir.						
Ardışık açıları bütünlerdir.						
Köşegenleri açıortaydır.						
İç açıların ölçüleri toplamı $360^\circ$ dir.						

Tablo: 2.13.2

2. Aşağıdaki cümlelerin doğru olanlarının başına “D” yanlış olanların başına “Y” harfi yazınız.

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Her dikdörtgen bir paralelkenardır. | <input type="checkbox"/> Bazı kareler paralelkenardır.  |
| <input type="checkbox"/> Her kare eşkenar dörtgendir.        | <input type="checkbox"/> Bazı dikdörtgenler karedir.    |
| <input type="checkbox"/> Her deltoid eşkenar dörtgendir.     | <input type="checkbox"/> Her paralelkenar bir yamuktur. |

3. Alanları, köşegen uzunlukları çarpımının yarısı olma durumuna göre, dörtgenleri sınıflandırınız.





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

**A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.**

1. Açılarından biri dik olan paralelkenara ..... denir.
2. Yamuğun paralelkenarlarına ..... denir.
3. Bir paralelkenarın karşılıklı iki köşesinin koordinatları  $A(1, -2)$  ve  $B(3, 4)$  ise ağırlık merkezinin koordinatları ..... olur.
4. Alanı  $4 br^2$  olan paralelkenarsal bir bölgenin  $f(x, y) = (4x, 4y)$  homoteti dönüşümü altındaki görüntüsünün alanı .....  $br^2$  dir.
5. Alanı  $12 br^2$  olan bir deltoidsel bölgenin köşegen uzunlukları farkı  $5 br$  ise köşegen uzunlukları toplamı .....  $br$  dir.
6. Dikdörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen ..... dir.
7. Kare, ..... derecelik açılarla döndürüldüğünde yine kendisi ile çakıştığından ..... sahiptir.
8. Köşegenleri açıortay olan dörtgenler ..... ve ..... dir.
9. Herhangi bir kenarının orta dikme doğrusu bir köşesinden geçen eşkenar dörtgensel bölgenin alanı bir kenar uzunluğunun karesinin ..... katıdır.
10. Bir dörtgenin ötelenmişinin ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünün ötelenmesi ..... kadar ötelenmesidir.

**B. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.**

1. Bir yamuksal bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden paralelkenarsal bölgenin alanı bu iki bölge arasında kalan üçgensel bölgelerin alanları toplamına eşittir. (.....)
2. Dikdörtgenin ağırlık merkezinin kısa kenarına olan uzaklığı uzun kenarının yarısına eşittir. (.....)
3. Dikdörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen deltoiddir. (.....)
4. Köşegenleri dik kesişen paralelkenar eşkenar dörtgendir. (.....)
5. Karenin  $0^\circ$  ile  $360^\circ$  arasındaki en büyük dönme simetri açısı  $225^\circ$  dir. (.....)
6. Dönme dönüşümü sonucunda dörtgenlerin alanı değişmez. (.....)
7. Köşegen uzunlukları birbirine eşit olan deltoid bir eşkenar dörtgendir. (.....)
8. Köşegenleri dik kesişen bir ikizkenar yamuğun yükseklik uzunluğu orta taban uzunluğuna eşittir. (.....)
9. Köşegenleri dik kesişen bir dik yamuğun yükseklik uzunluğunun karesi taban uzunlukları toplamına eşittir. (.....)
10. Eşkenar dörtgenin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktanın tüm kenarlarına olan uzaklıkları toplamı yüksekliğinin iki katına eşittir. (.....)





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

1. Şekildeki ABCD

yamuğunda

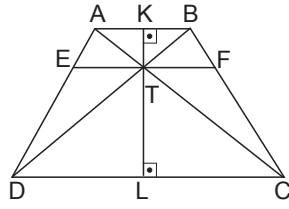
$$[AB] \parallel [CD] \parallel [EF],$$

$$[AC] \cap [BD] = \{T\},$$

$$[KL] \perp [AB],$$

$|DC| = 6$  br ve  $|EF| = 3$  br olduğuna göre, yamuğun yüksekliği  $|KT|$  nun kaç katıdır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



2. Şekildeki ABCD

yamuğunda

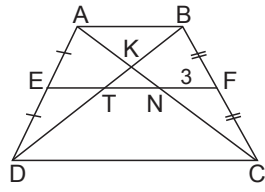
$$[AB] \parallel [CD],$$

$$[AC] \cap [BD] = \{K\} \text{ ve}$$

$$[EF] \text{ orta tabandır.}$$

$|DC| = 2|AB|$  ve  $|NF| = 3$  br olduğuna göre,  $|TN|$  kaç br dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



3. Şekildeki ABCD

dik yamuğunda

$$[AB] \parallel [DC] \parallel [EF],$$

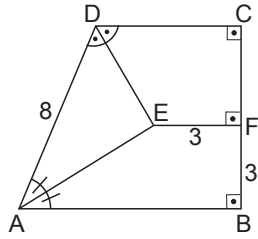
$$[DC] \perp [CB] \text{ ve}$$

$$[DE] \text{ ile } [AE]$$

açıortaylardır.

$|AD| = 8$  br ve  $|EF| = |FB| = 3$  br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

- A) 60 B) 54 C) 48 D) 42 E) 36



4. Şekildeki ABCD

dik yamuğunda

$$[AB] \parallel [DC],$$

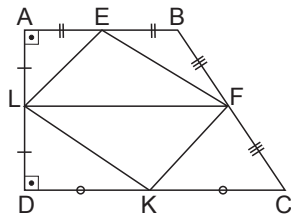
$$[AD] \perp [DC] \text{ ve}$$

E, F, K, L noktaları

bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(EFKL) = 40 \text{ br}^2$  olduğuna göre,  $|FL| \cdot |LA|$  çarpımı kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 20 D) 30 E) 40



5. Şekildeki ABCD

yamuğunda

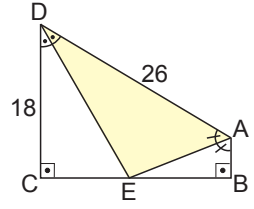
$$[AE] \text{ ve } [DE]$$

açıortaylar,

$$[AB] \perp [BC],$$

$|AD| = 26$  br ve  $|DC| = 18$  br olduğuna göre,  $A(\widehat{AED})$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

- A) 106 B) 136 C) 140 D) 156 E) 160



6. Şekildeki 1 numaralı

yamuk  $\vec{u} = (a, b)$

doğrultusunda

ötelenerek

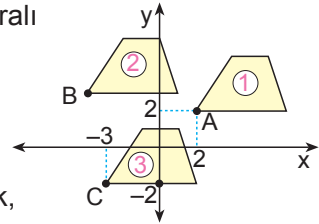
2 numaralı yamuk,

2 numaralı yamuk,  $\vec{v} = (c, d)$  doğrultusunda

ötelenerek 3 numaralı yamuk elde ediliyor.

Buna göre,  $a + b + c + d$  toplamı kaçtır?

- A) -9 B) -8 C) -7 D) -6 E) -5



7. Şekildeki analitik

düzlemde ABCO

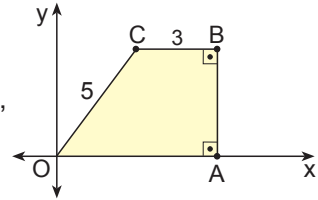
yamuk  $[BA] \perp OX$ ,

$$|BC| = 3 \text{ br},$$

$$|OC| = 5 \text{ br ve}$$

$A(6, 0)$  olduğuna göre, C noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (3, 1) B) (3, 2) C) (3, 3)  
D) (3, 4) E) (3, 5)



8. Şekildeki ABCD

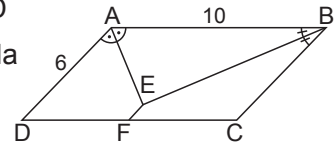
paralelkenarında

$$[AE] \text{ ve } [BE]$$

açıortaylar,

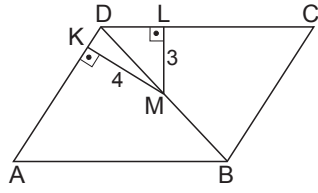
$[EF] \parallel [AD]$ ,  $|AD| = 6$  br ve  $|AB| = 10$  br olduğuna göre,  $|EF|$  kaç br dir?

- A)  $\frac{1}{2}$  B)  $\frac{2}{3}$  C) 1 D)  $\frac{3}{2}$  E) 2

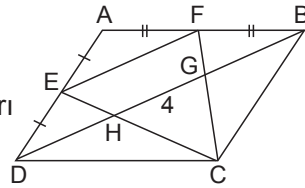




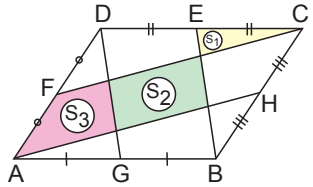
9. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[DB]$  köşegendir.  $|DM| = |MB|$ ,  $[ML] \perp [DC]$ ,  $[MK] \perp [AD]$ ,  $|ML| = 3$  br,  $|MK| = 4$  br ve  $|AB| + |BC| = 14$  br olduğuna göre,  $|DC|$  kaç br dir?
- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6



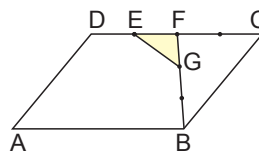
10. Şekildeki ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta kenarlarıdır.  $[BD]$  köşegen ve  $|HG| = 4$  br olduğuna göre,  $|EF|$  kaç br dir?
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



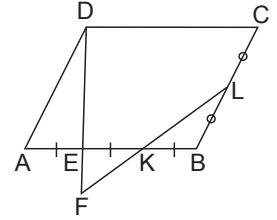
11. Şekildeki ABCD paralelkenarında E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  bulundukları alanları göstermek üzere,  $\frac{S_1 + S_2}{S_3}$  oranı kaçtır?
- A) 1 B)  $\frac{4}{5}$  C)  $\frac{2}{3}$  D)  $\frac{1}{4}$  E)  $\frac{1}{2}$



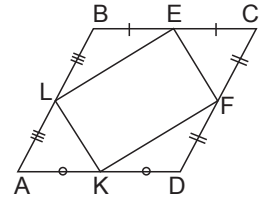
12. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $[DC]$  dört eş parçaya,  $[FB]$  üç eşit parçaya ayrılmıştır.  $A(\widehat{EFG}) = 3$  br<sup>2</sup> olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç br<sup>2</sup> dir?
- A) 36 B) 40 C) 48 D) 72 E) 80



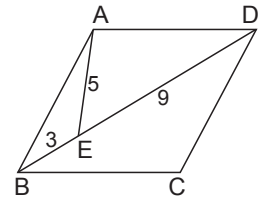
13. Şekildeki ABCD paralelkenarında  $|AE| = |EK| = |KB|$  ve  $|BL| = |LC|$  olduğuna göre,  $\frac{A(\widehat{EFK})}{A(ABCD)}$  oranı kaçtır?
- A)  $\frac{1}{10}$  B)  $\frac{1}{12}$  C)  $\frac{1}{14}$  D)  $\frac{1}{16}$  E)  $\frac{1}{18}$



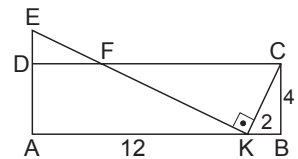
14. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde E, F, K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $\angle(EFKL) = 14$  br ve  $\angle(ABCD) = 20$  br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç br<sup>2</sup> dir?
- A) 10 B) 12 C) 20 D) 24 E) 30



15. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde  $[BD]$  köşegendir.  $|AE| = 5$  br,  $|BE| = 3$  br ve  $|ED| = 9$  br olduğuna göre,  $\angle(ABCD)$  kaç br dir?
- A)  $8\sqrt{13}$  B) 28 C)  $8\sqrt{10}$  D) 24 E) 20



16. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde  $[EK] \perp [KC]$  dir.  $|AK| = 12$  br,  $|KB| = 2$  br ve  $|CB| = 4$  br olduğuna göre,  $|DF|$  kaç br dir?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



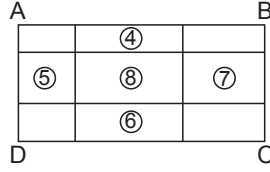


17. Yandaki ABCD

dikdörtgeni iki  
yatay iki dikey  
doğru ile dokuz

dikdörtgene ayrılmıştır. Bu dikdörtgenlerden  
bazılarının çevre değerleri br cinsinden içlerin-  
de yazılı olduğuna göre,  $\widehat{C(ABCD)}$  kaç br dir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 30



18. Şekildeki ABCD

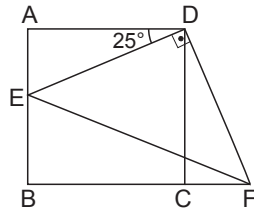
karesinde  
 $[ED] \perp [DF]$  dir.

$m(\widehat{ADE}) = 25^\circ$

olduğuna göre,

$m(\widehat{EFB})$  kaç derecedir?

A)  $20^\circ$  B)  $25^\circ$  C)  $30^\circ$  D)  $35^\circ$  E)  $45^\circ$



19. Şekildeki ABCD

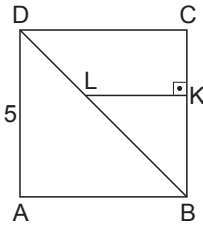
karesinde  $[DB]$  köşegen  
ve  $[LK] \perp [BC]$  dir.

$A(KCDL) = 8 \text{ br}^2$  ve

$|DA| = 5 \text{ br}$  olduğuna

göre,  $|BK|$  kaç br dir?

A) 2 B) 3 C)  $2\sqrt{3}$  D) 4 E)  $3\sqrt{2}$



20. Şekildeki ABCD

karesinde

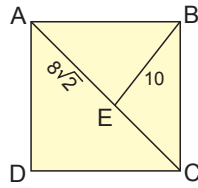
$[AC]$  köşegen,

$|AE| = 8\sqrt{2} \text{ br}$  ve

$|BE| = 10 \text{ br}$

olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

A) 100 B) 121 C) 144 D) 169 E) 196



21. Şekildeki ABCD

deltoidinde,

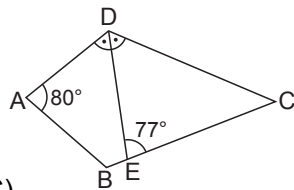
$|AB| = |AD|$ ,

$|BC| = |CD|$ ,

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC})$ ,

$m(\widehat{BAD}) = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{CED}) = 77^\circ$  olduğuna  
göre,  $m(\widehat{BCD})$  kaç derecedir?

A)  $41^\circ$  B)  $42^\circ$  C)  $43^\circ$  D)  $44^\circ$  E)  $45^\circ$



22. Şekildeki ABCD

deltoidinde

$|BA| = |BC| = 20 \text{ br}$

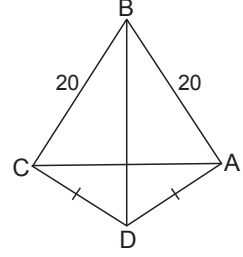
ve  $|DA| = |DC|$  dur.

$|BD| = 21 \text{ br}$  ve

$A(ABCD) = 252 \text{ br}^2$

olduğuna göre,  $|DC|$  kaç br dir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16



23. Yandaki Venn

şemasında

verilen kümelerin

açıklamaları

aşağıdaki gibidir.

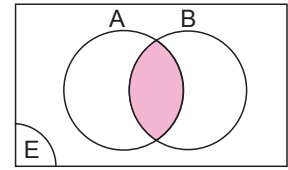
E: Dış büyük dörtgenlerin kümesi

A: Alanı, köşegen uzunluklarının çarpımının  
yarısı olan dörtgenlerin kümesi

B: Sadece iki kenarının birbirine eşit olan  
dörtgenlerin kümesi

Buna göre, aşağıdaki dörtgenlerden hangisi  
taralı bölgenin elemanıdır?

A) Kare B) Dikdörtgen  
C) Eşkenar dörtgen D) Paralelkenar  
E) Deltoid



24. Yanda iki kare ve

içlerinde bazı

desenler verilmiştir.

Şekil 1'deki kare,

merkezi etrafında pozitif yönde  $45^\circ$ , Şe-

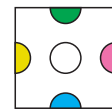
kil 2'deki kare ise merkezi etrafında nega-

tif yönde  $90^\circ$  döndürülüyor. Döndürme işle-

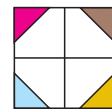
minden sonra Şekil 1, Şekil 2 üzerine yerleş-

tirildiğinde aşağıdaki görüntülerden hangisi

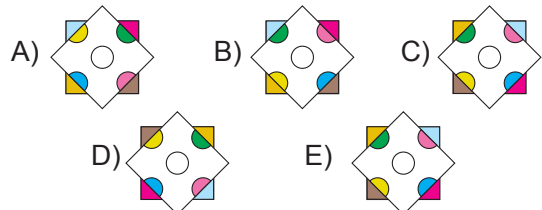
oluşur?



Şekil 1



Şekil 2





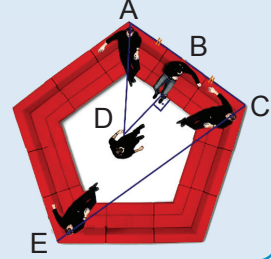
### 3. ÜNİTE

## ÇOKGENLER

### 3.1. Düzgün Beşgen ve Özellikleri



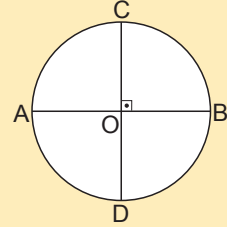
Yandaki resimde bir koltuk takımı ile A, B, C, D ve E kişilerinin konumları verilmiştir. Resmi inceleyerek koltukların oluşturduğu geometrik şekli söyleyiniz. Bu geometrik şeklin kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğunu düşünerek A, B, C, D ve E kişilerinin birbirlerine olan uzaklıklarını yorumlayınız.



#### Etkinlik

**Araç-gereç:** Pergel ve cetvel

1. Şekildeki O merkezli çember  $[AB]$  ve  $[CD]$  ile dört eş parçaya ayrılmıştır. Pergelinizi çemberin yarıçapı kadar açarak çemberi kesen B merkezli bir yay çizin. Çizdiğiniz yayın çemberi kestiği noktaları E ve F olarak adlandırınız.



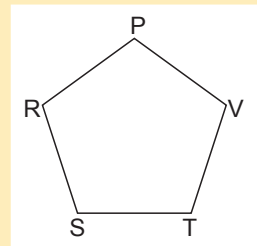
2.  $[EF]$  nı çizin.  $[EF]$  ile  $[AB]$  nın kesim noktasını G ile adlandırarak  $|OG|$  ve  $|GB|$  nun neden birbirine eşit olduğunu açıklayınız.

3. Pergelinizi G noktasından C noktasına kadar açarak  $[AB]$  nı kesen G merkezli bir yay çizin. Çizdiğiniz yayın  $[AB]$  ile kesim noktasını H olarak adlandırınız.

4. Pergelinizi C noktasından H noktasına kadar açınız. Pergelinizin sivri ucunu C noktasına koyarak açıklığını değiştirmeden çemberin  $\widehat{AC}$  nı kesen bir yay çizin ve kesim noktasını K olarak adlandırınız. Pergelinizin sivri ucunu K noktasına koyarak çemberi kesen bir yay çizin ve kesim noktasını L olarak adlandırınız. Aynı işlemi iki kez daha tekrarlayarak M ve N noktalarını belirleyiniz.

5.  $[CK]$ ,  $[KL]$ ,  $[LM]$ ,  $[MN]$  ve  $[NC]$  doğru parçalarını çizerek oluşan şekli yandaki şekil ile karşılaştırınız.

6. Yandaki şeklin  $[PS]$  ve  $[PT]$  köşegenlerini çizip PRS, PST ve PTV üçgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamını bulunuz.



7. Bulduğunuz toplamlardan yararlanarak kutu içindeki şeklin iç açılarının ölçüleri toplamını belirleyiniz.

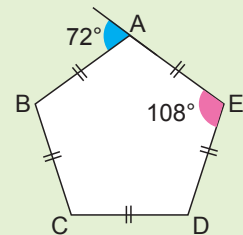
8. Oluşan şeklin kenar uzunluklarının eşit olduğunu kabul ederek iç açılarının ölçülerini yorumlayınız.



#### Bilgi Kutusu

İç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan beşgene **düzgün beşgen** denir. Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde;

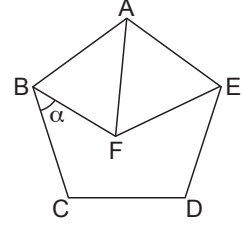
- \* Dış açılarının her birinin ölçüsü  $72^\circ$  dir.
- \* İç açılarının her birinin ölçüsü  $108^\circ$  dir.





## Örnek

Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde AEF eşkenar üçgen olduğuna göre, CBF açısının ölçüsünü bulalım.

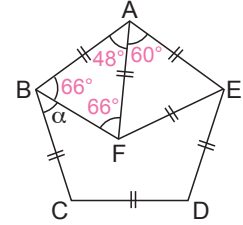


## Çözüm

AEF eşkenar üçgen olduğundan  $|AE| = |AF| = |FE|$  ve  $m(\widehat{FAE}) = 60^\circ$  dir. Düzgün beşgenin bir iç açısı  $108^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{BAF}) = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$  olur.

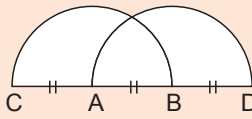
AEF eşkenar üçgeninin bir kenarı aynı zamanda ABCDE düzgün beşgeninin kenarı olduğundan  $|AB| = |AF|$  dur. Bundan dolayı BAF ikizkenar üçgendir. O hâlde  $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{AFB}) = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$  dir.

Buradan  $m(\widehat{CBF}) = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$  bulunur.

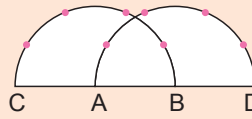


## Uygulama Köşesi

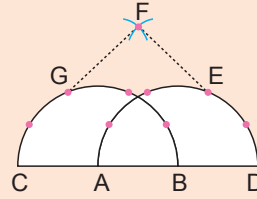
1. Aşağıda bir düzgün beşgenin oluşturulma adımları verilmiştir. Her adımda yapılan işlemleri örneğe uygun biçimde altlarına yazınız. (3. adımdaki  $|EF|$  ve  $|GF|$  çemberin yarıçap uzunluğuna eşittir.)



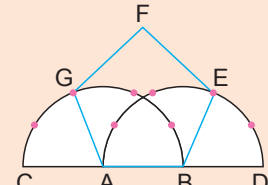
1. adım: .....



2. adım: Yarım çember yayları beş eş parçaya ayrılmıştır.



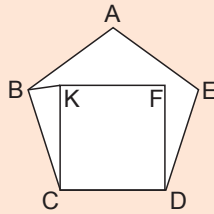
3. adım: .....



4. adım: .....

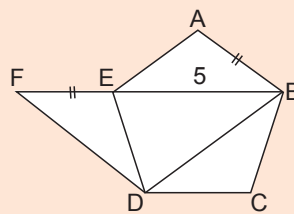
2. Aşağıdaki ABCDE düzgün beşgenlerinde verilen bilgiler yardımıyla istenilen açı ve uzunluk değerlerini bulunuz.

a.



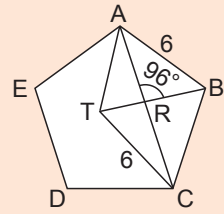
CDFK kare  
 $m(\widehat{ABK}) = ?$

b.



B, E ve F noktaları doğrusal  
 $|AB| = |EF|, |FD| = ?$

c.



$[AC] \cap [BT] = \{R\}$   
 $m(\widehat{ARB}) = 96^\circ, |TB| = ?$

## Araştırma Sorusu

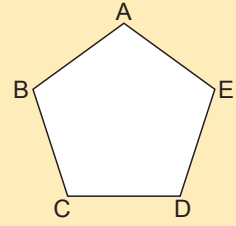
Düzgün beşgen çizimlerinin farklı yollarla nasıl yapılacağını araştırarak sınıfta paylaşınız.



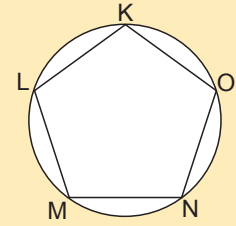


## Etkinlik

1. Kenar uzunluğu 3 br olan Şekil 1'deki ABCDE düzgün beşgeninin A köşesinden geçen köşegenlerini çizin.
2.  $F \in [AD]$  ve  $|AF| = |FE|$  olacak şekilde AFE ikizkenar üçgenini oluşturunuz. Benzerlik teoremleri yardımıyla  $|AD|$  nun  $|AE|$  na oranını bulunuz.
3. Etkinliğin ilk iki adımını farklı kenar uzunluklarını sahip düzgün beşgenler için uygulayınız ve bir düzgün beşgenin köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranının hangi sayıya eşit olduğunu açıklayınız.
4. Şekil 2'deki düzgün beşgenin K köşesinden  $[MN]$  kenarına bir dikme çizerek dikme ayağını P olarak adlandırınız.  $[KM]$  ve  $[KN]$  köşegenlerini çizin ve oluşan KMN ikizkenar üçgeninden yararlanarak  $|MP|$  ve  $|PN|$  nu karşılaştırınız.
5. Etkinliğin 4. adımını L köşesinden  $[NO]$  kenarına çizilen dikme için tekrarlayınız. Bu dikme ile  $[KP]$  nın kesim noktasının çembere göre konumunu yorumlayınız.
6. Uyguladığınız adımlara göre, bir düzgün beşgenin kenar orta dikmelerinin kesim noktasının özelliğini açıklayınız.



Şekil 1



Şekil 2



## Hatırlatma

Altın oran matematik ve sanatta bir bütünün parçaları arasında gözlemlenebilen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Bu oranın değeri  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  dir.

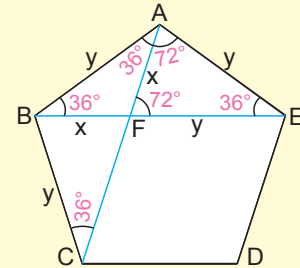


## İnceleyelim

Bir düzgün beşgenin bir köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranının altın orana eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCDE düzgün beşgen,  $[AC]$  ve  $[BE]$  köşegenler

**İstenen:**  $\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



ABCDE düzgün beşgeninin kenar uzunlukları birbirine eşit olduğundan ABC ve ABE ikizkenar üçgenlerdir.  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAE}) = 108^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEB}) = 36^\circ$  ve  $m(\widehat{FAE}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$  elde edilir. AFE üçgeninin iç açıların ölçüleri toplamından,  $72^\circ + 36^\circ + m(\widehat{AFE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AFE}) = 72^\circ$  bulunur. A.A. benzerlik teoreminden  $\widehat{ABF} \sim \widehat{BEA}$  elde edilir. ABF ve AFE ikizkenar üçgenlerinde  $|FB| = |FA| = x$  br ve  $|AB| = |AE| = |FE| = y$  br olarak alınırsa  $\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BF|}{|EA|} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 + xy \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 0$  eşitliği bulunur. Eşitliğin her iki tarafı  $y^2$  terimine bölünürse  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0$  eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte  $\frac{x}{y} = t$  dönüşümü yapılırsa  $t^2 + t - 1 = 0$  olur. Bu denklemin diskriminantı  $\Delta$  olmak üzere,  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$  bulunur.

Buradan  $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{R}^+$  elde edilir.

Bundan dolayı  $\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 = t + 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  bulunur.



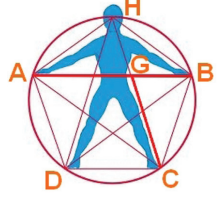


### Bilgi Kutusu

Bir düzgün beşgenin köşegen uzunlukları birbirine eşittir.

### Örnek

Yandaki resimde, ideal oranlara sahip bir insan vücudu verilmiştir. Vücut üzerindeki bazı noktalar, resimdeki gibi birleştirildiğinde düzgün beşgen oluşturmaktadır. Buna göre,  $\frac{|AB|}{|GC|}$  oranını bulalım.



### Çözüm

Sanatçılar, bilim adamları ve tasarımcılar araştırmalarını yaparken ya da çalışmalarını ortaya koyarken altın orana göre belirlenmiş insan bedenini ölçüt olarak alır. İnsan vücudunun çeşitli kısımları arasında var olduğu öne sürülen ve yaklaşık altın oran değerlerine uyan “ideal” orantı ilişkileri vardır. Yukarıda verilen şekilde de benzer durum söz konusudur.

Düzgün beşgende köşegen uzunlukları eşit olduğundan  $|HC| = |AB|$  ve GCB ikizkenar üçgen olduğundan  $|GC| = |BC|$  dur. Buradan  $\frac{|AB|}{|GC|} = \frac{|HC|}{|BC|}$  elde edilir. Düzgün beşgende köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranı altın oran olduğundan  $\frac{|HC|}{|BC|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  bulunur.

### Örnek

Yandaki şekilde ABCDE düzgün beşgen ve AFCB dörtgendir.  $|AE| = 2$  br olduğuna göre,  $|EF|$  nu bulalım.

### Çözüm

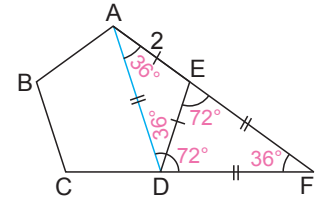
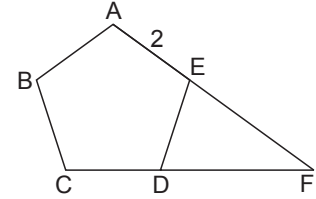
Bir düzgün beşgenin her bir dış açısı  $72^\circ$  olduğundan,  $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{EDF}) = 72^\circ$  ve  $m(\widehat{EFD}) = 36^\circ$  dir. Bundan dolayı EDF ikizkenar üçgendir ve  $|EF| = |DF|$  dur.

$[AD]$  çizildiğinde oluşan AED üçgeni ikizkenar olduğundan,  $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EDA}) = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$  olur.

$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{DFA}) = 36^\circ$  olduğundan ADF ikizkenar üçgendir ve  $|AD| = |DF| = |EF|$  dur.

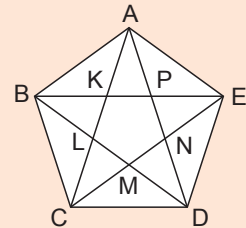
Düzgün beşgende köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranı altın oran olduğundan,

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{|EF|}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow |EF| = (1 + \sqrt{5}) \text{ br bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

Yandaki şekilde, ABCDE düzgün beşgeninin köşegenleri çizilerek KLMNP düzgün beşgeni oluşturulmuştur. Buna göre,  $\frac{|KL|}{|AB|}$  oranını bulunuz.



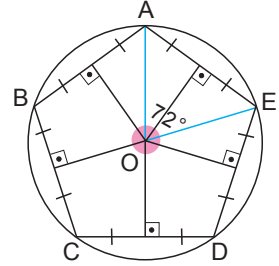


### Örnek

Bir düzgün beşgen ile çevrel çemberini çizerek çemberin merkezinin düzgün beşgene göre konumunu belirleyelim.

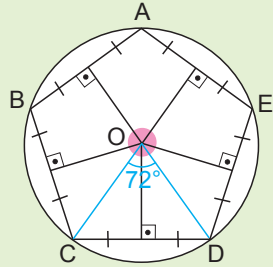
### Çözüm

Yandaki şekilde ABCDE düzgün beşgeni ile O merkezli çevrel çembere çizilmiştir. O noktasından düzgün beşgenin köşelerine yarıçaplar çizildiğinde oluşan üçgenler ikizkenardır. Düzgün beşgenin köşeleri çember yayını beş eş parçaya ayırdığından bu üçgenlerin her birinin tepe açısı  $72^\circ$  olur. İkizkenar üçgenlerin tabanlarına ait yükseklikleri aynı zamanda kenarortayları olduğundan düzgün beşgenin kenarları eş iki parçaya ayrılır. Dolayısıyla O noktası düzgün beşgenin de merkezidir.



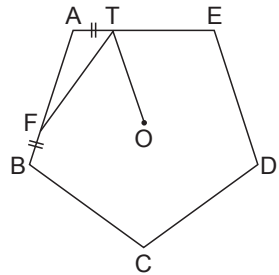
### Bilgi Kutusu

1. Düzgün beşgenin kenar orta dikmelerinin kesim noktası, düzgün beşgenin merkezidir. Bu merkez aynı zamanda düzgün beşgenin iç teğet çemberi ile çevrel çemberinin ortak merkezidir.
2. Düzgün beşgenin bir kenarını gören merkez açının ölçüsü  $72^\circ$  dir.



### Örnek

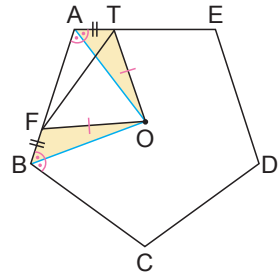
Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninin merkezi O noktasıdır.  $|TA| = |FB|$  olduğuna göre, OTF açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

Düzgün beşgenin bir kenarını gören merkez açının ölçüsü  $72^\circ$  olduğundan AOB ikizkenar üçgeni oluşturulduğunda  $m(\widehat{AOB}) = 72^\circ$  ve  $m(\widehat{EAO}) = m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OBC}) = 54^\circ$  olur. [OF] çizildiğinde K.A.K. eşlik teoremi gereğince  $\widehat{FBO} \cong \widehat{TAO}$  olur. Bundan dolayı  $|FO| = |TO|$  ve  $m(\widehat{FOB}) = m(\widehat{AOT})$  elde edilir.

Buradan  $m(\widehat{AOF}) + m(\widehat{FOB}) = 72^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOF}) + m(\widehat{AOT}) = 72^\circ$  elde edilir. OFT ikizkenar üçgen olduğundan  $m(\widehat{OTF}) = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$  bulunur.







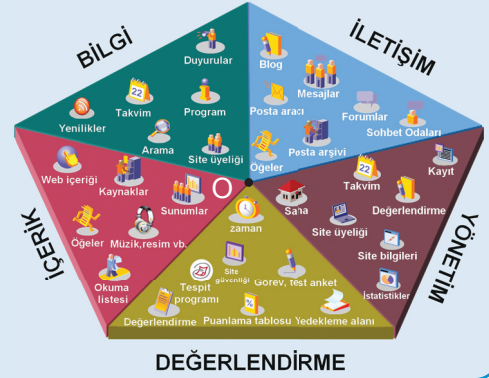


### 3.2. Düzgün Beşgensel Bölgenin Alanı



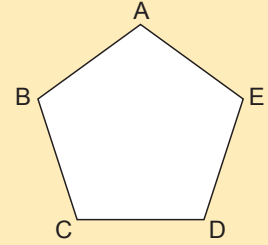
Yandaki şekilde iyi bir web sitesinde olması gereken ana özellikler verilmiştir. Bu özellikler O merkezli düzgün beşgen şeklinde modellenerek bilgi, iletişim, yönetim, değerlendirme ve içerik olmak üzere, beş gruba ayrılmıştır.

Buna göre, iyi bir web sitesi yapımında bilginin payı yüzde kaçtır? Diğer özellikler de aynı paya sahip midir? Neden?



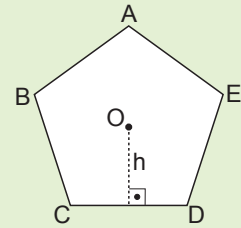
#### Etkinlik

1. Yandaki şekilde bir kenar uzunluğu 20 br olan ABCDE düzgün beşgeni verilmiştir. Bu beşgenin çevre uzunluğunu bulunuz.
2. Düzgün beşgenin merkezini belirleyerek O şeklinde adlandırınız ve OAB üçgenini oluşturunuz. O noktasının [AB] kenarına olan uzaklığını göz önünde bulundurarak OAB üçgensel bölgesinin alanını veren bağıntıyı bulunuz.
3. Benzer yöntemle bir köşesi O, diğer köşeleri E, D ve C noktaları olan üçgenler oluşturarak düzgün beşgensel bölgenin alanını veren bağıntıyı bulunuz.
4. Düzgün beşgensel bölgenin alanının, çevre uzunluğuna oranı ile beşgenin bir kenar uzunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
5. Düzgün beşgensel bölgenin alanının başka hangi yollarla bulunabileceğini tartışınız.



#### Bilgi Kutusu

Bir düzgün beşgenin merkezinin herhangi bir kenara olan uzaklığı  $h$ , çevre uzunluğu  $\Ç$  ve alanı  $A$  olmak üzere, bu düzgün beşgensel bölgenin alanı  $A = \frac{\Ç \cdot h}{2}$  dir.



#### Örnek

Bir kenarının uzunluğu 4 br ve merkezinin herhangi bir kenarının uzaklığı  $\frac{11}{2}$  br olan düzgün beşgensel bölgenin alanını bulalım.

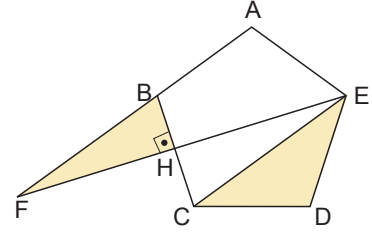
#### Çözüm

Düzgün beşgensel bölgenin bir kenar uzunluğu 4 br olduğundan çevresi  $\Ç = 4 \cdot 5 = 20$  br dir. Bu durumda düzgün beşgensel bölgenin alanı  $A = \frac{\Ç \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{20 \cdot \frac{11}{2}}{2} \Rightarrow A = 55 \text{ br}^2$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde  $[FE] \perp [BC]$  ve  $|BH| = |HC|$  dur. CED ve BFH üçgenlerinin alanları toplamı  $10 \text{ br}^2$  olduğuna göre, düzgün beşgenin alanını bulalım.



### Çözüm

$A(\widehat{CED}) = A \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{BFH}) = B \text{ br}^2$  olarak alınırsa  $A + B = 10 \text{ br}^2$  olur.

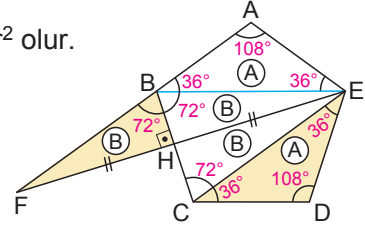
$[BE]$  köşegeni çizildiğinde oluşan ABE ikizkenar üçgeninde

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEB}) = 36^\circ$ ,  $m(\widehat{EBC}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$  ve

$m(\widehat{FBH}) + 72^\circ + 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FBH}) = 72^\circ$  elde edilir.

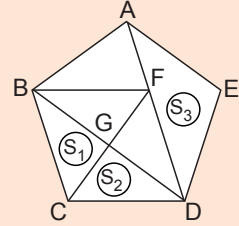
BFE üçgeninde  $[BH]$  açıortay ve yükseklik olduğundan aynı zamanda kenarortaydır ve  $A(\widehat{BFH}) = A(\widehat{BEH}) = B \text{ br}^2$  dir.

BEC ikizkenar üçgeninde  $[EH]$  yüksekliği aynı zamanda kenarortay olduğundan,  $|BH| = |HC|$  ve  $A(\widehat{BEH}) = A(\widehat{CEH}) = B \text{ br}^2$  olur. CED ve AEB ikizkenar üçgenleri eş olduğundan,  $A(\widehat{CED}) = A(\widehat{AEB}) = A \text{ br}^2$  dir. Dolayısıyla  $A(ABCDE) = 2A + 2B = 2(A + B) = 20 \text{ br}^2$  bulunur.



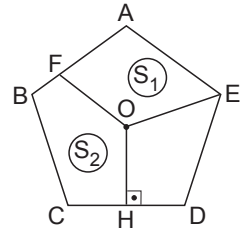
### Uygulama Köşesi

Şekildeki ABCDE düzgün beşgensel bölgesinde  $[BD] \cap [CF] = \{G\}$ ,  $[BF] \parallel [CD]$  ve A, F, D noktaları doğrusaldır.  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  üzerlerindeki bulundukları bölgelerin alanlarını göstermek üzere  $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$  oranını bulunuz.



### Örnek

O noktası şekildeki ABCDE düzgün beşgeninin merkezi olmak üzere,  $|AF| = 3|FB|$  ve  $[OH] \perp [CD]$  dir.  $S_1$  ve  $S_2$  içlerinde bulundukları dörtgen sel bölgelerin alanlarını gösterdiğine göre,  $\frac{S_1 + S_2}{A(ABCDE)}$  oranını bulalım.



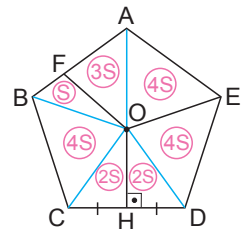
### Çözüm

O noktasını düzgün beşgenin köşelerine birleştirerek eş üçgenler oluşturalım. OAB üçgeninde  $|AF| = 3|FB|$  olduğundan  $A(\widehat{AFO}) = 3A(\widehat{BFO})$  dir.

Bu durumda  $A(\widehat{BFO}) = S \text{ br}^2$  olarak alınırsa  $A(\widehat{AFO}) = 3S \text{ br}^2$  olur.

Buradan  $A(\widehat{OAB}) = A(\widehat{AOE}) = A(\widehat{DOE}) = A(\widehat{BOC}) = A(\widehat{COD}) = 4S \text{ br}^2$  elde edilir.  $[OH]$  yüksekliği COD üçgeninin aynı zamanda kenarortayı olduğundan  $|CH| = |HD| \Rightarrow A(\widehat{COH}) = A(\widehat{DOH}) = 2S \text{ br}^2$  bulunur. Dolayısıyla  $S_1 + S_2 = 14S \text{ br}^2$  ve

$A(ABCDE) = 20S \text{ br}^2$  dir. Bundan dolayı  $\frac{S_1 + S_2}{A(ABCDE)} = \frac{14S}{20S} = \frac{7}{10}$  bulunur.





## Örnek

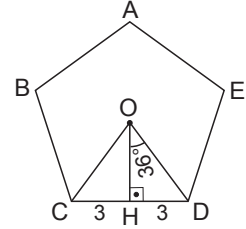
Bir kenarının uzunluğu 6 br olan düzgün beşgensel bölgenin alanının yaklaşık değerini bulalım. ( $\tan 36^\circ \cong 0,7275$ )

## Çözüm

Düzgün beşgenin bir kenarını gören merkez açının ölçüsü  $72^\circ$  olduğundan OCD ikizkenar üçgeni oluşturulduğunda  $m(\widehat{COD}) = 72^\circ$ ,  $m(\widehat{DOH}) = m(\widehat{COH}) = 36^\circ$  ve  $|CH| = |HD| = 3$  br olur.

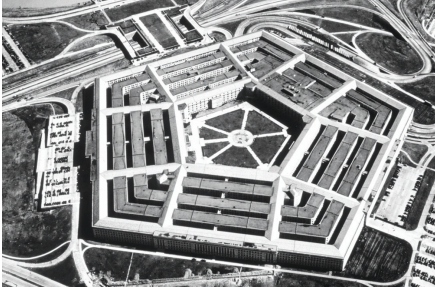
OHD dik üçgeninde  $\tan 36^\circ = \frac{3}{|OH|} \Rightarrow 0,7275 \cong \frac{3}{|OH|} \Rightarrow |OH| \cong 4,1237$  br elde edilir.

Buradan  $A(ABCDE) = \frac{Ç \cdot h}{2} = \frac{30 \cdot (4,1237)}{2} \cong 61,855$  br<sup>2</sup> bulunur.



## Alıştırmalar

1.



Yukarıdaki fotoğrafta ABD'nin Savunma Bakanlığı ve Genel Kurmay Başkanlığı binası verilmiştir. Pentagon adıyla bilinen bu bina iç içe beş düzgün beşgenden yapılmıştır. Pentagon yaklaşık olarak 608.000 m<sup>2</sup> lik bir arazi üzerine inşa edilmiştir.

Buna göre, Pentagon'un dış yüzeyindeki beşgenin bir kenarının uzunluğunu bulunuz. ( $\tan 36^\circ \cong 0,7275$ )

2. Şekildeki ABCDE

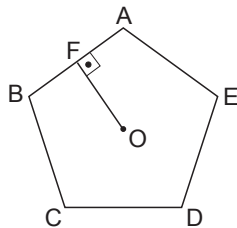
düzgün beşgeninin merkezi O noktasıdır.

$[OF] \perp [AB]$  ve

$|OF| = 20$  br olduğuna

göre,  $A(ABCDE)$  kaç br<sup>2</sup> dir?

( $\tan 36^\circ \cong 0,7275$ )



3. Şekildeki ABCDE

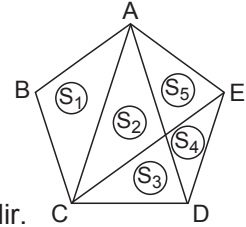
düzgün beşgeninde

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$

bulundukları bölgelerin

alanlarını göstermektedir.

Buna göre, aşağıdaki ifadelerden doğru olanlara "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.



☐  $S_1 = S_4 + S_5$

☐  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 + S_5$

☐  $S_1 = S_2$

☐  $S_3 > S_2$

☐  $S_3 = S_5$

☐  $\frac{S_3}{S_2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

☐  $S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4$

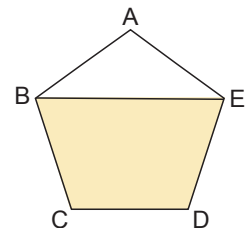
4. Şekildeki ABCDE

düzgün beşgeninde

$A(\widehat{AEB}) = 5$  br<sup>2</sup>

olduğuna göre,

$A(EBCD)$  kaç br<sup>2</sup> dir?





### 3.3. Düzgün Altıgen ve Özellikleri

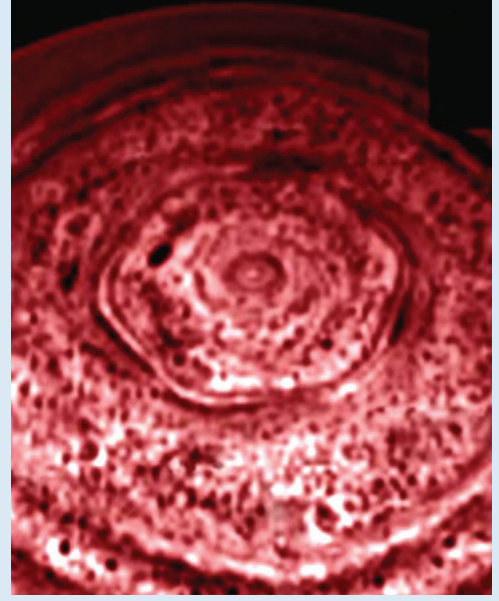


Satürn, Güneş Sistemi'nin güneşe yakınlık sırasına göre altıncı gezegenidir. Türkçesi Sekendiz'dir. Büyüklük açısından Jüpiter'den sonra ikinci sırada gelir.

Satürn ve sisteminin araştırılması amacıyla NASA (Ulusal Havacılık ve Uzay Dairesi) tarafından 1997 yılında fırlatılan Cassini-Huygens (Kassini-Hoygins) uzay aracı 1 Temmuz 2004'te Satürn'ün çevresinde yörüngeye girdi. Cassini-Huygens uzay aracı, Satürn'ün atmosferi ve yüzeyi hakkında veriler toplayarak bazı görüntüler elde etti.

Bunlardan en ilginç olanı Satürn'ün Kuzey Kutbu'nun dünyamızın yaklaşık iki katı büyüklüğündeki bir düzgün altıgen şeklinde görünmesiydi.

Siz de düzgün altıgene örnek olabilecek ilginç şekiller bulunuz.



#### Etkinlik

**Araç-gereç:** Pergel ve cetvel

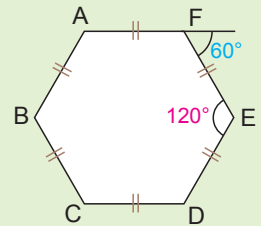
1. Yandaki kutu içine pergel yardımıyla O merkezli bir çember çiziniz.
2. Çizdiğiniz çember üzerinde herhangi bir A noktası belirleyiniz. Pergel açıklığını değiştirmeden çemberi kesen A merkezli bir yay çiziniz.
3. A noktası için yaptığınız işlemleri çemberi kesen yay üzerindeki her nokta için tekrarlayınız.
4. Çizdiğiniz yayların çemberi kestiği noktaları sırayla birleştirerek oluşan şeklin kaç kenarlı olduğunu söyleyiniz.
5. Oluşan şeklin kaç köşegeni olduğunu belirleyiniz.
6. Oluşan şeklin kenar uzunluklarını birbirleri ile karşılaştırınız.
7. Oluşan şeklin A köşesindeki iç açısının ölçüsü kaç derecedir? Diğer iç açılarının ölçüleri de A köşesindeki açı ile aynı mıdır? Tartışınız.



#### Bilgi Kutusu

İç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan altıgene **düzgün altıgen** denir. Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde;

- \* İç açılarının her birinin ölçüsü  $120^\circ$  dir.
- \* Dış açılarının her birinin ölçüsü  $60^\circ$  dir.
- \* 9 köşegen vardır.





### Örnek

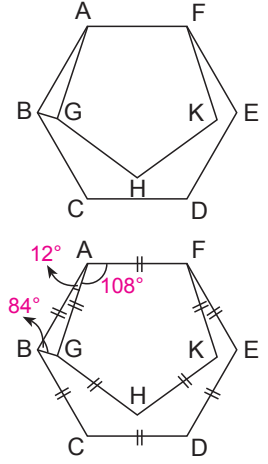
Şekildeki ABCDEF düzgün altıgen ve AGHKF düzgün beşgen olduğuna göre, GBC açısının ölçüsünü bulalım.

### Çözüm

ABCDEF düzgün altıgen olduğundan  $m(\widehat{BAF}) = 120^\circ$  ve AGHKF düzgün beşgen olduğundan  $m(\widehat{GAF}) = 108^\circ$  dir.

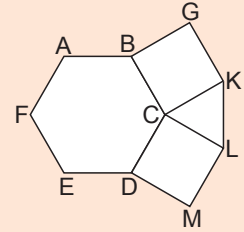
Buradan  $m(\widehat{BAG}) = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$  elde edilir.

$|AF| = |AB| = |AG|$  olduğundan ABG ikizkenar üçgendir. Bundan dolayı  $m(\widehat{ABG}) = m(\widehat{AGB}) = \frac{180^\circ - 12^\circ}{2} = 84^\circ$  dir. Buradan  $m(\widehat{GBC}) = 120^\circ - 84^\circ = 36^\circ$  bulunur.



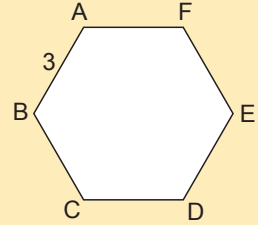
### Uygulama Köşesi

Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgeni ile BGKC ve CLMD kareleri verilmiştir.  $|AB| = 5$  br olduğuna göre,  $|KL|$  nu bulunuz.



### Etkinlik

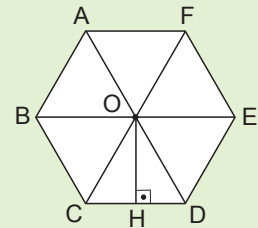
1. Bir kenarının uzunluğu 3 br olan şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninin her bir iç açısının açıortayını çiziniz. Çizdiğiniz açıortayların kesim noktasını O olarak adlandırınız.
2. Düzgün altıgenin bir iç açısının ölçüsünün  $120^\circ$  olduğunu göz önünde bulundurarak açıortayların oluşturduğu üçgenlerin iç açılarının ölçülerini belirleyiniz ve bu üçgenlerin türünü söyleyiniz.
3. Bu üçgenlerin kenar uzunlukları ile düzgün altıgenin kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi belirleyerek düzgün altıgenin iç açıortay uzunluklarını hesaplayınız.
4. O noktasından  $[CD]$  na bir dikme çizip dikme ayağını H olarak adlandırınız.  $[OH]$  nın, OCD üçgeninin yüksekliği olduğunu göz önünde bulundurarak  $|OH|$  nu hesaplayınız.
5. Bir düzgün altıgenin merkezinin nasıl bulunacağını ve merkezinin bir kenara olan uzaklığının kenar uzunluğu ile ilişkisini açıklayınız.



### Bilgi Kutusu

Bir düzgün altıgenin;

1. Her bir iç açısının açıortayı, düzgün altıgenin içinde 6 eşkenar üçgen oluşturur.
2. Açıortaylarının kesim noktası düzgün altıgenin merkezidir. Merkezin bir kenara olan uzaklığı bir kenar uzunluğunun  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  katıdır.
3. En uzun köşegeninin uzunluğu bir kenar uzunluğunun 2 katıdır.



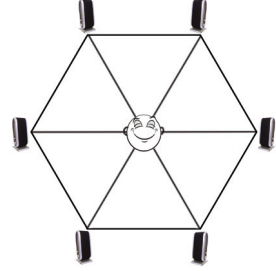


### Örnek

Ses sistemlerindeki hoparlörlerin doğru konumlandırılması, duyulan sesin kalitesi açısından önemlidir. En iyi ses kalitesi için hoparlörlerin bulunulan noktaya göre konumlandırılması gerekir. Bunun için kulak hizası hoparlörlere eşit uzaklıkta olmalıdır. Ayrıca, kulak hizasının hoparlörlere olan uzaklıkları, hoparlörlerin kendi aralarındaki uzaklıklara eşit olmalıdır. Buna göre, 6 hoparlörün bulunduğu bir ses sisteminin doğru konumlandırılmasının nasıl olacağını belirleyelim.

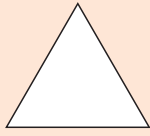
### Çözüm

Verilen bilgiler doğrultusunda 6 hoparlörün en doğru konumlandırılması şeklindeki gibi bir düzgün altıgen olmalıdır. Altıgenin merkezinin köşelere olan uzaklıkları kenar uzunluklarına eşit olduğundan istenilen şartlar sağlanmış olur.

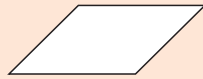


### Uygulama Köşesi

Aşağıdaki şekillerden hangisi ya da hangilerini kullanarak bir düzgün altıgen oluşturulabileceğini yorumlayınız.



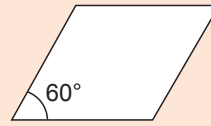
Eşkenar üçgen



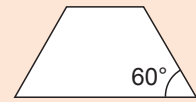
Paralelkenar



Kare



Eşkenar dörtgen



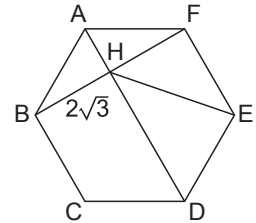
İkizkenar yamuk

### Araştırma Sorusu

Düzgün altıgen çizimlerinin farklı yollarla nasıl yapılacağını araştırarak sınıfta paylaşınız.

### Örnek

Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $[AD] \cap [BF] = \{H\}$  dir.  $|BH| = 2\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $|HE|$  nu bulalım.

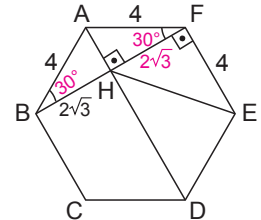


### Çözüm

$[AD]$  köşegeni açıortay olduğundan  $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{FAD}) = 60^\circ$  dir. Düzgün altıgenin kenar uzunlukları eşit olduğundan ABF ikizkenar üçgendir. Buradan  $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{AFB}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{AHF}) = 90^\circ$  olur. ABF ikizkenar üçgeninde  $[AH]$  yüksekliği aynı zamanda kenarortay olduğundan,  $|BH| = |HF| = 2\sqrt{3}$  br elde edilir.

$$\text{AHF dik üçgeninde } \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{|AF|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{|AF|} \Rightarrow |AF| = 4 \text{ br bulunur.}$$

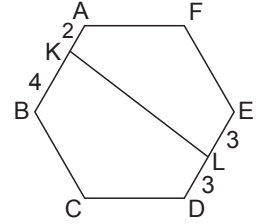
Bu durumda  $|FE| = 4$  br olur ve F köşesindeki açı  $120^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{EFH}) = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$  dir. EFH dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|HE|^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow |HE| = 2\sqrt{7}$  br bulunur.





### Örnek

Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $|AK| = 2$  br,  $|BK| = 4$  br ve  $|EL| = |LD| = 3$  br olduğuna göre,  $|KL|$  nu bulalım.

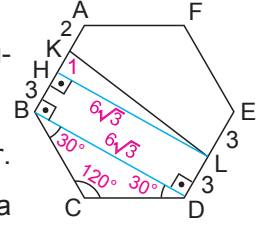


### Çözüm

ABCDEF düzgün altıgeninde  $[BD]$  çizilerek BCD ikizkenar üçgeni oluşturulduğunda  $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDE}) = 90^\circ$  olur.

$30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$  özel üçgeninde  $|BC| = 6$  br olduğundan  $|BD| = 6\sqrt{3}$  br dir.  $[LH] \perp [AB]$  olacak şekilde  $[LH]$  çizilerek DBHL dikdörtgeni oluşturulduğunda  $|BH| = 3$  br,  $|HK| = 1$  br ve  $|LH| = 6\sqrt{3}$  br elde edilir.

HLK dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|KL|^2 = 1^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow |KL| = \sqrt{109}$  br bulunur.

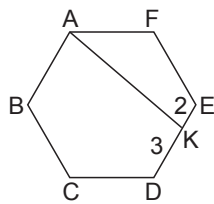


### Alıştırımlar

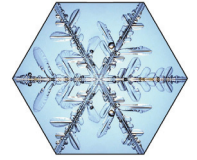
1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- Bir kenarının uzunluğu 5 br olan düzgün altıgenin köşegen uzunluğu ..... br ve kısa köşegen uzunluğu ..... br dir.
- Düzgün altıgenin aynı köşesine ait kısa köşegenleri arasındaki açının ölçüsü ..... derecedir.
- Bir kenarının uzunluğu 6 br olan düzgün altıgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden şeklin bir kenarının uzunluğu ..... br olan ..... dir.
- Bir iç açısının ölçüsü  $60^\circ$  olan ..... eşkenar dörtgen ile kenar uzunluğu eşkenar dörtgenin kenar uzunluğuna eşit olan bir düzgün altıgen oluşturulabilir.

2. Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $|DK| = 3$  br ve  $|KE| = 2$  br olduğuna göre,  $|AK|$  kaç br dir?

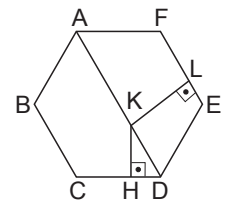


3. Yanda verilen düzgün altıgen şeklindeki kar tanesi modelinde köşegenlerin çizilmesiyle;



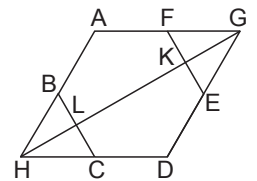
- Model üzerinde hangi geometrik şekiller oluşmuştur?
- Oluşan geometrik şekillerin eş veya benzer olup olmadıklarını yorumlayınız.

4. Şekilde ABCDEF düzgün altıgeninde  $[KL] \perp [FE]$  ve  $[KH] \perp [CD]$  dir.  $|KL| = 3\sqrt{3}$  br ve  $|KH| = 2\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $|AK|$  kaç br dir?



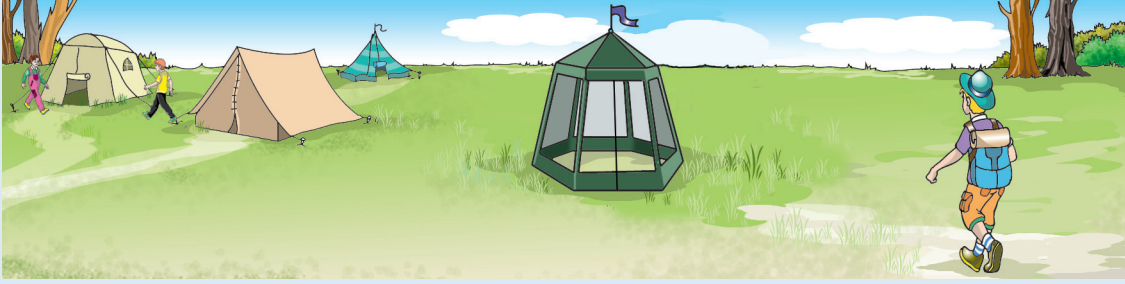
5. Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgen ve HDG üçgendir.

$|HG| = 12\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $|GK| + |AB|$  toplamı kaç br dir?





### 3.4. Düzgün Altıgensel Bölgenin Alanı



Yukarıdaki fotoğrafta Mustafa'nın hafta sonu tatilini değerlendirmek için gittiği çadır kampı görülmektedir. Mustafa'nın çadırının zemini düzgün altıgen şeklindedir. Bu kampta her müşteri, çadırının zemin alanı ile doğru orantılı olarak yer ücreti ödemektedir.

Buna göre, Mustafa ödeyeceği yer ücretini hesaplarken çadırının hangi uzunluklarını ölçmelidir? Yorumlayınız.



#### Etkinlik

Yandaki fotoğrafta farklı renklerdeki malzemelerle kaplanacak olan dikdörtgen şeklindeki duvarın bir kısmının görüntüsü verilmiştir.

Duvarın kaplanmasında kullanılacak olan malzeme, düzgün altıgen biçiminde olup bu malzeme istenilen boyutlarda kesilebilmektedir. Bu düzgün altıgen şeklindeki malzemenin merkezinin bir kenarına uzaklığı  $2\sqrt{3}$  cm dir.



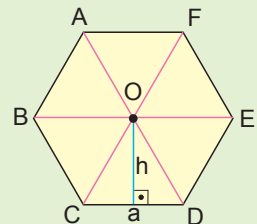
Bu bilgilerden yararlanarak aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. Kullanılan malzemelerden bir tanesinin bir kenarının uzunluğunu ve çevresini hesaplayınız.
2. Kullanılan malzemelerden bir tanesinin iç açıortaylarını çiziniz. Oluşan eşkenar üçgensel bölgelerin alanlarından yararlanarak malzemenin duvar üzerinde kapladığı alanı hesaplayınız.
3. Kullanılan malzemenin alanının çevre uzunluğuna oranı ile bir kenar uzunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
4. Kaplanacak olan duvarın alanının  $12\sqrt{3}$  m<sup>2</sup> olduğunu varsayarak, bu duvarın tamamen kaplanması için kaç tane malzeme kullanılması gerektiğini hesaplayınız.



#### Bilgi Kutusu

Bir düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğu "a", merkezinin herhangi bir kenara uzaklığı "h" ve çevresinin uzunluğu "Ç" olmak üzere, düzgün altıgensel bölgenin alanı  $A = \frac{\text{Ç} \cdot h}{2}$  veya  $A = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$  bağıntılarından biri ile bulunur.



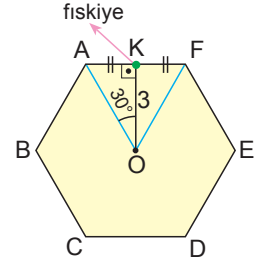


### Örnek

Düzgün altıgen biçiminde inşa edilen bir havuzun bir kenarının orta noktasına fiskeye yerleştirilmiştir. Fiskeye suyu kendisinden 3 m uzağa (havuzun orta noktasına) attığına göre, havuzun çevresini ve alanını bulalım.

### Çözüm

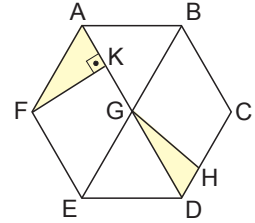
Havuz ve fiskeye geometrik olarak modellenip şekildeki gibi çizilmiştir. O noktası havuzun orta noktası olmak üzere,  $|OK| = 3$  m dir.  $[OA]$  ve  $[OF]$  çizildiğinde oluşan OAF eşkenar üçgeninde  $[OK]$  açıortay olduğundan,  $m(\widehat{KOA}) = 30^\circ$  dir. OKA üçgeni  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  özel dik üçgeni olduğundan  $|AK| = |KF| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$  m ve  $|AF| = 2\sqrt{3}$  m olur.



$$\text{Buradan } \text{Ç}(ABCDEF) = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ m ve } A(ABCDEF) = \frac{\text{Ç} \cdot h}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 18\sqrt{3} \text{ m}^2 \text{ bulunur.}$$

### Örnek

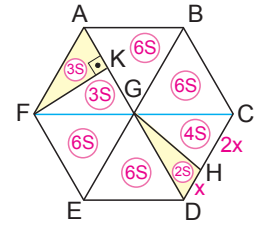
Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $[BE] \cap [AD] = \{G\}$ ,  $[FK] \perp [AD]$  ve  $2|DH| = |HC|$  olduğuna göre, taralı alanlar toplamının düzgün altıgensel bölgenin alanına oranını bulalım.



### Çözüm

$2|DH| = |HC|$  verildiğinden  $|DH| = x$  br ve  $|HC| = 2x$  br olarak alınırsa,  $[FC]$  köşegeni çizildiğinde oluşan GCD üçgeninde  $A(\widehat{GDH}) = 2S \text{ br}^2$  ve  $A(\widehat{GHC}) = 4S \text{ br}^2$  olur.

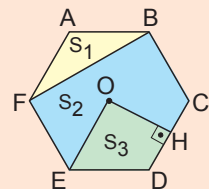
Açıortaylar düzgün altıgensel bölgeyi eş alanlı 6 üçgene ayırdığından her bir üçgenin alanı  $6S \text{ br}^2$  dir. AFG eşkenar üçgen olduğundan  $[FK]$  bu üçgeni eş alanlı iki üçgene ayırır. Bundan dolayı  $A(\widehat{AFK}) = A(\widehat{FGK}) = 3S \text{ br}^2$  dir.



Buradan taralı bölgelerin alanları  $5S \text{ br}^2$  ve düzgün altıgensel bölgenin alanı  $36S \text{ br}^2$  olur. O hâlde taralı bölgelerin alanları toplamının düzgün altıgensel bölgenin alanına oranı  $\frac{5S}{36S} = \frac{5}{36}$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

Şekildeki O merkezli ABCDEF düzgün altıgeninde  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.  $[OH] \perp [DC]$  olduğuna göre,  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  değerlerinin aşağıdaki sayıların hangileri ile orantılı olduğunu bulunuz.



	$S_1$	$S_2$	$S_3$
a.	1	4	2
b.	3	6	4
c.	2	8	3
ç.	2	4	3
d.	3	5	4





## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- a. Düzgün altıgensel bölgeyi açılış açıları eşit alanlı ..... tane üçgene ayırır.  
 b. Çevresi 18 br olan düzgün altıgensel bölgenin alanı .....  $\text{br}^2$  dir.  
 c. Alanı  $96\sqrt{3} \text{ br}^2$  olan düzgün altıgensel bölgenin herhangi karşılıklı iki kenarı arasındaki uzaklık ..... br dir.  
 ç. Bir kenarının uzunluğu  $4\sqrt{3}$  br olan düzgün altıgenin paralel iki köşegeni arasında kalan bölgenin alanı .....  $\text{br}^2$  dir.

2. Şekildeki ABCDEF

düzgün altıgensel

bölgesinde

$[FC]$  ve  $[BE]$

köşegenler,

$[FC] \cap [KE] = \{H\}$  ve  $2|KC| = |BK|$  dur.

Buna göre, aşağıdaki ifadelerden doğru olanlara "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.

- ☐  $5A(\widehat{KHC}) = A(\widehat{GHKB})$   
☐  $3A(\widehat{KHC}) = A(\widehat{GHE})$   
☐  $A(\widehat{FEH}) = 2A(\widehat{GHKB})$   
☐  $3A(\widehat{GFE}) = 2A(\widehat{HCDE})$   
☐  $8A(\widehat{HCDE}) = A(\widehat{ABCDEF})$   
☐  $10A(\widehat{KHC}) = A(\widehat{GCDE})$   
☐  $3A(\widehat{GHE}) = A(\widehat{FGE})$

3. Şekildeki ABCDEF

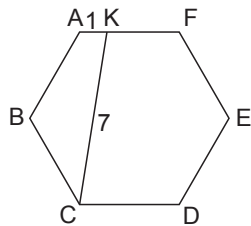
düzgün altıgeninde

$|AK| = 1 \text{ br}$ ,

$|CK| = 7 \text{ br}$

olduğuna göre,

düzgün altıgenin alanı kaç  $\text{br}^2$  dir?



4. Bir kenarının uzunluğu

12 br olan şekildeki

ABCDEF düzgün

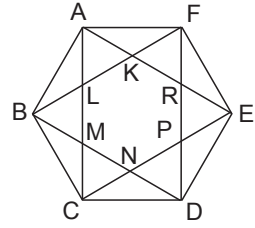
altıgeninin

köşegenlerinden

bazıları çizilerek

KLMNPR altıgeni oluşturulmuştur.

Buna göre,  $\frac{A(ABCDEF)}{A(KLMNPR)}$  oranı kaçtır?



5. Şekildeki ABCDEF

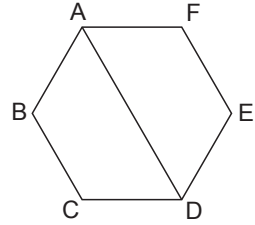
düzgün altıgeninde

$|AD| = 12 \text{ br}$  olduğuna

göre, düzgün

altıgenin çevresi

kaç br dir?



6. Şekildeki ABCDEF

düzgün altıgensel

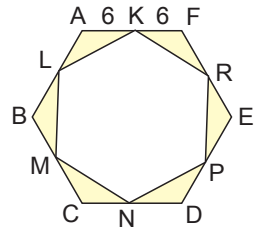
bölgesinde K, L, M,

N, P ve R

bulundukları

kenarların orta noktalarıdır.

$|AK| = |KF| = 6 \text{ br}$  olduğuna göre, taralı bölgelerin alanları toplamı kaç  $\text{br}^2$  dir?



7. Şekildeki ABCDEF

düzgün altıgeninde

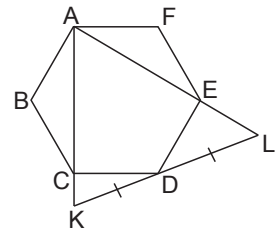
A, E, L ve A, C, K

doğrusal noktalardır.

$|DK| = |DL|$  ve

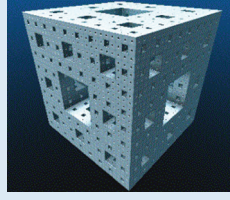
$|AB| = 6 \text{ br}$  olduğuna

göre,  $\frac{A(\widehat{AKL})}{A(ABCDEF)}$  oranı kaçtır?





### 3.5. Çokgenlerde Desen, Fraktal Görüntüsü Oluşturma

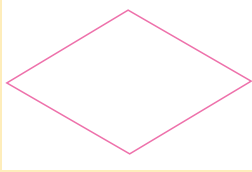


Yukarıda verilen desen ve fraktal görüntülerini inceleyiniz. Bu görüntülerin oluşturulma aşamalarını yorumlayınız.

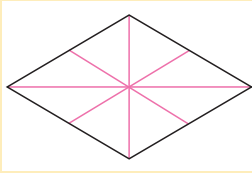


#### Etkinlik

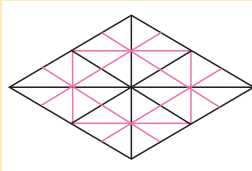
1. Aşağıda başlangıç şekli eşkenar dörtgen olan desenin oluşturulma süreci verilmiştir. İnceleyiniz.



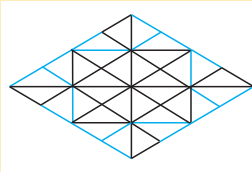
**Başlangıç:** Bir eşkenar dörtgen çizilir.



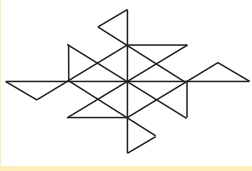
**1. Adım:** Eşkenar dörtgenin köşegenleri ve orta tabanları çizilir.



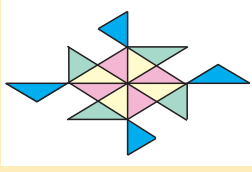
**2. Adım:** Eşkenar dörtgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen çizilir. Bu dörtgenin kenarları ile eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesim noktalarından geçen doğrular şeklindeki gibi çizilir.



**3. Adım:** Şekil üzerindeki bazı doğru parçaları mavi renkle belirlenir.



**4. Adım:** Mavi renkle belirlenen doğru parçaları silinerek şeklindeki desen oluşturulur.



**5. Adım:** Oluşan bölgeler şeklindeki gibi renklendirilir.

2. Desenin 4. adımda farklı doğru parçalarını silip oluşan bölgeleri boyayarak yeni desenler oluşturunuz.

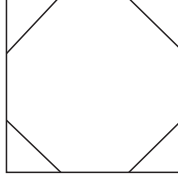
3. Çokgenler yardımıyla desenler oluşturulurken hangi adımların uygulandığını açıklayınız.



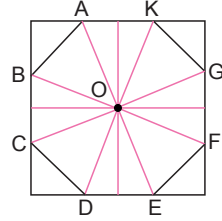
## Örnek

Yandaki desenin oluşturulma sürecini belirleyelim.

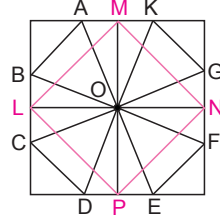
## Çözüm



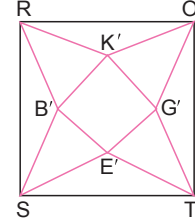
Başlangıç



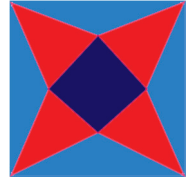
1. Adım



2. Adım



3. Adım



4. Adım

**Başlangıç:** Bir kare çizilir. Karenin kenarları üç eş parçaya ayrılarak karenin köşelerinde 4 tane eş üçgen oluşturulur.

**1. Adım:** Karenin orta tabanları çizilerek ağırlık merkezi belirlenir. Karenin ağırlık merkezi ile kenarlarını üç eş parçaya ayıran noktaları birleştiren doğru parçaları çizilir. Oluşan üçgenler şekildeki gibi harflendirilir.

**2. Adım:** Karenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen çizilerek MNPL şeklinde adlandırılır.

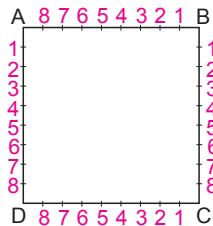
**3. Adım:** OGK üçgeninin [MN] na göre, yansıması alınarak O'G'K' üçgeni elde edilir ve OGK üçgeni silinir. Benzer şekilde OFE üçgeninin [PN] na göre, OCD üçgeninin [LP] na göre ve OAB üçgeninin [ML] na göre yansımaları alınarak sırayla TG'E', SB'E' ve RK'B' üçgenleri elde edilir.  $\widehat{OAB}$ ,  $\widehat{OCD}$ ,  $\widehat{OEF}$ , MNPL dörtgeni ile [MP] ve [LN] silinir.

**4. Adım:** Köşe harfleri silinir. Oluşan üçgensel ve dörtgensel bölgeler boyanır ve desen tamamlanır.

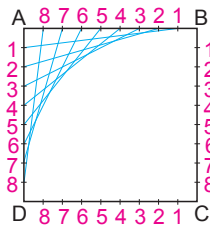
## Örnek

Yandaki desenin oluşturulma sürecini belirleyelim.

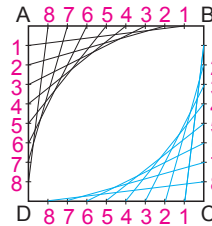
## Çözüm



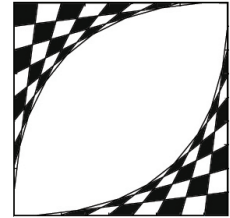
Başlangıç



1. Adım



2. Adım



3. Adım

**Başlangıç:** Bir ABCD karesi çizilir. Bu karenin her kenarı 9 eş parçaya ayrılarak her parça şekildeki gibi numaralandırılır.

**1. Adım:** [AB] ve [AD] kenarları üzerindeki aynı numaralı noktaları birleştiren doğru parçaları çizilir.

**2. Adım:** [DC] ve [BC] kenarları üzerindeki aynı numaralı noktaları birleştiren doğru parçaları çizilir.

**3. Adım:** Çizilen doğru parçalarının A köşesinde oluşturduğu bölge siyaha boyanır. Karenin bir kenarı üzerinde gidilerek bir bölge boş bırakılır, diğer bölge siyaha boyanır. Boyama yöntemi tüm bölgeler için uygulanarak yardımcı harfler silinir ve desen tamamlanır.



## Araştırma Sorusu

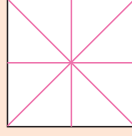
Filografi sanatını ve bu sanatta çokgenlerin kullanılıp kullanılmayacağını araştırarak sınıfınızla paylaşınız.

## Uygulama Köşesi

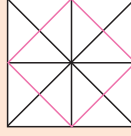
1. Aşağıda verilen desenin oluşturulma adımlarını inceleyerek her adımda yapılan işlemi veya işlemleri açıklayınız.



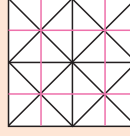
Başlangıç



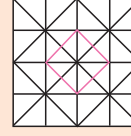
1. Adım



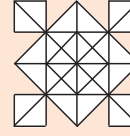
2. Adım



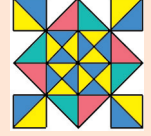
3. Adım



4. Adım

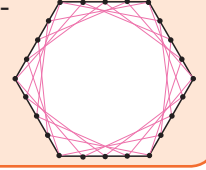


5. Adım



6. Adım

2. Yandaki şekilde düzgün altıgensel bölge ile oluşturulmuş bir desen verilmiştir. Bu deseni inceleyerek nasıl oluşturulduğunu yorumlayınız.

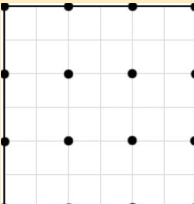


## Etkinlik

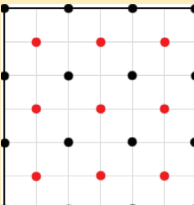
1. Aşağıda başlangıç şekli kare olan bir düğüm deseninin oluşturulma aşamaları verilmiştir. Bu aşamaları inceleyiniz.



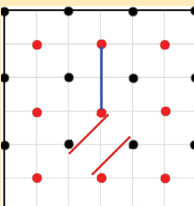
**Başlangıç:** Kareli kâğıttan 6 br x 6 br boyutlarında kare şeklinde bir parça kesilir.



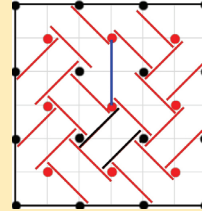
**1. Adım:** Kesilen parça 2 br x 2 br şeklinde karelere ayrılarak köşe noktaları işaretlenir.



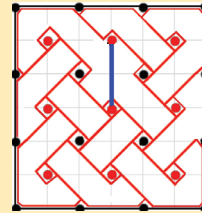
**2. Adım:** 2 br x 2 br lik karelerin merkezleri işaretlenir.



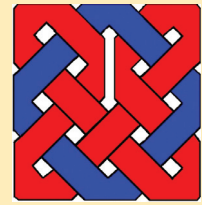
**3. Adım:** Şerit başlangıcı olan mavi renkli doğru çizilir. Şerit başlangıcının altındaki noktalar paralel iki doğru ile şekildeki gibi birleştirilerek bir şerit elde edilir.



**4. Adım:** Diğer şeritler birbirine dik olacak şekilde çizilerek tüm şeritler elde edilir.



**5. Adım:** Düğümün dönüş köşeleri belirlenir.



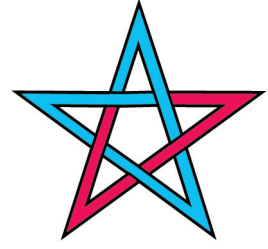
**6. Adım:** Taban çizgileri ve yardımcı noktalar silinerek düğüm boyanır.

2. Siz de bilgisayar yazılımları veya gönye, açıölçer, cetvel vb. araçlar yardımıyla başlangıç şekli çokgen olan düğüm desenleri oluşturunuz. Oluşturma sürecinizin her aşamasını yazınız.

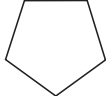


### Örnek

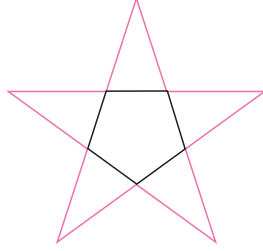
Yanda verilen düğüm deseninin oluşturulma sürecini belirleyelim.



### Çözüm



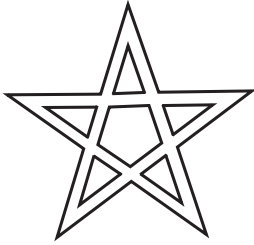
Başlangıç



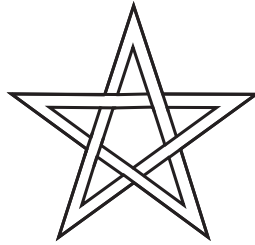
1. Adım



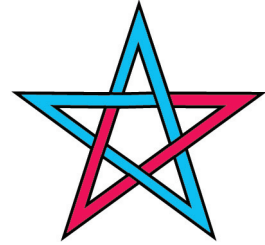
2. Adım



3. Adım



4. Adım



5. Adım

**Başlangıç:** Bir düzgün beşgen çizilir.

**1. Adım:** Düzgün beşgenin kenarları kesişene kadar uzatılır.

**2. Adım:** Düğümü oluşturacak çizgiler istenilen genişlikte kalınlaştırılır.

**3. Adım:** Kalın çizgilerin ortası silinir.

**4. Adım:** Çizgilerin kesiştikleri yerlerde sağ üstten başlayıp üstten – alttan – üstten – alttan – üstten – alttan geçmiş görünümü vermek için gerekli çizimler yapılır.

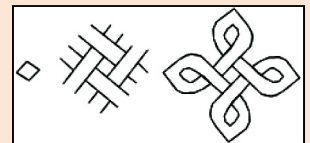
**5. Adım:** Düğüm deseni renklendirilerek süreç tamamlanır.

### Araştırma Sorusu

Farklı kültürlerle ait kilim, halı vb. motifleri araştırınız. Bu motifleri inceleyerek kullanılan geometrik şekillerin o kültür için taşıdığı anlamları sınıfınızla paylaşınız.

### Uygulama Köşesi

Bir kareden başlanarak oluşturulan yandaki düğüm desenini inceleyerek bu desenin oluşturulma sürecini açıklayınız.



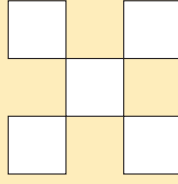




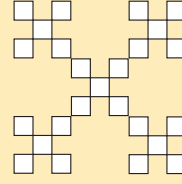
## Etkinlik



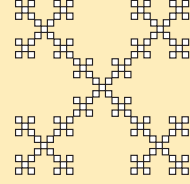
Başlangıç



1. Adım



2. Adım



3. Adım

Yukarıdaki fraktalın başlangıç adımında kenar uzunluğu 12 br olan bir kare verilmiştir. 1. adım oluşturulurken karenin kenarları iki yatay iki dikey çizgiyle 3 eş parçaya ayrılarak karenin köşelerine komşu olmayan kenar parçaları silinmiştir. Aynı işlem elde edilen her yeni kareye uygulanarak fraktalın diğer adımları oluşturulmuştur.

1. Tablo 3.5.1'i fraktalın oluşturulma adımlarına göre doldurunuz.

Adım numarası	İlgili adımdaki karesel bölgelerin çevre uzunluğu (br)	İlgili adımdaki karesel bölgelerin alanı (br <sup>2</sup> )
Başlangıç	48	144
1		
2		
3		

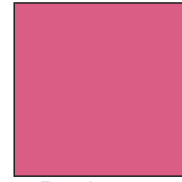
Tablo: 3.5.1

2. Tablo 3.5.1'den yararlanarak fraktalın adım numarası ile karesel bölgelerin çevre uzunluğu ve karesel bölgelerin alanları arasında bir örüntü elde ediniz. Bu örüntüyü fraktalın n. adımı için cebirsel ifade şeklinde yazınız.

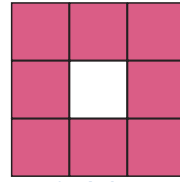
3. Fraktalın 5. adımındaki karesel bölgelerin toplam alanını ve çevre uzunluğunu bularak fraktalın belirli bir adımındaki karesel bölgelerin alanı ile çevresi arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

## Örnek

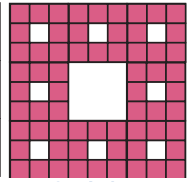
Yanda başlangıç şekli ve ilk iki adımı verilen fraktalın başlangıç şekli kenar uzunluğu 3 br olan karedir. 1. adım oluşturulurken başlangıç şekli iki yatay iki dikey çizgiyle 9 eş kareye ayrılarak başlangıçtaki karenin hiçbir kenarına komşu olmayan kare kesilip çıkarılmıştır.



Başlangıç



1. Adım



2. Adım

Aynı işlem elde edilen her yeni kareye uygulanarak diğer adımlar oluşturulmuştur. Buna göre, fraktalın n. adımında çıkarılan karelerin kenar uzunluklarının ve oluşan şeklin alanının n ye bağlı ifadesini bulalım.

## Çözüm

Başlangıçtaki karesel bölgenin bir kenar uzunluğu 3 br olduğundan 1. adımda çıkarılan karesel bölgenin kenar uzunluğu  $\frac{3}{3} = 1$  br dir. 2. adımda ise çıkarılan karesel bölgelerin kenar uzunluğu  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$  br dir. Bundan dolayı n. adımda çıkarılan karesel bölgenin kenar uzunluğu  $\frac{3}{3^n} = 3^{1-n}$  olur.

Başlangıçtaki karesel bölgenin alanı  $3^2 = 9$  br<sup>2</sup> olduğundan 1. adımdaki şeklin alanı  $3^2 - 1^2 = 8$  br<sup>2</sup> dir. İkinci adımdaki karesel bölgelerin kenar uzunlukları  $\frac{1}{3}$  br<sup>2</sup> olduğundan her birinin alanı  $\frac{1}{9}$  br<sup>2</sup> dir. İkinci adım oluşturulurken 1. adımdaki şekilden 8 tane  $\frac{1}{9}$  br<sup>2</sup> lik kare çıkarıldığından 2. adımdaki şeklin alanı  $8 - \frac{8}{9} = \frac{64}{9}$  br<sup>2</sup> dir. Bundan dolayı n. adımdaki şeklin alanı  $9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$  bulunur.

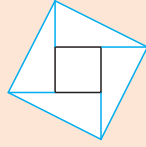


### Uygulama Köşesi

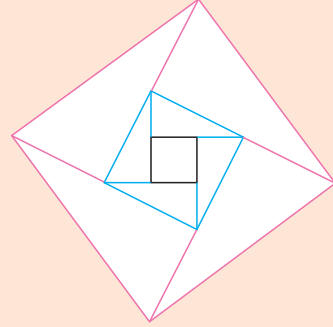
Aşağıda başlangıç şekli kare olan fraktalın başlangıç ve ilk iki adımı verilmiştir. Başlangıçtaki karenin kenarlarına kendi uzunlukları ile eş doğru parçaları çizilip uç noktaları birleştirilerek 1. adımdaki şekil oluşturulmuştur. Başlangıçtaki karenin alanı  $4 br^2$  olduğuna göre, fraktalın 4. adımında elde edilen karenin alanını ve çevresini hesaplayınız.



Başlangıç



1. Adım

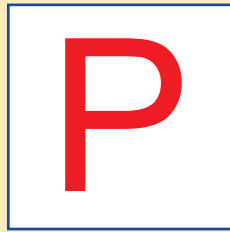


2. Adım



### Etkinlik

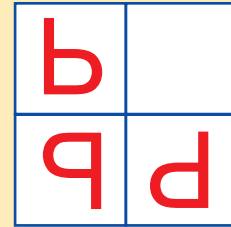
1. Aşağıda başlangıç şekli verilen bir fraktalın başlangıç şeklinin  $1/4$  oranında küçültülmüş üç kopyası alınarak fraktalın birinci adımı oluşturulmuştur. Birinci adım oluşturulurken hangi dönüşümlerin kullanıldığını bulunuz.



Başlangıç

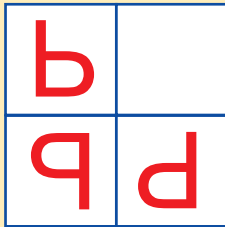


Görüntünün  $1/4$  oranında küçültülmüş üç kopyası

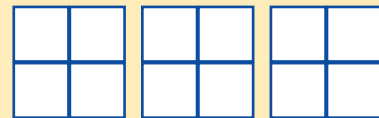


1. Adım

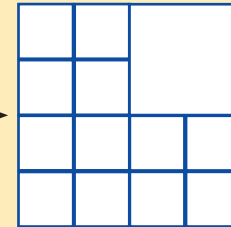
2. Bulduğunuz dönüşümleri birinci adımdaki görüntünün  $1/4$  oranında küçültülmüş üç kopyasına uygulayarak fraktalın ikinci adımındaki görüntüyü elde ediniz.



1. Adım



Görüntünün  $1/4$  oranında küçültülmüş üç kopyası



2. Adım

3. Fraktalın  $n$ . adımındaki içi boş olmayan kare sayısını veren  $n$  ye bağlı ifadeyi bulunuz.

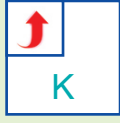
4. Fraktal görüntüsü oluşturulurken başka hangi dönüşümlerin kullanılabileceğini açıklayınız.



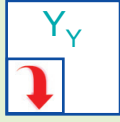


### Bilgi Kutusu

1. Herhangi bir fraktalın görüntüsü 1/4 oranında küçültülüp kopyaları alınarak aşağıdaki dönüşümlerle çeşitli fraktallar oluşturulabilir.



Kendi görüntüsü



Yatay eksene göre yansıma



Saat yönünün tersine 90° lik dönme



Dikey eksene göre yansıma



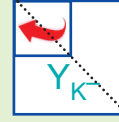
Saat yönünün tersine 180° lik dönme



Sağ üst köşeden sol alt köşeye çizilen köşegene göre yansıma



Saat yönünün tersine 270° lik dönme



Sol üst köşeden sağ alt köşeye çizilen köşegene göre yansıma

2. Hücrelerde kullanılan dönüşümler, sağ kutu daima boş kalacak şekilde (1, 2, 3 sırasında) kodlanır.

1	
2	3

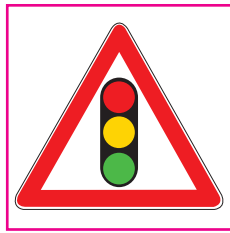
### Örnek

Yanda verilen fotoğrafın 1/4 oranında küçültülmüş üç kopyasını kullanarak saat yönünün tersine 90° lik dönme, kendi görüntüsü ve saat yönünün tersine 270° lik dönme hareketleriyle bir fraktal oluşturulur.



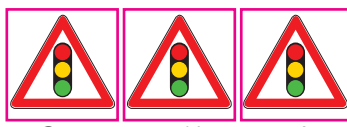
### Çözüm

Verilen resmin 1/4 oranında küçültülmüş 3 kopyası alınarak 1. adımın oluşturulması aşağıdaki gibidir.



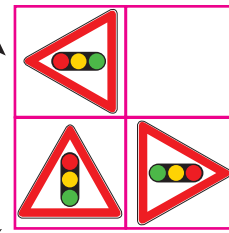
Başlangıç

Saat yönünün tersine 90° lik dönme



Görüntünün 1/4 oranında küçültülmüş üç kopyası

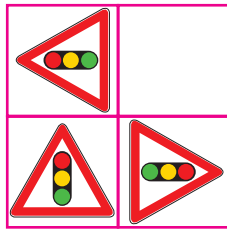
Kendi görüntüsü



1. Adım

Saat yönünün tersine 270° lik dönme

Dönüşümler uygulanarak oluşturulan 1. adımdaki görüntü tekrar 1/4 oranında küçültülerek 3 kopyası alınır ve aynı dönüşümlerle fraktalın 2. adımı oluşturulur.



2. Adım

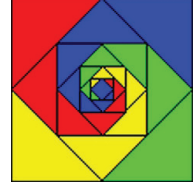
Yukarıdaki adımlar aynı yöntemlerle tekrarlanarak yeni görüntüler oluşturulur ve fraktal tamamlanır.





## Alıştırımlar

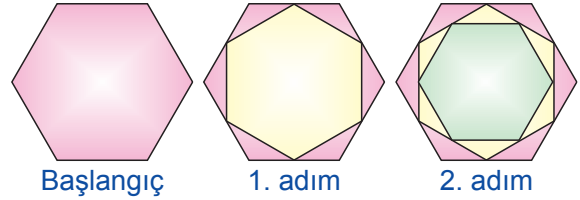
1. Başlangıç şekli kare olan yandaki desenin oluşturulma sürecini belirleyiniz.



2. Başlangıç şekli eşkenar üçgen olan yandaki düğüm desenin oluşturulma sürecini belirleyiniz.

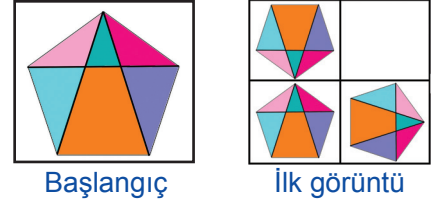


3. Yanda, başlangıç şekli düzgün altıgen olan fraktalın ilk iki adımı verilmiştir. Fraktalın birinci adımı oluşturulurken başlangıçtaki düzgün altıgenin kenar orta noktaları birleştirilmiştir. Aynı işlem, elde edilen her yeni düzgün altıgene uygulanarak fraktalın diğer adımları oluşturulmuştur.

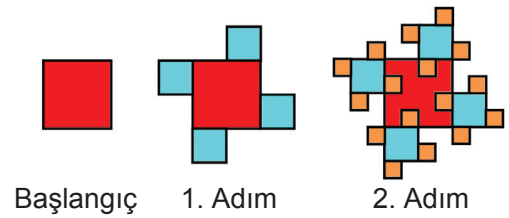


Başlangıçtaki düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğu 12 br olduğuna göre, fraktalın yedinci adımı elde edilen düzgün altıgensel bölgenin çevresini ve alanını hesaplayınız.

4. Yandaki başlangıç şeklinden hangi dönüşümlerle ilk görüntü oluşturulabilir?

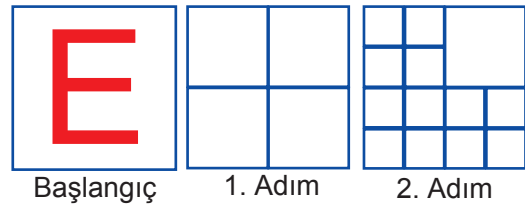


5. Yanda başlangıç ve ilk iki adımı verilen fraktal, başlangıç şeklinin ardışık olarak 1/2 oranında küçültülmesiyle oluşturulmuştur. Buna göre;



- a. Fraktalın n. adımındaki kare sayısını veren ifadeyi n ye bağlı olarak bulunuz.  
b. Fraktalın dördüncü adımında kaç tane kare vardır?

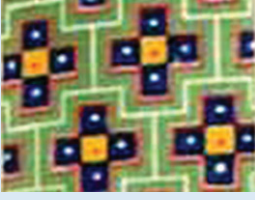
6. Başlangıç şekli kenar uzunluğu 1 br olan kare içindeki "E" harfinden oluşmaktadır. Başlangıç şeklinin 1/4 oranında küçültülmüş üç kopyasına ( $K$ ,  $K$ ,  $D_{90^\circ}$ ) dönüşümlerini uygulayarak fraktalın ilk iki adımı yandaki boşluklara çizin. Buna göre;



- 6. adım sonunda fraktal görüntüsünde kullanılan "E" harfi sayısı kaçtır?  
► 6. adımdaki fraktal görüntüsünün yerleştirildiği karenin kenar uzunluğu kaç br dir?



### 3.6. Çokgensel Bölgelerle Kaplamalar Yapma



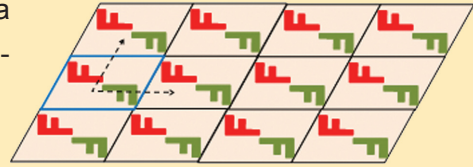
Yukarıdaki fotoğraflar farklı uygarlıklara ve kültürlere ait kaplama örneklerini göstermektedir. Bu kaplamalarda hangi çokgenlerin kullanıldığını ve bu çokgenlere hangi dönüşümlerin uygulanarak kaplamaların oluşturulduğunu yorumlayınız.



#### Etkinlik

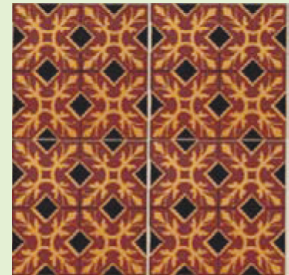
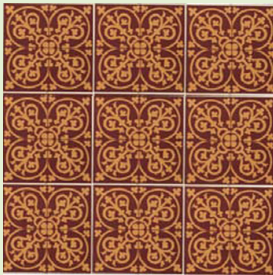
**Araç-gereç:** Cetvel ve boya kalemleri

1. Yandaki kutu içine bir kenarının uzunluğu 3 cm olan bir kare çizin. Karesel bölgenin kenar orta noktalarını cetvel yardımıyla belirleyerek bu noktaları dörtgen olacak şekilde birleştiriniz.
2. Oluşan ikizkenar üçgenler ile dörtgeni farklı renklerle boyayınız.
3. Elde ettiğiniz çokgensel bölge ile sadece öteleme dönüşümünü kullanarak defterinizin boş bir sayfasını tamamen kaplayabilir misiniz? Açıklayınız.
4. Yukarıda uyguladığınız adımların yandaki kaplama oluşturulurken kullanılan adımlarla benzer yönlerini söyleyerek hangi dönüşümlerin kullanıldığını yorumlayınız.



#### Bilgi Kutusu

Sadece öteleme dönüşümü kullanılarak düzlemde boşluk kalmayacak ve çokgensel bölgeler çakışmayacak biçimde düzlemin örtülmesine **periyodik kaplama** denir. Aşağıda periyodik kaplama örnekleri verilmiştir.





## Örnek

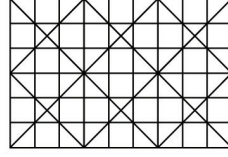
İki karesel bölgede dönüşümler kullanarak periyodik kaplama oluşturalım.



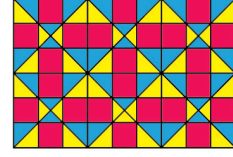
1. Adım



2. Adım



3. Adım



4. Adım

## Çözüm

**1. Adım:** Bir kare alınarak köşegenleri çizilir. İki köşesi köşegenler üzerinde, bir kenarı büyük karenin kenarı üzerinde olan şekildeki gibi başka bir kare çizilir.

**2. Adım:** Küçük kareye, büyük karenin merkezini dönme merkezi kabul ederek doksanar derecelik dönme hareketleri uygulanır.

**3. Adım:** Oluşan şekle öteleme dönüşümü uygulanarak periyodik kaplama yapılır.

**4. Adım:** Periyodik kaplama boyanır.

## Örnek

Yandaki şekilde bir periyodik kaplama örneği verilmiştir. Bu kaplamanın motifini çizerek motifin oluşturulmasında hangi dönüşümlerin kullanıldığını belirleyelim.



## Çözüm

Verilen kaplama örneği aşağıdaki motifin ötelenmesiyle oluşturulmuştur. Motif ise bir dikdörtgen içine çizilen düzgün beşgen ile bu düzgün beşgenin yatay eksene göre yansımalarıyla oluşturulmuştur.



Motif

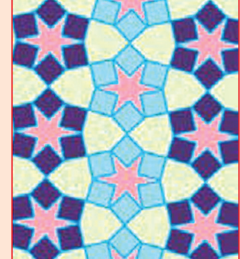
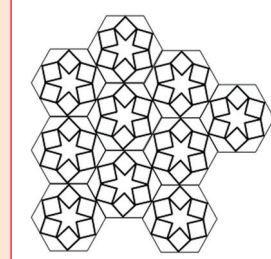
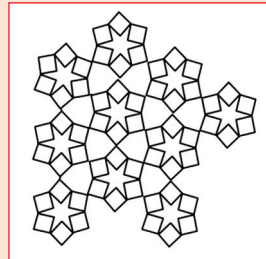
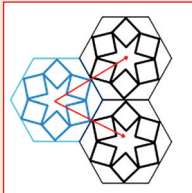


Yatay eksene göre yansıma

## Uygulama Köşesi



Başlangıç



Yukarıda bir kaplamanın oluşturma aşamaları verilmiştir. Bu aşamaları inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

► Kaplamanın başlangıç şekli oluşturulurken hangi çokgenler kullanılmıştır? Bu çokgenlere hangi dönüşümler uygulanmıştır?

► Bu kaplama periyodik bir kaplama mıdır? Neden?



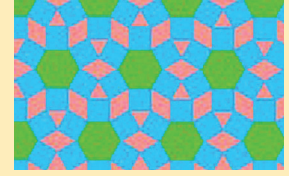
### Araştırma Sorusu

Çokgensel bölgeler kullanılarak yapılan farklı uygarlıklara ait periyodik kaplamaları araştırarak sınıfinizla paylaşınız.

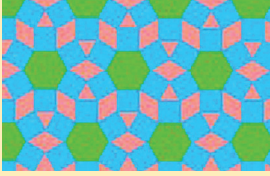


### Etkinlik

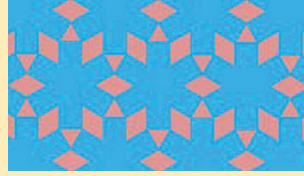
Yandaki kaplama düzgün altıgen, kare ve eşkenar üçgenlerden oluşturulmuştur. Bu kaplama üzerinde uygulanan bazı tekniklerle oluşturulan yeni kaplamalar aşağıda verilmiştir. Bu kaplamaları inceleyerek verilen soruları cevaplayınız.



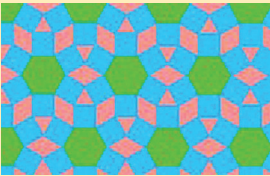
a.



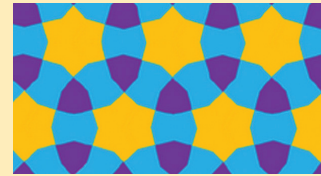
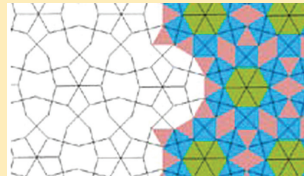
Verilen kaplama



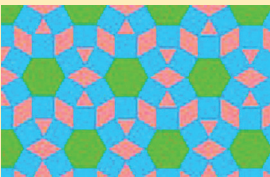
b.



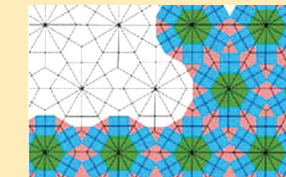
Verilen kaplama



c.



Verilen kaplama



1. a maddesinde verilen kaplamada karesel ve düzgün altıgensel bölgelerin komşu kenarlarını göz önünde bulundurarak yeni kaplamanın nasıl bir teknikle oluşturulduğunu yorumlayınız.
2. b maddesinde verilen kaplamada, karesel ve düzgün altıgensel bölgelerin köşegenlerini göz önünde bulundurarak yeni kaplama oluşturulurken nasıl bir teknik kullanıldığını yorumlayınız.
3. c maddesinde verilen kaplamada komşu çokgensel bölgelerin merkezlerini göz önünde bulundurarak yeni kaplama oluşturulurken nasıl bir teknik kullanıldığını yorumlayınız.
4. Siz de yukarıdaki kaplama tekniklerine benzer nasıl bir teknik geliştirebilirsiniz? Tartışınız.



### Bilgi Kutusu

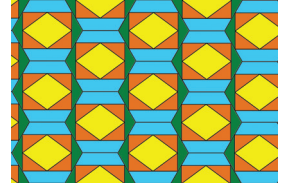
Bir kaplama örneğindeki düzgün çokgensel bölgelere aşağıdaki teknikler uygulanarak yeni kaplama tasarımları elde edilebilir.

1. **Birleştirme:** Düzgün çokgensel bölgenin komşu kenarları silinerek birleştirilir.
2. **Bölme:** Düzgün çokgensel bölgeler merkezinden, kenarortay noktalarından ve köşegenlerinden bölünür.
3. **Dual:** Düzgün çokgensel bölge ile komşu düzgün çokgensel bölgenin merkezi doğru parçalarıyla birleştirilir.
4. **Dönme:** Düzgün çokgensel bölge merkezi etrafında  $\frac{2\pi}{n}$  (n: düzgün çokgensel bölgenin kenar sayısı) kadar döndürülür.



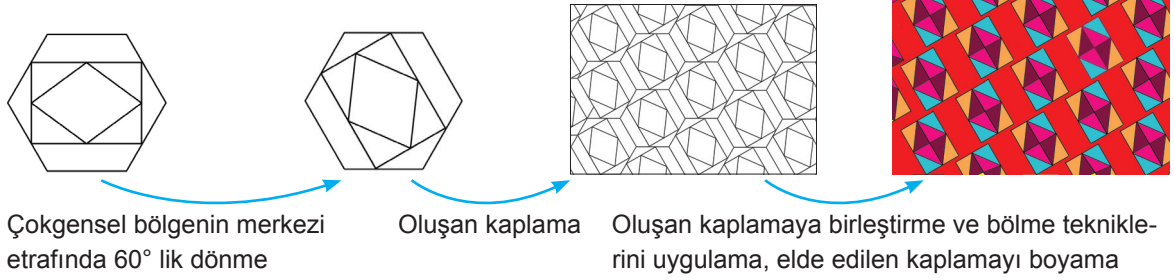
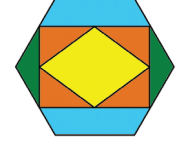
## Örnek

Yanda verilen kaplamada kullanılan çokgensel bölgeyi belirleyip sırayla dönme, birleştirme ve bölme tekniklerini uygulayarak yeni bir kaplama elde edelim.



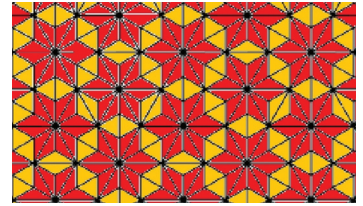
## Çözüm

Verilen kaplama yandaki çokgensel bölgelerin ötelenmesi ile oluşturulmuştur. Dönme, birleştirme ve bölme tekniklerinin aşamaları aşağıdaki gibidir.

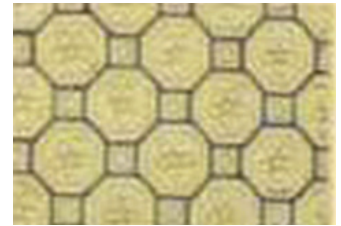


## Alıştırmalar

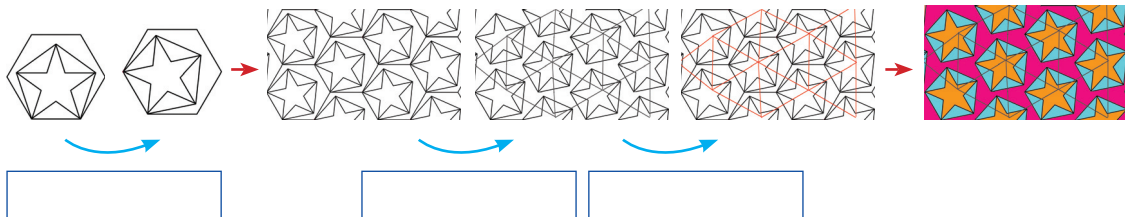
1. Yanda verilen kaplamanın oluşturulma sürecini belirleyiniz.



2. Yanda verilen kaplama örneğine kaplama tekniklerini uygulayarak yeni kaplamalar oluşturunuz.



3. Aşağıda bir kaplamanın oluşturulma aşamaları verilmiştir. Her aşamada kullanılan tekniği şekillerin altlarındaki kutuların içine yazınız.







## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

1. Bir düzgün beşgenin herhangi iki köşegeni arasındaki açının ölçüsü ..... veya ..... derecedir.
2. Düzgün beşgensel bölgenin alanı çevresi ile merkezinin ..... çarpımının yarısıdır.
3. Düzgün altıgenin açıortayları düzgün altıgen içinde 6 eşkenar üçgen, ..... eşkenar dörtgen ve ..... ikizkenar yamuk oluşturur.
4. Merkezinin bir kenara uzaklığı 2 br olan düzgün altıgenin birbirine en uzak iki köşesi arasındaki uzaklık ..... br dir.
5. Düzgün altıgensel bölgenin alanı  $A$  br<sup>2</sup> ve bu düzgün altıgensel bölgenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden düzgün altıgensel bölgenin alanı  $B$  br<sup>2</sup> ise  $\frac{A}{B}$  oranı ..... eşittir.
6. Bir kaplamadaki düzgün çokgensel bölge ile komşu düzgün çokgensel bölgenin merkezinin doğru parçalarıyla birleştirilmesine ..... tekniği denir.
7. Düzgün karesel bölgeden oluşturulmuş bir kaplamaya dönme tekniği uygulamak için düzgün karesel bölge merkezi etrafında ..... derece döndürülmelidir.

B. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

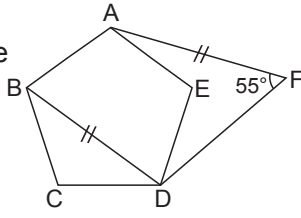
1. Bir düzgün beşgenin iç açılarından birinin ölçüsü  $a$ , dış açılarından birinin ölçüsü  $b$  ise  $\frac{a}{b}$  oranı  $\frac{3}{2}$  ye eşittir. (.....)
2. Bir düzgün beşgenin kenarlarını taşıyan doğruların kesiştirilmesi ile elde edilen yıldızın iç açılarının toplamı  $360^\circ$  dir. (.....)
3. Düzgün beşgensel bölgenin tüm köşelerine ait açıortayları beşgensel bölgeyi eşit alanlı 10 üçgene ayırır. (.....)
4. Bir düzgün altıgensel bölge ile herhangi paralel iki köşegeni arasında kalan alan  $\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> ise düzgün altıgensel bölgenin alanı  $3\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> dir. (.....)
5. Alanı  $6\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> olan bir düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğu 2 br dir. (.....)
6. Bir kenarının uzunluğu  $6\sqrt{3}$  br olan düzgün altıgenin merkezinin herhangi bir kısa köşegenine uzaklığı  $2\sqrt{3}$  br dir. (.....)
7. Bir karesel bölge içindeki fotoğrafın  $\frac{1}{4}$  oranında küçültülmüş üç kopyasıyla fraktal oluşturma sürecinde beşinci adımdaki fotoğraf sayısı 256 dir. (.....)
8.  $Y_K$ -dönüşümü sol üst köşeden sağ alt köşeye çizilen köşegene göre yansımadır. (.....)
9. Periyodik kaplama yapılırken çokgensel bölgeler üzerinde sadece öteleme dönüşümü kullanılır. (.....)



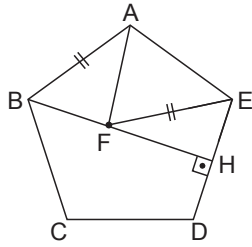


## ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

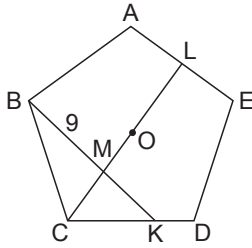
1. Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde  $|BD| = |AF|$  ve  $m(\widehat{AFD}) = 55^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{EAF})$  kaç derecedir?  
A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 40



2. Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde  $[BH] \perp [ED]$  ve  $|AB| = |FE|$  olduğuna göre,  $m(\widehat{BAF})$  kaç derecedir?  
A) 42 B) 40 C) 38 D) 36 E) 34

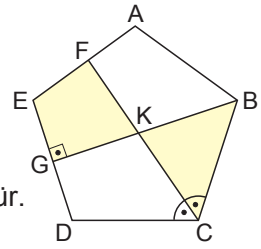


3. Şekildeki ABCDE düzgün beşgenin merkezi O noktasıdır.  $[CL] \cap [BK] = \{M\}$ ,  $|CK| = 2|KD|$  ve  $|BM| = 9$  olduğuna göre,  $|MK|$  kaç br dir?  
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
4. Bir köşegenin uzunluğu 12 br olan bir düzgün beşgenin bir kenarının uzunluğu kaç br dir?  
A)  $4(\sqrt{5} - 2)$  B)  $4(\sqrt{5} - 1)$   
C)  $6(\sqrt{5} - 1)$  D)  $6(\sqrt{5} + 1)$   
E)  $7(\sqrt{5} + 1)$

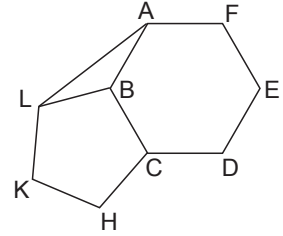


5. Bir kenar uzunluğu 58 br ve merkezinin bir kenarına uzaklığı 40 br olan düzgün beşgensel bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir?  
A) 5000 B) 5400 C) 5600  
D) 5800 E) 6000

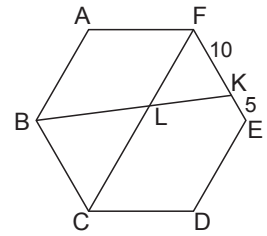
6. Şekildeki ABCDE düzgün beşgensel bölgesinde  $[BG] \perp [ED]$  ve  $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{FCB})$  dır.  $A(ABCDE) = 60 br^2$  olduğuna göre, taralı bölgelerin alanları toplamı kaç  $br^2$  dir?  
A) 20 B) 24 C) 26 D) 30 E) 32



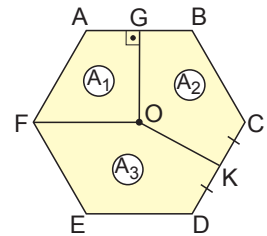
7. Şekilde ABCDEF düzgün altıgen ve BCHKL düzgün beşgen olduğuna göre,  $m(\widehat{ALB})$  kaç derecedir?  
A) 20 B) 24 C) 26 D) 28 E) 32



8. Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $|FK| = 10$  br ve  $|KE| = 5$  br olduğuna göre,  $|CL|$  kaç br dir?  
A) 18 B) 17 C) 16 D) 14 E) 12

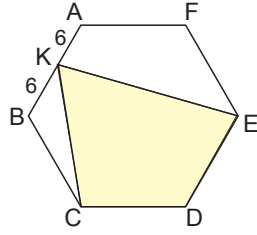


9. Şekildeki O merkezli ABCDEF düzgün altıgenininde  $A_1, A_2$  ve  $A_3$  bulunan bölgelerin alanlarını göstermektedir.  $[OG] \perp [AB]$  ve  $|CK| = |KD|$  olduğuna göre,  $\frac{A_1 + A_2}{A_3}$  oranı kaçtır?  
A) 3 B) 2 C)  $\frac{7}{4}$  D)  $\frac{3}{2}$  E)  $\frac{7}{5}$



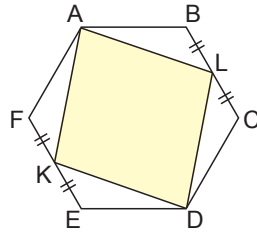


10. Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde  $|AK| = |KB| = 6$  br olduğuna göre,  $A(KCDE)$  kaç  $br^2$  dir?



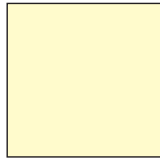
- A)  $120\sqrt{3}$  B)  $122\sqrt{3}$  C)  $124\sqrt{3}$   
D)  $126\sqrt{3}$  E)  $130\sqrt{3}$

11. Şekildeki ABCDEF düzgün altıgensel bölgesinde K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.  $A(AKDL) = 72\sqrt{3} br^2$  olduğuna göre,  $A(ABCDEF)$  kaç  $br^2$  dir?

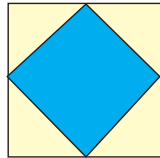


- A)  $80\sqrt{3}$  B)  $96\sqrt{3}$  C)  $108\sqrt{3}$   
D)  $116\sqrt{3}$  E)  $144\sqrt{3}$

12.



Başlangıç



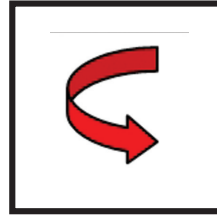
1. Adım

Yukarıda bir fraktalın başlangıç şekli ve birinci adımındaki görüntüsü verilmiştir. Başlangıç şekli olan karenin kenar orta noktalarını köşe kabul eden dörtgen çizilerek birinci adım oluşturulmuştur. Her adımda elde edilen dörtgene aynı işlem uygulanarak fraktalın diğer adımları oluşturulmuştur.

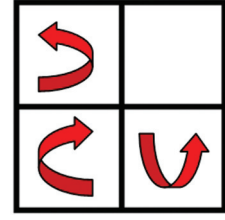
Buna göre, fraktalın altıncı adımında elde edilen dörtgenin alanının başlangıç şeklinin alanına oranı kaçtır?

- A)  $\frac{1}{128}$  B)  $\frac{1}{64}$  C)  $\frac{1}{32}$  D)  $\frac{1}{16}$  E)  $\frac{1}{8}$

13.



Başlangıç



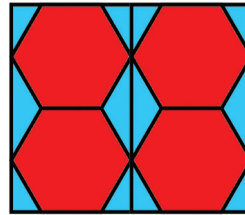
1. Adım

Yukarıda başlangıç şeklinin  $1/4$  oranında küçültülmüş üç kopyasına bazı dönüşümler uygulanarak oluşturulan fraktalın birinci adımı verilmiştir.

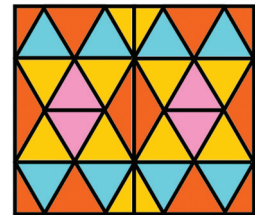
Buna göre, birinci adım oluşturulurken aşağıdaki dönüşümlerden hangileri kullanılmıştır?

- A)  $Y_Y, Y_D, D_{180^\circ}$   
B)  $D_{180^\circ}, Y_D, Y_D$   
C)  $D_{90^\circ}, D_{180^\circ}, D_{180^\circ}$   
D)  $D_{180^\circ}, Y_Y, D_{90^\circ}$   
E)  $D_{180^\circ}, D_{90^\circ}, D_{270^\circ}$

14.



1. Kaplama



2. Kaplama

Yukarıda düzgün altıgen ile oluşturulan iki kaplama örneği verilmiştir.

Birinci kaplama üzerinde aşağıdakilerden hangisi uygulanarak ikinci kaplama elde edilmiştir?

- A) Sadece bölme  
B) Sadece birleştirme  
C) Dual ve dönme  
D) Bölme ve dual  
E) Birleştirme ve dönme



## 4. ÜNİTE

# ÇEMBERLER

### 4.1. Çember, Çemberin Temel ve Yardımcı Elemanları

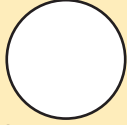


Yandaki fotoğrafta bir tırmanma kulesi verilmiştir. Bu kule bir merdiven ve çember şeklindeki bir yapıdan oluşmaktadır. Bu kulede çemberin hangi elemanlarını gösterebilirsiniz? Tartışınız.



#### Etkinlik

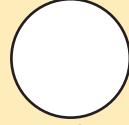
1. Aşağıda eş yarıçaplı dört çember verilmiştir. Çemberlerin altlarında yazan düzgün çokgenleri, köşeleri çemberlerin üzerinde olacak şekilde çiziniz.



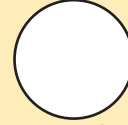
Eşkenar üçgen



Kare



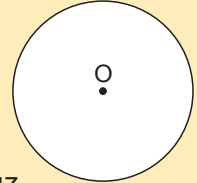
Düzgün beşgen



Düzgün altıgen

2. Etkinliğin 1. adımında, düzgün çokgenin kenar sayısının her seferinde bir artırılarak çizimlere devam edildiğini düşününüz ve düzgün çokgen ile çember arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

3. Yandaki O merkezli çemberin merkezinden geçen ve çemberi A, B noktalarında kesen bir doğru çiziniz.



4. A ve B noktaları dışında olmak üzere, çemberin üzerinde bir C noktası işaretleyiniz ve [BC] nı çiziniz.

5. B ve C noktaları arasında kalan çember parçalarını farklı renklerle boyayınız.

6. AB doğrusu, [AB], [OA], [BC] ve farklı renklerle boyadığınız çember parçalarının çemberin hangi elemanları olabileceğini açıklayınız.



#### Bilgi Kutusu

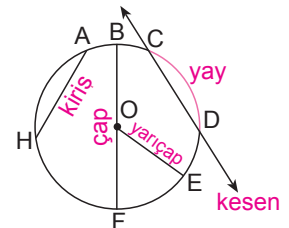
1. Bir düzgün çokgenin kenar sayısı istenildiği kadar artırıldığında yaklaşık olarak bir çember oluşur.
2. Bir çemberin temel elemanları yarıçap ve merkez, yardımcı elemanları kiriş, kesen ve yaydır.
3. Çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçasına **kiriş**, çemberin iki noktasından geçen doğruya **kesen**, çemberin merkezden geçen kirişine **çap**, çemberin herhangi iki noktası arasında kalan parçasına **yay** denir.

#### Örnek

Bir çember çizerek temel ve yardımcı elemanlarını çember üzerinde gösterelim.

#### Çözüm

Yandaki şekilde bir çember ve bu çemberin elemanları çizilmiştir. Bu çemberde O noktası merkez, [OE], [OB] ve [OF] yarıçaplar, [BF] çap, [AH] kiriş, CD doğrusu kesen, C ve D noktaları arasında kalan parça ise yaydır.







## Etkinlik

**Araç-gereç:** Pergel, cetvel

1. Yandaki analitik düzlemde pergel yardımıyla  $M(1, 1)$  merkezli ve 5 br yarıçaplı bir çember çiziniz.

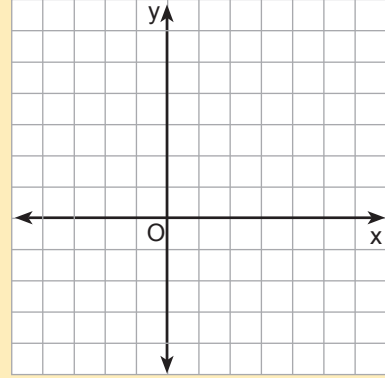
2. Çemberin  $A(1, 6)$  ve  $B(-3, 4)$  noktalarını birleştiren kirişini çiziniz. Bu kirişin çember üzerinde oluşturduğu yaylardan hangisinin ölçüsü  $180^\circ$  den büyüktür? Bu yayların ölçülerine göre nasıl adlandırılabilir? Tartışınız.

3. Bu yayların ölçüleri ile tam çember yayın ölçüsü arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

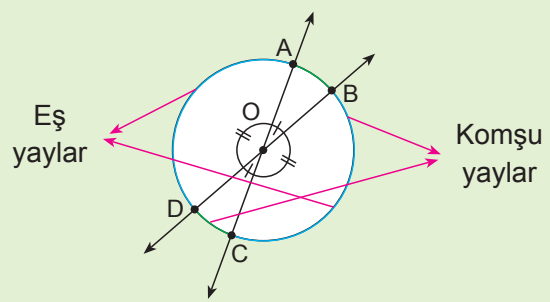
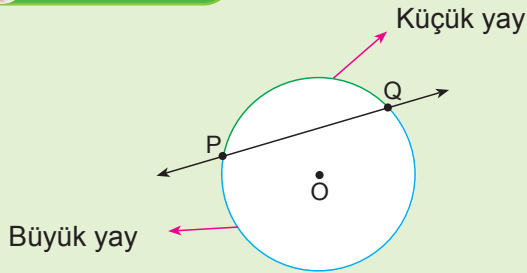
4. Çemberin  $C(-3, -2)$  ve  $D(1, -4)$  noktalarını birleştiren kirişini çiziniz ve  $[AB]$  ile  $[CD]$  kirişlerinin uzunluklarını bulunuz. Bu kirişlerin oluşturduğu yayların eş olma durumunu tartışınız.

5. Kirişlerin oluşturduğu yaylardan bir noktaları ortak olan yay çiftlerini belirleyiniz.

6. Bir çemberde, ölçüleri aynı olan yaylar ile bir noktaları ortak olan yayların nasıl adlandırılabilir? Tartışınız.



## Bilgi Kutusu



1. Bir çemberin üzerinde alınan farklı iki nokta çemberi iki yaya ayırır. Bu yaylardan ölçüsü  $180^\circ$  den ( $\pi$  radyandan) küçük olanına **küçük yay**, diğerine ise **büyük yay** denir.

2. Bir çemberde ölçüleri aynı olan iki yaya **eş yaylar**, bir noktaları ortak olan iki yaya da **komşu yaylar** denir.

## Örnek

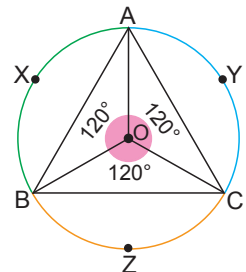
Bir eşkenar üçgenin çevrel çemberini çizerek oluşan yayları yorumlayalım.

## Çözüm

Yandaki şekilde bir ABC eşkenar üçgeni ile O merkezli çevrel çemberi çizilmiştir.  $[OA]$ ,  $[OB]$  ve  $[OC]$  yarıçapları arasındaki açılar  $120^\circ$  ve O noktası merkez olduğundan  $\widehat{AYC}$ ,  $\widehat{AXB}$  ve  $\widehat{BZC}$  eş yaylardır.

A noktaları ortak olduğundan  $\widehat{BXA}$  ve  $\widehat{AYC}$  komşu yaylardır. Aynı şekilde  $\widehat{AYC}$  ve  $\widehat{CZB}$  ile  $\widehat{AXB}$  ve  $\widehat{CZB}$  komşu yaylardır.

Bu çemberde  $\widehat{AYC}$ ,  $\widehat{BZC}$  ve  $\widehat{AXB}$  nın ölçüsü  $180^\circ$  den küçük olduğundan bu yaylar küçük yaylardır.  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$  olduğundan  $\widehat{BAC}$  büyük yaydır. Aynı şekilde  $\widehat{ABC}$  ve  $\widehat{ACB}$  büyük yaylardır.



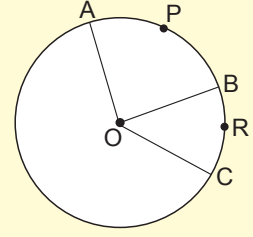


## İnceleyelim

Bir çemberde iki yayın birleşimi olan bir yayın ölçüsünün, bu yayların ölçüleri toplamına eşit olduğunu gösterelim: (Açı toplama özelliği)

**Verilen:** O merkezli çember,  $[OB]$ ,  $[OA]$  ve  $[OC]$  yarıçapları

**İstenen:**  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BRC})$



### İfadeler

- $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{APB})$ ,  $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BRC})$
- $\widehat{ABC} = \widehat{APB} \cup \widehat{BRC}$
- $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC})$
- $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{ABC})$
- $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BRC})$
- $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BRC})$
- $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BRC})$

### Gerekçeler

- Merkez açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsüne eşit olmasından
- Yayların birleşiminden
- Açıların ölçüleri toplamından
- Merkez açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsüne eşit olmasından ve 2. ifadeden
1. ifadedeki eşitliklerin toplanmasından
3. ifadedeki eşitliğin 5. ifadede yerine yazılmasından
4. ifadedeki eşitliğin 6. ifadede yerine yazılmasından



## Uyarı

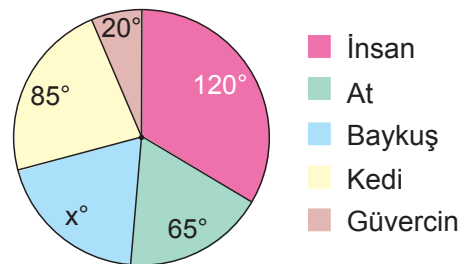
Bir büyük yayın ölçüsü  $\alpha$  ise küçük yayın ölçüsü  $360^\circ - \alpha$  dır.

## Örnek

Canlıların görüş açısı “toplam” ve “binokular” görüş açıları olmak üzere, ikiye ayrılır. Örneğin insanlar toplam  $180^\circ$  lik bir alanı görebilirken iki gözün görüş açılarının çakışmasıyla ortaya çıkan binokular görüş açısı  $120^\circ$  dir. Kedilerin, atların ve güvercinlerin binokular görüş açıları sırayla  $85^\circ$ ,  $65^\circ$  ve  $20^\circ$  dir. İnsan, kedi, at, güvercin ve baykuş aynı noktada görüş açıları komşu yay oluşturacak şekilde durduklarında binokular görüş açıları çembersel bir bölge oluşturmaktadır. Buna göre, baykuşun binokular görüş açısını hesaplayalım.

## Çözüm

Verilen bilgilere göre, bu canlıların binokular görüş açıları şekildeki gibi bir çember oluşturur. Baykuşun binokular görüş açısı  $x$  olsun. İnsanların, atların, güvercinlerin ve kedilerin görüş açılarının oluşturduğu yayın ölçüsü açı toplama özelliğinden  $85^\circ + 20^\circ + 120^\circ + 65^\circ = 290^\circ$  elde edilir. Şekilden görüldüğü gibi büyük yayın ölçüsü  $290^\circ$  ise küçük yayın ölçüsü  $x = 360^\circ - 290^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$  bulunur.

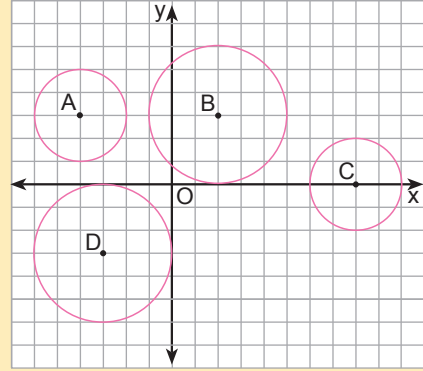






## Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde A, B, C ve D merkezli çemberler çizilmiştir. Bu çemberlerin yarıçaplarını analitik düzlemin birim karelerinden yararlanarak bulunuz.
2. Çemberlerin yarıçap uzunluklarını göz önünde bulundurarak bu çemberlerin eş veya benzer olma durumlarını yorumlayınız.
3. A merkezli çemberden C merkezli çemberi ve D merkezli çemberden A merkezli çemberi elde edebilmek için hangi dönüşümlerin kullanılması gerektiğini sorgulayınız.
4. Eş veya benzer iki çemberden, hangi dönüşümler kullanılarak birinden diğerinin elde edilebileceğini açıklayınız.



## Bilgi Kutusu

Yarıçap uzunlukları eşit olan çemberlere **eş çemberler**, farklı olanlara **benzer çemberler** denir.

## Örnek

Merkezinin koordinatları  $M(3, 3)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 2 br olan çember için aşağıdaki adımları uygulayalım:

- a. Çemberin orijin etrafında pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen görüntüsünü bulalım.
- b. Çemberin M merkezli  $k = 2$  oranlı homotetiğini bulalım.
- c. Çemberin  $\vec{u} = (0, -6)$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünü bulalım.
- ç. Çembere uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen görüntülerin eş veya benzerlik durumlarını belirleyelim.

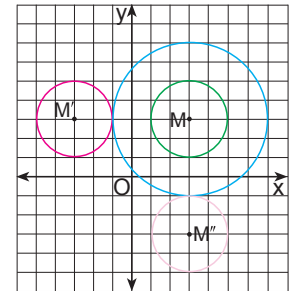
## Çözüm

- a. Bir  $P(x, y)$  noktasının orijin etrafında pozitif yönde  $\alpha$  kadar döndürülmesi ile elde edilen nokta  $R_\alpha(P) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$  şeklinde bulunur.

Bundan dolayı çemberin merkezinin pozitif yönde  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen nokta  $M'$  olmak üzere,  $M' = R_{90^\circ}(M) \Rightarrow M' = (3 \cos 90^\circ - 3 \sin 90^\circ, 3 \sin 90^\circ + 3 \cos 90^\circ) \Rightarrow M'(-3, 3)$  bulunur. Dönme dönüşümü uzaklıkları koruduğundan çemberin yarıçapı değişmez. Bundan dolayı dönme dönüşümü sonucunda  $M'(-3, 3)$  merkezli ve 2 br yarıçaplı çember elde edilir.

- b. Homoteti dönüşümü uzaklıkları aynı oranda değiştirdiğinden çemberin M merkezli  $k = 2$  oranlı homotetiğinin yarıçapının uzunluğu 4 br olur. Bundan dolayı homoteti dönüşümü sonucunda M merkezli 4 br yarıçaplı çember elde edilir.

- c. M noktasının  $\vec{u}$  doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünün merkezi  $M''$  noktası olmak üzere,  $T_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(M) = (3, 3) + (0, -6) \Rightarrow T_{\vec{u}}(M) = (3, -3) \Rightarrow M''(3, -3)$  olur. Öteleme dönüşümü uzunlukları koruduğundan çemberin yarıçapı değişmez. Bundan dolayı öteleme dönüşümü sonucunda  $M''$  merkezli 2 br yarıçaplı çember elde edilir.



- ç. Dönüşümler sonucunda elde edilen çemberler yandaki analitik düzlemde çizilmiştir. Çemberlerin yarıçap uzunlukları karşılaştırıldığında M,  $M'$  ve  $M''$  merkezli çemberlerin eş, homoteti sonucunda elde edilen çemberin ise bu çemberlerle benzer olduğu görülür.



## Örnek

Futbol sahalarındaki orta yuvarlakların eş veya benzer olma durumunu inceleyelim.

## Çözüm

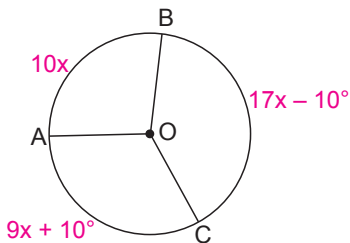
Bir futbol sahasının ortasında 9,15 m yarıçapında bir çembersel bölge bulunur. Bu bölgeye “orta yuvarlak” denir. Her futbol sahasındaki orta yuvarlak aynı yarıçapa sahiptir. Bundan dolayı futbol sahalarının orta yuvarlakları eş çemberlere örnek olarak verilebilir.



## Alıştırmalar

- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.
  - Çemberin bir küçük yayının ölçüsü  $110^\circ$  ise büyük yayının ölçüsü  $250^\circ$  dir. (.....)
  - Bir çember ile bu çemberin ötelemesi sonucunda elde edilen çember benzerdir. (.....)
  - Bir çemberde eş kirişlerin yayları da eştir. (.....)
  - Çemberin temel elemanları yarıçap, merkez ve yaydır. (.....)
  - İki yarım çember yayının birleşimi tam çember yayı oluşturur. (.....)
  - Çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçasına çap denir. (.....)

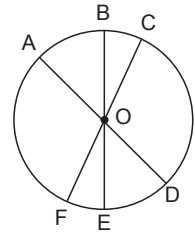
2.



Şekildeki O merkezli çemberde her yayın ölçüsü üzerine yazılmıştır. Bu yayların ölçülerini kullanarak eş veya komşu olanları belirleyiniz.

- Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.
  - Bir çemberi iki farklı noktada kesen doğruya ..... denir.
  - Bir çemberin ..... en uzun kirişidir.
  - Yarıçap uzunlukları ..... olan çemberler eştir.
  - Bir çember ile bu çemberin herhangi bir açı ile döndürülmesi ile elde edilen çember .....
  - Tam çember yayının ölçüsü ..... derecedir.
  - Bir noktaları ortak olan iki yaya ..... denir.

- Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberin elemanlarını aşağıdaki noktalı yerlere doğru olacak şekilde yazınız.



- Çapları: .....
- Yarıçapları: .....
- Küçük yayları: .....
- Büyük yayları: .....
- Eş yayları: .....
- Komşu yayları: .....



## 4.2. Çemberin Vektörel, Standart ve Genel Denklemi



Atilla Bey evinin bulunduğu arazisinin çevresini yukarıdaki resimde görüldüğü gibi fidanlarla çevirmek istemektedir. Her fidanı evinden 5 metre uzağa diken Atilla Bey, arazisinin etrafını bu şekilde fidanlarla çevirmiştir.

Fidanları ve evi birer nokta modeli olarak düşündüğünüzde bu fidanların geometrik yeri nasıl bir şekil oluşturur? Evin fidanlara göre konumu hakkında ne söyleyebilirsiniz? Evin koordinatları bilinseydi, iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanarak geometrik yerin nasıl bir ifadesi bulunabilirdi?



### Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde O merkezli çember ile çemberin AB kirişi verilmiştir. O noktasından  $[AB]$  na bir dikme çizip dikme ayağını C olarak adlandırınız.

2.  $[AB]$  ve  $[OC]$  nı taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz.

3. Bulduğunuz denklemlerin ortak çözümünden C noktasının koordinatlarını hesaplayarak  $|AC|$  ve  $|BC|$  nu bulunuz.

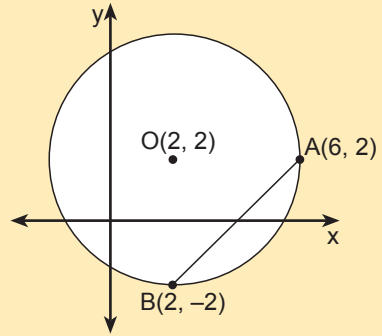
4.  $|AC|$  ve  $|BC|$  nu karşılaştırarak bir çemberin merkezinden kirişine indirilen dikmenin kirişi hangi oranda böldüğünü açıklayınız.

5. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanarak çemberin yarıçap uzunluğunu hesaplayınız.

6. Çember üzerinde herhangi bir  $T(x, y)$  noktası seçerek  $\overrightarrow{OT}$  nı çiziniz.  $\|\overrightarrow{OT}\| = k$  eşitliğini sağlayan k değerini bularak bu eşitliğin çemberi ifade edip etmeyeceğini tartışınız.

7. O ve T noktalarının koordinatlarını  $\|\overrightarrow{OT}\| = k$  eşitliğinde yerine yazarak x ve y ye bağlı bir denklem elde ediniz. Bu denklemin çemberi ifade edip etmeyeceğini tartışınız.

8. Etkinliğin 6 ve 7. adımlarını göz önünde bulundurarak bir çemberin hangi denklemlerle ifade edilebileceğini açıklayınız.





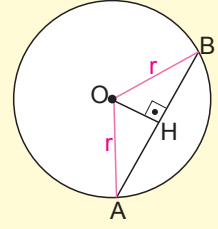


### İnceleyelim

Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişine indirilen dikmenin, kirişi ortaladığını gösterelim:

**Verilen:** O merkezli ve r br yarıçaplı çember,  
[AB] çemberin kirişi, [OH]  $\perp$  [AB]

**İstenen:** |AH| = |BH|



#### İfadeler

1. |OA| = |OB| = r

2. |OH| = |OH|

3.  $\widehat{AOH} \cong \widehat{BOH}$

4. |AH| = |BH|

#### Gerekçeler

1. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından

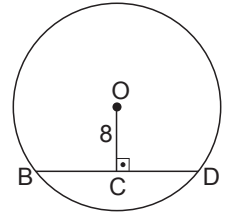
2. [OH] nın ortak dik kenar olmasından

3. Hipotenüs dik kenar eşliğinden

4. 3. ifadeden

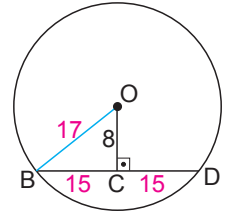
### Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde [OC]  $\perp$  [BD], |OC| = 8 br ve |BD| = 30 br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.



### Çözüm

Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişe indirilen dikme kirişi ortaladığından |BC| = |CD| = 15 br dir. OCB dik üçgeninde Pisagor teoremin-den,  $|OB|^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow |OB|^2 = 289 \Rightarrow |OB| = 17$  br bulunur.

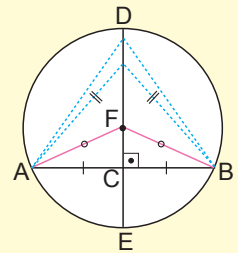


### İnceleyelim

Bir çemberde herhangi bir kirişin orta dikmesinin, çemberin merkezinden geçtiğini gösterelim:

**Verilen:** [AB] çemberin kirişi, [DE]  $\perp$  [AB], |AC| = |CB|

**İstenen:** [DE] çemberin merkezinden geçer.



F noktası [DE] üzerinde değişen bir nokta olsun. [FA] ve [FB] çizildiğinde |AC| = |CB|, |FC| = |FC| ve  $m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{BCF}) = 90^\circ$  olduğundan K.A.K eşlik teoremin-den  $\widehat{AFC} \cong \widehat{BFC}$  dir. O hâlde, |AF| = |FB| dur. Bundan dolayı [DE] üzerinde değişen her F noktasının A ve B noktalarına olan uzaklıkları eşittir. Değişen F noktalarından yalnız bir tanesinin A ve B noktalarına olan uzaklıkları çemberin yarıçapının uzunluğuna eşittir. Bu durumdaki F noktası çemberin merkezi, [DE] ise çemberin çapıdır. Bundan dolayı [DE] çemberin merkezinden geçer.

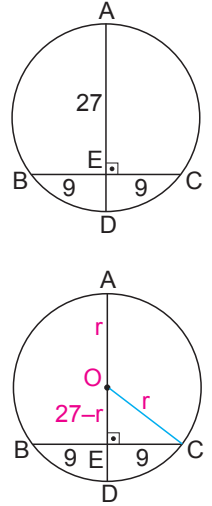


### Örnek

Şekildeki çemberde  $[AD] \perp [BC]$  dir.  $|BE| = |EC| = 9$  br ve  $|AE| = 27$  br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

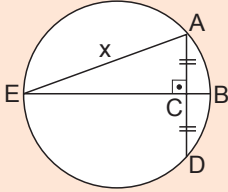
Verilen çemberin merkezi O noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olsun. Bir çemberde herhangi bir kirisin orta dikmesi çemberin merkezinden geçtiğinden O noktası  $[AD]$  nın üzerindedir. Buradan  $|OC| = r$  br ve  $|OE| = |AE| - |AO| = (27 - r)$  br dir. OEC dik üçgeninde Pisagor teoremin-den,  $r^2 = (27 - r)^2 + 9^2 \Rightarrow r^2 = 27^2 - 54r + r^2 + 81$   
 $\Rightarrow 54r = 810 \Rightarrow r = 15$  br bulunur.



### Uygulama Köşesi

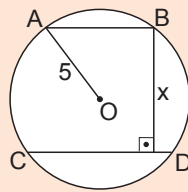
1. Aşağıdaki şekillerde verilenler yardımıyla x değerlerini bulunuz.

a.



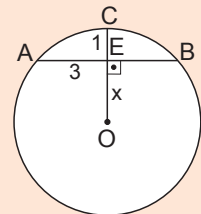
$$|AD| = 12 \text{ br}, |EB| = 20 \text{ br}$$

b.



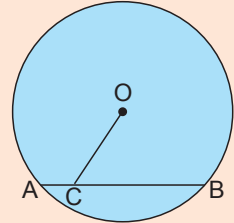
$$[AB] \parallel [CD], |AB| = 6 \text{ br} \\ |CD| = 8 \text{ br}$$

c.



O merkezli çember,  
 $[AB] \perp [OC]$

2. Yandaki şekilde O merkezli çember şeklindeki bir yüzme havuzunun modelini göstermektedir. O, A ve B noktalarında duran yüzücüler sırayla dakikada 39 m, 33 m ve 63 m yüzebilmektedir. Yüzücüler aynı anda yüzmeye başladıklarından 20 sn sonra C noktasında karşılaştıklarına göre, havuzun yarıçapının uzunluğunu bulunuz.

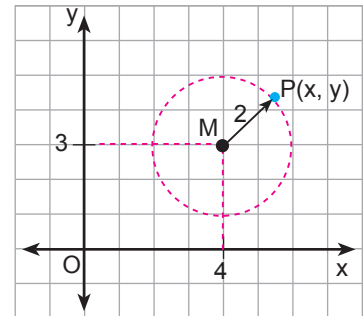


### Örnek

Düzlemde koordinatları M(4, 3) olan noktaya 2 br uzaklıktaki noktaların geometrik yerini belirleyerek bu geometrik yeri vektörler yardımıyla gösterelim.

### Çözüm

Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çember olduğundan M(4, 3) noktasına 2 br uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir çemberdir. M(4, 3) merkezli, 2 br yarıçaplı bu çember yandaki analitik düzlemde çizilerek üzerindeki bir P(x, y) noktası işaretlenmiştir. Değişen her P(x, y) noktası için  $\vec{MP}$  nün uzunluğu 2 br olacağından bu çember  $\|\vec{MP}\| = 2$  şeklinde ifade edilebilir.





### Örnek

Merkezi  $M(1, -2)$  noktası olan çemberin üzerindeki bir nokta  $P(x, y)$  olmak üzere,  $\|\vec{MP}\| = 3$  eşitliği verilmektedir. Buna göre, çemberin  $x$  ve  $y$  türünden ifadesini bulalım.

### Çözüm

$$\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = (x, y) - (1, -2) = (x-1, y-(-2)) = (x-1, y+2) \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } \|\vec{MP}\| = \sqrt{\langle \vec{MP}, \vec{MP} \rangle} = \sqrt{(x-1) \cdot (x-1) + (y+2) \cdot (y+2)} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \text{ olur.}$$

$$\|\vec{MP}\| = 3 \text{ olduğundan } \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \text{ bulunur.}$$

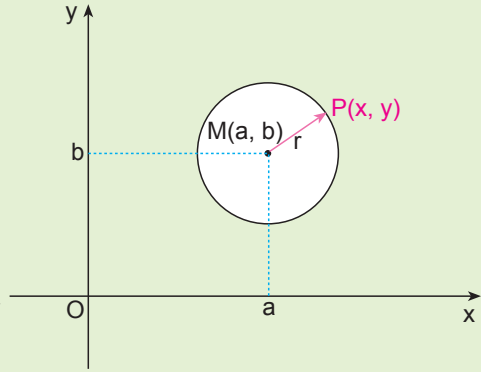
Bundan dolayı, merkezi  $M(1, -2)$  noktası olan  $\|\vec{MP}\| = 3$  çemberi  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$  şeklinde yazılabilir.



### Bilgi Kutusu

1.  $\|\vec{MP}\| = r$  denklemine, merkezi  $M$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r$  br olan bir çemberin **vektörel denklemi** denir.

2.  $\|\vec{MP}\| = r$  vektörel denkleminde  $M(a, b)$  ve  $P(x, y)$  alınarak elde edilen  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  denklemine, merkezi  $M(a, b)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r$  br olan çemberin **standart denklemi** denir.



### Örnek

Merkezi  $M(-6, 1)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 4 br olan çemberin vektörel ve standart denklemlerini bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberin değişen bir noktası  $P(x, y)$  olsun. O hâlde, bu çemberin vektörel denklemi  $\|\vec{MP}\| = r \Rightarrow \|\vec{MP}\| = 4$  tür.  $M(-6, 1)$  ve  $r = 4$  br olduğundan çemberin standart denklemi,  $(x - (-6))^2 + (y - 1)^2 = 4^2 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 16$  bulunur.

### Örnek

Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 8$  olan çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ ve } x^2 + y^2 = 8 \text{ denklemleri karşılaştırıldığında,}$$

$$a = 0, b = 0 \text{ ve } r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2} \text{ br olduğu görülür.}$$

Bundan dolayı çemberin merkezi  $M(0, 0)$  ve yarıçapının uzunluğu  $r = 2\sqrt{2}$  br dir.



### Örnek

$B(-1, 2)$  ve  $C(5, -6)$  noktaları için  $[BC]$  nı çap kabul eden çemberin standart denklemini bulalım.

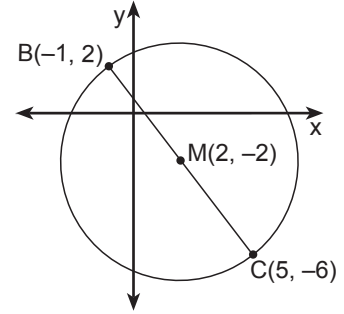
### Çözüm

$[BC]$  nın orta noktası çemberin merkezi olduğundan,

$$M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = M(2, -2) \text{ ve}$$

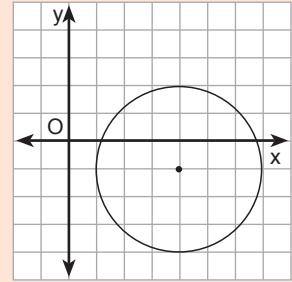
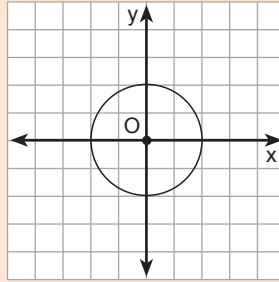
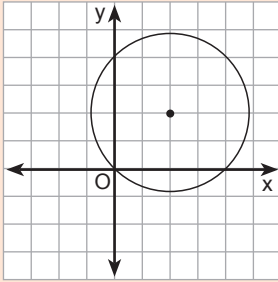
$$r = |BM| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ br dir.}$$

Çemberin merkezi  $M(2, -2)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 5 br olduğundan standart denklemi  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

1. Aşağıdaki analitik düzlemlerde verilen çemberlerin vektörel ve standart denklemlerini bulunuz.



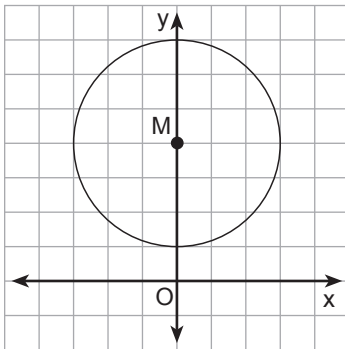
2. Merkezi  $M(3, -4)$  noktası olan ve  $T(-1, -1)$  noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

3. Standart denklemi  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$  olan çemberin vektörel denklemini bulunuz.

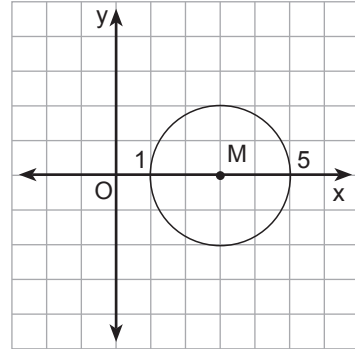
### Örnek

Aşağıdaki analitik düzlemlerde verilen M merkezli çemberlerin standart denklemlerini bulalım.

a.



b.



### Çözüm

a. Verilen çemberin merkezi  $M(0, 4)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 3 br olduğundan bu çemberin standart denklemi  $(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 9$  bulunur.

b. Verilen çemberin merkezi  $M(3, 0)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 2 br olduğundan bu çemberin standart denklemi  $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 4$  bulunur.





## Sonuçlar

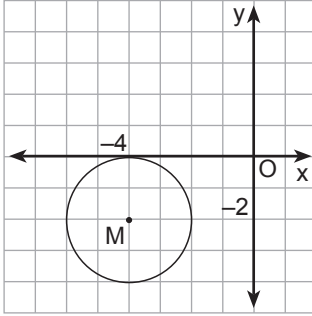
Merkezi  $M(a, b)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r$  br olan çember ailelerinin;

1. Merkezi  $x$  ekseninde ise  $b = 0$  olacağından standart denklemleri  $(x - a)^2 + y^2 = r^2$  dir.
2. Merkezi  $y$  ekseninde ise  $a = 0$  olacağından standart denklemleri  $x^2 + (y - b)^2 = r^2$  dir.

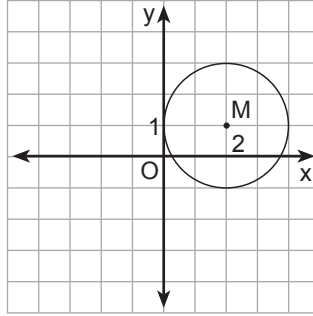
## Örnek

Aşağıdaki analitik düzlemlerde verilen  $M$  merkezli çemberlerin standart denklemlerini bulalım.

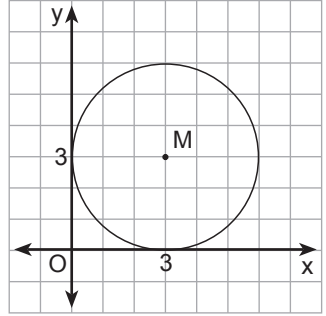
a.



b.



c.



## Çözüm

a. Verilen çember  $x$  eksenine teğet olduğundan yarıçapının uzunluğu 2 br dir. Bu çemberin merkezi  $M(-4, -2)$  olduğundan standart denklemi  $(x - (-4))^2 + (y - (-2))^2 = 2^2 \Rightarrow (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$  bulunur.

b. Verilen çember  $y$  eksenine teğet olduğundan yarıçapının uzunluğu 2 br dir. Bu çemberin merkezi  $M(2, 1)$  olduğundan standart denklemi  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$  bulunur.

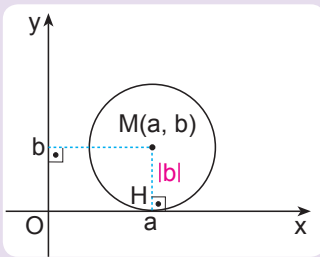
c. Verilen çember eksenlere teğet olduğundan yarıçapının uzunluğu 3 br dir. Bu çemberin merkezi  $M(3, 3)$  olduğundan standart denklemi  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$  bulunur.



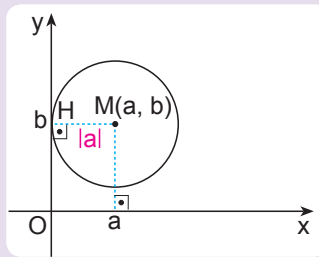
## Sonuçlar

Aşağıda çemberin özel konumları belirtilmiştir.

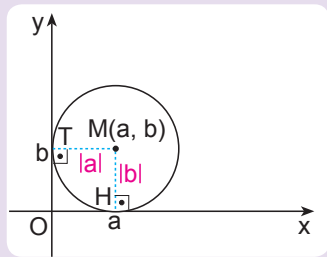
a.



b.



c.



a.  $x$  eksenine teğet olan çemberlerde  $r = |b|$  olduğundan bu çemberlerin standart denklemleri  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$  şeklindedir.

b.  $y$  eksenine teğet olan çemberlerde  $r = |a|$  olduğundan bu çemberlerin standart denklemleri  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$  şeklindedir.

c. Her iki eksene de teğet olan çemberlerde  $r = |a| = |b|$  olduğundan bu çemberlerin standart denklemleri  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$  veya  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$  şeklindedir.



### Örnek

Merkezi  $2x + 3y - 10 = 0$  doğrusu üzerinde olan ve eksenlere teğet çemberlerin denklemlerini bulalım.

### Çözüm

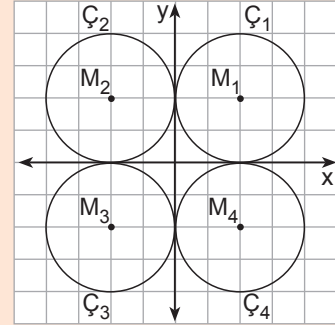
Verilen çemberin merkezi  $M(a, b)$  olsun.  $M$  noktası  $2x + 3y - 10 = 0$  doğrusu üzerinde olduğundan  $x = a$  ve  $y = b$  alınırsa,  $2a + 3b - 10 = 0$  eşitliği elde edilir. Eksenlere teğet olan çemberlerde  $r = |a| = |b|$  olduğundan  $a = b$  veya  $a = -b$  dir.  $a = b \Rightarrow 2a + 3a - 10 = 0 \Rightarrow a = 2$  dir. Buradan çemberlerden birinin denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$  olur.

$a = -b \Rightarrow 2(-b) + 3b - 10 = 0 \Rightarrow b = 10$  ve  $a = -10$  elde edilir. Bundan dolayı diğer çemberin denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

1.  $A(0, -1)$  ve  $B(0, -5)$  noktalarından geçen ve  $x$  eksenine teğet olan çemberlerin denklemlerini bulunuz.

2. Şekildeki  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  ve  $\mathcal{C}_4$  çemberlerinin merkezleri  $M_1, M_2, M_3$  ve  $M_4$  noktaları olup yarıçapları  $r$  br dir. Bu çemberler her iki eksene de teğet olduklarına göre, aşağıdaki noktalı yerleri doğru olacak şekilde tamamlayınız.



- ▶  $\mathcal{C}_4$  çemberinin merkezinin koordinatları ..... dir.
- ▶ ..... ve ..... çemberlerinin merkezleri  $y = x$  doğrusu üzerindedir.
- ▶ ..... ve ..... çemberlerin merkezleri  $y = -x$  doğrusu üzerindedir.
- ▶  $\mathcal{C}_3$  çemberinin standart denklemi ..... dir.

### Örnek

Merkezi  $M(-3, 1)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 2 br olan çemberin standart denklemini yazarak bu denklemin farklı bir ifadesini elde edelim.

### Çözüm

Merkezi  $M(-3, 1)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 2 br olan çemberin standart denklemi  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$  tür. Bu denklemde kare alma işlemleri uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$  elde edilir.

### Bilgi Kutusu

Standart denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  olan çemberin denkleminde kare alma işlemleri uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ eşitliği bulunur.}$$

Bu eşitlikte  $-2a = A, -2b = B$  ve  $a^2 + b^2 - r^2 = C$  alınarak elde edilen  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  denkleminde **çemberin genel denklemi** denir. Bu denklemden çemberin merkezi  $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  ve yarıçapının uzunluğu,  $a^2 + b^2 - r^2 = C \Rightarrow \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - r^2 = C \Rightarrow r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \Rightarrow r^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \text{ şeklinde bulunur.}$$



### Örnek

Genel denklemi  $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$  olan çemberin standart denklemini bulalım.

### Çözüm

Verilen denklem  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  denklemi ile karşılaştırılırsa  $A = 2$ ,  $B = -8$  ve  $C = -8$  olduğu görülür. Buradan çemberin merkezinin koordinatları  $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-8}{2}\right) = M(-1, 4)$  bulunur. Diğer taraftan çemberin yarıçapının uzunluğu  $r$  alınırsa,

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-8)^2 - 4 \cdot (-8)} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{100} \Rightarrow r = \frac{10}{2} \Rightarrow r = 5 \text{ br elde edilir.}$$

Buradan çemberin standart denklemi  $(x - (-1))^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$  bulunur.

### Örnek

$2x^2 + (m + 1)y^2 + (n - 2)xy + 8x - 8y - 4m + n = 0$  denklemi çember belirttiğine göre, bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  denklemi incelendiğinde  $x^2$  ve  $y^2$  li terimlerin katsayılarının eşit ve 1 olduğu,  $x.y$  li terimin bulunmadığı görülür. Bundan dolayı  $m + 1 = 2 \Rightarrow m = 1$  ve  $n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$  olmalıdır. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

$2x^2 + 2y^2 + 8x - 8y - 2 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$  elde edilir. Bu denklemde  $A = 4$ ,  $B = -4$  ve  $C = -1$  olduğundan çemberin merkezinin koordinatları,  $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M\left(-\frac{4}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = M(-2, 2)$  bulunur. Çemberin yarıçapının uzunluğu  $r$  br alınırsa,

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-4)^2 - 4(-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = \frac{6}{2} = 3 \text{ br bulunur.}$$

### Örnek

$x^2 + y^2 + kx + 3y + k + \frac{3}{2} = 0$  denkleminin bir çember belirtmesi için  $k$  nın alabileceği değerlerin kümesini bulalım.

### Çözüm

Verilen denklem  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  denklemi ile karşılaştırılırsa,  $A = k$ ,  $B = 3$  ve  $C = k + \frac{3}{2}$  olduğu görülür.

Bu denklemin çember belirtmesi için  $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$  eşitliğindeki köklü ifadenin tanımlı olması gerekir. Bundan dolayı  $A^2 + B^2 - 4C > 0$  olmalıdır.

$$A^2 + B^2 - 4C > 0 \Rightarrow k^2 + 3^2 - 4\left(k + \frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow k^2 + 9 - 4k - 6 > 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 > 0 \text{ olur.}$$

$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow (k - 3)(k - 1) = 0$  denkleminin kökleri  $k_1 = 3$  ve  $k_2 = 1$  olduğundan  $k^2 - 4k + 3 > 0$  eşitsizliğinin işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$k^2 - 4k + 3 > 0$		+	-	+

Tablodan da görüleceği gibi  $k$  nın alabileceği değerlerin kümesi  $\{k: k < 1 \vee k > 3, k \in \mathbb{R}\}$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde tamamlayınız.

Merkezi	Yarıçapı	Vektörel denklemleri	Standart denklemleri	Genel denklemleri
M(0, 1)		$\ \vec{MP}\  = 1$		
M(-2, 2)	$r = 2$			
			$(x - 2)^2 + y^2 = 25$	
				$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 33 = 0$

Tablo: 4.2.1

### Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde O, A ve B merkezli  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$  ve  $\zeta_4$  çemberleri verilmiştir. Bu çemberlerin standart denklemlerini yazınız.

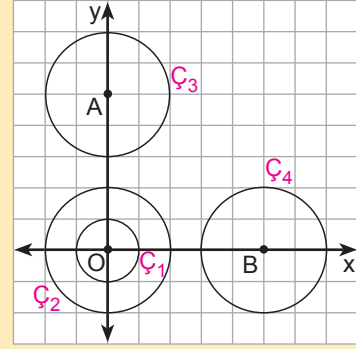
2. Çemberlerin merkezlerinin koordinatlarının ve yarıçap uzunluklarının değişimlerini göz önünde bulundurarak aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

►  $\zeta_1$  çemberine ..... dönüşümü uygulanarak  $\zeta_2$  çemberi elde edilmiştir.

►  $\zeta_2$  çemberine ..... dönüşümü uygulanarak  $\zeta_4$  çemberi elde edilmiştir.

►  $\zeta_1$  çemberine ..... dönüşümü uygulanarak  $\zeta_4$  çemberi elde edilmiştir.

3. Yukarıda belirlediğiniz dönüşümlerin özelliklerini göz önünde bulundurarak bu dönüşümlerin uygulandığı çemberlerin eş veya benzer olma durumlarını tartışınız.



### Örnek

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (3x, 3y)$  homoteti dönüşümü altında, denklemleri  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  olan çemberin görüntüsünü bularak çember ile görüntüsünün eş veya benzerlik durumunu belirleyelim.

### Çözüm

Verilen çemberin merkezi M(1, 0) noktası ve yarıçapı  $r = 1$  br dir. Bu çemberin homoteti dönüşümündeki merkezi  $M'(x', y')$  olsun. Buradan  $x' = 3x \Rightarrow x = \frac{x'}{3}$  ve  $y' = 3y \Rightarrow y = \frac{y'}{3}$  tür.

Bu değerler  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x'}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow (x' - 3)^2 + (y')^2 = 9 \text{ bulunur. Dolayısıyla homoteti dönüşümünden elde edilen görüntü merkezi } M'(3, 0) \text{ ve yarıçapı } r = 3 \text{ br olan çemberdir.}$$

Çemberlerin yarıçap uzunlukları farklı olduğundan bu iki çember benzerdir.



### Örnek

Standart denklemi  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$  olan çemberin  $\vec{u} = (2, 1)$  vektörü doğrultusundaki ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünü bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberin merkezi  $M(-2, 3)$  ve yarıçapının uzunluğu  $r = 3$  br dir.  $M(-2, 3)$  noktasının  $\vec{u} = (2, 1)$  vektörü doğrultusundaki ötelenmiş  $A$  noktası olsun.

Buradan  $T_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u} \Rightarrow T_{\vec{u}}(M) = (-2, 3) + (2, 1) \Rightarrow T_{\vec{u}}(M) = (0, 4) \Rightarrow A(0, 4)$  elde edilir. Öteleme dönüşümü uzunluğu koruduğundan çemberin yarıçapının uzunluğu değişmeyecektir. O hâlde verilen çemberin  $\vec{u}$  ile ötelenmiş  $A(0, 4)$  merkezli, 3 br yarıçaplı  $x^2 + (y - 4)^2 = 9$  denklemlidir.



### Alıştırma

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

a. 5 br yarıçaplı bir çemberin merkezinden 3 br uzaklıktaki kirisinin uzunluğu ..... br dir.

b. Standart denklemi  $x^2 + (y - 6)^2 = 12$  olan çemberin merkezinin koordinatları ..... ve yarıçapının uzunluğu ..... br dir.

c. Standart denklemi  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = r^2$  olan çember her iki eksene de teğet ise yarıçapının uzunluğu ..... br dir.

ç. Genel denklemi  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$  olan çemberin vektörel denklemi ..... dir.

d. Öteleme dönüşümü ..... koruduğundan bir çember ile ötelenmesi ile elde edilen görüntüsü ..... çemberlerdir.

2. Aşağıda denklemleri verilen çemberlerin grafiklerini çiziniz.

a.  $x^2 + y^2 = 4$  b.  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

c.  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$  ç.  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$

3. Şekildeki çemberde

$[BC] \perp [AD]$ ,

$|BD| = |DC|$ ,

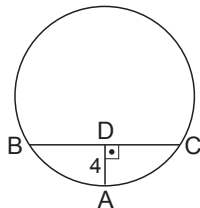
$|AD| = 4$  br ve

$|BC| = 16$  br

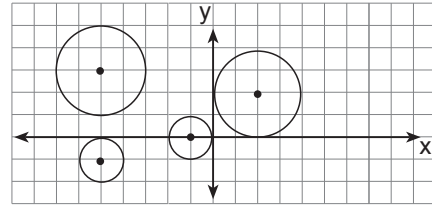
olduğuna göre,

çemberin yarıçapının

uzunluğu kaç br dir?



4.



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen çemberlerin standart, vektörel ve genel denklemlerini bulunuz.

5. Yarıçapının uzunluğu 4 br olan bir çember eksenlere 2. bölgede teğet olduğuna göre, bu çemberin standart denklemini bulunuz.

6.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (2x, 2y)$  homoteti dönüşümü altında denklemi  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  olan çemberin görüntüsünü bulunuz.

7.  $x^2 + (2k - 1)y^2 - 4x + k = 0$  denklemi çember belirttiğine göre, bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapının uzunluğunu bulunuz.

8. Düzlemde  $K(2, -5)$  ve  $L(-1, 1)$  noktaları için  $[KL]$  nı çap kabul eden çemberin denklemi nedir?

9. Standart denklemi  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$  olan çemberin  $\vec{u} = (-1, 1)$  vektörü doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünün standart denklemini bulunuz.



### 4.3. Çemberin Parametrik Denklemi



Yandaki fotoğrafta verilen dönme dolabı bir çember modeli, her bir dolabı da çember üzerindeki noktalar olarak düşünelim.

Dönme dolabın merkezine bir koordinat sistemi yerleştirdiğimizi varsayarsak A dolabının koordinatlarını yarıçap ve x eksenini ile yaptığı açı türünden nasıl ifade edersiniz?

Buradan çemberin ne tür bir denkleminin elde edilebileceğini düşününüz. Dönme dolap hareket ettiğinde A dolabının bir tam tur atarak ilk konumuna gelmesini matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz? Tartışınız.



#### Etkinlik

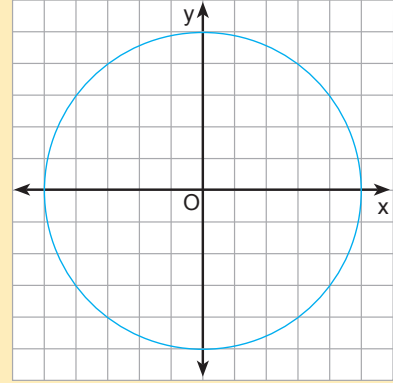
1. Yandaki analitik düzlemde verilen çemberin standart denklemini bulunuz.

2. Analitik düzlemde P(3, 4) ve C(3, 0) noktalarını işaretleyiniz.

3.  $\overrightarrow{OP}$  nü çizerek bu vektörün x eksenine yaptığı açığı "t" olarak adlandırınız. Oluşan OPC dik üçgeninden yararlanarak aşağıdaki ifadelerin değerlerini noktalı yerlere yazınız.

$\cos t = \dots\dots\dots$

$\sin t = \dots\dots\dots$



4.  $\cos t$  ve  $\sin t$  değerlerinden yararlanarak P noktasının koordinatlarını yarıçap ve t türünden ifade ediniz. Bu koordinatların, çemberin standart denklemini sağlayıp sağlamadığını sorgulayınız.

5. Çember üzerinde, eksenler üzerinde olmayan herhangi bir N(x, y) noktası işaretleyiniz. N noktasından x eksenine bir dikme çizip dikme ayağını K olarak adlandırınız.

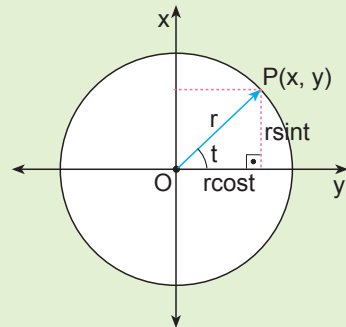
6. ONK dik üçgenini oluşturunuz.  $m(\widehat{NOK}) = \alpha$  olarak N noktasının koordinatlarını  $\cos \alpha$  ve  $\sin \alpha$  türünden yazınız.

7. Yukarıdaki adımları çember üzerinde seçeceğiniz farklı noktalar için de uygulayınız. Çember denkleminin çemberin üzerinde seçilen her nokta için yarıçap ve yarıçap vektörünün x eksenini ile yaptığı açığı bağı olarak ifade edilip edilemeyeceğini tartışınız.



#### Bilgi Kutusu

Merkezi O(0, 0) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan çember üzerindeki bir nokta P ve  $\overrightarrow{OP}$  nün x eksenine yaptığı açı t ( $0 \leq t < 2\pi$  ve  $t \in \mathbb{R}$ ) olmak üzere,  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  denklemlerine **çemberin parametrik denklemi** denir. Bu denklemlerdeki x ve y nin bağı oldukları "t" değişkenine **parametre değeri** denir. Orijin merkezli çemberin parametrik denklemi  $\{(r \cos t, r \sin t) : r \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}\}$  şeklinde de gösterilebilir.





### Örnek

Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 9$  olan çemberin parametrik denklemini bulalım.

### Çözüm

Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 9$  olan çemberin merkezi  $M(0, 0)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$  br dir. Buradan çemberin parametrik denklemini  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  bulunur.

### Örnek

Parametrik denklemi  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olan çemberin standart denklemini bulalım.

### Çözüm

Verilen denklem  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} 0 < t \leq 2\pi$  denklemi ile karşılaştırılırsa  $r = 1$  br olduğu görülür. Çember orijin merkezli olduğundan standart denklemi  $x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$  bulunur.

### Örnek

Vektörel denklemi  $\|\vec{OP}\| = 2$  olan orijin merkezli çemberin parametrik denklemini yazarak  $t = \frac{\pi}{6}$  parametrik değerine karşılık gelen noktayı bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberin merkezi orijin ve yarıçapının uzunluğu 2 br olduğundan parametrik denklemi  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  dir.

Bu denklemde  $t = \frac{\pi}{6}$  yazılırsa  $x = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  ve  $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  elde edilir. Bundan dolayı  $t = \frac{\pi}{6}$  parametre değerine karşılık gelen nokta  $A(\sqrt{3}, 1)$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

1. İki atlet, çember şeklindeki bir koşu parkurunun A noktasından, farklı yönlerde koşarak bir tur atıyor. Tekrar A noktasına vardıklarında, atletlerin parkur üzerinde farklı yönlerde hareket ettiğinin parametrik olarak nasıl ifade edileceğini tartışınız.

2. Aşağıdaki boşlukları doğru olacak şekilde tamamlayınız.

► Parametrik denklemi  $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olan çemberin standart denklemi ..... ve vektörel denklemi ..... dir.

► Vektörel denklemi  $\|\vec{OP}\| = 16$  olan orijin merkezli çemberin standart denklemi ..... ve parametrik denklemi ..... dir.

3. Üzerindeki bir noktası  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  olan orijin merkezli çemberin parametrik denklemini bularak A noktasına karşılık gelen parametre değerini hesaplayınız.





## Etkinlik

1. Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 4$  olan çemberi yandaki analitik düzlemde çizerek parametrik denklemini yazınız.

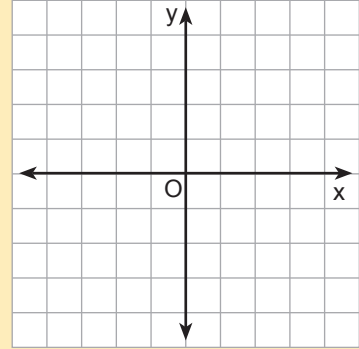
$$x = \dots\dots\dots y = \dots\dots\dots$$

2. Verilen çemberde  $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$  öteleme dönüşümünü kullanarak elde edeceğiniz çemberin standart denklemini yazarak grafiğini yandaki analitik düzlemde çiziniz.

3. Etkinliğin birinci adımında bulduğunuz parametrik denklemden yararlanarak öteleme sonucunda elde edilen çemberin parametrik denklemini bulunuz.

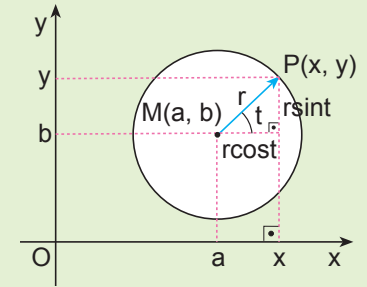
4. Yaptığınız işlemler sonucunda merkezi orijinde olmayan çemberlerin parametrik denklemlerinin bulunması ile ilgili nasıl bir genelleme elde edebilirsiniz? Tartışınız.

5. Merkezi orijinde olmayan bir çemberin parametrik denklemi verilseydi standart denklemini bulmak için nasıl bir yol izlerdiniz? Açıklayınız.



## Bilgi Kutusu

Merkezi  $M(a, b)$  ve yarıçapı  $r$  br olan çemberin,  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  genel denkleminde  $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$  öteleme- si kullanılarak  $x'^2 + y'^2 = r^2$  denklemi elde edilir. Bu denklemde  $\begin{cases} x' = r \cos t \\ y' = r \sin t \end{cases}$  yazılarak  $M(a, b)$  merkezli  $r$  br yarıçaplı çemberin bir tam turunun parametrik denklemleri  $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  elde edilir.

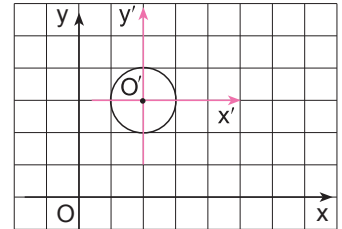


## Örnek

Standart denklemi  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$  olan çemberde  $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$  öteleme dönüşümünü kullanarak bu çemberin parametrik denklemini bulalım.

## Çözüm

$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$  ötelemesinde XOY koordinat sisteminin başlangıç noktası  $O'(2, 3)$  noktasına ötelenerek oluşturulan  $X'O'Y'$  koordinat sistemi yandaki şekilde çizilmiştir.  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  çemberinin XOY koordinat sistemine göre merkezi  $M(2, 3)$  noktasıyken  $X'O'Y'$  koordinat sistemine göre merkezi  $M'(0, 0)$  noktasıdır.



Buna göre verilen çemberin  $X'O'Y'$  koordinat sistemindeki standart denklemi  $x'^2 + y'^2 = 1$  dir.

Bu çemberin parametrik denklemleri ise  $\begin{cases} x' = \cos t \\ y' = \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  şeklindedir. Öteleme dönüşümünde

$x = x' + 2 \Rightarrow x' = x - 2$  ve  $y = y' + 3 \Rightarrow y' = y - 3$  olduğundan yukarıdaki parametrik denklemin XOY

koordinat sistemindeki ifadesi  $\begin{cases} x' = \cos t \\ y' = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = \cos t \\ y - 3 = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = 3 + \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olarak bulunur.



### Örnek

Genel denklemi  $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$  olan çemberin parametre değeri "t" olmak üzere, A(0, 2) noktasına karşılık gelen parametre değerini bulalım.

### Çözüm

Verilen denklem  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  denklemi ile karşılaştırılırsa  $A = 0$ ,  $B = 4$  ve  $C = -12$  olduğu görülür. Bundan dolayı, çemberin merkezi  $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M(0, -2)$  noktası ve çemberin yarıçapının uzunluğu  $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4^2 - 4(-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$  br dir.

Buradan çemberin parametrik denklemi  $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = -2 + 4 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  bulunur.

A(0, 2) noktasının x ve y değerleri yukarıdaki parametrik denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = -2 + 4 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \cos t \\ 2 = -2 + 4 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ bulunur.}$$

### Örnek

Aşağıda standart denklemleri verilen çemberlerin parametrik denklemlerini bularak grafiklerini çizelim.

a.  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

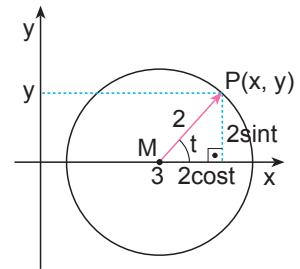
b.  $x^2 + (y + 1)^2 = 9$

c.  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

### Çözüm

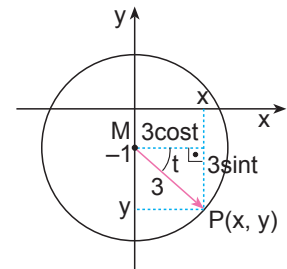
a. Verilen çemberin merkezi M(3, 0) noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 2$  br olduğundan bu çemberin parametrik denklemi,

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi \text{ bulunur. Bu çemberin grafiği yandaki şekilde çizilmiştir.}$$

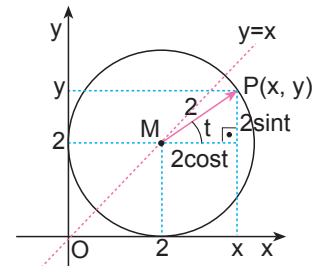


b. Verilen çemberin merkezi M(0, -1) noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 3$  br olduğundan bu çemberin parametrik denklemi,

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi \text{ bulunur. Bu çemberin grafiği yandaki şekilde çizilmiştir.}$$



c. Verilen çemberin merkezi M(2, 2) noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 2$  br olduğundan bu çemberin parametrik denklemi,

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi \text{ bulunur. Bu çemberin grafiği yandaki şekilde çizilmiştir.}$$




### Örnek

Parametrik denklemi  $\begin{cases} x = (2+k) + 5 \cos t \\ y = (4+k) + n \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olan çemberin merkezi 2. açkırtay doğruşu üzerinde olduğuna göre,  $n + k$  toplamını bulalım.

### Çözüm

A(a, b) merkezli çemberin merkezi, 2. açkırtay doğruşu ( $y = -x$ ) üzerinde ise  $b = -a$  olur.

Parametrik denklemi verilen çemberin merkezi  $M(2+k, 4+k)$  olduğundan,  $4+k = -(2+k) \Rightarrow 4+k = -2-k \Rightarrow 2k = -6 \Rightarrow k = -3$  elde edilir. Çemberin yarıçap uzunlukları-  
nın eşitliğinden  $n = 5$  olur. Buradan  $n + k = 5 - 3 = 2$  bulunur.

### Uygulama Köşesi

1. Parametrik denklemleri verilen aşğıdaki çemberlerin merkezlerinin koordinat düzlemindeki konumlarına göre doğru eşleştirmeleri yapınız. ( $0 \leq t < 2\pi$ )

Parametrik denklemi	Merkezinin yeri
a. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	I. x ekseninde
b. $\begin{cases} y = 2 + 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$	II. 1. açkırtay doğruşu üzerinde
c. $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = -4 + 2 \sin t \end{cases}$	III. Orijin üzerinde
ç. $\begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = -3 + 3 \sin t \end{cases}$	IV. 2. açkırtay doğruşu üzerinde
d. $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$	V. y ekseninde

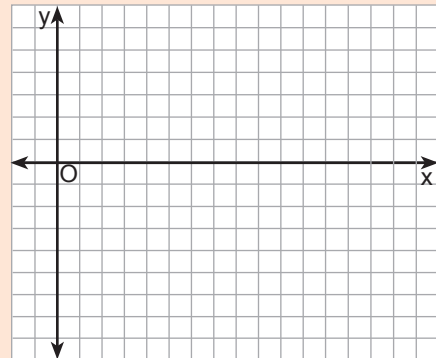
2.  $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = e + 5 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemiyle verilen çember (5, 7) noktasından geçtiğine göre, e değerini bulunuz.

3. Genel denklemi  $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 16 = 0$  olan bir çember için aşğıdaki adımları uygulayınız:

► Çemberin parametrik denklemini bularak grafiğini çiziniz.

► Çemberin  $t = \frac{3\pi}{2}$  parametre değerine karşılık gelen noktasını bulunuz.

► Çemberin A(15, -1) noktasına karşılık gelen parametre değerini bulunuz.





### Örnek

Parametrik denklemi  $\begin{cases} x = -3 + 5 \cos t \\ y = 2 + 5 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olan çemberin standart denklemini bulalım.

### Çözüm

Verilen parametrik denklemden  $x = -3 + 5 \cos t \Rightarrow x + 3 = 5 \cos t \Rightarrow (x + 3)^2 = 25 \cos^2 t$  ve  $y = 2 + 5 \sin t \Rightarrow y - 2 = 5 \sin t \Rightarrow (y - 2)^2 = 25 \sin^2 t$  eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t)$  elde edilir.  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  olduğundan çemberin standart denklemi  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$  bulunur.



### Bilgi Kutusu

$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemiyle verilen çemberin standart denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  dir.

### Örnek

$\begin{cases} x = 1 + 6 \cos t \\ y = -4 + 6 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemiyle verilen çemberin genel denklemini bulalım.

### Çözüm

Verilen denklem  $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases}$  denklemi ile karşılaştırılırsa  $a = 1$ ,  $b = -4$  ve  $r = 6$  br olduğu görülür. Buradan çemberin standart denklemi,

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - (-4))^2 = 6^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 36$  dir. Standart denklemde kare alma işlemleri ile gerekli düzenlemeler yapılırsa  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 19 = 0$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Çember denklemleri ile ilgili verilen aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde tamamlayınız.

Merkezi	Yarıçapı	Vektörel denklemi	Standart denklemi	Genel denklemi	Parametrik denklemi
M(1, 0)	$r = 1$				
M(-2, 3)		$\ \vec{MP}\  = 5$			
			$(x - 2)^2 + y^2 = 49$		
				$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$	
					$\begin{cases} x = 4 + 2 \cos t \\ y = -3 + 2 \sin t \end{cases}$

Tablo: 4.3.1





## Etkinlik

1. Şekil 1'deki birim çemberin merkezi orijin, parametrik denklemi  $0 \leq t < 2\pi$  için  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$  dir. Bu çember üzerinde aşağıdaki parametre değerlerine karşılık gelen vektörleri bularak Şekil 1 üzerinde gösteriniz.

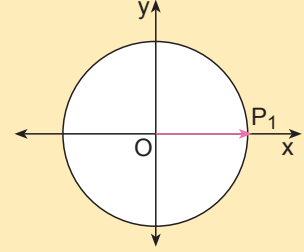
$$t = 0^\circ \text{ için } \alpha(0^\circ) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0) \Rightarrow \vec{P}_1 = (1, 0)$$

$$t = 45^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{P}_2 = \dots$$

$$t = 90^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{P}_3 = \dots$$

$$t = 180^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{P}_4 = \dots$$

$$t = 360^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{P}_5 = \dots$$



Şekil 1

2. Etkinliğin 1. adımını parametrik denklemi  $0 \leq t < 2\pi$  için  $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$  olan çember için uygulayıp aşağıdaki vektörleri bularak Şekil 2'deki birim çember üzerinde gösteriniz.

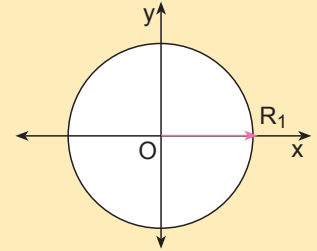
$$t = 0^\circ \text{ için } \gamma(0^\circ) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0) \Rightarrow \vec{R}_1 = (1, 0)$$

$$t = 45^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{R}_2 = \dots$$

$$t = 90^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{R}_3 = \dots$$

$$t = 180^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{R}_4 = \dots$$

$$t = 360^\circ \text{ için } \dots \Rightarrow \vec{R}_5 = \dots$$



Şekil 2

3.  $\alpha(t)$  ve  $\gamma(t)$  çemberlerinde hangi vektörlerin çakıştığını ve çakışan vektörlerin parametre değerlerini söyleyiniz.

4. Uyguladığınız adımlara göre, parametrik denklemi verilen bir çemberin hangi aralıkta bir tam dönme yapacağı ile ilgili bir genelleme elde ediniz.

## Örnek

$\alpha(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$  parametrik ifadesiyle verilen çemberin hangi aralıkta bir tam dönme yaptığını bulalım.

## Çözüm

Verilen çemberde bazı parametre değerlerine karşılık gelen noktaların belirttiği vektörleri bulalım.

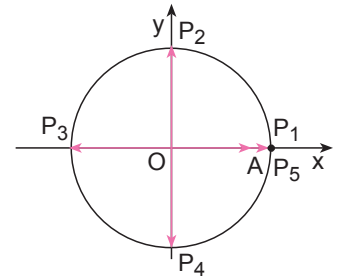
$$t = 0^\circ \text{ için } \alpha(0^\circ) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0) \Rightarrow \vec{P}_1 = (1, 0),$$

$$t = 30^\circ \text{ için } \alpha(30^\circ) = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (0, 1) \Rightarrow \vec{P}_2 = (0, 1),$$

$$t = 60^\circ \text{ için } \alpha(60^\circ) = (\cos 180^\circ, \sin 180^\circ) = (-1, 0) \Rightarrow \vec{P}_3 = (-1, 0),$$

$$t = 90^\circ \text{ için } \alpha(90^\circ) = (\cos 270^\circ, \sin 270^\circ) = (0, -1) \Rightarrow \vec{P}_4 = (0, -1) \text{ ve}$$

$t = 120^\circ$  için  $\alpha(120^\circ) = (\cos 360^\circ, \sin 360^\circ) = (1, 0) \Rightarrow \vec{P}_5 = (1, 0)$  olarak bulunur. Bu vektörler şekildeki gibi çizildiğinde  $\vec{P}_1$  ve  $\vec{P}_5$  ne karşılık gelen noktanın A(1, 0) olduğu görülür. Bundan dolayı  $\alpha(t)$  parametrik ifadesiyle verilen çember  $0 \leq t < 120^\circ$  aralığında bir tam dönme yapar.







## Aıştırma

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

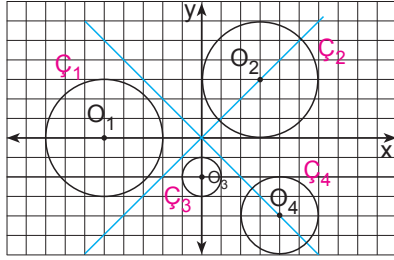
a.  $\{(1 + 2 \cos t, -4 + 2 \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$  denklemi ile verilen çemberin merkezi ..... noktası ve yarıçapının uzunluğu ..... br dir.

b.  $(x + 3)^2 + y^2 = 5$  çemberinin parametrik denklemi ..... dir.

c. Parametrik denklemi  $x = 3 + 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$  olan çemberin merkezi ..... ekseninde dir.

ç.  $\alpha(t) = (\cos 4t, \sin 4t)$  parametrik ifadesi ile verilen çember ..... aralığında bir tam tur dönme yapar.

2.



Yukarıdaki analitik düzlemde  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  ve  $O_4$  merkezli  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  ve  $C_4$  çemberleri verilmiştir. Aşağıda verilen parametrik denklemlerin hangi çemberlere ait olduklarını yanlarındaki kutuların içine yazınız. ( $0 \leq t < 2\pi$ )

a.  $\begin{cases} x = -5 + 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$

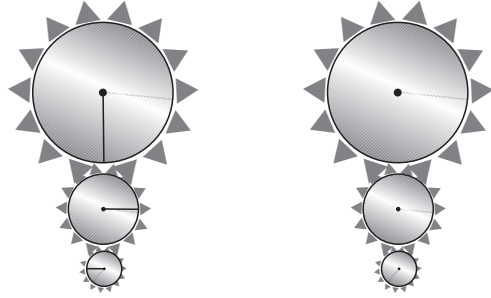
b.  $\begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = 3 + 3 \sin t \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = -2 + \sin t \end{cases}$

ç.  $\begin{cases} x = 4 + 2 \cos t \\ y = -4 + 2 \sin t \end{cases}$

3. Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 9$  olan çemberden  $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 5 \end{cases}$  öteleme dönüşümü kullanılarak elde edilen çemberin parametrik denklemini bulunuz.

4. Aşağıda yarıçapları 1, 2 ve 4 sayılarıyla orantılı üç dişli çark verilmiştir. En büyük çark saat yönünün tersine  $270^\circ$  döndürüldüğünde şekilde belirtilen yarıçap çizgilerinin görünümünü doğru olacak şekilde çizin.



5. Aşağıda genel denklemleri verilen çemberlerin parametrik ve vektörel denklemlerini bulunuz.

a.  $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b.  $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

c.  $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$

ç.  $x^2 + y^2 + 8x + 13 = 0$

6.  $\begin{cases} x = 3 + \cos t \\ y = -5 + \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemi ile verilen çemberin standart denklemini ve  $A(3, -4)$  noktasına karşılık gelen parametre değerini bulunuz.

7.  $\begin{cases} x = 6 + \sqrt{3} \cos t \\ y = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemi ile verilen çemberin  $t = \frac{\pi}{6}$  parametre değerine karşılık gelen noktanın koordinatlarını bulunuz.

8.  $\begin{cases} x = (a - 3) + 4 \cos t \\ y = (a + 2) + 4 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemi ile verilen çemberin merkezi y ekseninde olduğuna göre, bu çemberin merkezinin koordinatlarını bulunuz.

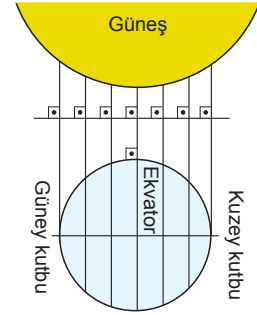


#### 4.4. Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Konumu



Yandaki şekilde dünyaya gelen güneş ışınlarının bir modellemesi görülmektedir. Bu modellemeye göre, güneş ışınlarının kutuplara varırken kat edeceği yol uzun olduğundan tutulmalar daha fazla gerçekleşmekte ve sıcaklık düşmektedir. Oysa güneş ışınları ekvatora daha kısa yoldan ulaştığı için sıcaklık daha fazla hissedilmektedir.

Dünyayı bir çember modeli, güneş ışınları ise doğru modeli olarak düşünülürse kutup noktalarına ve ekvatora gelen ışınlar dünyayı kaç noktada keser? Güneş ışınlarının dünyaya değmemesi söz konusu olabilir mi? Tartışınız.



#### Etkinlik

1. Yandaki fotoğrafta çember şeklinde bir tarla verilmiştir. Bu tarlanın merkezi O noktası ile, bazı yolları ise  $d_1$ ,  $d_2$ , ve  $d_3$  doğruları ile gösterilmiştir. Her doğrunun çemberi kaç noktada kestiğini belirleyiniz.

2. O noktasından  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  doğrularına birer dikme çizip dikme ayaklarını  $H_1$ ,  $H_2$  ve  $H_3$  olarak adlandırınız.

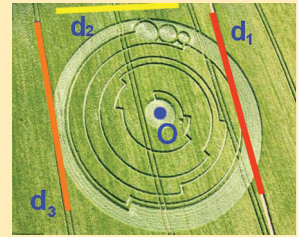
3. O noktasının  $H_1$ ,  $H_2$  ve  $H_3$  noktalarına olan uzaklıklarını yarıçap uzunluğu ile karşılaştırarak aşağıdaki boşluklara “<”, “>”, “=” işaretlerinden uygun olanını yazınız.

$|OH_1| \dots r$        $|OH_2| \dots r$        $|OH_3| \dots r$

4. Doğruların çemberi kestiği nokta sayılarını etkinliğin 3. adımında bulduğunuz ifadelerle ilişkilendiriniz.

5. Uyguladığınız adımlara göre, bir doğru ile bir çemberin birbirine göre konumlarının neler olabileceğini yorumlayınız.

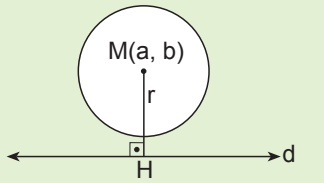
6. Bir doğrunun çembere göre konumunu belirlerken hangi uzunlukların karşılaştırılması gerektiğini açıklayınız.



#### Bilgi Kutusu

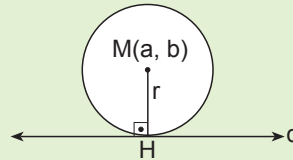
Aynı düzlemde bulunan bir  $d$  doğrusu ile merkezi  $M(a, b)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r$  br olan bir çemberin birbirine göre konumları aşağıdaki gibi üç durumda incelenir.

1.



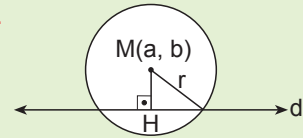
$[MH] \perp d$  ve  $|MH| > r$  ise  $d$  doğrusu çemberi kesmez.

2.



$[MH] \perp d$  ve  $|MH| = r$  ise  $d$  doğrusu çemberi bir noktada keser.

3.



$[MH] \perp d$  ve  $|MH| < r$  ise  $d$  doğrusu çemberi farklı iki noktada keser.



#### Hatırlatma

Bir çemberi bir noktada kesen doğruya **teğet doğrusu**, iki noktada kesen doğruya **kesen doğrusu** denir.



### Örnek

Aşağıda verilen doğruların, standart denklemi  $x^2 + y^2 = 9$  olan çembere göre konumlarını belirleyelim.

a.  $x + y + 3 = 0$

b.  $3x + 2y - 12 = 0$

c.  $y\sqrt{5} - 2x + 9 = 0$

### Çözüm

$x^2 + y^2 = 9$  çemberinin merkezi  $M(0, 0)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 3$  br dir.  $M$  noktasının verilen doğrulara uzaklıkları  $h_1$ ,  $h_2$  ve  $h_3$  olsun.

a.  $h_1 = \frac{|0+0+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  br dir.  $\frac{3\sqrt{2}}{2} < 3 \Rightarrow h_1 < r$  olduğundan  $x + y + 3 = 0$  doğrusu çemberi farklı iki noktada keser. O hâlde, bu doğru çemberin bir kesenidir.

b.  $h_2 = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$  br dir.  $\frac{12}{\sqrt{13}} > 3 \Rightarrow h_2 > r$  olduğundan  $3x + 2y - 12 = 0$  doğrusu çemberi kesmez.

c.  $h_3 = \frac{|0 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3$  br dir.  $3 = 3 \Rightarrow h_3 = r$  olduğundan  $y\sqrt{5} - 2x + 9 = 0$  doğrusu çemberi bir noktada keser. O hâlde, bu doğru çemberin bir teğettir.

### Uygulama Köşesi

Denklemi  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$  olan çember ve  $d: 4y + 3x + 32 = 0$  doğrusu veriliyor. Buna göre;

- Doğru ile çemberin birbirine göre konumunu belirleyiniz.
- Çemberin  $d$  doğrusuna en yakın noktası  $A$  ise  $A$  noktasının  $d$  doğrusuna uzaklığını bulunuz.

### Etkinlik

- $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$  çemberi ile  $y = mx$  doğrusunun denklemlerinin ortak çözümünü yapınız.
- Ortak çözümünden elde ettiğiniz ikinci dereceden denklemin diskriminantını ( $\Delta$  yı) hesaplayınız.
- Ortak çözümünden elde edilen her kökün, doğrunun çemberi kestiği nokta olduğunu göz

önünde bulundurarak Tablo 4.4.1'i doldurunuz.

m'nin değer aralığı	$\Delta$ 'nin işareti	Köklerin varlığı	Doğrunun çemberi kestiği nokta sayısı

Tablo: 4.4.1

- Tablo 4.4.1'e göre,  $\Delta$ 'nın işaretleri ile doğrunun çemberi kestiği nokta sayılarını karşılaştırınız.
- Bir çember ile doğrunun birbirine göre konumunun doğru ve çemberin denklemlerinin ortak çözümü ile nasıl belirlenebileceğini genelleyiniz.

### Bilgi Kutusu

$a, b, m, n \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  çemberi ile  $y = mx + n$  doğrusunun denklemlerinin ortak çözümünden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı  $\Delta$  olmak üzere;

\*  $\Delta < 0$  ise doğru çemberi kesmez. \*  $\Delta = 0$  ise doğru çembere teğettir.

\*  $\Delta > 0$  ise doğru çemberi farklı iki noktada keser. Kesim noktaları doğru ve çember denklemlerinin ortak çözüm kümesinin elemanlarıdır.



### Örnek

Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 2$  olan çember ile  $y = 2x + 1$  doğrusunun birbirine göre konumunu belirleyerek varsa kesim noktalarını bulalım.

### Çözüm

$x^2 + y^2 = 2$  ve  $y = 2x + 1$  denklemlerinin ortak çözümünden,

$$x^2 + (2x + 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bu denklemin diskriminantı  $\Delta$  olmak üzere,  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 36$  bulunur.

$\Delta > 0$  olduğundan  $y = 2x + 1$  doğrusu  $x^2 + y^2 = 2$  çemberini farklı iki noktada keser. Kesim noktalarının apsisi denklemlerin ortak çözümünden elde edilen ikinci derece denklemin kökleridir.

$$5x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow (5x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5} \text{ ve } x_2 = -1 \text{ dir. } y = 2x + 1 \text{ denkleminde } x_1 = \frac{1}{5} \text{ için } y_1 = \frac{7}{5} \text{ ve } x_2 = -1 \text{ için } y_2 = -1 \text{ dir.}$$

O hâlde, doğru ile çemberin kesim noktaları A ve B olmak üzere,  $A\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$  ve  $B(-1, -1)$  bulunur.

### Örnek

$y = ax$  doğrusu genel denklemi  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$  olan çembere teğet olduğuna göre, a gerçekte sayısının alabileceği değerleri bulalım.

### Çözüm

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$  ve  $y = ax$  denklemlerin ortak çözümünden,

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0 \Rightarrow x^2 + (ax)^2 - 6x + 8(ax) + 20 = 0 \Rightarrow (1 + a^2)x^2 - (6 - 8a)x + 20 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı  $\Delta$  olmak üzere,

$\Delta = [-(6 - 8a)]^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 20 \Rightarrow \Delta = 64a^2 - 96a + 36 - 80 - 80a^2 \Rightarrow \Delta = -16a^2 - 96a - 44$  bulunur. Verilen doğrunun çembere teğet olması için  $\Delta = 0$  olmalıdır. Buradan,

$$\Delta = -16a^2 - 96a - 44 = 0 \Rightarrow -4(4a^2 + 24a + 11) = 0 \Rightarrow 4a^2 + 24a + 11 = 0 \Rightarrow (2a + 11) \cdot (2a + 1) = 0$$
$$2a + 11 = 0 \Rightarrow a = -\frac{11}{2} \text{ ve } 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

### Örnek

Vektörel denklemi  $\|\vec{OX}\|^2 = 4$  olan orijin merkezli çember ile  $X = (2, -1) + \lambda(1, 3)$  doğrusunun birbirine göre konumunu belirleyelim.

### Çözüm

$X = (2, -1) + \lambda(1, 3)$  ise  $X = (2 + \lambda, -1 + 3\lambda)$  ve  $\vec{OX} = (2 + \lambda, -1 + 3\lambda)$  olur.

$\vec{OX}, \|\vec{OX}\|^2 = 4$  denkleminde yerine yazılırsa,

$\|\vec{OX}\|^2 = 4 \Rightarrow \langle \vec{OX}, \vec{OX} \rangle = 4 \Rightarrow (2 + \lambda) \cdot (2 + \lambda) + (-1 + 3\lambda) \cdot (-1 + 3\lambda) = 4 \Rightarrow 10\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  ikinci derece denklemi bulunur. Bu denklemin diskriminantı  $\Delta$  olmak üzere,  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1 = -36$  dir.

$\Delta < 0$  olduğundan doğru çemberi kesmez.





### Uyarı

Bir çember ile doğrunun birbirine göre konumları vektörel yaklaşım kullanılarak aşağıdaki gibi belirlenir.

- $\|\overrightarrow{MX}\|^2 = r^2$  çemberi ile  $X = P + \lambda \vec{\alpha}$  doğrusunun denklemlerin ortak çözümünden  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle \lambda^2 + 2 \langle \overrightarrow{MP}, \vec{\alpha} \rangle \lambda + \|\overrightarrow{MP}\|^2 - r^2 = 0$  ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı  $\Delta = 4(\langle \overrightarrow{MP}, \vec{\alpha} \rangle^2 - \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle (\|\overrightarrow{MP}\|^2 - r^2))$  olmak üzere;
  - $\Delta > 0$  ise doğru çemberin bir kesenidir.
  - $\Delta = 0$  ise doğru çemberin bir teğetidir.
  - $\Delta < 0$  ise doğru çemberi kesmez.

### Örnek

Vektörel denklemi  $\|\overrightarrow{MX}\| = r$  olan  $M(1, -2)$  merkezli çember ile  $X = (2, 4) + \lambda(-2, 2)$  doğrusu birbirine teğet olduğuna göre,  $r$  değerini bulalım.

### Çözüm

Verilen doğru denklemi  $X = P + \lambda \vec{\alpha}$  ile karşılaştırılırsa  $P(2, 4)$  ve  $\vec{\alpha} = (-2, 2)$  olduğu görülür. Buradan  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = (2, 4) - (1, -2) = (1, 6)$  ve  $\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$  br elde edilir.

$\langle \overrightarrow{MP}, \vec{\alpha} \rangle = 1 \cdot (-2) + 6 \cdot 2 = 10$  ve  $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 8$  dir. Doğru ile çember birbirine teğet olduğundan  $\Delta = 0$  olmalıdır.

$$\text{Buradan } \Delta = 4(\langle \overrightarrow{MP}, \vec{\alpha} \rangle^2 - \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle (\|\overrightarrow{MP}\|^2 - r^2))$$

$$0 = 4(10^2 - 8(\sqrt{37}^2 - r^2)) \Rightarrow 4(-196 + 8r^2) = 0 \Rightarrow 8r^2 = 196 \Rightarrow r = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ br bulunur.}$$



### Uygulama Köşesi

1. Aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde doldurunuz. Kesişen doğru ve çemberin kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Çemberin denklemi	Doğrunun denklemi	Doğru ile çemberin kesim noktaları	Doğru ile çemberin birbirine göre konumu
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$	$x + y - 5 = 0$		
$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$	$3x - 4y + 1 = 0$		
$M(-1, -6), \ \overrightarrow{MP}\  = 1$	$X = (6, 2) + \lambda \cdot (1, 2)$		

Tablo: 4.4.2

2.  $x^2 + y^2 = 9$  çemberi ile  $y = x + a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) doğrusu veriliyor. Buna göre,  $a$  nın hangi değerleri için bu doğrunun çemberi;

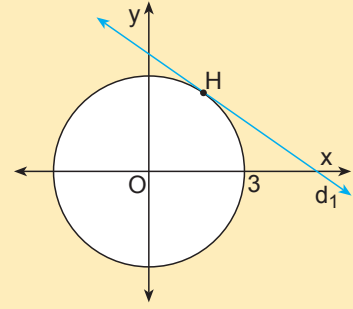
- Bir noktada kestiğini
- İki noktada kestiğini
- kesmediğini çizim yaparak tartışınız.





## Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde vektörel denklemi  $\|\vec{OX}\| = 3$  olan çember ve çemberin  $H\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  noktasındaki teğeti verilmiştir. Çembere H noktasında dik olan doğruyu çizip  $d_2$  olarak adlandırınız.



2.  $\vec{OH}$  nı belirleyiniz.  $\vec{OH}$  nın doğrultu vektörünü bularak  $d_2$  doğrusunun kapalı denklemini elde ediniz.

3.  $d_1$  doğrusu üzerinde herhangi bir  $P(x, y)$  noktası seçerek  $\vec{HP}$  nı çizin.

4.  $\vec{OH}$  ve  $\vec{HP}$  arasındaki açıyı göz önünde bulundurarak  $\langle \vec{OH}, \vec{HP} \rangle$  iç çarpımının sonucunu söyleyiniz.

5. Etkinliğin 4. adımındaki iç çarpımdan yararlanarak  $d_1$  doğrusunun kapalı denklemini bulunuz.

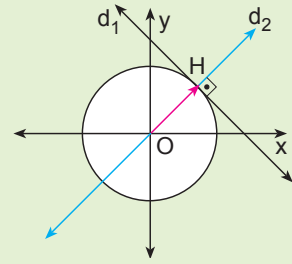
6. Uyguladığınız adımlara göre, bir çembere herhangi bir noktada teğet olan doğru ile teğete değme noktasında dik olan doğrunun denklemlerinin nasıl bulunabileceğini açıklayınız.



## Bilgi Kutusu

Bir çemberin herhangi bir noktasındaki yer vektörüne dik olan doğruya bu noktadaki **teğet doğrusu**, yer vektörünü doğrultman kabul eden doğruya ise **normal doğrusu** denir.

Şekildeki O merkezli çemberin H noktasındaki yer vektörü  $\vec{OH}$  olmak üzere,  $d_1$  çemberin teğet doğrusu,  $d_2$  ise çemberin normal doğrusudur.



## Örnek

Vektörel denklemi  $\|\vec{OX}\| = 2$  olan çembere üzerindeki  $A(\sqrt{3}, 1)$  noktasından çizilen teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulalım.

## Çözüm

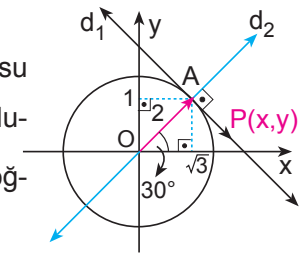
Yandaki şekilde  $\|\vec{OX}\| = 2$  çemberinin A noktasındaki  $d_1$  teğet doğrusu ve  $d_2$  normal doğrusu çizilmiştir.  $d_2$  doğrusunun eğimi  $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$  olduğundan  $d_2$  doğrusunun doğrultu vektörlerinden biri  $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$  dir.  $d_2$  doğrusu  $O(0, 0)$  noktasından geçtiğine göre denklemi,

$X = O + \lambda \vec{w} \Rightarrow X = (0, 0) + \lambda(\sqrt{3}, 1) \Rightarrow X = (\lambda\sqrt{3}, \lambda)$  elde edilir. Buradan  $d_2$  doğrusunun kapalı denklemi  $x = \lambda\sqrt{3}$  ve  $y = \lambda$  için  $d_2: y = \frac{x}{\sqrt{3}}$  bulunur.

$d_1$  doğrusu üzerindeki herhangi bir  $P(x, y)$  noktası için  $\vec{OA} \perp \vec{AP}$  olduğundan  $\langle \vec{OA}, \vec{AP} \rangle = 0$  dir.  $\vec{OA} = (\sqrt{3}, 1)$  ve  $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (x, y) - (\sqrt{3}, 1) = (x - \sqrt{3}, y - 1)$  dir.

$$\langle \vec{OA}, \vec{AP} \rangle = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (x - \sqrt{3}) + 1 \cdot (y - 1) = 0 \Rightarrow x\sqrt{3} - 3 + y - 1 = 0 \Rightarrow y + x\sqrt{3} - 4 = 0 \text{ olur.}$$

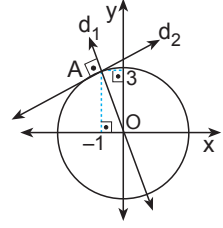
O hâlde teğet doğrusunun denklemi  $d_1: y + x\sqrt{3} - 4 = 0$  bulunur.





### Örnek

Yandaki şekilde denklemleri  $x^2 + y^2 = 10$  olan O merkezli çember ve üzerindeki A(-1, 3) noktasından çizilen teğet ve normal doğruları verilmiştir. Buna göre,  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının denklemlerini bulalım.

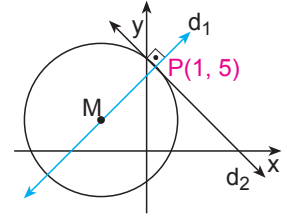


### Çözüm

Verilen çemberin merkezi O(0, 0) dır.  $d_1$  doğrusu O ve A noktalarından geçtiğinden eğimi  $m_{d_1} = \frac{3-0}{-1-0} = -3$  olup denklemleri  $y = -3x + k$  şeklindedir. A noktasının koordinatları  $d_1$  doğrusunun denkleminde yerine yazılırsa  $y = -3x + k \Rightarrow 3 = 3 + k \Rightarrow k = 0$  olup doğrusunun denklemleri  $d_1: y = -3x$  bulunur.  $d_1 \perp d_2$  olduğundan  $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow -3 \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow m_{d_2} = \frac{1}{3}$  olup,  $d_2$  doğrusunun denklemleri  $d_2: y = \frac{x}{3} + t$  şeklindedir. A noktasının koordinatları  $d_2$  doğrusunun denkleminde yerine yazılırsa,  $y = \frac{x}{3} + t \Rightarrow 3 = -\frac{1}{3} + t \Rightarrow t = \frac{10}{3}$  olup  $d_2$  doğrusunun denklemleri  $d_2: y = \frac{x}{3} + \frac{10}{3}$  olur.

### Örnek

Yandaki şekilde denklemleri  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$  olan M merkezli çember ve üzerindeki P(1, 5) noktasından çizilen teğet ve normal doğruları verilmiştir. Buna göre,  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının denklemlerini bulalım.



### Çözüm

Verilen çemberin merkezi  $M\left(-\frac{6}{2}, -\frac{4}{2}\right) = M(-3, 2)$  dir.  $d_1$  doğrusu M ve P noktalarından geçtiğinden eğimi  $m_{d_1} = \frac{5-2}{1-(-3)} = \frac{3}{4}$  olup denklemleri  $y = \frac{3}{4}x + k$  şeklindedir. P noktasının koordinatları  $d_1$  doğrusunun denkleminde yerine yazılırsa  $y = \frac{3}{4}x + k \Rightarrow 5 = \frac{3}{4} + k \Rightarrow k = \frac{17}{4}$  olup doğrusunun denklemleri  $d_1: y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$  bulunur.  $d_1 \perp d_2$  olduğundan  $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{4}{3}$  olup,  $d_2$  doğrusunun denklemleri  $d_2: y = -\frac{4}{3}x + t$  şeklindedir. P noktasının koordinatları  $d_2$  doğrusunun denkleminde yerine yazılırsa  $y = -\frac{4}{3}x + t \Rightarrow 5 = -\frac{4}{3} + t \Rightarrow t = \frac{19}{3}$  olur.  $d_2$  doğrusunun denklemleri  $d_2: y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$  olur.



### Alıştırımlar

- Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.
  - Bir çemberi bir noktada kesen doğruya ..... doğrusu, iki noktada kesen doğruya ..... doğrusu denir.
  - Bir çemberin bir noktasındaki teğet ve normal doğruların eğimleri çarpımı ..... dir.
  - Bir doğru bir çemberi ..... noktada veya ..... noktada kesebilir.
- $3x - 4y + c = 0$  doğrusu, standart denklemleri  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$  olan çembere teğet olduğuna göre, c nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?
- Aşağıda P(5, 0) noktasının üzerinde bulunduğu çemberlerin denklemleri verilmiştir. Buna göre, P noktasından çemberlere çizilen teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.
  - $\|\vec{OX}\| = 5$
  - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 35 = 0$
- Genel denklemleri  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  olan çember ile  $y - x + 4 = 0$  doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.
- Merkezi M(2, -1) noktası ve vektörel denklemleri  $\|\vec{MX}\| = \sqrt{5}$  olan çemberin  $2y + x = 10$  doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

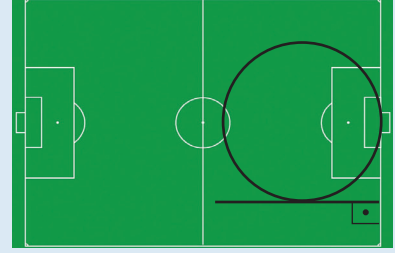


## 4.5. Çemberin Bir Noktasındaki Teğeti ile İlgili Teoremler



Bir futbol sahasında kale direkleri arasında olmamak şartıyla, kale hizasındaki aut çizgisine bir dik çiziliyor. Bu hattan atak yapan futbolcu hangi noktadan kaleyi en büyük açı ile görür?

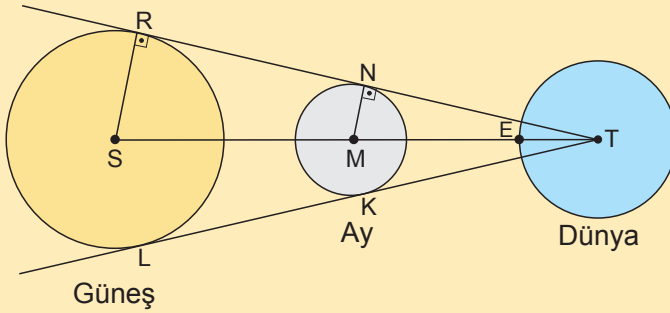
Bu sorunun çözümü için aut çizgisine dik olan doğruya teğet olan ve kalenin direklerinden geçen bir çember çizilmelidir. Teğetin değme noktası, futbolcunun kaleyi en büyük açıyla gördüğü noktadır. Neden? Yorumlayınız.



### Etkinlik

Tam Güneş tutulması Ay'ın, Güneş'in Dünya'dan disk hâlinde görünen ışıkyuvarını tümüyle örtmesi ile oluşur. Güneş'in çok parlak olan ışıkyuvarı Ay'ın karanlık gölgesi ile örtülür ve Güneş'in ışıkyuvarından çok daha soluk olan Güneş tacı (korona) çıplak gözle görülebilir hâle gelir. Tam Güneş tutulmasını, Güneş'in ışıkküresi Ay'ın diski tarafından tam olarak örtüldüğünde, çıplak gözle, dürbünle veya teleskopla doğrudan izlemek güvenlidir. Güneş tacı bu sırada gözlemlenebilir, renkyuvarı ve hatta Güneş püskürtüsü görülebilir.

Tam Güneş tutulması aşağıdaki gibi modellenmiştir.  $|SE| = 148.800.000$  km kabul ederek ve Tablo: 4.5.1'den yararlanarak aşağıdaki adımları uygulayınız:



Gök cismi	Yarıçap (km)
Dünya	6342
Ay	1728
Güneş	691200

Tablo: 4.5.1

1. SRT dik üçgeninden yararlanarak  $|TR|$  nu bulunuz.
2. S noktasından L noktasına çizilen yarıçapın  $|TL|$  ile yaptığı açığı yorumlayarak bir çemberin herhangi bir teğeti ile değme noktasındaki yarıçapının oluşturduğu açının türünü açıklayınız.
3.  $|TL|$  nu bulunuz ve  $|TL|$  ile  $|TR|$  arasındaki ilişkiyi sorgulayınız.
4. SRT ve MNT dik üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak  $|TN|$  nu bulunuz. Benzer yöntemle  $|TK|$  nu bularak  $|TN|$  ile karşılaştırınız.
5. Yaptığınız karşılaştırmalara göre, bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
6. MNT dik üçgeninden yararlanarak  $|MT|$  nu bulunuz.
7.  $|TN|$  ve  $|TK|$  değerlerinden yararlanarak  $|NR|$  ve  $|KL|$  değerlerini bulunuz. Bulduğunuz değerler arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.
8.  $[TS]$  nın RTL açısını hangi oranda böldüğünü sorgulayınız.
9. İki çemberin ortak dış teğet parçaları arasındaki ilişkiyi ve dış teğet parçalarının kesim noktası ile çemberlerin merkezleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

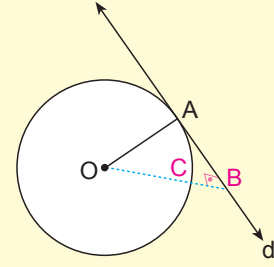


### İnceleyelim

Çemberin herhangi bir teğetinin, değme noktasındaki yarıçapa dik olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember ve bu çembere A noktasında teğet olan d doğrusu

**İstenen:**  $[OA] \perp d$



Teoremi çelişki yöntemi ile ispatlayalım:

$[OA]$  nın d doğrusuna dik olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $[OB] \perp d$  olacak şekilde bir B noktası vardır. Elde edilen OBA dik üçgeninde  $[OA]$  hipotenüs olduğundan  $|OA| > |OB|$  olmalıdır. (★)

Diğer taraftan bütün-parça ilişkisinden  $|OB| = |OC| + |CB|$  dur.  $[OC]$  ve  $[OA]$  yarıçap olduğundan  $|OC| = |OA|$  dur. Bu eşitlik  $|OB| = |OC| + |CB|$  eşitliğinde yerine yazılırsa  $|OB| = |OA| + |CB|$  elde edilir. Buradan  $|OB| > |OA|$  bulunur. (★ ★)

(★) ve (★ ★) eşitlikleri birbiri ile çeliştiğinden kabulümüz yanlıştır. Bundan dolayı  $[OA] \perp d$  dir.

### Örnek

Yandaki şekilde bir dağın zirvesinde ayakta duran bir kişi görülmektedir. Dağın yüksekliği 3 km ve Dünya'nın yarıçapı 6342 km olduğuna göre, bu kişinin ufuk çizgisine baktığında görebileceği en fazla uzaklığı hesaplayalım. (Kişinin boyu ihmal edilecektir.)



### Çözüm

Kişinin ufuk çizgisine baktığında görebileceği en uzak nokta A olsun. Bu durumda görebileceği en fazla uzaklık  $|BA|$  dur.

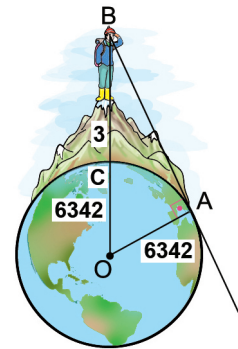
Dünya'nın merkezi O noktası olarak alınırsa bir çemberin teğeti değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan  $[OA] \perp [BA]$  olur.

$[OB]$  çizilerek OAB dik üçgenini oluşturulursa  $|OC| = |OA| = 6342$  km ve dağın yüksekliği olan  $|BC| = 3$  km dir. Kişinin boyu ihmal edildiğinden,  $|OB| = 6342 + 3 \Rightarrow |OB| = 6345$  km elde edilir.

OAB dik üçgende Pisagor teoreminden,

$$\begin{aligned} |OB|^2 &= |OA|^2 + |AB|^2 \Rightarrow 6345^2 = 6342^2 + |AB|^2 \\ \Rightarrow |AB|^2 &= 6345^2 - 6342^2 \quad (\text{iki kare farkı özdeşliğinden}) \\ \Rightarrow |AB|^2 &= (6345 - 6342) \cdot (6345 + 6342) \Rightarrow |AB|^2 = 3 \cdot 12687 \\ \Rightarrow \sqrt{|AB|^2} &= \sqrt{38061} \Rightarrow |AB| \cong 195 \text{ km bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde, kişinin dağın zirvesinden ufuk çizgisine baktığında görebileceği en fazla uzaklık yaklaşık 195 km bulunur.

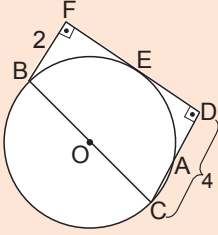




## Uygulama Köşesi

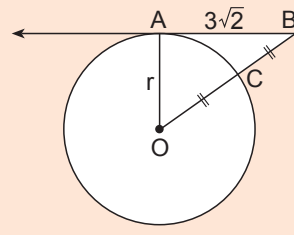
Aşağıdaki şekillerde verilenler yardımıyla çemberlerin yarıçap uzunluklarını bulunuz.

a.



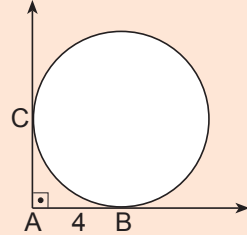
O merkezli çember,  $[FD]$  çembere E noktasında teğet

b.



O merkezli çember,  $[BA]$  çembere A noktasında teğet

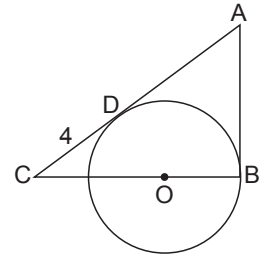
c.



$[AB]$  ve  $[AC]$  çembere sırayla B ve C noktalarında teğet

## Örnek

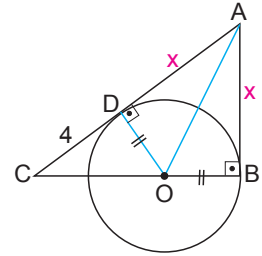
Şekildeki O merkezli çember, ABC üçgenine B ve D noktalarında teğettir.  $|DC| = 4$  br ve  $|BC| = 8$  br olduğuna göre,  $|AB|$  ve  $|AD|$  nu bulalım.



## Çözüm

$[OD]$  yarıçapı çizildiğinde  $|OD| = |OB|$  olur. Çemberin teğeti değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan  $[OD] \perp [AD]$  ve  $[OB] \perp [AB]$  dir.  $[OA]$  nın çizilmesiyle oluşan AOD ve AOB dik üçgenlerinde hipotenüs-dik kenar eşliğinden  $\widehat{AOD} \cong \widehat{AOB}$  dir. Bundan dolayı  $|AD| = |AB|$  olur.

$|AD| = |AB| = x$  br alınarak ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa  $(x + 4)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + 64 \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6$  br elde edilir. Buradan  $|AB| = |AD| = 6$  br bulunur.

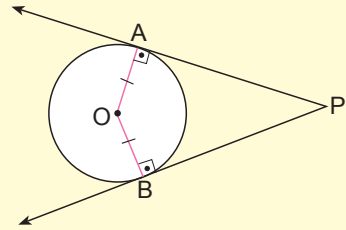


## İnceleyelim

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember ile A ve B noktalarındaki  $[PA]$  ve  $[PB]$  teğetleri

**İstenen:**  $|PA| = |PB|$



### İfadeler

- $|OA| = |OB|$
- $[OA] \perp [PA], [OB] \perp [PB]$
- $\widehat{PAO} \cong \widehat{PBO}$
- $|PA| = |PB|$

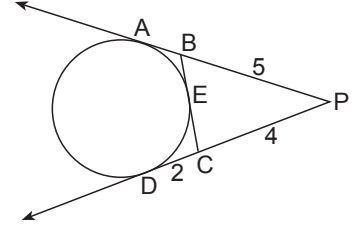
### Gerekçeler

- Çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
- Çemberin herhangi bir teğetinin değme noktasındaki yarıçapa dik olmasından
- Hipotenüs-dik kenar eşliğinden
3. ifadeden



### Örnek

Şekildeki çembere  $[PA]$ ,  $[PD]$  ve  $[BC]$  sırayla A, D ve E noktalarında teğettir.  $|PB| = 5$  br,  $|PC| = 4$  br ve  $|CD| = 2$  br olduğuna göre,  $|BC|$  nu bulalım.



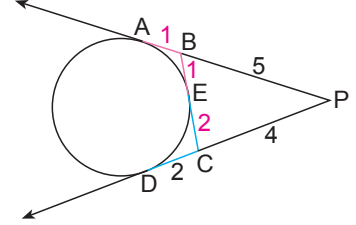
### Çözüm

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olduğundan  $|PA| = |PD|$ ,  $|BE| = |BA|$  ve  $|EC| = |CD|$  dur.

$$|PA| = |PD| \Rightarrow 5 + |BA| = 4 + 2 \Rightarrow |BA| = 1 \text{ br,}$$

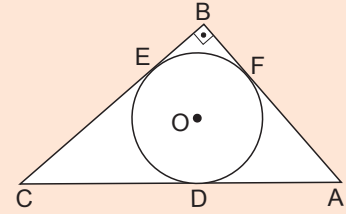
$$|BE| = |BA| \Rightarrow |BE| = 1 \text{ br ve } |EC| = |CD| \Rightarrow |EC| = 2 \text{ br'dir.}$$

$$\text{Buradan } |BC| = |BE| + |EC| = 1 + 2 = 3 \text{ br bulunur.}$$

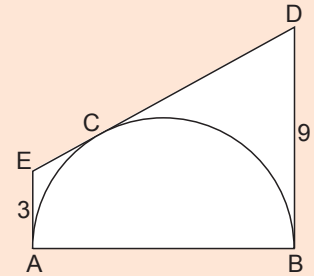


### Uygulama Köşesi

1. Şekildeki O merkezli çember, ABC dik üçgeninin üç kenarına da teğettir.  $[AB] \perp [BC]$ ,  $|AB| = 9$  br ve  $|BC| = 12$  br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.

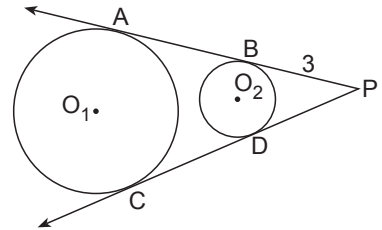


2. Şekildeki  $[AB]$  çaplı yarım çembere  $[AE]$ ,  $[DE]$  ve  $[DB]$  sırayla A, C ve B noktalarında teğettir.  $|AE| = 3$  br ve  $|DB| = 9$  br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



### Örnek

Yandaki şekilde  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlerin A, B, C ve D noktalarındaki  $[PA]$  ve  $[PC]$  teğetleri verilmiştir.  $|PB| = 3$  br ve  $|PC| = 7$  br olduğuna göre,  $|AB|$  ve  $|CD|$  nu bulalım.



### Çözüm

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olduğundan  $|PD| = |PB|$  ve  $|PA| = |PC|$  olmalıdır.

$$|PD| = |PB| \Rightarrow |PD| = 3 \text{ br ve } |PA| = |PC| \Rightarrow 3 + |AB| = 7 \Rightarrow |AB| = 4 \text{ br dir.}$$

$$|PD| + |DC| = |PC| \text{ olduğundan } 3 + |DC| = 7 \Rightarrow |DC| = 4 \text{ br elde edilir.}$$

$$\text{O hâlde } |AB| = |CD| = 4 \text{ br bulunur.}$$



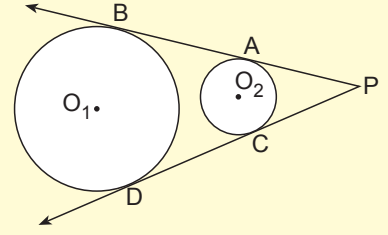


### İnceleyelim

İki çemberin ortak dış teğet parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:**  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlere A ile B ve C ile D noktalarında teğet olan  $[PB]$  ve  $[PD]$  teğetleri

**İstenen:**  $|AB| = |CD|$



#### İfadeler

1.  $|PB| = |PD|$ ,  $|PA| = |PC|$
2.  $|PB| = |PA| + |AB|$   
 $|PD| = |PC| + |CD|$
3.  $|PD| = |PC| + |AB|$   
 $|PD| = |PC| + |CD|$
4.  $|AB| - |CD| = 0$ ,  $|AB| = |CD|$

#### Gerekçeler

1. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının eşit uzunlukta olmasından
2. Bütün-parça ilişkisinden
3. 1. ifadedeki eşitliklerin 2. ifadedeki ilk eşitlikte yerlerine yazılmasından
4. 3. ifadedeki eşitliklerin taraf tarafa çıkarılmasından

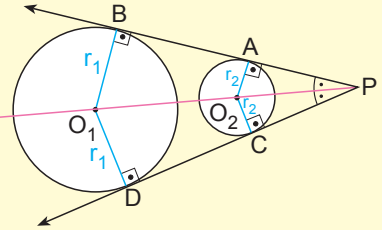


### İnceleyelim

İki çemberin ortak dış teğetlerinin kesim noktası ile merkezlerinin aynı doğru üzerinde olduğunu gösterelim:

**Verilen:**  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlere A ile B ve C ile D noktalarında teğet olan  $[PB]$  ve  $[PD]$  teğetleri

**İstenen:**  $O_1$ ,  $O_2$  ve P noktaları doğrusaldır.



#### İfadeler

1.  $|O_1B| = |O_1D| = r_1$   
 $|O_2A| = |O_2C| = r_2$
2.  $m(\widehat{PAO_2}) = m(\widehat{PCO_2}) = 90^\circ$   
 $m(\widehat{PBO_1}) = m(\widehat{PDO_1}) = 90^\circ$
3.  $|PA| = |PC|$ ,  $|PB| = |PD|$
4.  $m(\widehat{APO_2}) = m(\widehat{CPO_2})$   
 $m(\widehat{BPO_1}) = m(\widehat{DPO_1})$
5.  $O_1$ ,  $O_2$  ve P doğrusal

#### Gerekçeler

1. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
2. Bir çemberin teğetinin değme noktasındaki yarıçapa dik olmasından
3. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunluklarının eşit olmasından
4. Açortay üzerinde alınan bir noktadan, açının kollarına çizilen dikmelerin eşit uzunlukta olmasından
5.  $O_1$ ,  $O_2$  ve P noktalarının  $[PO_1]$  açortay doğrusu üzerinde olmasından



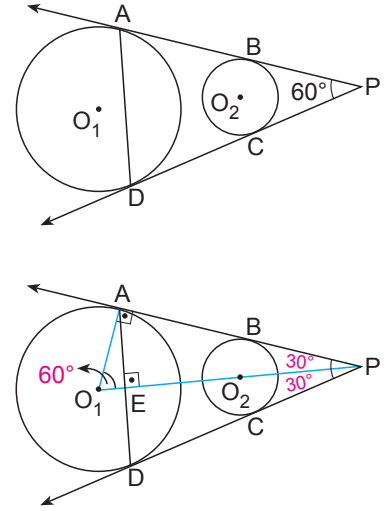
### Örnek

Şekilde  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlerin A ile B ve C ile D noktalarındaki teğetleri verilmiştir.  $m(\widehat{APD}) = 60^\circ$  ve  $|AD| = 4\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $O_1$  merkezli çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

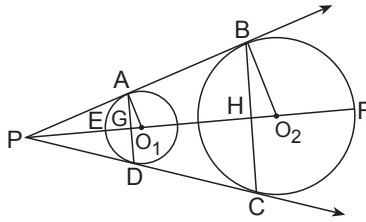
P noktası  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlerin ortak dış teğetlerinin kesim noktası olduğundan P,  $O_1$  ve  $O_2$  noktaları doğrusaldır.  $[PO_1]$  aynı zamanda P açısının açıortayı olduğundan,  $m(\widehat{APO_1}) = m(\widehat{DPO_1}) = 30^\circ$  dir.  $|PA| = |PD|$  olduğundan APD ikizkenar üçgendir.

Bundan dolayı  $[PO_1] \perp [AD]$  ve  $|AE| = |ED| = 2\sqrt{3}$  br dir.  $[O_1A]$  yarıçapı çizildiğinde oluşan  $O_1AE$  dik üçgeninden  $\sin 60^\circ = \frac{|AE|}{|O_1A|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{|O_1A|} \Rightarrow |O_1A| = 4$  br bulunur.



### Alıştırımlar

1.



Şekilde PAD ve PBC üçgenlerine A ve D ile B ve C noktalarında teğet olan  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberler verilmiştir.  $\frac{|O_1A|}{|O_2B|} = \frac{1}{4}$ ,  $|PB| = 16$  br ve  $|O_1O_2| = 15$  br olduğuna göre, aşağıdaki uzunlukları bularak değerlerle doğru olacak şekilde eşleştiriniz.

#### Uzunluklar

1.  $|AP|$

2.  $|AB|$

3.  $|O_1P|$

4.  $|DC|$

5.  $|PE|$

6.  $|PF|$

7.  $|O_1G| + |O_2H|$

#### Değerler

a. 9

b. 4

c. 12

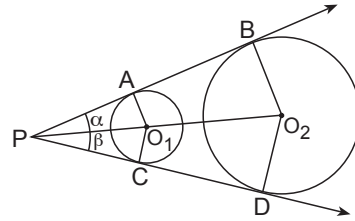
ç. 2

d. 5

e. 32

f. 15

2.



Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlerin A ve C ile B ve D noktalarındaki teğetleri verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki ifadelerin yanlarındaki noktalı yerlere ifade doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

a.  $[O_1A] \perp [PB]$  (....) b.  $[O_1C] \parallel [O_2D]$  (....)

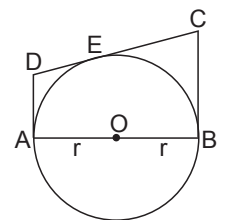
c.  $|PO_2| < |PB|$  (....) ç.  $\alpha = \beta$  (....)

d.  $|PA| \leq |PO_1|$  (....) e.  $O_1 \notin [PO_2]$  (....)

f.  $|O_1A| \cdot |PB| = |O_2B| \cdot |PC|$  (....)

3. Şekildeki O merkezli ve  $[AB]$  çaplı çembere  $[BC]$ ,  $[CD]$  ve  $[DA]$  sırasıyla B, E ve A noktalarında teğettir.

Buna göre,  $r^2$  nin  $|AD|$  ve  $|BC|$  türünden değeri nedir?

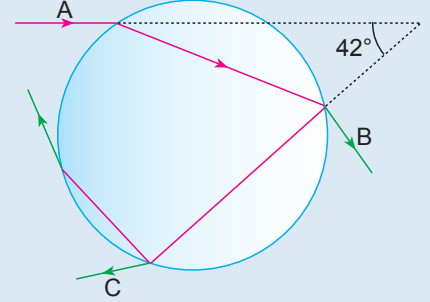




## 4.6. Çemberde Açılar



Gökkuşağı, Güneş'ten gelen ışık ışınlarının küresel su damlacıkları içinde kırılarak birkaç iç yansımadan sonra farklı bir yönde dışarı çıkmasından kaynaklanır. Damlaya kırılarak giren kırmızı ışın (A ışını), damlanın yüzeyine çarptığında bir kısmı dışarı çıkar (B ışını) fakat bir kısmı iç yansımayla damlanın içine geri döner. İçeride kalan ışın, damlanın yüzeyine tekrar çarptığında yine bir kısmı dışarı çıkar (C ışını). Geri kalan kısmı yansır.



Kırmızı ışığın geri dönüş açısı  $42^\circ$  dir. Buna göre, yukarıdaki şekil üzerindeki çembere ait hangi açılar oluşur? Bu açıların gördükleri yaylarla ilişkisini tartışınız.



### Etkinlik

Yanda verilen dairesel bölge şeklindeki bir alan  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  kameraları ile gözlenmektedir. Bu dairesel bölgenin yarısı V, T, N ve L noktaları ile beş eş yaya ayrılmıştır. Dairesel bölgenin merkezi M noktası olmak üzere  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  kameralarının yerleşim planı aşağıdaki gibidir:

►  $\alpha$  kamerası K ve L noktaları arasındaki bölgeyi görecek şekilde M noktasına yerleştiriliyor.

►  $\beta$  kamerası  $\alpha$  kamerası ile aynı bölgeyi görecek şekilde P noktasına yerleştiriliyor.

►  $\gamma$  kamerası K ve V noktaları arasındaki bölgeyi görecek şekilde K noktasına yerleştiriliyor.

Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

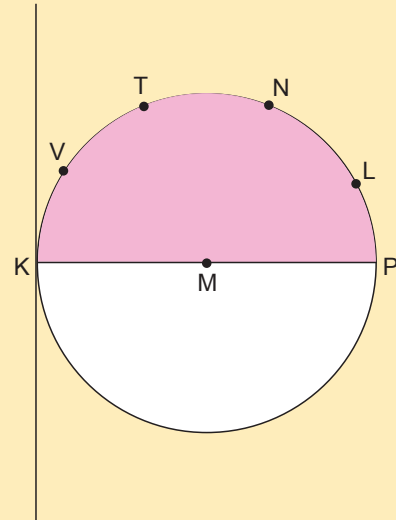
1.  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  kameralarını şekil üzerine yerleştirerek bu kameraların görüş açılarını çizin.
2.  $\alpha$  ve  $\beta$  kameralarının görüş açılarını köşelerinin bulundukları noktalara göre isimlendiriniz.
3. 9. sınıf geometri derslerinizde çemberde açı ile ilgili öğrendiklerinizi göz önünde bulundurarak  $\alpha$  ve  $\beta$  kameralarının görüş açılarının ölçülerini karşılaştırınız.

4.  $\gamma$  kamerasının görüş açısını çemberin hangi elemanları belirler? Bu açıyı nasıl isimlendirirsiniz? Açıklayınız.

5.  $\gamma$  kamerasının görüş açısının sırayla T, N ve L noktalarını görecek şekilde genişletildiğini düşünelim. Bu durumda,  $\gamma$  kamerasının L noktasını gördüğü andaki görüş açısını  $\alpha$  kamerasının görüş açısıyla karşılaştırınız.

6. Bir çemberde çevre ve merkez açıların ölçüleri ile bu açıların gördükleri yayların ölçüleri arasındaki ilişkileri açıklayınız.

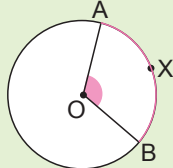
7. Bir teğet ile bir kirişin oluşturduğu açının ölçüsü ile bu açının gördüğü yayın ölçüsü arasındaki ilişkiyi açıklayınız.



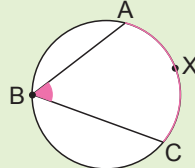




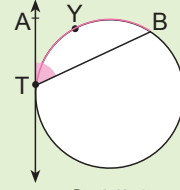
### Bilgi Kutusu



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

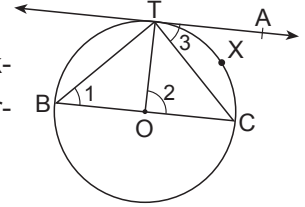
1. Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberi iki noktada kesen bir açıya **merkez aç**ı denir. Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın uzunluğunun, yarıçapa oranına eşittir. Şekil 1'deki çemberin merkezi O noktası olmak üzere,  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AXB})$  dır.

2. Köşesi çember üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya **çevre aç**ı denir. Şekil 2'deki çemberde ABC çevre açısının gördüğü yay  $\widehat{AXC}$  dır.

3. Köşesi çemberin üzerinde olan ve bir teğet ile bir kirişin belirlediği açıya **teğet-kiriş aç**ısı denir. Şekil 3'deki çemberde T noktası TA teğetinin değme noktası olmak üzere, ATB açısı teğet-kiriş açısıdır. Bu açının gördüğü yay  $\widehat{TYB}$  dır.

### Örnek

Yandaki şekilde TA doğrusu O merkezli ve  $[BC]$  çaplı çembere T noktasında teğettir. Buna göre, 1, 2 ve 3 numaralı açıları isimlendirerek gördükleri yayları belirleyelim.

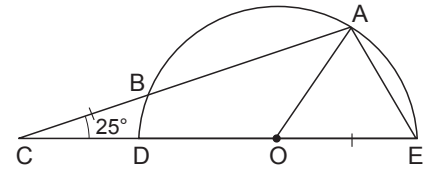


### Çözüm

1 numaralı açının köşesi çemberin üzerinde olduğundan ve kenarları çemberi kestiğinden bu açı çevre açıdır. 2 numaralı açının köşesi çemberin merkezinde olduğundan bu açı merkez açıdır. 3 numaralı açının bir kenarı TA teğeti diğer kenarı  $[TC]$  kirişi olduğundan bu açı teğet-kiriş açıdır. 1, 2 ve 3 numaralı açıları oluşturan ışınlar çember ile T ve C noktalarında kesiştiğinden üç açı da TXC yayını görmektedir.

### Örnek

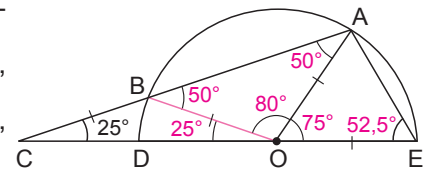
Şekildeki O merkezli yarım çemberde  $m(\widehat{ACE}) = 25^\circ$  ve  $|BC| = |OE|$  dur. Buna göre, AEC açısının ölçüsünü bularak AOD açısının ölçüsü ile karşılaştıralım.



### Çözüm

$[BO]$  yarıçapı çizildiğinde oluşan CBO üçgen ikizkenar olduğundan  $m(\widehat{COB}) = 25^\circ$  dir. COB üçgeninde dış açı özelliğinden,  $m(\widehat{OBA}) = 50^\circ$  olur.  $|OB| = |OA|$  olduğundan  $m(\widehat{BAO}) = 50^\circ$ ,  $m(\widehat{BOA}) = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{AOD}) = 25^\circ + 80^\circ = 105^\circ$  dir.

COA üçgeninde dış açı özelliğinden  $m(\widehat{AOE}) = 25^\circ + 50^\circ = 75^\circ$  dir.  $|OA| = |OE|$  olduğundan AOE ikizkenar üçgendir ve  $m(\widehat{AEO}) = \frac{180^\circ - 75^\circ}{2} = 52,5^\circ$  dir. AEC ve AOD açılarının ölçüleri karşılaştırıldığında  $m(\widehat{AEC}) = \frac{m(\widehat{AOD})}{2}$  olduğu görülür.







### İnceleyelim

Bir çevre açının ölçüsünün, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşit olduğunu gösterelim:

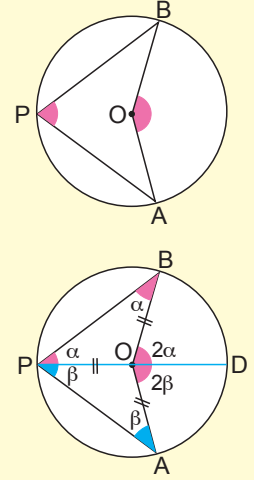
**Verilen:** O merkezli çember ile BOA merkez açısı ve BPA çevre açısı

**İstenen:**  $m(\widehat{BPA}) = \frac{m(\widehat{BOA})}{2}$

Şekildeki çemberin [PD] çapı çizildiğinde [OP], [OB] ve [OA] yarıçap olduğundan POB ve POA üçgenleri ikizkenardır. Bu ikizkenar üçgenlerin taban açılarını  $m(\widehat{OPB}) = m(\widehat{OBP}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{OPA}) = m(\widehat{OAP}) = \beta$  olarak alınırsa dış açı özelliğinden  $m(\widehat{BOD}) = 2\alpha$  ve  $m(\widehat{AOD}) = 2\beta$  olur.

Açı toplama özelliğinden  $m(\widehat{BPA}) = \alpha + \beta$  (★) ve  $m(\widehat{BOA}) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$  (★★) eşitlikleri elde edilir. (★) eşitliğinin (★★) eşitliğinde yerine yazılması ve düzenlenmesiyle

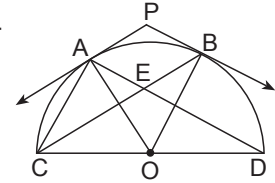
$$m(\widehat{BOA}) = 2(\alpha + \beta) \Rightarrow m(\widehat{BOA}) = 2m(\widehat{BPA}) \Rightarrow m(\widehat{BPA}) = \frac{m(\widehat{BOA})}{2} \text{ bulunur.}$$



### Örnek

Yandaki şekilde O merkezli [CD] çaplı yarım çember yayı ile bu çembere A ve B noktalarında teğet olan [PA] ve [PB] teğetleri verilmiştir.

$[BC] \cap [AD] = \{E\}$ ,  $|CD| = 2 \text{ br}$  ve  $m(\widehat{CED}) = 2m(\widehat{AOB})$  olduğuna göre, P ve O noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

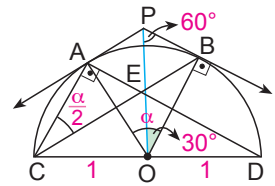


### Çözüm

$m(\widehat{CED}) = 2m(\widehat{AOB})$  olduğundan  $m(\widehat{AOB}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{CED}) = 2\alpha$  olsun. AOB merkez açısı ile ACB çevre açısı aynı yayı gördüklerinden  $m(\widehat{ACB}) = \frac{\alpha}{2}$  olur. CAD çevre açısı yarım çember yayını gördüğünden  $m(\widehat{CAD}) = 90^\circ$  dir. ACE üçgeninde dış açı özelliğinden  $90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$  bulunur.  $|CD| = 2 \text{ br}$  verildiğinden  $|CO| = |OB| = |OA| = |OD| = 1 \text{ br}$  dir.

Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet özelliklerinden  $|PA| = |PB|$  ve  $[OB] \perp [PB]$  dir. PAOB deltoid olduğundan [PO] çizilirse  $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{POB}) = 30^\circ$  olur.

$$\text{PBO dik üçgeninden, } \cos 30^\circ = \frac{|OB|}{|OP|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{|OP|} \Rightarrow |OP| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ br bulunur.}$$



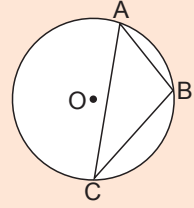
### Uyarı

Çapı gören çevre açısı  $90^\circ$  dir.



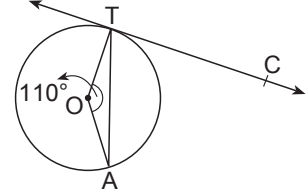
### Uygulama Köşesi

Yandaki şekilde ABC üçgeninin çevrel çemberi verilmiştir.  $|AB|$ , çemberin yarıçap uzunluğuna eşit olduğuna göre, ACB açısının ölçüsünü bulunuz.



### Örnek

Şekildeki TC doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğettir.  $m(\widehat{AOT}) = 110^\circ$  olduğuna göre, ATC açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

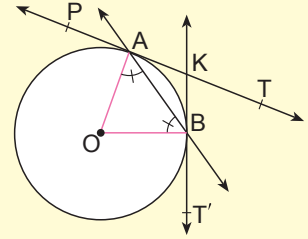
$[OT]$  ve  $[OA]$  yarıçaplar olduğundan AOT ikizkenar üçgendir.  $m(\widehat{OAT}) = m(\widehat{OTA}) = \alpha$  olarak alırsak AOT üçgeninin iç açılarının ölçülerinin toplamından  $110^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$  bulunur. Çemberin teğeti değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan  $m(\widehat{OTC}) = 90^\circ$  dir. Buradan  $m(\widehat{OTC}) = m(\widehat{OTA}) + m(\widehat{ATC}) \Rightarrow 90^\circ = 35^\circ + m(\widehat{ATC}) \Rightarrow m(\widehat{ATC}) = 55^\circ$  bulunur.

### İnceleyelim

Bir teğet-kiriş açısının ölçüsünün, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember,  $\widehat{BAK}$  teğet-kiriş açısı,  $\widehat{AOB}$  merkez açısı

**İstenen:**  $m(\widehat{BAK}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2}$



#### İfadeler

- $|OA| = |OB|$
- $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA})$
- $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{OBA}) = 180^\circ$   
 $m(\widehat{AOB}) + 2m(\widehat{OAB}) = 180^\circ$
- $m(\widehat{OAB}) = 90^\circ - \frac{m(\widehat{AOB})}{2}$
- $m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{BAK}) = 90^\circ$   
 $m(\widehat{BAK}) = 90^\circ - m(\widehat{OAB})$
- $m(\widehat{BAK}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2}$

#### Gerekçeler

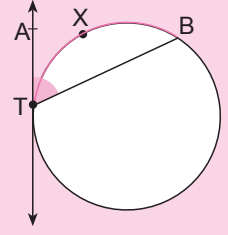
- Çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
1. ifadeden ve AOB üçgeninin ikizkenar olmasından
- AOB üçgeninin iç açıları ölçüleri toplamından ve 2. ifadeden
3. ifadedeki eşitlikte  $m(\widehat{OAB})$  nün yalnız bırakılmasından
- Bir çemberin teğetinin değme noktasındaki yarıçapa dik olmasından ve  $m(\widehat{BAK})$  nün yalnız bırakılmasından
4. ifadedeki eşitliğin 5. ifadedeki 2. eşitlikte yerine yazılmasından





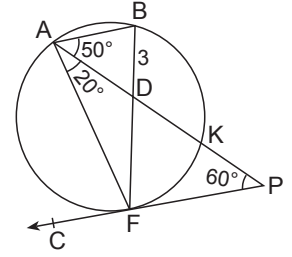
### Uyarı

Teğet-kiriş açısının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.  
O hâlde  $m(\widehat{ATB}) = \frac{m(\widehat{TXB})}{2}$  dir.



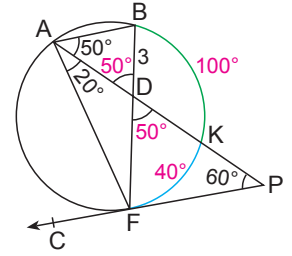
### Örnek

Şekildeki çembere  $[PC, F$  noktasında teğet ve  $[PA] \cap [BF] = \{D\}$ ,  $m(\widehat{FAP}) = 20^\circ$ ,  $m(\widehat{PAB}) = 50^\circ$ ,  $m(\widehat{APF}) = 60^\circ$  ve  $|BD| = 3$  br olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



### Çözüm

Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olduğundan,  $m(\widehat{FK}) = 20^\circ \cdot 2 = 40^\circ$ ,  $m(\widehat{KB}) = 50^\circ \cdot 2 = 100^\circ$  ve  $m(\widehat{FKB}) = 140^\circ$  teğet kiriş açısının gördüğü yayının ölçüsünün yarısı olduğundan,  $m(\widehat{BFP}) = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$  dir.



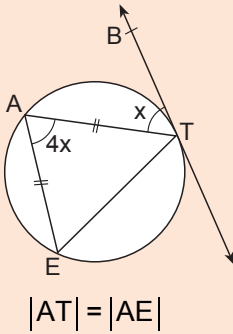
DFP üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından  $m(\widehat{FDP}) + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FDP}) = 50^\circ$  bulunur. Ters açı özelliğinden  $m(\widehat{ADB}) = 50^\circ$  olur.

Bundan dolayı ABD ikizkenar üçgendir ve  $|AB| = |BD| = 3$  br bulunur.

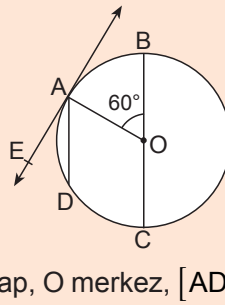
### Uygulama Köşesi

1. Aşağıdaki çemberlerde bazı açılarının ölçüleri üzerlerine yazılmıştır. Buna göre,  $\widehat{ATB}$ ,  $\widehat{EAD}$  ve  $\widehat{GML}$  açılarının ölçülerini bulunuz.

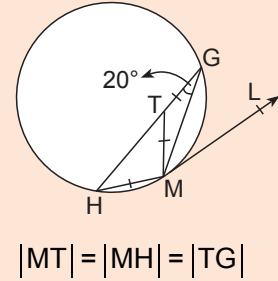
a.



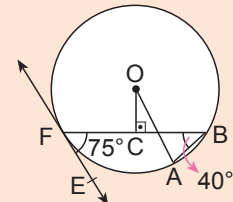
b.



c.



2. Şekildeki O merkezli çembere, FE doğrusu F noktasında teğettir.  $[OC] \perp [FB]$ ,  $m(\widehat{BFE}) = 75^\circ$  ve  $m(\widehat{FBA}) = 40^\circ$  olduğuna göre, COA açısının ölçüsünü bulunuz.

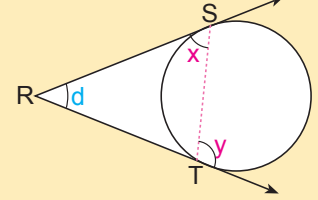
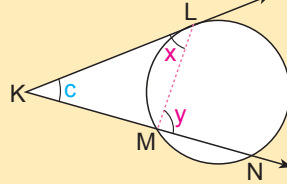
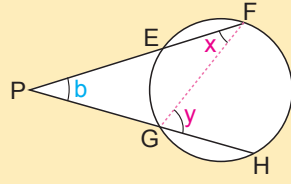
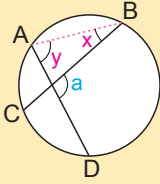






## Etkinlik

1. Aşağıdaki çemberlerde teğet, kesen ve kirislerin oluşturduğu bazı açılar verilmiştir. Bu açılardan a, b, c ve d nin gördüğü yayları belirleyiniz.



2. a, b, c ve d açılarını bulundukları çemberlerdeki x ve y açıları türünden ifade ediniz.

3. Etkinliğin 2. adımında bulduğunuz ifadeleri x ve y açılarının gördüğü yaylarla ilişkilendirerek a, b, c ve d açılarını gördükleri yaylar türünden yazınız.

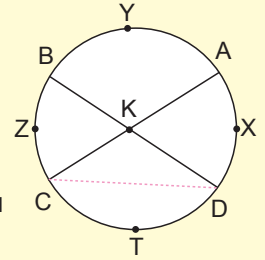
4. A açısının köşesinin, çemberin merkezinde olduğunu kabul ederek bu açının gördüğü yayların ölçüleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

5. Yaptığınız işlemleri göz önünde bulundurarak köşesi çemberin içinde veya dışında olan açılarının ölçülerinin gördükleri yayların ölçüleri ile ilişkisini sözel biçimde ifade ediniz.



## İnceleyelim

Köşe noktası çemberin içerisinde olan bir açının ölçüsünün, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşit olduğunu gösterelim:



**Verilen:**  $[AC] \cap [BD] = \{K\}$  ve  $\widehat{AKD}$  köşesi çemberin içerisinde olan açı

**İstenen:**  $m(\widehat{AKD}) = \frac{m(\widehat{BZC}) + m(\widehat{AXD})}{2}$

$\widehat{BZC}$  ve  $\widehat{AXD}$  yayları

Verilen

$$m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{KDC}) + m(\widehat{KCD})$$

Yardımcı ek çizimden ve AKD açısının KCD üçgeninin dış açısı olmasından

$$m(\widehat{KCD}) = \frac{m(\widehat{AXD})}{2},$$

$$m(\widehat{KDC}) = \frac{m(\widehat{BZC})}{2}$$

Çevre açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olmasından

$$m(\widehat{AKD}) = \frac{m(\widehat{BZC})}{2} + \frac{m(\widehat{AXD})}{2}$$

Yerine koyma yönteminden

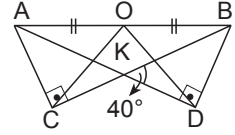
$$m(\widehat{AKD}) = \frac{m(\widehat{BZC}) + m(\widehat{AXD})}{2}$$

Toplama işleminin özelliğinden



### Örnek

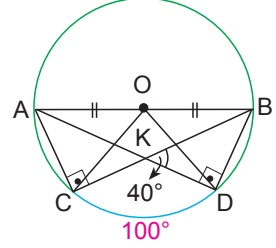
Yandaki şekilde ACB ve ADB dik üçgenler,  $|AO| = |OB|$  ve  $m(\widehat{BKD}) = 40^\circ$  olduğuna göre, COD açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

ADB ve ACB dik üçgenlerinin hipotenüsleri ortak olduğundan  $[AB]$  çaplı, O merkezli, C ve D noktalarından geçen bir çember çizelim. Bu durumda BKD iç açı olduğundan  $40^\circ = \frac{m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AC}) = 80^\circ$  dir. elde edilir. ACB yayı yarım çember yayı olduğundan,

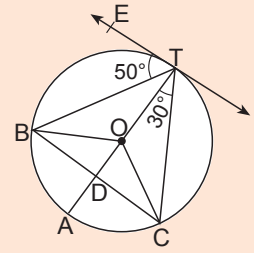
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{BD}) \Rightarrow 180^\circ = 80^\circ + m(\widehat{CD}) \Rightarrow m(\widehat{CD}) = 100^\circ$  olur. COD merkez açı olduğundan  $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{CD}) = 100^\circ$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Şekildeki TE doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğettir.  $m(\widehat{CTA}) = 30^\circ$ ,  $m(\widehat{BTE}) = 50^\circ$  ve B, D, C noktaları doğrusal olduğuna göre, aşağıdaki açılarının ölçülerini bulunuz.

- $\widehat{OTB}$     ►  $\widehat{AOC}$     ►  $\widehat{ADB}$     ►  $\widehat{BCO}$



### İnceleyelim

Bir çemberde iki küçük yayın eş olması için gerek ve yeter koşulun bu yayların merkez açıların eş olması gerektiğini gösterelim:

Verilen özellikte “gerek ve yeter koşul” ifadesi olduğundan ispatı iki durumda inceleyerek yapalım:

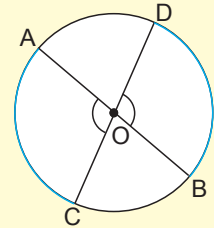
**I. durum:** Bir çemberde iki küçük yay eş ise bu yayların merkez açıları eştir.

Şekildeki O merkezli  $[AB]$  ve  $[DC]$  çaplı çemberde  $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$  olsun. Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC})$  ve  $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{BD})$  dür.

Bundan dolayı  $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD}) \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD})$  bulunur.

**II. durum:** Bir çemberde merkez açıların ölçüleri eş olan iki küçük yay eştir.

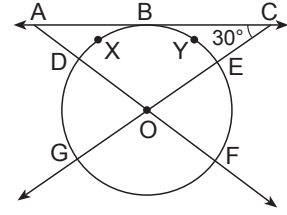
Şekildeki O merkezli  $[AB]$  ve  $[DC]$  çaplı çemberde ters açı özelliğinden  $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{AOC})$  elde edilir. Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC})$  ve  $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{BD})$  dür. Bundan dolayı  $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{AOC}) \Rightarrow m(\widehat{BD}) = m(\widehat{AC})$  bulunur.





### Örnek

Yandaki şekilde AC doğrusu O merkezli çembere B noktasında teğettir.  $[CG] \cap [AF] = \{O\}$ ,  $m(\widehat{OCA}) = 30^\circ$ ,  $\widehat{DXB}$  ve  $\widehat{BYE}$  eş yaylar olduğuna göre, FAB açısının ölçüsünü bulalım.

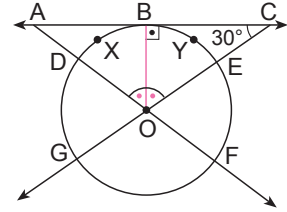


### Çözüm

Çemberin teğeti değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan,  $[OB] \perp AC$  olur.

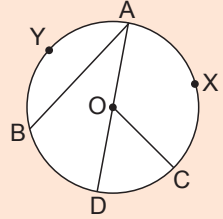
$\widehat{DXB}$  ve  $\widehat{BYE}$  eş yaylarının merkez açıları da eş olduğundan,  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COB})$  dır.

AOC üçgeninde  $[OB]$ , yükseklik ve açıortay olduğundan AOC ikiz-kenar üçgendir. Buradan  $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 30^\circ$  bulunur.



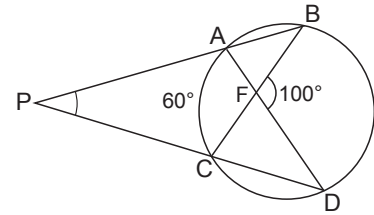
### Uygulama Köşesi

Şekildeki O merkezli  $[AD]$  çaplı çemberde,  $m(\widehat{AYB}) = m(\widehat{AXC}) = 100^\circ$  olduğuna göre, BAD açısının ölçüsünü bulunuz.



### Örnek

Şekildeki çemberde  $[BC] \cap [AD] = \{F\}$ ,  $m(\widehat{BFD}) = 100^\circ$  ve  $m(\widehat{AC}) = 60^\circ$  olduğuna göre, BPD açısının ölçüsünü bulalım.



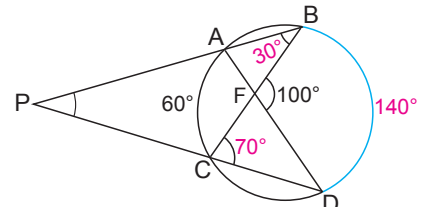
### Çözüm

BFD çemberin iç açısı olduğundan,

$$\begin{aligned} m(\widehat{BFD}) &= \frac{60^\circ + m(\widehat{BD})}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{60^\circ + m(\widehat{BD})}{2} \\ &\Rightarrow m(\widehat{BD}) + 60^\circ = 200^\circ \\ &\Rightarrow m(\widehat{BD}) = 140^\circ \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\widehat{ABC}$  ve  $\widehat{BCD}$  çevre açılar olduğundan  $m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$  ve

$m(\widehat{BCD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$  elde edilir.  $m(\widehat{BPD}) = x$  olarak alınırsa PBC üçgeninde dış açı özelliğinden  $x + 30^\circ = 70^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$  bulunur. O hâlde,  $m(\widehat{BPD}) = x = 40^\circ$  dir.





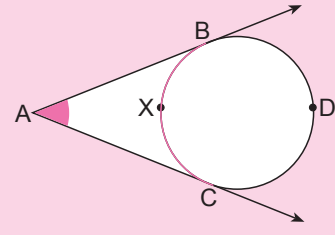






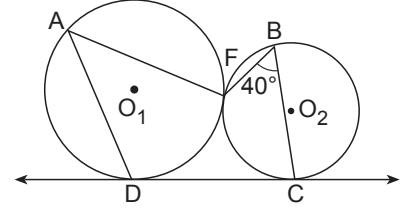
### Uyarı

Şekildeki çemberin C ve B noktalarındaki teğetleri sırayla [AC ve [AB olsun.  $m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{BXC}) = 360^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BDC}) - m(\widehat{BXC})}{2}$  olduğundan,  $m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{BXC}) = 180^\circ$  dir.



### Örnek

Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlere [DC], D ve C noktalarında teğettir.  $m(\widehat{FBC}) = 40^\circ$  ve bu iki çember F noktasında birbirlerine teğet olduklarına göre, DAF açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

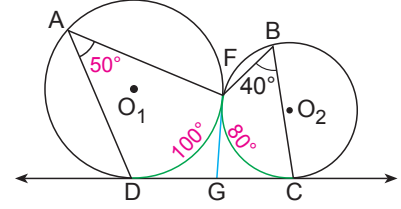
$O_2$  merkezli çemberde FBC çevre açısı olduğundan,  $m(\widehat{FBC}) = \frac{m(\widehat{FC})}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{m(\widehat{FC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{FC}) = 80^\circ$  dir.

Çemberlerin F noktasındaki teğeti çizildiğinde oluşan FGC açısının kenarları  $O_2$  merkezli çembere teğet

olduğundan  $m(\widehat{FGC}) + m(\widehat{FC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FGC}) + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FGC}) = 100^\circ$  olur.

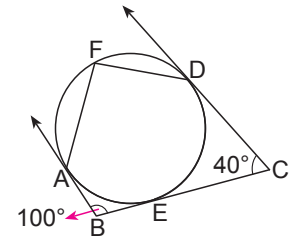
Bütünler açılardan  $m(\widehat{FGD}) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$  dir. FGD açısının kenarları  $O_1$  merkezli çembere teğet olduğundan  $m(\widehat{FGD}) + m(\widehat{FD}) = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + m(\widehat{FD}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{FD}) = 100^\circ$  dir.

$O_1$  merkezli çemberde DAF çevre açısı olduğundan  $m(\widehat{DAF}) = \frac{m(\widehat{DF})}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$  bulunur.



### Örnek

Şekildeki çembere [BA, [CD ve [BC] sırayla A, D ve E noktalarında teğettir.  $m(\widehat{ABE}) = 100^\circ$  ve  $m(\widehat{DCE}) = 40^\circ$  olduğuna göre, AFD açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

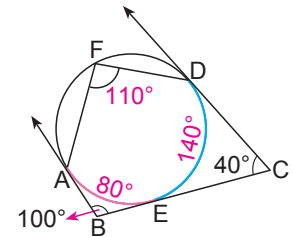
[BA ile [BC] çembere teğet olduğundan,

$m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{AE}) = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + m(\widehat{AE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AE}) = 80^\circ$  dir.

[CD ile [CB] çembere teğet olduğundan,

$m(\widehat{DCE}) + m(\widehat{DE}) = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + m(\widehat{DE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{DE}) = 140^\circ$  dir.

Buradan  $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{AE}) + m(\widehat{ED}) \Rightarrow m(\widehat{AED}) = 80^\circ + 140^\circ = 220^\circ$  olur. AFD çevre açısı olduğundan  $m(\widehat{AFD}) = \frac{m(\widehat{AED})}{2} \Rightarrow m(\widehat{AFD}) = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$  bulunur.

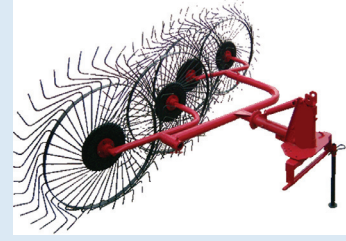








## 4.7. Denklemleri Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Konumları

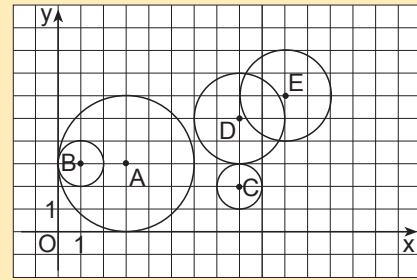
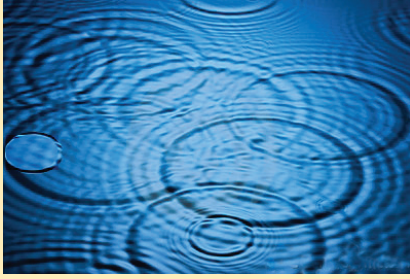


Yukarıdaki resimlerde bulunan çemberlerin ortak noktalarını belirleyiniz. Belirlediğiniz ortak noktaların sayısını göz önünde bulundurarak iki çemberin birbirine göre hangi konumlarda olabileceğini tartışınız.



### Etkinlik

Aşağıdaki resimde bir cismin su yüzeyinde oluşturduğu çember şeklindeki dalgalar görülmektedir. Dalgaların oluşturduğu bazı çemberler analitik düzlemde aşağıdaki gibi modellenerek merkezleri A, B, C, D ve E şeklinde adlandırılmıştır. Bu modellemeye göre aşağıdaki adımları uygulayınız:



1. Analitik düzlemde yararlanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Merkezi	Merkezinin koordinatları	Yarıçapının uzunluğu	Standart denklemi
A			
B			
C			
D			
E			

Tablo: 4.7.1

2. A ve D merkezli çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığı bulunuz. Bulduğunuz değer, çemberlerin yarıçap uzunlukları ile nasıl bir ilişkisi vardır? Bu ilişkiyi, çemberlerin grafiklerini göz önünde bulundurarak açıklayınız.

3. Etkinliğin 2. adımını C ile D, A ile B ve D ile E merkezli çemberler için uygulayınız.

4. Uyguladığınız adımlara göre iki çemberin kesişmemesi, iki noktada kesişmesi veya teğet olması için hangi uzunlukları karşılaştırılmalıdır? Tartışınız.

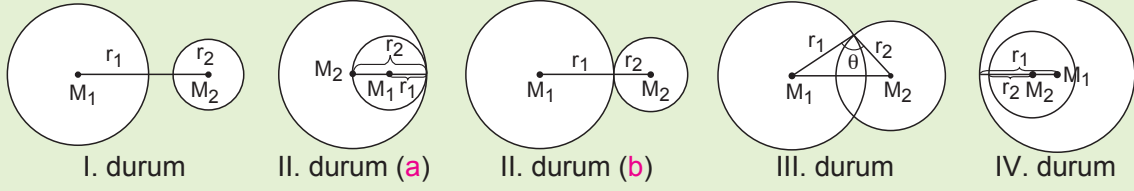
5. Denklemleri verilen iki çemberin birbirine göre konumunu belirlemek için nasıl bir yöntem izlenebileceğini açıklayınız.





### Bilgi Kutusu

Aynı düzlemde bulunan iki çemberin birbirine göre konumları, yarıçap uzunluklarına ve merkezler arasındaki uzaklığa bağlı olarak aşağıdaki durumlarda incelenir.



**I. durum:**  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| > r_1 + r_2$  ise çemberler ayrıktır.

**II. durum:**  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 + r_2$  veya  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 - r_2$  ise bir noktaları ortaktır.

**a.**  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 - r_2$  ise çemberler içten teğettir.

**b.**  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 + r_2$  ise çemberler dıştan teğettir.

**III. durum:** Çemberlerin  $\theta$  açısı altında iki noktaları ortak ise  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta$  dir.

**IV. durum:** Çemberler kesişmiyor ise,  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| < r_2 < r_1$  veya  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| < r_1 - r_2$  dir.

### Örnek

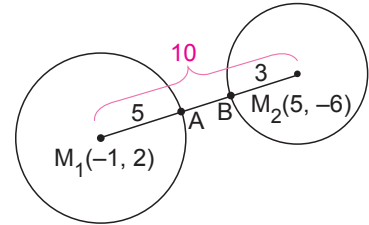
Standart denklemleri  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$  ve  $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 9$  olan çemberlerin birbirine göre konumunu belirleyelim ve bu çemberlerin en yakın iki noktası arasındaki uzaklığı bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(-1, 2)$  ve  $M_2(5, -6)$  noktaları yarıçapları ise  $r_1 = 5$  br ve  $r_2 = 3$  br dir. Buradan

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ br ve}$$

$r_1 + r_2 = 5 + 3 = 8$  br dir.  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| > r_1 + r_2$  olduğundan bu iki çember ayrıktır.



Bu çemberlerin birbirine en yakın iki noktası merkezlerini birleştiren doğru üzerindeki A ve B noktalarıdır. Bundan dolayı  $|AB| = 10 - (5 + 3) = 2$  br bulunur.

### Örnek

Standart denklemleri  $(x - 5)^2 + (y + k)^2 = 100$  ve  $(x + 2)^2 + (y - 13)^2 = 225$  olan çemberler dıştan teğet olduğuna göre, k gerçekte sayılarını bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(5, -k)$  ve  $M_2(-2, 13)$  noktaları yarıçapları ise  $r_1 = 10$  br ve  $r_2 = 15$  br dir. Bu iki çember dıştan teğet olduğuna göre,  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 + r_2$  olmalıdır.

$$\begin{aligned} \text{Buradan } \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 + r_2 &\Rightarrow \sqrt{(-2 - 5)^2 + (13 + k)^2} = 10 + 15 \Rightarrow (\sqrt{49 + (13 + k)^2})^2 = (25)^2 \\ &\Rightarrow 49 + (13 + k)^2 = 625 \Rightarrow \sqrt{(13 + k)^2} = \sqrt{576} \Rightarrow |13 + k| = 24 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Mutlak değer özelliğinden  $13 + k = 24 \Rightarrow k = 11$  ve  $13 + k = -24 \Rightarrow k = -37$  bulunur.



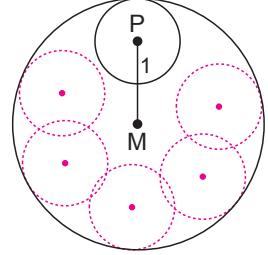
### Örnek

$M(1, -2)$  noktası için vektörel denklemi  $\|\vec{MP}\| = 3$  olan çembere içten teğet olan 1 br yarıçaplı çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberin merkezi  $M(1, -2)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 3$  br dir. Bu çembere içten teğet olan 1 br yarıçaplı çemberlerin merkezlerinin geometrik yerine ait herhangi bir nokta  $P(x, y)$  olmak üzere,  $\|\vec{MP}\| = r_1 - r_2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$  tür.

Geometrik yere ait bu denklem merkezi  $A(1, -2)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu 2 br olan bir çember belirtir.



### Örnek

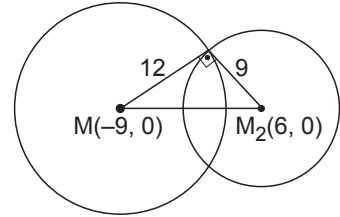
Standart denklemleri  $(x+9)^2 + y^2 = 144$  ve  $(x-6)^2 + y^2 = r^2$  olan iki çemberin  $90^\circ$  altında iki noktaları ortak olduğuna göre,  $r$  değerini bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(-9, 0)$  ve  $M_2(6, 0)$  noktaları yarıçapları ise  $r_1 = 12$  br ve  $r_2 = r$  br dir. Bu iki çemberin  $90^\circ$  altında iki noktaları ortak ise,

$$\|\vec{M_1M_2}\|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos 90^\circ \text{ olmalıdır.}$$

$$\begin{aligned} \text{Buradan } \|\vec{M_1M_2}\|^2 &= r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow (\sqrt{(6-(-9))^2 + 0^2})^2 = 12^2 + r^2 \\ &\Rightarrow 225 = 144 + r^2 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9 \text{ br bulunur.} \end{aligned}$$



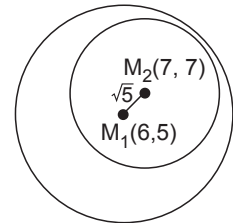
### Örnek

Standart denklemleri  $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 49$  ve  $(x-7)^2 + (y-7)^2 = 9$  olan çemberlerin birbirine göre konumunu belirleyelim.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(6, 5)$  ve  $M_2(7, 7)$  noktaları yarıçapları ise  $r_1 = 7$  br ve  $r_2 = 3$  br dir. Buradan  $\|\vec{M_1M_2}\| = \sqrt{(7-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{5}$  br elde edilir.

$$\sqrt{5} < 3 < 7 \Rightarrow \|\vec{M_1M_2}\| < r_2 < r_1 \text{ olduğundan bu iki çember kesişmez.}$$



### Uygulama Köşesi

$M_1$  merkezli ve  $r_1 = 3$  br yarıçaplı çember ile  $M_2$  merkezli ve  $r_2$  yarıçaplı çemberler için  $\|\vec{M_1M_2}\| = 5$  br ise aşağıdaki her bir şartı sağlayan  $r_2$  değerlerini bulunuz.

- Çemberler ayrıktır.      ► Çemberler dıştan teğettir.      ► Çemberler içten teğettir.
- Çemberler kesişmez.      ► Çemberlerin  $90^\circ$  altında iki noktaları ortaktır.

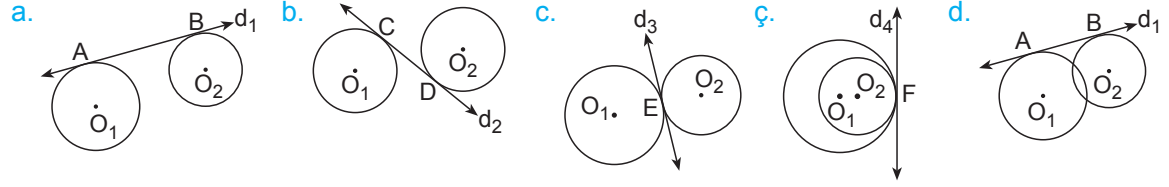


## Örnek

İki çembere teğet olan doğruları gösterelim.

## Çözüm

Aşağıda iki çemberin konumlarına göre, çembere teğet olan doğrular çizilmiştir. İnceleyiniz.

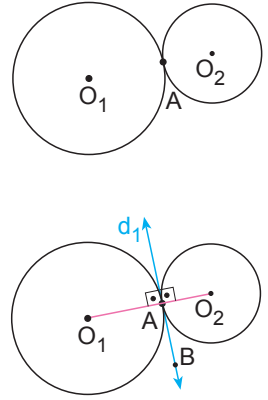


## Örnek

Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberler A noktasında dıştan teğet olduğuna göre, çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru parçasının A noktasından geçtiğini gösterelim.

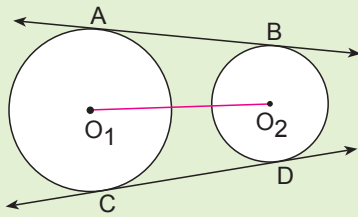
## Çözüm

Çemberlerin A noktasındaki teğeti  $d_1$  doğrusu olsun. Bir çemberin teğeti değme noktasında yarıçapa dik olduğundan  $[O_1A] \perp d_1$  ve  $[O_2A] \perp d_1$  dir.  $m(\widehat{O_1AB}) + m(\widehat{O_2AB}) = 180^\circ$  ve A ortak köşe olduğundan bu açılar komşu bütünlerdir. O hâlde,  $O_1$ , A ve  $O_2$  doğrusal noktaldır.

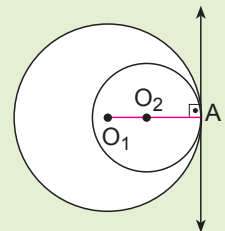


## Bilgi Kutusu

- İki çembere teğet olan doğruya bu iki çemberin **ortak teğeti** denir.
- Çemberlerin merkezleri ortak teğetin aynı tarafında ise ortak teğet, **ortak dış teğet** adını alır. Şekil 1 ve Şekil 2'deki doğrular çemberlerin ortak dış teğetleridir. Şekil 1'de,  $|AB|$  ve  $|CD|$  ortak dış teğet parçalarının uzunluklarıdır.

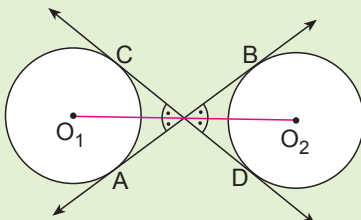


Şekil 1

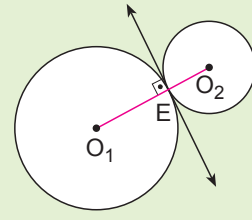


Şekil 2

- Çemberlerin merkezleri ortak teğetin zıt taraflarında ise ortak teğet, **ortak iç teğet** adını alır. Şekil 3 ve Şekil 4'deki doğrular çemberlerin ortak iç teğetleridir. Şekil 3'te,  $|AB|$  ve  $|CD|$  ortak iç teğet parçalarının uzunluklarıdır.



Şekil 3



Şekil 4



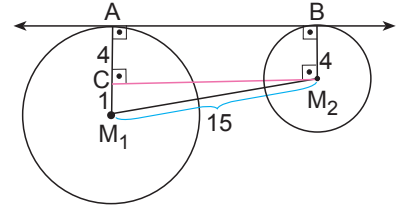
### Örnek

Standart denklemleri  $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 25$  ve  $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$  olan çemberlerin birbirine göre konumunu belirleyerek bu iki çemberin ortak dış teğet parçasının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(-6, -6)$  ve  $M_2(3, 6)$  noktaları ve yarıçapları  $r_1 = 5$  br ve  $r_2 = 4$  br dir.

Buradan  $\|M_1M_2\| = \sqrt{(-6-3)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{225} = 15$  br ve  $r_1 + r_2 = 5 + 4 = 9$  br bulunur.  $\|M_1M_2\| > r_1 + r_2$  olduğundan bu iki çember ayrıktır.



Çemberlerin yarıçapları ve ortak dış teğeti şekildeki gibi çizilerek  $M_2CAB$  dikdörtgeni oluşturulduğunda  $|M_2B| = |AC| = 4$  br ve  $|M_1C| = |M_1A| - |AC| = 5 - 4 = 1$  br olur.  $M_1M_2C$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden,  $15^2 = 1^2 + |M_2C|^2 \Rightarrow |M_2C|^2 = 224 \Rightarrow |M_2C| = 4\sqrt{14}$  br elde edilir.  $M_2CAB$  dikdörtgen olduğundan çemberlerin ortak dış teğet parçasının uzunluğu  $|AB| = |M_2C| = 4\sqrt{14}$  br bulunur.

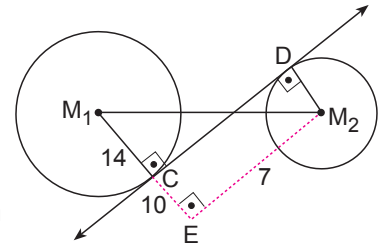
### Örnek

Standart denklemleri  $(x + 1)^2 + (y - 12)^2 = 196$  ve  $(x - 6)^2 + (y + 12)^2 = 100$  olan çemberlerin ortak iç teğet parçasının uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

Verilen çemberlerin merkezleri  $M_1(-1, 12)$  ve  $M_2(6, -12)$  noktaları ve yarıçapları  $r_1 = 14$  br ve  $r_2 = 10$  br dir.

Buradan  $\|M_1M_2\| = \sqrt{(6-(-1))^2 + (-12-12)^2} = \sqrt{625} = 25$  br ve  $r_1 + r_2 = 14 + 10 = 24$  br bulunur.  $\|M_1M_2\| > r_1 + r_2$  olduğundan bu iki çember ayrıktır.

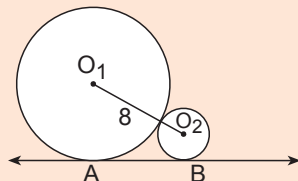


Bu çemberlerin yarıçapları ve ortak iç teğeti şekildeki gibi çizilerek  $M_2ECD$  dikdörtgeni oluşturulduğunda  $|EC| = 10$  br ve  $|M_1E| = |M_1C| + |EC| = 14 + 10 = 24$  br olur.  $M_1EM_2$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden,  $25^2 = 24^2 + |M_2E|^2 \Rightarrow |M_2E|^2 = 49 \Rightarrow |M_2E| = 7$  br elde edilir.  $M_2ECD$  dikdörtgen olduğundan çemberlerin ortak iç teğet parçasının uzunluğu  $|CD| = |M_2E| = 7$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

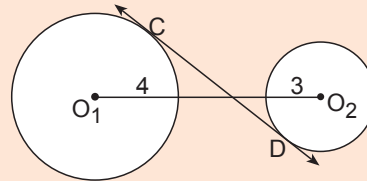
Aşağıda merkezlerinin koordinatları ve yarıçaplarının uzunlukları verilen çemberlerin altlarında yazan uzunluklarını bulunuz.

a.



$O_1(3, -1)$  ve  $O_2(-3, 7)$  ise  $|AB| = ?$

b.



$O_1(-10, 4)$  ve  $O_2(10, -11)$  ise  $|CD| = ?$





## Alıştırımlar

1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

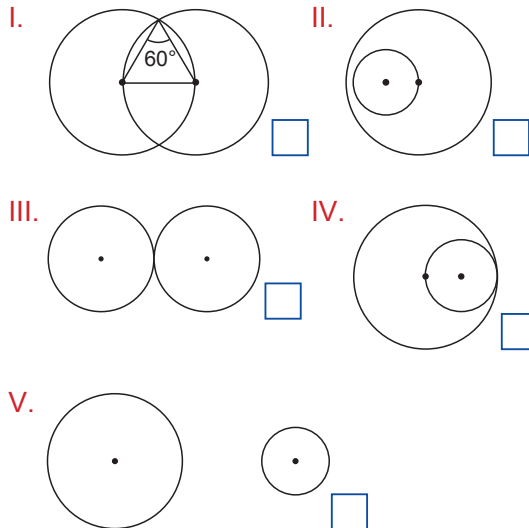
- a. Yarıçapları 2 br ve 1 br olan iki çemberin merkezler arası uzaklığı 5 br ise en uzak iki noktası arasındaki uzaklık ..... br dir.
- b. Dıştan teğet olan iki çemberin merkezler arası uzaklığı ..... eşittir.
- c. Eş iki çemberin merkezler arası uzaklığı yarıçap uzunluklarına eşit ise bu iki çemberin ..... derece altında iki noktaları ortaktır.
- ç. İki çemberin bir noktaları ortak ise merkezler arası uzaklığı ..... veya ..... eşittir.

2. Aşağıda denklemleri verilen çemberlerin birbirine göre konumlarını bularak doğru şekil ile eşleştiriniz.

### Çemberlerin Denklemleri

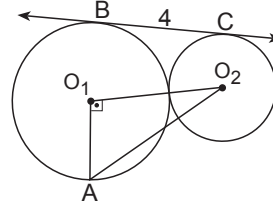
- a.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $(x - 4)^2 + y^2 = 1$
- b.  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 2y = 0$
- c.  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$   
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
- ç.  $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$   
 $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$
- d.  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$   
 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 37 = 0$

### Çemberlerin Birbirlerine Göre Konumu



3. Denklemleri  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  ve  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$  olan çemberlerin birbirlerine göre konumu nedir?

4.



Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberler dıştan teğet, BC doğrusu ortak dış teğettir.  $AO_1O_2$  dik üçgen,  $|BC| = 4$  br ve  $A(\widehat{AO_1O_2}) = 8$  br<sup>2</sup> ise  $O_1$  merkezli çemberin yarıçapını bulunuz.

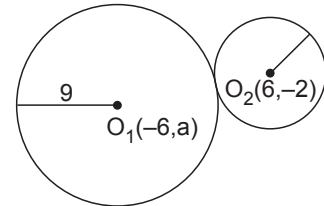
5. Denklemleri  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$  ve  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + a = 0$  olan çemberler içten teğet ise a gerçak sayılarını bulunuz.

6. Denklemleri  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 64$  ve  $x^2 + y^2 + 10x - 6y + k = 0$  olan çemberlerin  $90^\circ$  altında iki noktaları ortak olduğuna göre, k gerçak sayısı kaçtır?

7. Yandaki şekilde

dıştan teğet iki çember ile bu çemberlerin merkezlerinin

koordinatları verilmiştir.  $O_1$  merkezli çemberin yarıçapı 9 br ve çemberlerin ortak dış teğet parçasının uzunluğu  $6\sqrt{3}$  br olduğuna göre,  $O_1$  merkezli çemberin denklemini bulunuz.



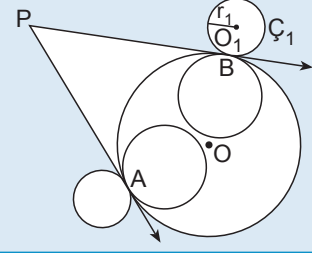
8. Denklemleri  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 36$  ve  $(y - 8)^2 + (x + 3)^2 = 1$  olan çemberlerin ortak iç teğet parçasının uzunluğu kaç br dir?



## 4.8. Çemberde Kiriş ve Kesenler İle İlgili Özellikler

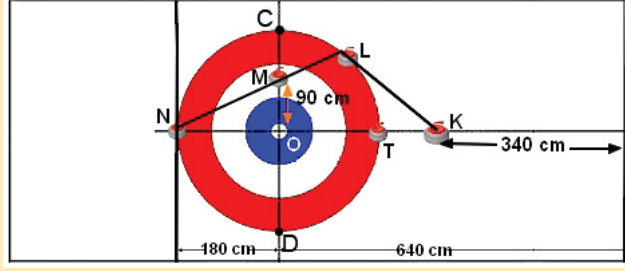


Yandaki şekilde A ve B noktalarında birbirlerine teğet olan çemberler verilmiştir.  $|PO_1|^2 - r_1^2$  sayısı “P noktasının  $\odot_1$  çemberine göre kuvveti” olarak ifade edilirse P noktasının kuvveti şekildeki tüm çemberlere göre aynı olabilir mi? Neden?



### Etkinlik

Ülkemizin 2011 yılında ev sahipliğini yaptığı 25. Dünya Üniversiteler Arası Kış Olimpiyatları'ndaki yarışma dallarından birisi de curling (körling) tir. Curling ütüye benzeyen ve “taş” denilen bir cisimle buz üstünde oynanan bir oyundur. Bu oyunda “atıcı” denilen oyuncu taşı attıktan sonra “süpürgeci” denilen iki oyuncu taşın ivmesinin devam etmesi ve yönünün hedeflendiği gibi olması için buz pistinin üzerindeki su parçacıklarına sürtünme kuvveti uygularlar. İç içe çembersel bölgelerden oluşan körling sahasının resmi ile bu sahanın bir bölümünün krokisi aşağıda verilmiştir.



Krokide ilk beş atışta taşların durdukları yerler K, L, M, N ve T noktalarıyla belirtilmiştir. L, M ve N taşları doğrusal ve L taşı K taşının bulunduğu noktadan dıştaki çembere çizilen teğetin değme noktasında olacak şekilde durmaktadır. Krokini inceleyerek aşağıda verilen adımları uygulayınız:

1. Her taşın çembersel bölgenin merkezine (O noktasına) olan uzaklığını belirleyerek aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız. (r: En dıştaki çembersel bölgenin yarıçapının uzunluğudur.)

$$\triangleright |KO|^2 - r^2 = \dots \quad \triangleright |LO|^2 - r^2 = \dots \quad \triangleright |MO|^2 - r^2 = \dots \quad \triangleright |TO|^2 - r^2 = \dots \quad \triangleright |NO|^2 - r^2 = \dots$$

2. Etkinliğin 1. adımında bulduğunuz değerlerin işaretlerini, taşların çembersel bölgede bulundukları konum (taşların çemberin içinde, dışında veya üzerinde olması) ile ilişkilendiriniz.

3. OLK dik üçgenini oluşturarak Pisagor teoreminden  $|KL|$  nu bulunuz.  $|KO|^2 - r^2$  değeri ile  $|KL|$  nu karşılaştırınız.

4.  $|KT| \cdot |KN|$  çarpımını bularak  $|KL|$  ile karşılaştırınız.

5. Yaptığınız karşılaştırmalara göre, bir çemberin dışındaki bir noktada kesişen teğeti ile kesenin oluşturduğu doğru parçalarının uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

6. OMN dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|MN|$  nu bulunuz.  $|ML| = 54\sqrt{5}$  br kabul ederek  $|MN| \cdot |ML|$  çarpımını hesaplayınız.

7.  $|MC| \cdot |MD|$ ,  $|ML| \cdot |MN|$  ve  $|MO|^2 - r^2$  değerlerini karşılaştırınız.

8. Yaptığınız karşılaştırmaya göre, bir çemberin içindeki bir noktadan geçen kirişlerin, nokta tarafından ayırdığı parçaların çarpımları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.





### Bilgi Kutusu

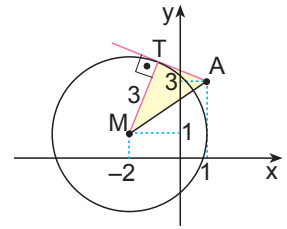
1. M merkezli, r br yarıçaplı çember  $S(M, r)$  olmak üzere,  $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, K(x) = \|\vec{MX}\|^2 - r^2$  dönüşümüne  $S(M, r)$  çemberine göre **kuvvet fonksiyonu** denir.
2.  $K(X_0) = \|\vec{MX_0}\|^2 - r^2$  değerine  $X_0$  noktasının  $S(M, r)$  ye göre **kuvveti** denir.

### Örnek

$A(1, 3)$  noktasının denklemi  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$  olan çembere göre kuvvetini hesaplayarak bu noktadan çembere çizilen teğetlerden birinin uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

Denklemi verilen çemberin merkezi  $M(-2, 1)$  noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r = 3$  br dir. Çemberin dışında bulunan A noktasının, çembere göre kuvvetinden  $K(A) = \|\vec{MA}\|^2 - r^2 = (\sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - 1)^2})^2 - 3^2 = 4$  bulunur. A noktasının çemberin merkezine olan uzaklığı yarıçap uzunluğundan büyük olduğu için A noktası çemberin dışındadır.



Çemberin  $A(1, 3)$  noktasındaki teğetlerinden birisini şekildeki gibi çizerek değme noktasını T olarak adlandıralım. ATM dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|AT|^2 + 3^2 = |MA|^2 \Rightarrow |AT|^2 + 9 = 13 \Rightarrow |AT|^2 = 4 \Rightarrow |AT| = 2 \text{ br bulunur.}$$

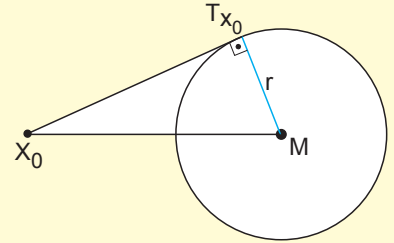


### İnceleyelim

$S(M, r)$  çemberine dışındaki bir  $X_0$  noktasından çizilen teğetin değme noktası  $T_{X_0}$  olmak üzere,  $K(X_0) = \|\vec{X_0 T_{X_0}}\|^2$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** M merkezli, r yarıçaplı çembere dışındaki  $X_0$  noktasından çizilen teğet

**İstenen:**  $K(X_0) = \|\vec{X_0 T_{X_0}}\|^2$



#### İfadeler

1.  $|MT_{X_0}| = r$
2.  $[MT_{X_0}] \perp [X_0 T_{X_0}]$
3.  $K(X_0) = \|\vec{X_0 M}\|^2 - r^2$
4.  $\|\vec{X_0 T_{X_0}}\|^2 = \|\vec{X_0 M}\|^2 - r^2$
5.  $K(X_0) = \|\vec{X_0 T_{X_0}}\|^2$

#### Gerekçeler

1. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
2. Bir çemberin teğetinin değme noktasındaki yarıçap dik olmasından
3. Çemberde kuvvet tanımından
4.  $X_0 T_{X_0} M$  dik üçgeninde Pisagor teoreminden
5. 3 ve 4. ifadelerin eşitliğinden



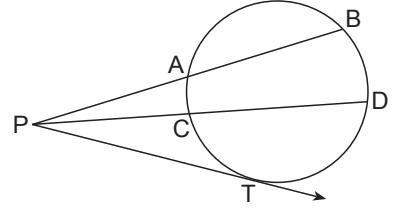


### Uyarı

$S(M, r)$  çemberinin dışındaki bir  $X_0$  noktası için  $\|\overrightarrow{MX_0}\| > r$  olduğundan  $\|\overrightarrow{MX_0}\|^2 - r^2 > 0$  dir. O hâlde,  $X_0$  çemberin dışında ise  $K(X_0) > 0$  dir.

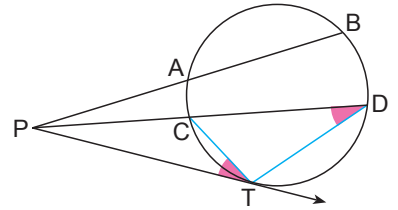
### Örnek

Şekildeki çemberde  $[PB]$  ve  $[PD]$  herhangi iki kesen ve  $[PT]$  teğet olmak üzere,  $|PT|^2 = |PC| \cdot |PD| = |PA| \cdot |PB|$  olduğunu gösterelim.



### Çözüm

Şekildeki gibi  $[TC]$  ve  $[TD]$  kırımlarını çizelim. Aynı yayı gören çevre açısı ile teğet-kiriş açısının ölçüsü eşit olduğundan,  $m(\widehat{PDT}) = m(\widehat{PTC})$  dür. Aynı zamanda  $\widehat{P}$ ,  $PTC$  ve  $PDT$  üçgenlerinin ortak açısı olduğundan A.A.A. benzerlik teoremi gereğince  $\widehat{PTC} \sim \widehat{PDT}$  olur.



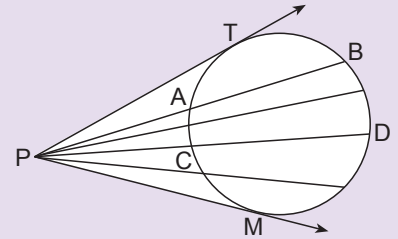
Buradan  $\frac{|PT|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PT|} \Rightarrow |PT|^2 = |PC| \cdot |PD|$  bulunur. Siz de benzer yöntemle  $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$  olduğunu gösteriniz.



### Sonuç

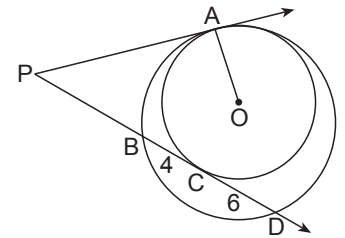
Bir çemberin dışındaki bir P noktasından çizilen tüm kesenler ve teğetler için,

$$K(P) = |PT|^2 = |PM|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = \dots \text{ dir.}$$



### Örnek

Şekildeki çemberler A noktasında içten teğet ve içteki çemberin merkezi O noktasıdır.  $[PA]$  ve  $[PD]$ , O merkezli çembere sırayla A ve C noktalarında teğet,  $|BC| = 4$  br,  $|CD| = 6$  br ve olduğuna göre,  $|PA|$  nu bulalım.



### Çözüm

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olduğundan O merkezli çembere göre  $|PA| = |PC|$  dur. Bundan dolayı  $|PB| = x$  br alınırsa  $|PC| = |PA| = (x + 4)$  br olur.

P noktasının dıştaki çembere göre kuvvetinden,

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PD| \Rightarrow (x + 4)^2 = x \cdot (x + 10) \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + 10x \Rightarrow x = 8 \text{ br dir.}$$

Buradan  $|PA| = x + 4 = 8 + 4 = 12$  br bulunur.



## Uygulama Köşesi

Standart denklemi  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$  olan çember ve  $P(3, -1)$  noktası veriliyor. Buna göre;

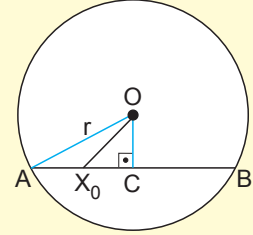
- P noktasının çembere göre kuvvetini hesaplayınız.
- P noktasının çembere göre konumunu belirleyiniz.
- P noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin uzunluğunu bulunuz.
- Çemberin P noktasına en yakın ve en uzak noktalarının P noktasına olan uzaklıklarını bulunuz

## İnceleyelim

$X_0$  çemberin iç noktası ise  $K(X_0)$  ın,  $X_0$  dan geçen kirişin  $X_0$  tarafından belirlenen parçalarının uzunlukları çarpımının ters işaretlisine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli ve r yarıçaplı çember,  $X_0$  dan geçen  $[AB]$  kirişi

**İstenen:**  $K(X_0) = -\|\vec{X_0A}\| \cdot \|\vec{X_0B}\|$



$[OC] \perp [AB]$  olacak şekilde  $[OC]$  nı çizelim. Merkezden kirişe indirilen dikme kirişi ortaladığından  $\|\vec{AC}\| = \|\vec{CB}\|$  dur.  $[OA]$  ve  $[OX_0]$  nın çizilmesiyle elde edilen  $OAC$  ve  $OX_0C$  dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa  $r^2 = \|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2$  ve  $\|\vec{OX_0}\|^2 = \|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{X_0C}\|^2$  eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılarak iki kare farkı özdeşliği kullanılırsa,

$$\|\vec{OX_0}\|^2 - r^2 = \|\vec{X_0C}\|^2 - \|\vec{CA}\|^2 = (\|\vec{X_0C}\| - \|\vec{CA}\|)(\|\vec{X_0C}\| + \|\vec{CA}\|) \text{ elde edilir. } (*)$$

Diğer taraftan  $\|\vec{AC}\| = \|\vec{CB}\|$  olduğundan  $\|\vec{X_0C}\| + \|\vec{CA}\| = \|\vec{X_0B}\|$  dir.  $(**)$

Aynı zamanda  $\|\vec{X_0C}\| + \|\vec{X_0A}\| = \|\vec{CA}\| \Rightarrow \|\vec{X_0C}\| - \|\vec{CA}\| = -\|\vec{X_0A}\|$  dir.  $(***)$

$(*)$  ve  $(***)$  eşitlikleri  $(*)$  eşitliğinde yerine yazılırsa  $\|\vec{OX_0}\|^2 - r^2 = -\|\vec{X_0A}\| \cdot \|\vec{X_0B}\|$  olur.  $X_0$  noktasının çembere göre kuvveti  $K(X_0) = \|\vec{OX_0}\|^2 - r^2$  olduğundan  $K(X_0) = -\|\vec{X_0A}\| \cdot \|\vec{X_0B}\|$  bulunur.

## Örnek

Denklemini  $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 64$  olan çember ile bu çemberin içindeki  $P(2, 0)$  noktasından geçen  $[AB]$  kirişi veriliyor. P noktasının  $[AB]$  kirişini ayırdığı parçalardan birinin uzunluğu 4 br olduğuna göre,

- a.  $[AB]$  kirişinin diğer parçasının uzunluğunu bulalım.      b.  $K(B)$  değerini hesaplayalım.

## Çözüm

a. Verilen çemberin merkezi  $M(2, 6)$  noktası ve yarıçapı  $r = 8$  br dir.

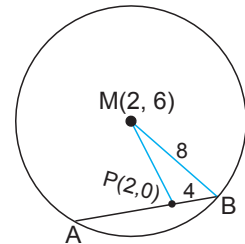
P noktasının çembere göre kuvveti,

$$K(P) = \|\vec{MP}\|^2 - r^2 = (\sqrt{(2-2)^2 + (0-6)^2})^2 - 8^2 = 36 - 64 = -28 \text{ dir.}$$

P noktası çemberin içinde olduğundan,

$$K(P) = -|PA| \cdot |PB| \Rightarrow -28 = -|PA| \cdot 4 \Rightarrow |PA| = 7 \text{ br bulunur.}$$

b.  $K(B) = \|\vec{MB}\|^2 - r^2$  dir. B noktası çemberin üzerinde olduğundan bu noktanın merkeze olan uzaklığı ile yarıçap uzunluğu birbirine eşittir. O hâlde  $\|\vec{MB}\| = r$  dir. Buradan  $K(B) = 0$  bulunur.





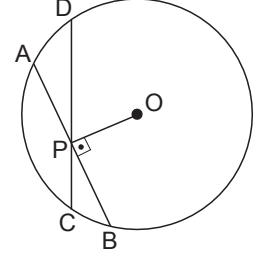


### Uyarı

1. Bir çemberin içinde olan  $X_0$  noktası için  $K(X_0) < 0$  dir.
2. Bir çemberin üzerinde olan  $X_0$  noktası için  $K(X_0) = 0$  dir.

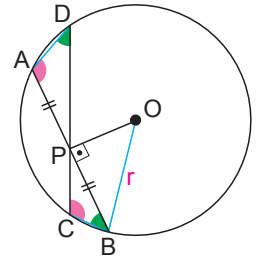
### Örnek

Şekildeki O merkezli ve r br yarıçaplı çemberde  $[AB] \cap [CD] = \{P\}$  ve  $[AB] \perp [OP]$  dir. Buna göre,  $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$  olduğunu gösterelim.



### Çözüm

Çemberin merkezinden kirişe çizilen dikme kirişi ortaladığından  $|PA| = |PB|$  dur.  $[OB]$  yarıçapı çizildiğinde oluşan OPB dik üçgeninde Pisagor teoreminden  $|OP|^2 + |PB|^2 = r^2 \Rightarrow |PB|^2 = r^2 - |OP|^2$  elde edilir.  $|PA| = |PB|$  olduğundan,  $|PB|^2 = r^2 - |OP|^2 \Rightarrow |PB| \cdot |PB| = r^2 - |OP|^2 \Rightarrow |PA| \cdot |PB| = r^2 - |OP|^2$  dir. (\*)



$[AD]$  ve  $[BC]$  kirişleri çizildiğinde aynı yayı gören çevre açılarının ölçüleri eşit olduğundan  $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC})$  ve  $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCD})$  dür.

Aynı zamanda ters açı özelliğinden  $m(\widehat{APD}) = m(\widehat{CPB})$  olduğundan A.A.A. benzerlik teoremi gereğince  $\widehat{PCB} \sim \widehat{PAD}$  olur. Buradan  $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PD|} \Rightarrow |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$  dur. (\*\*)

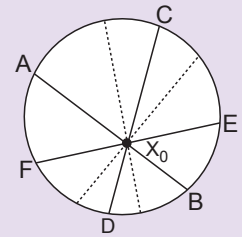
(\*) ve (\*\*) eşitliklerinden  $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$  olduğu görülür.



### Sonuç

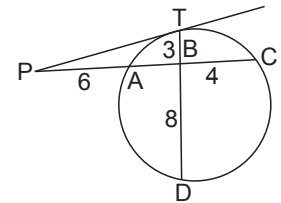
$K(X_0)$  değeri çemberin içindeki  $X_0$  noktasından geçen doğruların oluşturduğu çember kirişlerinin seçiminden bağımsızdır. Bundan dolayı  $X_0$  noktasından geçen her kiriş için,

$$K(X_0) = -|AX_0| \cdot |X_0B| = -|CX_0| \cdot |X_0D| = -|EX_0| \cdot |X_0F| = \dots \text{ dir.}$$



### Örnek

Şekildeki çembere  $[PT]$ , T noktasında teğet ve  $[TD] \cap [PC] = \{B\}$  dir.  $|TB| = 3$  br,  $|BD| = 8$  br,  $|BC| = 4$  br ve  $|PA| = 6$  br olduğuna göre,  $|AB|$  ve  $|PT|$  değerlerini bulalım.



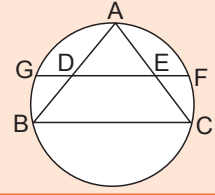
### Çözüm

B noktası çemberin içinde olduğundan  $|AB| \cdot |BC| = |TB| \cdot |BD| \Rightarrow |AB| \cdot 4 = 3 \cdot 8 \Rightarrow |AB| = 6$  br bulunur. P noktası çemberin dışında olduğundan  $|PT|^2 = |PA| \cdot |PC| \Rightarrow |PT|^2 = 6 \cdot (6 + 6 + 4) = 96 \Rightarrow |PT| = 4\sqrt{6}$  br bulunur.



### Uygulama Köşesi

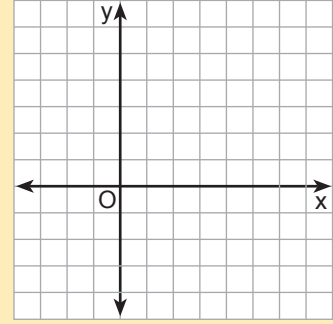
Yandaki şekilde ABC eşkenar üçgeni ile çevrel çemberi verilmiştir.  $[AB]$  ve  $[AC]$  kenarlarının orta noktaları sırayla D ve E dir. G, D, E ve F noktaları doğrusal olduğuna göre,  $|DE| = (\sqrt{5} - 1)$  br için  $|DF|$  nu bulunuz.



### Etkinlik

**Araç ve gereç:** cetvel, pergel

1. Standart denklemi  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$  olan M merkezli çemberi yandaki analitik düzlemde çiziniz.
2. Koordinatları  $A(6, 4)$ ,  $B(5, -3)$ ,  $C(-3, 1)$  ve  $D(2, -4)$  olan noktalar için  $[AB]$  ve  $[CD]$  kirislerini çiziniz.
3.  $|AB|$  ve  $|CD|$  nu bularak karşılaştırınız. MAB ve MCD üçgenlerini oluşturarak benzerlik teoremi yardımıyla  $\widehat{AB}$  ve  $\widehat{CD}$  küçük yaylarının ölçüleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.
4.  $[AB]$  ve  $[CD]$  kirislerinin uzunlukları ile  $\widehat{AB}$  ve  $\widehat{CD}$  küçük yaylarının ölçülerini ilişkilendirerek bir çemberde eş kirislere karşılık gelen yaylar arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
5.  $[AB]$  ve  $[CD]$  kirislerinin çemberin merkezine olan uzaklıklarını bulunuz. Bulduğunuz değerleri,  $[AB]$  ve  $[CD]$  kirislerinin uzunluklarını göz önünde bulundurarak yorumlayınız.
6. Bir çemberde, iki kirisin uzunluğu ile bu kirislerin çemberin merkezine olan uzaklıkları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
7. Çemberin  $[AB]$  kirisine dik olan çapını çiziniz. Çizdiğiniz çapın  $[AB]$  kirisini ve  $\widehat{AB}$  küçük yayını hangi oranda böldüğünü tartışınız.
8. Bir çemberde, bir kirisle dik olan çapın, kiris ve kirisle belirlenen yayları hangi oranda böldüğünü açıklayınız.

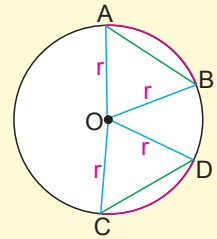


### İnceleyelim

Bir çemberde iki küçük yay eş ise bu yaylara karşılık gelen kirislerin de eş olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember,  $\widehat{AB}$  ve  $\widehat{CD}$  eş yayları

**İstenen:**  $|AB| = |CD|$



#### İfadeler

1.  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
2.  $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$
3.  $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{AOB})$
4.  $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$
5.  $|AB| = |CD|$

#### Gerekçeler

1. Verilen
2. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
3. 1. ifadeden ve merkez açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsüne eşit olmasından
4. K.A.K. eşlik teoreminden
5. 4. ifadeden



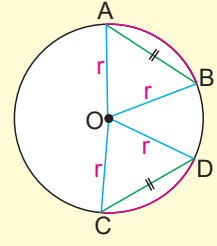


## İnceleyelim

Bir çemberde eş kirişlere karşılık gelen yayların eş olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember,  $[AB]$  ve  $[CD]$  eş kirişleri

**İstenen:**  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$



### İfadeler

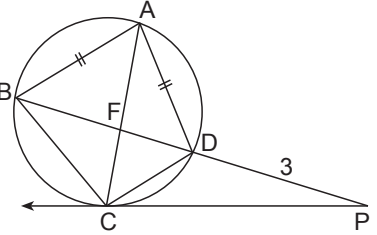
1.  $|AB| = |CD|$
2.  $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$
3.  $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$
4.  $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$
5.  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$

### Gerekçeler

1. Verilen
2. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
3. K.K.K. eşlik teoreminden
4. 3. ifadeden
5. Merkez açının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsüne eşit olmasından

## Örnek

Şekildeki çembere  $[PC, C$  noktasında teğet,  $[AC] \cap [BP] = \{F\}$ ,  $|AB| = |AD|$ ,  $|PD| = 3$  br ve  $|PB| = 6$  br olduğuna göre,  $|PF|$  nu bulalım.

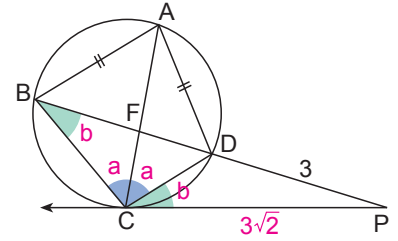


## Çözüm

P noktasının çembere göre kuvvetinden,  
 $|PC|^2 = |PD| \cdot |PB| \Rightarrow |PC|^2 = 3 \cdot 6 \Rightarrow |PC| = 3\sqrt{2}$  br olur.

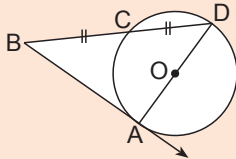
Bir çemberde eş kirişlerin yayları da eş olduğundan,  
 $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AD})$  dür. Buradan  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACD})$  elde edilir.

DBC çevre açısı ile DCP teğet kiriş açısı aynı yayı gördüklerinden ölçüleri eşittir.  
 $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACD}) = a$  ve  $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCP}) = b$  olarak alınırsa dış açı özelliğinden,  
 $m(\widehat{PFC}) = a + b$  olur. Bundan dolayı PFC ikizkenar üçgendir. Buradan  $|PF| = |PC| = 3\sqrt{2}$  br bulunur.

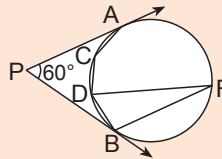


## Uygulama Köşesi

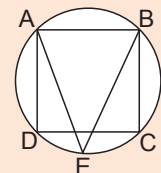
Aşağıdaki şekillerde verilen bilgilere göre, şekillerin altlarında yazılı olan değerleri bulunuz.



O merkez,  $[BA]$  teğet,  
 $m(\widehat{BDA}) = ?$



$|AC| = |CD| = |DB|$ ,  $[PA]$  ve  
 $[PB]$  teğet,  $m(\widehat{DFB}) = ?$

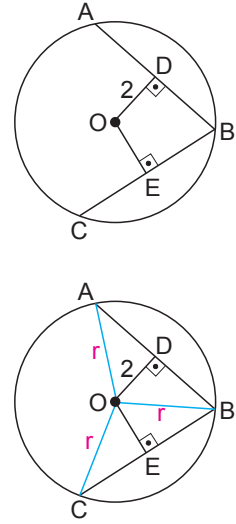


ABCD kare,  
 $m(\widehat{AEB}) = ?$



### Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde  $[OD] \perp [AB]$  ve  $[OE] \perp [BC]$  dir.  $|AB| = |BC|$  ve  $|OD| = 2$  br olduğuna göre,  $|OE|$  nu bulalım.



### Çözüm

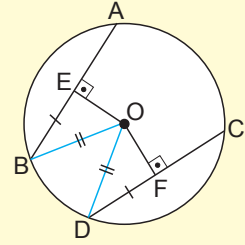
Verilen çemberin yarıçapının uzunluğu  $r$  olsun. O noktasını A, B ve C noktalarına birleştiren doğru parçaları çizildiğinde  $|OA| = |OB| = |OC| = r$  olur.  $|AB| = |BC|$  olduğundan AOB ve COB ikizkenar üçgenleri eştir. Eş üçgenlerin aynı tabana ait yükseklik uzunlukları eş olduğundan  $|OE| = |OD| = 2$  br bulunur.

### İnceleyelim

Bir çemberde eş kirişlerin merkeze olan uzaklıklarının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember,  $[AB]$  ve  $[CD]$  eş kirişleri

**İstenen:**  $|OE| = |OF|$



#### İfadeler

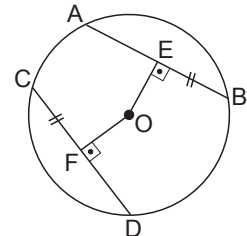
1.  $|AB| = |CD|$
2.  $|OB| = |OD|$
3.  $|AE| = |EB|, |CF| = |FD|$
4.  $|EB| = |FD|$
5.  $\widehat{OEB} \cong \widehat{OFD}$
6.  $|OE| = |OF|$

#### Gerekçeler

1. Verilen
2. Bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
3. Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikmenin kirişi ortalamasından
4. 1 ve 3. ifadelerden
5. Hiponetüs-dik kenar eşliğinden
6. 5. ifadeden

### Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde  $[OE] \perp [AB]$ ,  $[OF] \perp [CD]$  ve  $|EB| = |CF|$  dur.  $|OE| = (2x - 1)$  br ve  $|OF| = (x + 4)$  br olduğuna göre,  $x$  değerini bulalım.



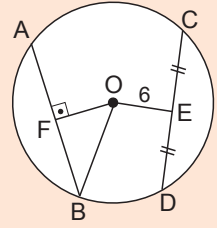
### Çözüm

Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme kirişi ortalamadığından  $|AE| = |EB|$  ve  $|CF| = |FD|$  dur. Aynı zamanda  $|EB| = |CF|$  olduğundan  $|AE| = |FD|$  olur. Dolayısıyla  $|AB| = |CD|$  dur. Eş kirişlerin merkeze olan uzaklıkları eşit olduğundan  $|OE| = |OF| \Rightarrow 2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$  bulunur.



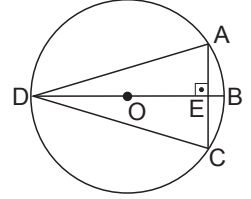
### Uygulama Köşesi

Şekildeki O merkezli çemberde  $[OF] \perp [AB]$  ve  $|CE| = |ED| = (x - 2)$  br dir.  $|AB| = (x + 6)$  br ve  $|OE| = |OF| = 6$  br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



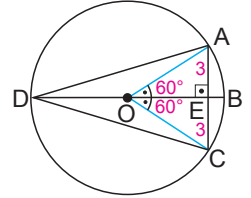
### Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde  $[DB] \perp [AC]$  dir.  $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$  ve  $|AC| = 6$  br olduğuna göre, çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.



### Çözüm

$[OA]$  ve  $[OC]$  yarıçapları çizildiğinde oluşan OAE ve OCE üçgenleri ikizkenar olur. İkizkenar üçgenlerde tabana ait yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortay olduğundan  $|AE| = |EC| = 3$  br ve  $m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{COE})$  elde edilir. Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan,  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = 60^\circ$  olur. Bundan dolayı  $m(\widehat{AOE}) = m(\widehat{COE}) = 60^\circ$  dir.



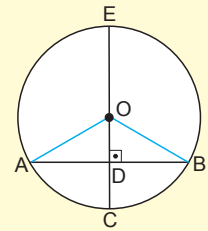
AOE dik üçgeninden,  $\sin 60^\circ = \frac{3}{|AO|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{|AO|} \Rightarrow |AO| = 2\sqrt{3}$  br bulunur.

### İnceleyelim

Bir çemberde herhangi bir kirişe dik olan çapın, kirişi ve kiriş ile belirlenen yayların her birini iki eş parçaya böldüğünü gösterelim:

**Verilen:** O merkezli çember,  $[AB] \perp [EC]$

**İstenen:**  $[AD] \cong [DB]$  ve  $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$



#### İfadeler

- $[AB] \perp [EC]$
- $[OA] \cong [OB]$
- $[OD] \cong [OD]$
- $\widehat{ODA} \cong \widehat{ODB}$
- $[AD] \cong [DB]$ ,  $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOD}$
- $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

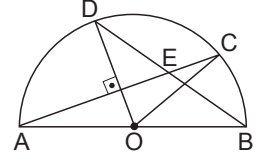
#### Gerekçeler

- Verilen
- Çemberin yarıçaplarının eşliğinden
- $[OD]$  nin ortak kenar olmasından
- K.A.K. eşlik teoreminden
- Eş üçgenlerde, karşılıklı kenarların ve açılarının eş olmasından
- Bir çemberde eş merkez açılar gördüğü yayların eş olmasından



### Örnek

Şekildeki O merkezli yarım çemberde  $[AC] \perp [OD]$  ve  $m(\widehat{ADC}) = 140^\circ$  olduğuna göre, DEA açısının ölçüsünü bulalım.



### Çözüm

Bir çemberde kirişe dik olan çap, kirişlerin belirlediği yayı iki eşit parçaya böldüğünden,

$$m(\widehat{AD}) = m(\widehat{DC}) = \frac{m(\widehat{ADC})}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ \text{ dir.}$$

Yarım çember yayının ölçüsü  $180^\circ$  olduğundan  $140^\circ + m(\widehat{BC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BC}) = 40^\circ$  olur. DEA açısının köşesi çemberin içinde olduğundan  $m(\widehat{DEA}) = \frac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})}{2} = \frac{70^\circ + 40^\circ}{2} = 55^\circ$  bulunur.

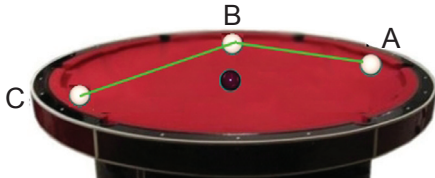


### Alıştırmalar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktali yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- a. Bir noktanın çembere göre kuvveti bu noktadan geçen çember kirişlerinin seçiminden bağımsızdır. (.....)
- b. Bir çemberin merkezine olan uzaklıkları 4 br olan iki kirişin uzunlukları 6 br ise çemberin yarıçapının uzunluğu 5 br dir. (.....)
- c. r br yarıçaplı bir çemberin merkezinin çembere göre kuvveti  $r^2$  dir (.....)

2.



Yukarıdaki fotoğrafta yarıçapının uzunluğu 2 metre olan çembersel bölge şeklindeki bilar-do masası ve bu masanın merkezinde bulunan siyah top verilmiştir. A konumunda bulunan beyaz topa yapılan bir vuruşta top B konumuna gelip masaya çarparak  $120^\circ$  lik açı ile C konumuna gitmektedir. Buna göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a. Beyaz topun hareketi boyunca siyah topa en yakın konumları belirleyiniz.
- b. Belirlediğiniz konumlarda beyaz topun siyah topa olan uzaklıkları eşit olduğuna göre, beyaz topun hareketi boyunca kaç metre yol aldığını bulunuz.

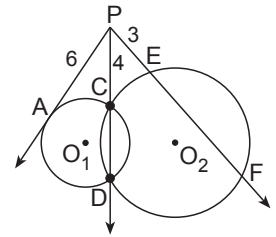
3.  $A(5, a)$  noktası denklemi,

$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$  çemberinin üzerinde ise a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

4. Bir çemberin merkezinden 4 br uzaklıkta olan kirişleri  $[AB]$  ve  $[CD]$  olmak üzere,  $|AB| = (2x - 4)$  br ve  $|CD| = \left(\frac{x}{2} + 11\right)$  br dir. Buna göre, çemberin yarıçapının uzunluğu kaç br dir?

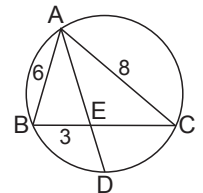
5. Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberler C ve D noktalarında kesişmektedir.

$[PA, O_1$  merkezli çembere A noktasında teğet,  $|PA| = 6$  br,  $|PC| = 4$  br ve  $|PE| = 3$  br olduğuna göre,  $|EF|$  kaç br dir?



6. Şekildeki çemberde  $[AD] \cap [BC] = \{E\}$  ve  $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{DC})$  dür.

$|AB| = 6$  br,  $|AC| = 8$  br ve  $|BE| = 3$  br olduğuna göre,  $|ED|$  kaç br dir?





## 4.9. Teğetler Dörtgeni ve Özellikleri



Bir pastane sahibi imal ettiği daire şeklindeki pastalar için tabanı dörtgen olan kutular yaptırmak istiyor. Ancak pastaların şekillerinin bozulmaması için kutu içinde hareket etmemesi gerekiyor. Pastane sahibi pastaları için hangi dörtgenlerden kutular yaptırabilir? Bu dörtgenlerin ortak özellikleri hakkında neler söyleyebilirsiniz?



### Etkinlik

Yandaki analitik düzlemlerde KLM üçgeninin P merkezli ve  $r_1$  yarıçaplı iç teğet çemberi ile ABCD dörtgeninin kenarlarına teğet olan O merkezli ve  $r$  yarıçaplı çember verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. KLM üçgeninin iç açıortaylarının P noktasında kestiğini 10.sınıf geometri derslerinizde öğrenmiştiniz. Benzer özelliği A, B, C ve D açılarının iç açıortaylarının kesim noktası ile O noktasını karşılaştırarak ABCD dörtgeni için yorumlayınız.

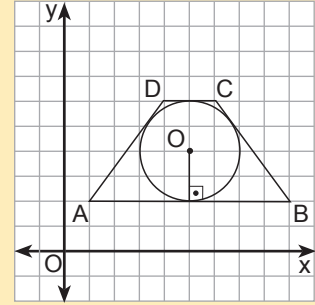
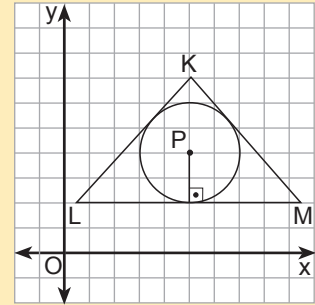
2. ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bulunuz. Karşılıklı kenarların uzunlukları toplamını sorgulayınız.

3. ABCD yamuğunun alanını ve çevresini hesaplayınız.

4. KLM üçgeninin alanının, üçgenin çevresi ile iç teğet çemberinin yarıçapının çarpımının yarısına eşit olduğunu öğrenmiştiniz. Benzer özellik ABCD dörtgeni için de geçerli midir? Tartışınız.

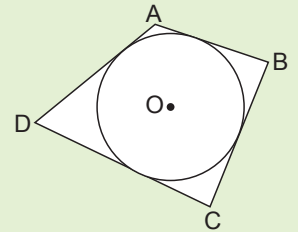
5. Bir dörtgenin alanının, dörtgenin çevresi ile dörtgenin kenarlarına teğet olan çemberin yarıçapı türünden nasıl ifade edilebileceğini açıklayınız.

6. Paralelkenar, kare, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, deltoid ve yamuğun hangilerinin içine kenarlarına teğet olacak şekilde bir çember çizilebileceğini sorgulayınız.



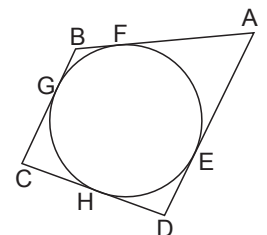
### Bilgi Kutusu

Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir. Şekildeki ABCD dörtgeninin tüm kenarları O merkezli çembere teğet olduğundan ABCD teğetler dörtgenidir. O merkezli çembere ABCD dörtgeninin **iç teğet çemberi** denir.



### Örnek

Yandaki şekilde ABCD teğetler dörtgeni ve iç teğet çemberi verilmiştir. E, F, G ve H teğetlerin değme noktalarıdır.  $|AD| = 8$  br,  $|AB| = 7$  br ve  $|BC| = 5$  br olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulalım.

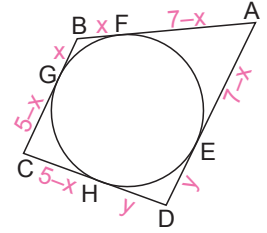




## Çözüm

$|BF| = x$  br ve  $|DH| = y$  br olsun. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olduğundan  $|BF| = |BG| = x$  br ve  $|DH| = |DE| = y$  br olur. Buradan  $|GC| = |BC| - |BG| \Rightarrow |GC| = (5 - x)$  br ve  $|AF| = |AB| - |BF| \Rightarrow |AF| = (7 - x)$  br elde edilir.

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit uzunlukta olduğundan,  $|CH| = |CG| = (5 - x)$  br ve  $|AE| = |AF| = (7 - x)$  br dir.  $|AD| = 8 \Rightarrow 7 - x + y = 8 \Rightarrow y - x = 1$  dir. Bundan dolayı  $|CD| = 5 - x + y = 5 + 1 = 6$  br bulunur.

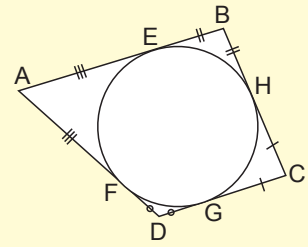


## İnceleyelim

Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamalarının birbirine eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD teğetler dörtgeni ile bu dörtgene E, F, G ve H noktalarında teğet olan çember

**İstenen:**  $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$



### İfadeler

- $|AE| = |AF|, |DG| = |DF|$   
 $|CG| = |CH|, |BE| = |BH|$
- $|AB| = |AE| + |BE|, |DC| = |DG| + |CG|$
- $|AB| + |DC| = |AE| + |DG| + |BE| + |CG|$
- $|AB| + |DC| = |AF| + |DF| + |BH| + |CH|$
- $|AD| = |AF| + |DF|, |BC| = |BH| + |CH|$
- $|AD| + |BC| = |AF| + |DF| + |BH| + |CH|$
- $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$

### Gerekçeler

- Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının eşit uzunlukta olmasından
- Bütün-parça ilişkisinden
2. ifadedeki eşitliklerin taraf tarafa toplanmasından
1. ifadedeki eşitliklerin 3. ifadede yerine yazılmasından
- Bütün-parça ilişkisinden
5. ifadedeki eşitliklerin toplanmasından
- 4 ve 6. ifadelere

## Örnek

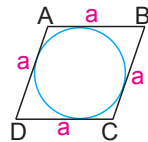
Aşağıdaki dörtgenlerin teğetler dörtgeni olup olmadıklarını inceleyelim.

a. Eşkenar dörtgen

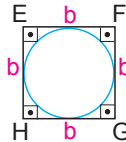
b. Kare

c. Deltoid

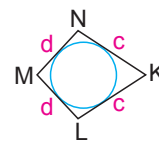
## Çözüm



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

a. Şekil 1'deki ABCD eşkenar dörtgeninin bir kenarının uzunluğu a br olarak alınırsa karşılıklı kenar uzunlukları toplamaları  $2a$  br olacağından eşkenar dörtgen bir teğetler dörtgenidir.

b. Şekil 2'deki EFGH karesinin bir kenar uzunluğu b br olarak alınırsa karşılıklı kenar uzunlukları toplamaları  $2b$  br olacağından kare bir teğetler dörtgenidir.

c. Şekil 3'teki KLMN deltoidinin kenar uzunlukları c br ve d br olarak alınırsa karşılıklı kenar uzunlukları toplamaları  $c + d$  br olacağından deltoid bir teğetler dörtgenidir.



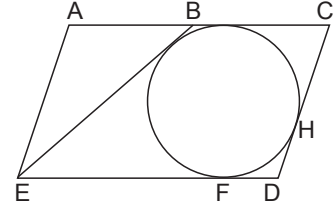


### Uyarı

Kare, eşkenar dörtgen ve deltoid teğetler dörtgenidir.

### Örnek

Yandaki şekilde AEDC paralelkenar ve BCDE teğetler dörtgenidir.  $|CD| = 7$  br,  $|BE| = 8$  br ve AEB üçgeninin çevresinin uzunluğu 21 br ise  $|BC|$  nu bulalım.



### Çözüm

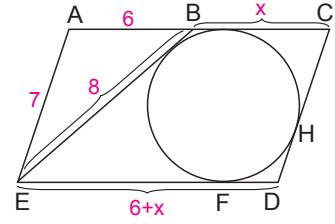
AEDC paralelkenar olduğundan  $|AE| = |CD| = 7$  br dir.

$\widehat{AEB} = 21 \Rightarrow 7 + 8 + |AB| = 21 \Rightarrow |AB| = 6$  br olur.

$|BC| = x$  br olarak alınırsa AEDC paralelkenar olduğundan,

$|ED| = (6 + x)$  br olur. BCDE teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı eşit olduğundan,

$6 + x + x = 8 + 7 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$  br dir. O hâlde,  $|BC| = x = \frac{9}{2}$  br bulunur.



### Uygulama Köşesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Kenar uzunlukları a br ve b br olan bir ABCD dikdörtgeninin teğetler dörtgeni olması için a ile b arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?
- Kenar uzunlukları x br ve y br olan bir KLMN paralelkenarının teğetler dörtgeni olması için x ile y arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?

### Örnek

Şekildeki ABCD teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi O noktasıdır.  $m(\widehat{EF}) = 70^\circ$ ,  $m(\widehat{FG}) = 50^\circ$  ve  $m(\widehat{GH}) = 100^\circ$  olduğuna göre, AOD açısının ölçüsünü bulalım.

### Çözüm

$$m(\widehat{EF}) + m(\widehat{FG}) + m(\widehat{GH}) + m(\widehat{EH}) = 360^\circ \Rightarrow$$

$$70^\circ + 50^\circ + 100^\circ + m(\widehat{EH}) = 360 \Rightarrow m(\widehat{EH}) = 140^\circ \text{ bulunur.}$$

EAH ve GDH açıların kenarları çembere teğet olduğundan,

$$m(\widehat{EAH}) + m(\widehat{EH}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{EAH}) + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{EAH}) = 40^\circ \text{ ve}$$

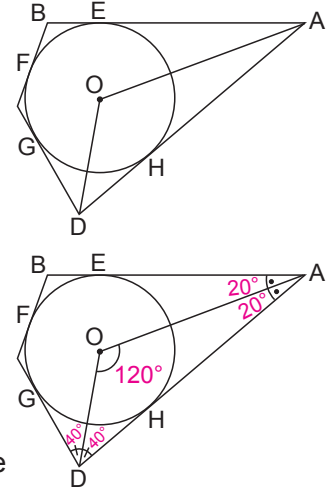
$$m(\widehat{GDH}) + m(\widehat{GH}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{GDH}) + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{GDH}) = 80^\circ \text{ dir.}$$

Kenarları çembere teğet olan açıların iç açıortayları çemberin merkezinden geçtiğinden,

$$[AO] \text{ ve } [DO] \text{ açıortaylardır. Buradan } m(\widehat{OAD}) = \frac{m(\widehat{EAH})}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{ODA}) = \frac{m(\widehat{GDH})}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \text{ dir. OAD üçgeninin iç açıların ölçüleri toplamından,}$$

$$m(\widehat{AOD}) + 20^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 120^\circ \text{ bulunur.}$$





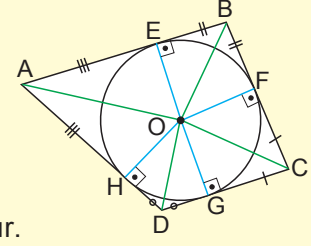


## İnceleyelim

Bir teğetler dörtgeninin iç açıortaylarının, iç teğet çemberinin merkezinden geçtiğini gösterelim:

**Verilen:** ABCD teğetler dörtgeni ile bu dörtgene E, F, G ve H noktalarında teğet olan O merkezli iç teğet çember

**İstenen:**  $[AO]$ ,  $[BO]$ ,  $[CO]$  ve  $[DO]$  ABCD dörtgeninin açıortaylarıdır.



### İfadeler

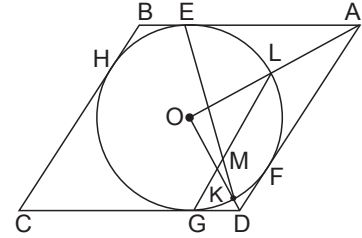
- $|OE| = |OF| = |OH| = |OG|$
- $[OE] \perp [AB]$ ,  $[OF] \perp [BC]$   
 $[OH] \perp [AD]$ ,  $[OG] \perp [DC]$
- $|BE| = |BF|$ ,  $|CF| = |CG|$   
 $|DH| = |DG|$ ,  $|AH| = |AE|$
- $[AO]$ ,  $[BO]$ ,  $[CO]$ ,  $[DO]$  ABCD dörtgeninin iç açıortaylarıdır.

### Gerekçeler

- Yardımcı ek çizimden ve bir çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
- Bir çemberin teğetinin değme noktasındaki yarıçapa dik olmasından
- Bir çembere dışındaki noktadan çizilen teğet parçalarının eşit uzunlukta olmasından
- Açıortay üzerinde alınan bir noktadan, açının kollarına çizilen dikmelerin eşit uzunlukta olmasından

## Örnek

Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgeni ve bu dörtgene E, F, G ve H noktalarında teğet olan O merkezli iç teğet çemberi verilmiştir.  $[EK] \cap [GL] = \{M\}$  olduğuna göre,  $\angle GMK$  açısının ölçüsünü bulalım.



## Çözüm

Teğetler dörtgeninin iç açıortayları iç teğet çemberinin merkezinden geçtiği için  $[AO]$  ve  $[DO]$  iç açıortaylardır.

$$m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OAD}) = \alpha \text{ ve } m(\widehat{ODC}) = m(\widehat{ODA}) = \beta \text{ olsun.}$$

ABCD eşkenar dörtgen olduğundan  $[AB] \parallel [CD]$  ve

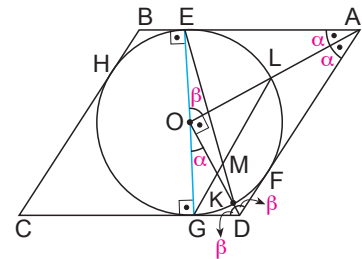
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \text{ dir. Buradan } m(\widehat{AOD}) = 90^\circ$$

elde edilir.

Bir çemberin teğeti değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan  $[OG] \perp [CD]$  ve  $[OE] \perp [AB]$  dir.  $\alpha + \beta = 90^\circ$  olduğundan OGD üçgeninde  $m(\widehat{DOG}) = \alpha$  ve AOE üçgeninde  $m(\widehat{AOE}) = \beta$  olur.

Bir çemberde merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan  $m(\widehat{KG}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{EL}) = \beta$  dir.  $\angle GMK$  açısı, köşesi çemberin içinde olan açı olduğundan,

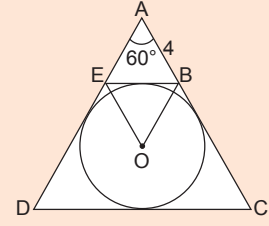
$$m(\widehat{GMK}) = \frac{m(\widehat{GK}) + m(\widehat{EL})}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ bulunur.}$$





### Uygulama Köşesi

Yandaki şekilde BEDC dörtgeni ve bu dörtgenin iç teğet çemberi verilmiştir. O noktası BECD dörtgeninin iç açıortaylarının kesim noktası,  $|AB| = 4$  br ve  $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{BOE})$  nı ve çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



### Örnek

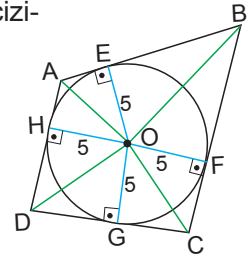
Çevresinin uzunluğu 20 br olan ABCD teğetler dörtgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı 5 br olduğuna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

### Çözüm

Yandaki şekilde, ABCD teğetler dörtgeni ve O merkezli iç teğet çemberi çizilerek değme noktalarındaki yarıçapları gösterilmiştir.

Bu durumda oluşan üçgenlerin alan bağıntılarından,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{AOD}) + A(\widehat{AOB}) + A(\widehat{BOC}) + A(\widehat{DOC}) \\ &= \frac{|AD| \cdot 5}{2} + \frac{|AB| \cdot 5}{2} + \frac{|BC| \cdot 5}{2} + \frac{|DC| \cdot 5}{2} \\ &= (|AD| + |AB| + |BC| + |DC|) \cdot \frac{5}{2} = \varphi(ABCD) \cdot \frac{5}{2} = 20 \cdot \frac{5}{2} = 50 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

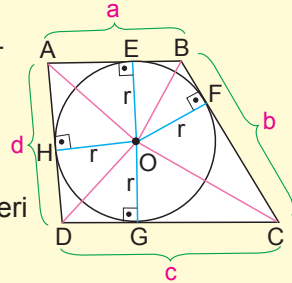


### İnceleyelim

Bir teğetler dörtgeninin alanının, çevre uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısına eşit olduğunu gösterelim:

**Verilen:** Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve d br olan ABCD teğetler dörtgeni ile bu dörtgenin O merkezli, r yarıçaplı iç teğet çemberi

**İstenen:**  $A(ABCD) = \frac{(a + b + c + d) \cdot r}{2}$



#### İfadeler

1. İç teğet çemberin yarıçapı  $= r$
2.  $|OE| = |OF| = |OH| = |OG| = r$
3.  $[OE] \perp [AB], [OH] \perp [AD], [OG] \perp [DC], [OF] \perp [BC]$
4.  $A(\widehat{AOB}) = \frac{a \cdot r}{2}, A(\widehat{AOD}) = \frac{d \cdot r}{2}$   
 $A(\widehat{BOC}) = \frac{b \cdot r}{2}, A(\widehat{DOC}) = \frac{c \cdot r}{2}$
5.  $A(ABCD) = A(\widehat{AOB}) + A(\widehat{BOC}) + A(\widehat{DOC}) + A(\widehat{AOD})$
6.  $A(ABCD) = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} = (a + b + c + d) \cdot \frac{r}{2}$

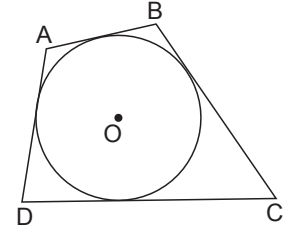
#### Gerekçeler

1. Verilen
2. Bir çemberin merkezi ile teğetin değme noktasını birleştiren doğru parçasının yarıçap olmasından
3. Bir çemberin teğetinin değme noktasındaki yarıçapa dik olmasından
4. Üçgensel bölgenin alan formülünden
5. Bütün-parça ilişkisinden
6. 4. ifadedeki eşitliklerin 5. ifadede yerine yazılmasından ve çarpma işleminin özelliğinden



### Örnek

Şekildeki ABCD teğetler dörtgeninin O merkezli iç teğet çemberinin yarıçapı  $r = 2$  br dir.  $|AB| = 3$  br ve  $A(ABCD) = 18$  br<sup>2</sup> olduğuna göre,  $|DC|$  nu bulalım.



### Çözüm

ABCD teğetler dörtgeni olduğundan,

$$A(ABCD) = \frac{\Ç(ABCD) \cdot r}{2} \Rightarrow 18 = \frac{\Ç(ABCD) \cdot 2}{2} \Rightarrow \Ç(ABCD) = 18 \text{ br olur. Buradan}$$

$$\Ç(ABCD) = |AB| + |DC| + \underbrace{|AD| + |BC|}_{|AB| + |DC|} \Rightarrow 18 = 3 + |DC| + 3 + |DC| \Rightarrow 12 = 2|DC| \Rightarrow |DC| = 6 \text{ br bulunur.}$$



### Alıştırırmalar

1. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

a. İki çemberin ortak dış teğetlerinin değme noktaları bir teğetler dörtgeninin köşeleridir. (.....)

b. Her ikizkenar yamuk teğetler dörtgenidir. (.....)

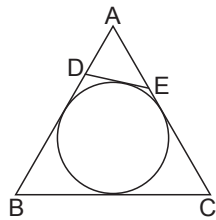
c. Bir dörtgenin teğetler dörtgeni olması için gerek ve yeter şart karşılıklı kenar uzunluklarının toplamının birbirine eşit olmasıdır. (.....)

ç. Sadece eşkenar dörtgenin köşelerinin kesim noktası iç teğet çemberinin merkezidir. (.....)

2. Şekildeki ABC eşkenar üçgen ve DECB teğetler dörtgenidir.

Buna göre,

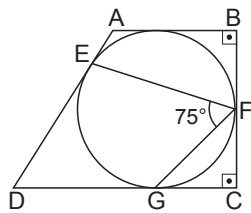
$$\frac{|AD|}{|DB|} + \frac{|AE|}{|EC|} = 1 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$



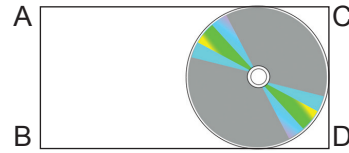
3. Şekildeki ABCD dik yamuğu teğetler dörtgenidir.

E, F ve G teğetlerin değme noktaları,

$m(\widehat{EFG}) = 75^\circ$  ve çemberin yarıçapı 2 br olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç br<sup>2</sup> dir?



4.

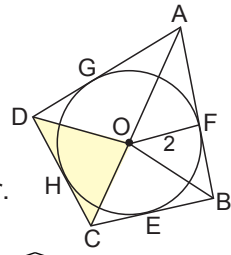


Yukarıdaki şekilde köşeleri A, B, C ve D şeklinde adlandırılmış bir kâğıt ile kâğıdın üç kenarına teğet olan CD görülmektedir. Kâğıdın  $[AB]$  kenarı,  $[CD]$  kenarı üzerine katlanarak dört kenarı da CD'ye teğet olan CD kabı yapılmak isteniyor. Kâğıdın çevresi 96 cm olduğuna göre, CD kabının alanını bulunuz.

5. Yandaki şekilde ABCD teğetler dörtgeni ile bu dörtgenin O merkezli ve 2 cm yarıçaplı iç teğet çemberi verilmiştir.

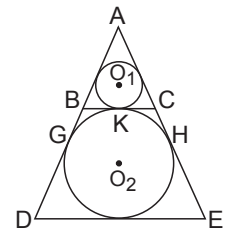
$$A(\widehat{AOB}) = 8 \text{ br}^2 \text{ ve}$$

$$\Ç(ABCD) = 40 \text{ br ise } A(\widehat{DOC}) \text{ kaç br}^2 \text{ dir?}$$



6. Şekildeki  $O_1$  merkezli çember BCED dörtgeninin iç teğet çemberidir.  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çember K noktasında dıştan teğettir.  $\Ç(\widehat{ABC}) = 12$  cm ve

$$|GD| + |HE| = 6 \text{ cm olduğuna göre, } \Ç(\widehat{ADE}) \text{ kaç cm dir?}$$



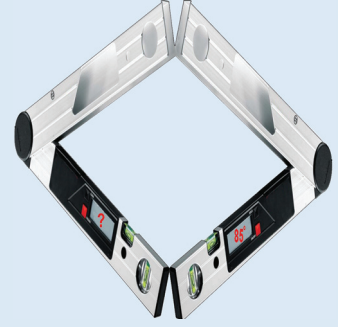


## 4.10. Kirişler Dörtgeni ve Özellikleri



Elektronik açıölçer ile iki doğru veya düzlem arasındaki açı kolaylıkla ölçülebilir. Elektronik açıölçerin açısı değiştirildikçe bu açı değerleri gösterge ekranı üzerinde derece cinsinden görülmektedir.

Yandaki şekilde iki adet elektronik açıölçer verilmiştir. Açıölçerler, köşeleri bir çember üzerinde olacak şekilde konumlandırılırsa birinin açı göstergesi  $85^\circ$  yi gösterirken diğerinin açı göstergesi kaç dereceyi gösterir? Bu durumda açıölçerlerin kollarının oluşturduğu dörtgen hakkında neler söyleyebilirsiniz?



### Etkinlik

**Araç ve gereç:** cetvel, pergel

1. “Bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesim noktası çevrel çemberinin merkezidir.” bilgisinden yararlanarak pergel ve cetvel yardımıyla yandaki ABC üçgeninin çevrel çemberini çiziniz.

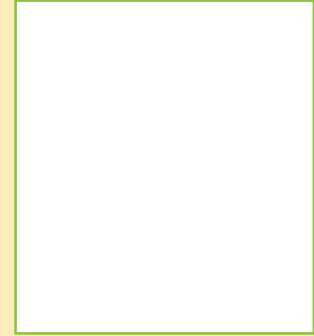
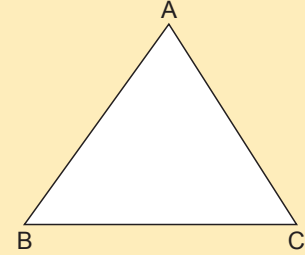
2. Pergel yardımıyla yandaki kutu içine O merkezli bir çember çiziniz. Çizdiğiniz çember üzerinde farklı dört nokta belirleyiniz. Bu noktaları E, F, G ve H şeklinde adlandırarak EFGH dörtgenini oluşturunuz.

3. EFGH dörtgeninin karşılıklı açılarının gördüğü yayları göz önünde bulundurarak dörtgenin iç açılarının ölçülerini yorumlayınız.

4. EFGH dörtgeninin karşılıklı açılarının ölçüleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

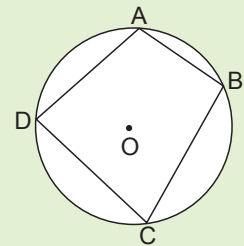
5. EFGH dörtgeninin kenar orta dikmelerini çiziniz. Kenar orta dikmelerin kesim noktası ile O noktasını karşılaştırarak etkinliğin 1. adımında verilen bilginin dörtgen için geçerli olup olmadığını açıklayınız.

6. Paralelkenar, kare, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, deltoid ve yamuğun hangilerinin köşelerinden geçecek şekilde bir çember çizilebileceğini sorgulayınız.



### Bilgi Kutusu

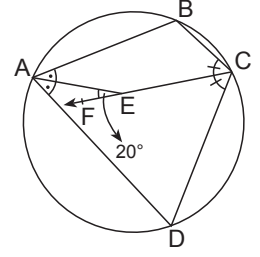
Köşe noktaları bir çember üzerinde bulunan dörtgene **kirişler dörtgeni** denir. Şekildeki ABCD dörtgeninin köşeleri O merkezli çember üzerinde olduğundan ABCD kirişler dörtgenidir.





### Örnek

Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde, [AE] ve [CE] sırayla A ve C açıların iç açıortaylarıdır.  $m(\widehat{AEF}) = 20^\circ$  olduğuna göre, ABC açısının ölçüsünü bulalım.

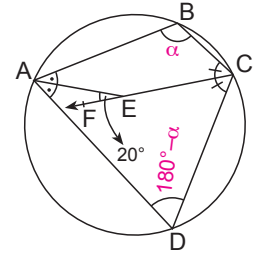


### Çözüm

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$  olarak alınırsa çevre açısı özelliğinden  $m(\widehat{ADC}) = 2\alpha$  olur. Buradan  $m(\widehat{ABC}) = 360^\circ - 2\alpha$  bulunur. Çevre açısı özelliğinden,  $m(\widehat{ADC}) = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$  elde edilir.

Dörtgenin karşılıklı açılarının iç açıortayları arasındaki dar açının ölçüsünden

$$m(\widehat{AEF}) = \frac{\alpha - (180^\circ - \alpha)}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{2\alpha - 180^\circ}{2} \\ \Rightarrow 2\alpha - 180^\circ = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 110^\circ \text{ bulunur.}$$

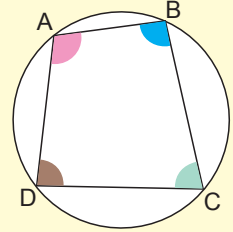


### İnceleyelim

Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılarının ölçüleri toplamının  $180^\circ$  olduğunu gösterelim:

**Verilen:** ABCD kirişler dörtgeni, O merkezli çember

**İstenen:**  $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ ,  $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$



ABCD kirişler dörtgeni ve O merkezli çember

Verilen

$$m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{DAB}) = 360^\circ \\ m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ABC}) = 360^\circ$$

Tam çember yayının ölçüsünün  $360^\circ$  olmasından

$$2(m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})) = 360^\circ \\ 2(m(\widehat{B}) + m(\widehat{D})) = 360^\circ$$

Yerine koyma yönteminden ve çarpma işleminin özelliğinden

$$m(\widehat{A}) = \frac{m(\widehat{BCD})}{2}, m(\widehat{C}) = \frac{m(\widehat{DAB})}{2} \\ m(\widehat{B}) = \frac{m(\widehat{ADC})}{2}, m(\widehat{D}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2}$$

Çevre açısının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olmasından

$$m(\widehat{BCD}) = 2.m(\widehat{A}), m(\widehat{DAB}) = 2.m(\widehat{C}) \\ m(\widehat{ADC}) = 2.m(\widehat{B}), m(\widehat{ABC}) = 2.m(\widehat{D})$$

İçler dışlar çarpımından

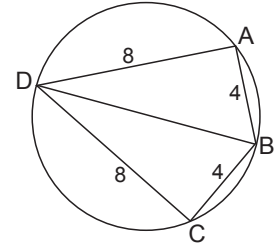
$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ, m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$$

Sadeleştirme işleminden



### Örnek

Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde  $|AD| = |DC| = 8$  br ve  $|AB| = |BC| = 4$  br olduğuna göre,  $|BD|$  nu bulalım.

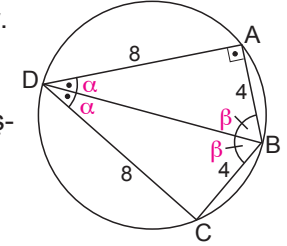


### Çözüm

$|AB| = |BC|$  ve  $|AD| = |DC|$  olduğundan ABCD kirişler dörtgeni deltoiddir. Bundan dolayı  $[DB]$ , D ve B açılarının iç açıortaylarıdır.

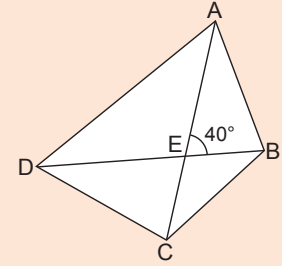
$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$  ve  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = \beta$  olarak alınırsa kirişler dörtgeninin özelliğinden  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$  elde edilir.

ADB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından,  $\alpha + \beta + m(\widehat{A}) = 180^\circ \Rightarrow 90 + m(\widehat{A}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ$  olur. ADB dik üçgeninde pisagor teoreminin  $|DB|^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow |DB|^2 = 80 \Rightarrow |DB| = 4\sqrt{5}$  br bulunur.



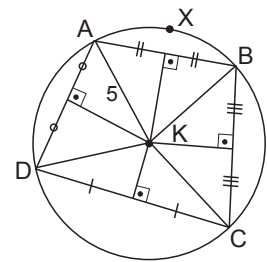
### Uygulama Köşesi

1. Bir çemberin teğetler dörtgeninin hangi koşullarda başka bir çemberin kirişler dörtgeni olduğunu tartışınız.
2. Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninin köşegenleri E noktasında kesilmektedir.  $12.m(\widehat{DAC}) = 4.m(\widehat{BDC}) = 3.m(\widehat{ABD})$  ve  $m(\widehat{AEB}) = 40^\circ$  olduğuna göre, ACB açısının ölçüsünü bulunuz.



### Örnek

Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninin kenar orta dikmeleri K noktasında kesilmektedir.  $m(\widehat{AXB}) = 120^\circ$  ve  $|AK| = 5$  br olduğuna göre,  $|AB|$  nu bulalım.



### Çözüm

Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişine indirilen dikme kirişi ortalar. Bundan dolayı ABCD kirişler dörtgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktası olan K aynı zamanda çemberin merkezidir. Bundan dolayı  $m(\widehat{AKB}) = 120^\circ$  ve  $|AK| = |BK| = 5$  br dir. AKB üçgeninde kosinüs teoreminin  $|AB|^2 = 5^2 + 5^2 - 2.5.5. \cos 120^\circ \Rightarrow |AB|^2 = 50 - 50\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow |AB|^2 = 75 \Rightarrow |AB| = 5\sqrt{3}$  br bulunur.

### Uyarı

Kirişler dörtgeninde kenar orta dikmeler merkezde kesişir.

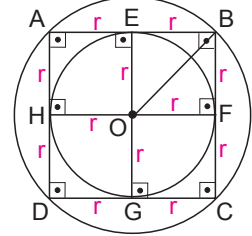


## Örnek

Herhangi bir karenin hem kirişler hem de teğetler dörtgeni olduğunu göstererek bir kenar uzunluğu 8 br olan karenin çevrel çemberinin yarıçapının uzunluğunu bulalım

## Çözüm

Karenin karşılıklı açılarının ölçüleri toplamı  $180^\circ$  ve karşılıklı kenar uzunlukları toplamı birbirine eşit olduğundan kare hem kirişler hem de teğetler dörtgenidir. Yandaki şekle göre, karenin iç teğet çemberinin merkezi O noktası ve yarıçapının uzunluğu  $r$  br dir. O noktasından teğetlerin değme noktalarına çizilen yarıçaplar teğetlere dik olduğundan OE, OF, OG ve OH birer karedir ve kenar uzunlukları  $r$  br dir.



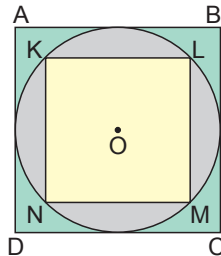
Kirişler dörtgeninin kenar orta dikmeleri çevrel çemberinin merkezinde kesiştiğinden O noktası aynı zamanda çevrel çemberin de merkezidir. O hâlde,  $[OB]$  çevrel çemberin yarıçapı ve  $|OB| = r\sqrt{2}$  br dir.  $2r = 8 \Rightarrow r = 4$  br ve  $|OB| = 4\sqrt{2}$  br dir.



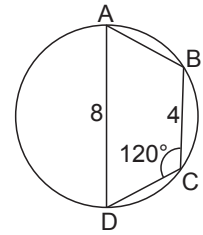
## Alıştırmalar

- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.
  - Her ikizkenar yamuk bir kirişler dörtgenidir. (.....)
  - Bir kenarının uzunluğu  $6\sqrt{2}$  br olan karenin köşelerinden geçen çemberin yarıçapının uzunluğu  $3\sqrt{2}$  br dir. (.....)
  - Dikdörtgen olmayan herhangi bir paralelkenar kirişler dörtgeni olamaz. (.....)
  - Her eşkenar dörtgen bir kirişler dörtgenidir. (.....)

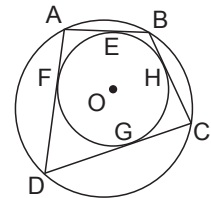
- Yandaki şekil bir güreş sahasının modelini göstermektedir. Bu modelde ABCD karesi güreş sahasını, O merkezli çember tribünleri, KLMN karesi ise güreş alanını göstermektedir. Tribünler güreş alanının çevrel çemberi, sahanın ise iç teğet çemberi şeklinde inşa edilmiştir. Buna göre, sahanın çevresinin güreş alanının çevresine oranını bulunuz.



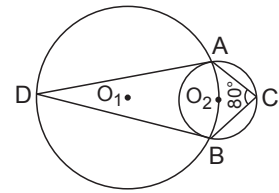
- Şekildeki ABCD yamuğunda  $[AD] \parallel [BC]$ ,  $|BC| = 4$  br,  $|AD| = 8$  br ve  $m(\widehat{BCD}) = 120^\circ$  olduğuna göre,  $|AB| + |DC|$  toplamı kaç br dir?



- Şekildeki çemberler ABCD dörtgeninin çevrel çemberi ile iç teğet çemberidir. E, F, G ve H noktaları O merkezli iç teğet çemberin kenarlara değme noktalarıdır.  $|BE| = 4$  br ve  $|DG| = 9$  br olduğuna göre, iç teğet çemberin yarıçapı kaç br dir?



- Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberler A ve B noktalarında kesişmektedir.  $O_1$  merkezli çember  $O_2$  merkezli çemberin merkezinden geçmektedir.  $m(\widehat{ACB}) = 80^\circ$  olduğuna göre,  $m(\widehat{ADB})$  kaç derecedir?

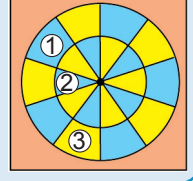




## 4.11. Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alanı

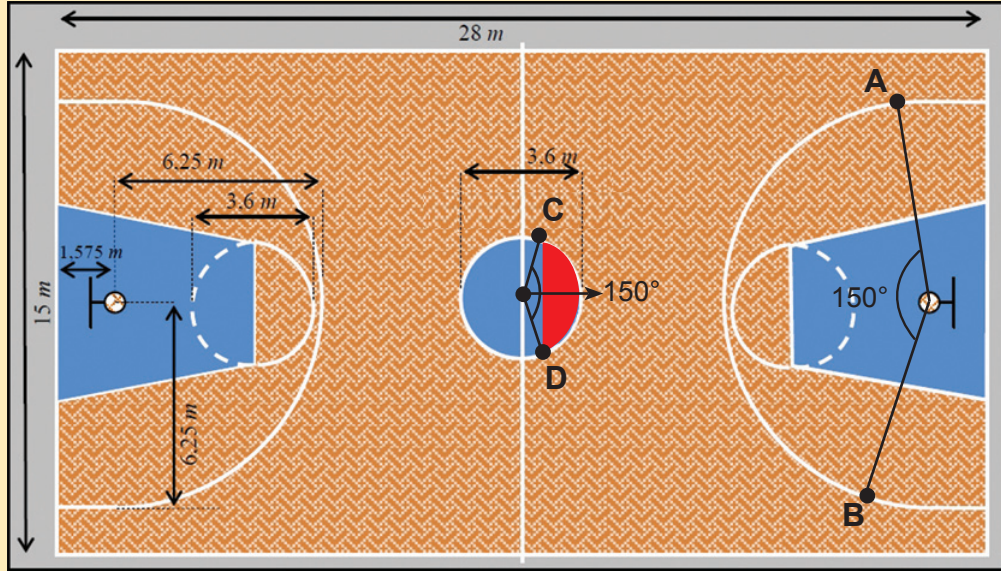


Şekildeki hedef tahtası iki çemberden ve eşit aralıklı beş çubuktan oluşmaktadır. Üç atıştaki okların isabet ettiği bölgeler 1, 2 ve 3 ile gösterilmiştir. 1 ve 2 bölgelerinin alanları ile 3 bölgesinin çevresini hesaplamak için hangi veriler bilinmelidir? Tartışınız.



### Etkinlik

Dikdörtgen biçimindeki bir basketbol sahasının boyutları 28 m x 15 m dir. Bir sac levhadan oluşan pota 1,8 x 1,2 m boyutlarındadır. Pota üzerinde yerden 3,05 m yükseklikte ve 45 cm çapında bir çember ile bu çembere asılı filenin oluşturduğu sepet bulunmaktadır. Şekil üzerinde verilen uzunlukları göz önünde bulundurarak aşağıdaki adımları uygulayınız:

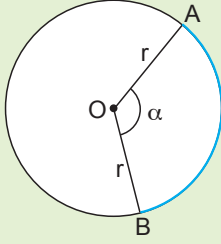


1. Sepetin sahadaki izdüşümünün sınırladığı bölgenin alanı ile sahadaki diğer dairesel bölgelerin alanlarını bulunuz.
2. Merkezi, sepetin sahadaki izdüşümü ile belirli olan 3 sayılık atış bölgesinin alanını bulunuz.
3. Sahanın ortasındaki dairesel bölgenin alanını hesaplayınız.  $r$  yarıçaplı bir dairenin alan bağıntısını açıklayarak dairelerin eşlik ve benzerlik durumlarını tartışınız.
4. 3 sayılık atış bölgesinin sınırlarını belirleyen yayın uzunluğunu ve orta yuvarlağın sınırladığı yayın uzunluğunu hesaplayınız.
5. A ve B oyuncularını ile C ve D oyuncularını arasında kalan küçük yayların uzunluklarını karşılaştırarak yayların eşlik ve benzerlik durumunu tartışınız.
6. Ortadaki dairenin boyanması için 3 kilo boya kullanıldığı düşünülürse, daire üzerinde gösterilen taralı (kırmızı) bölgenin boyanması için kaç kilo boya kullanılmıştır? Bu hesaplamayı yaparken ikizkenar üçgenin alan bağıntısından nasıl yararlanabilirsiniz? Açıklayınız. ( $\pi = 3$  alınız.)
7. Uyguladığınız adımları göz önünde bulundurarak, yarıçapı  $r$  br ve merkez açısının ölçüsü  $\alpha$  olan daire diliminin ve daire kesmesinin alan bağıntılarını açıklayınız.

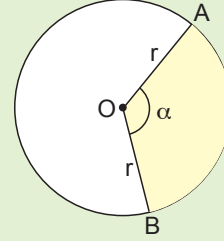




### Bilgi Kutusu



Şekil 1



Şekil 2

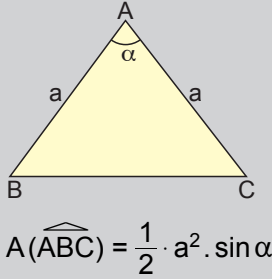
1. Şekil 1'deki O merkezli ve r br yarıçaplı bir çemberin çevresi  $\Ç = 2\pi r$  dir.  $\alpha$  merkez açısının gördüğü yayın uzunluğu  $|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$  dir.
2. Şekil 2'deki O merkezli ve r yarıçaplı bir dairenin alanı  $A = \pi r^2$  dir.  $\alpha$  merkez açılı daire diliminin alanı  $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$  dir.



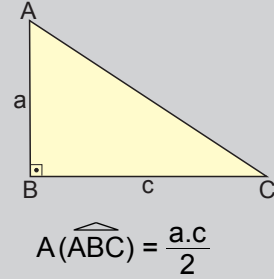
### Hatırlatma

İkizkenar üçgensel bölgenin ve dik üçgensel bölgenin alan bağıntıları aşağıda verilmiştir.

a.

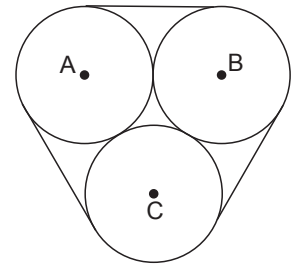


b.



### Örnek

Şekildeki 6 br yarıçaplı A, B ve C merkezli eş çemberler birbirlerine dıştan teğettir. Bu çemberlerin etrafına sarılı olan ipin uzunluğunu bulalım.



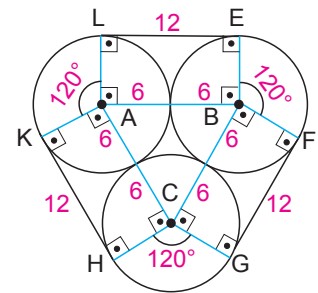
### Çözüm

Çemberlerin ipe değme noktalarındaki yarıçaplarını ve merkezlerini birleştiren doğru parçalarını çizerek şekildeki gibi adlandıralım.

Çemberler eş olduğundan ortak dış teğet parçalarının uzunlukları  $|LE| = |FG| = |KH| = 12$  br olur. ABC eşkenar üçgen olduğundan her bir açısı  $60^\circ$  ve  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{GH}$  ve  $\widehat{LK}$  yaylarını gören açılar  $120^\circ$  olur.

Buradan  $|\widehat{EF}| = |\widehat{GH}| = |\widehat{LK}| = 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = 4\pi$  br elde edilir.

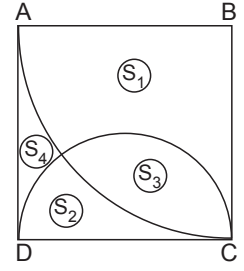
Bundan dolayı ipin uzunluğu  $3 \cdot 12 + 3 \cdot 4\pi = 36 + 12\pi$  br bulunur.





### Örnek

Yandaki şekilde ABCD karesi içinde B merkezli çeyrek daire ve [DC] çaplı yarım daire verilmiştir.  $S_1, S_2, S_3$  ve  $S_4$  bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.  $|AB| = 4br$  olduğuna göre,  $S_3 - S_4$  farkını bulalım.



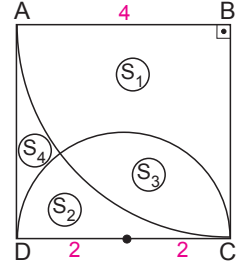
### Çözüm

Çeyrek dairenin alan formülünden  $S_1 + S_3 = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = 4\pi br^2$  ve  $S_2 + S_3 = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = 2\pi br^2$  elde edilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa  $S_1 + S_2 + 2S_3 = 6\pi br^2$  olur. (\*)

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A(ABCD) \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 16 br^2$  dir. (\*\*)

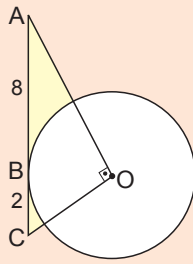
(\*) eşitliğinden (\*\*) eşitliği çıkarılırsa  $S_3 - S_4 = 6\pi - 16 br^2$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

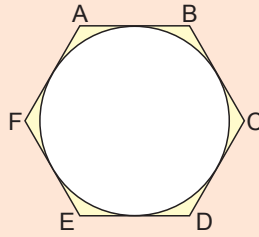
Aşağıdaki şekillerde verilen taralı alanları bulunuz.

a.



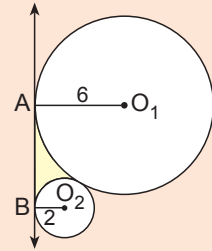
O merkezli daireye [AC], B noktasında teğettir.

b.



ABCDEF düzgün altıgen,  $|AB| = 4$  cm dir.

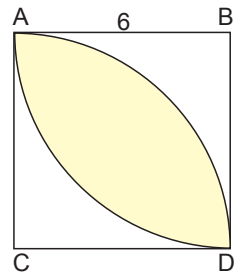
c.



$O_1$  ve  $O_2$  merkezli dıştan teğet ve dairelerin ortak teğeti [AB] dır.

### Örnek

Yandaki şekilde ABCD karesi ile B ve D merkezli çeyrek daireler verilmiştir.  $|AB| = 6br$  olduğuna göre, taralı bölgenin alanını bulalım.

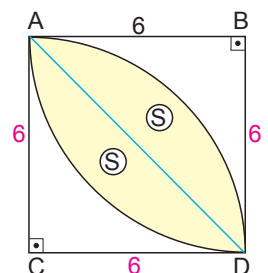


### Çözüm

D ve B merkezli çemberlerin yarıçap uzunlukları eşit olduğundan [AD] köşegeni çizildiğinde taralı alan iki eş parçaya ayrılır. Bu parçaları "S" ile adlandıralım. B merkezli daireye göre, S alanı  $90^\circ$  lik merkez açılı daire diliminin alanı ile ABC üçgensel bölgesinin alanının farkıdır.

$$\text{Buradan } S = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{6 \cdot 6}{2} = 9\pi - 18 br^2 \text{ dir.}$$

O hâlde taralı alan  $2S = 2(9\pi - 18) = 18\pi - 36 br^2$  bulunur.

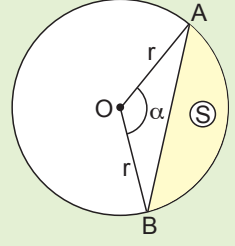






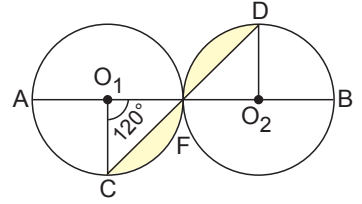
### Bilgi Kutusu

Şekildeki taralı daire kesmesinin alanı,  $\alpha$  merkez açılı daire diliminin alanı ile AOB ikizkenar üçgensel bölgesinin alanının farkına eşittir. O hâlde,  $S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha$  dır.



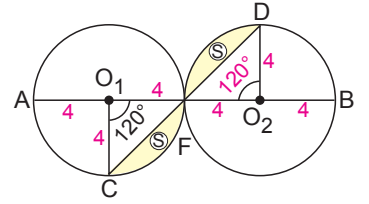
### Örnek

Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli eş daireler F noktasında dıştan teğettir.  $|AB| = 16$  br ve  $m(\widehat{COF}) = 120^\circ$  olduğuna göre, taralı bölgelerin alanları toplamını bulalım.



### Çözüm

Dairelerin yarıçap uzunlukları r olarak alınırsa  $4r = |AB| \Rightarrow 4r = 16 \Rightarrow r = 4$  br olur.  $O_1FC$  ikizkenar üçgen olduğundan  $m(\widehat{O_1FC}) = 30^\circ$  dir. Ters açı özelliğinden,  $m(\widehat{DFO_2}) = 30^\circ$  olur.  $FO_2D$  ikizkenar üçgen olduğundan,  $m(\widehat{FO_2D}) = 120^\circ$  olur. Dolayısıyla taralı alanlar da birbirine eşittir.



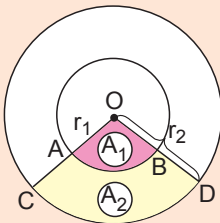
Taralı alanlardan birisi S br<sup>2</sup> olarak alınırsa daire kesmesinin alan formülünden,  $S = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = \frac{16\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> elde edilir. Buradan taralı alanlar toplamı  $2S = 2\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) = \frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}$  br<sup>2</sup> bulunur.



### Uygulama Köşesi

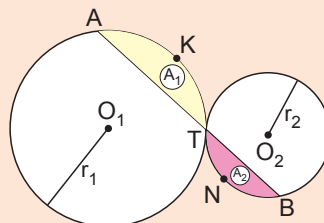
Aşağıdaki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli dairelerin altlarında verilen eşitliklerin doğruluklarını gösteriniz.

a.



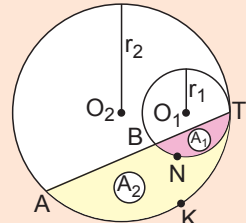
- $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{r_1}{r_2}$
- $\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

b.



- $\frac{|AKT|}{|BNT|} = \frac{r_1}{r_2}$
- $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

c.



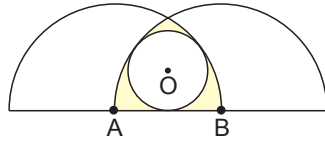
- $\frac{|BNT|}{|AKT|} = \frac{r_1}{r_2}$
- $\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$





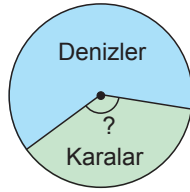
## Alıştırırmalar

1. Gothic (Gotik) XII. yüzyılda Paris'te doğup tüm Avrupa'ya yayılan ve XVI. yüzyıla kadar süren bir mimari akımdır. Aşağıda Gotik tarzıyla yapılmış bir pencere ile bu pencerenin krokisi verilmiştir.

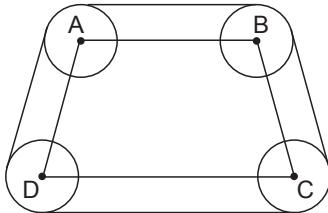


Verilen kroki A ve B merkezli 1 m yarıçaplı yarım daireler ile O merkezli 30 cm yarıçaplı dairelerden oluşmaktadır. Buna göre, kroki üzerindeki taralı bölgelerin alanları toplamını bulunuz.

2. Yeryüzündeki denizlerin alanları toplamının karaların alanları toplamına oranı  $\frac{7}{3}$  olarak veriliyor. Buna göre, yeryüzünün toplam alanında denizlerle karaların payını gösteren dairesel bir grafikte karaların alanı kaç derecelik merkez açı ile gösterilir?

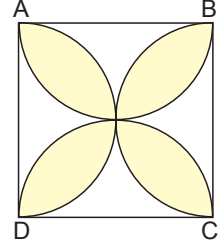


3.

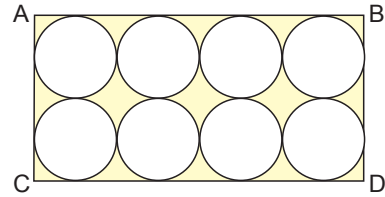


Şekildeki A, B, C ve D merkezli 2 cm yarıçaplı dört makara bir iple sıkıca çevrelenmiştir. İpin uzunluğu  $48\pi$  cm olduğuna göre, ABCD dörtgeninin çevresini bulunuz.

4. Yandaki şekilde ABCD karesinin kenarları çap kabul eden dört tane yarım daire verilmiştir.  $|AB| = 4$  br ise taralı bölgelerin alanlarının toplamı kaç  $br^2$  dir?

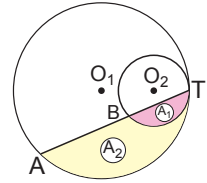


5.

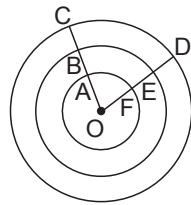


Şekildeki ABCD dikdörtgeninin içine 8 tane 2 br yarıçaplı daire çizilmiştir. Buna göre, taralı bölgelerin alanlarının toplamı kaç  $br^2$  dir?

6. Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli daireler T noktasında içten teğettir.  $O_1$  merkezli dairenin yarıçapı 6 br,  $O_2$  merkezli dairenin yarıçapı 2 br ve  $A_1$  ile gösterilmiş alan  $8 br^2$  olduğuna göre,  $A_2$  ile gösterilmiş alan kaç  $br^2$  dir?



7. Yandaki şekilde O merkezli 3 çember verilmiştir.  $|OA| = |AB| = |BC|$  ve  $|\widehat{AF}| = 4$  br olduğuna göre,  $\widehat{BE}$  ve  $\widehat{CD}$  yaylarının uzunlukları kaç br dir?



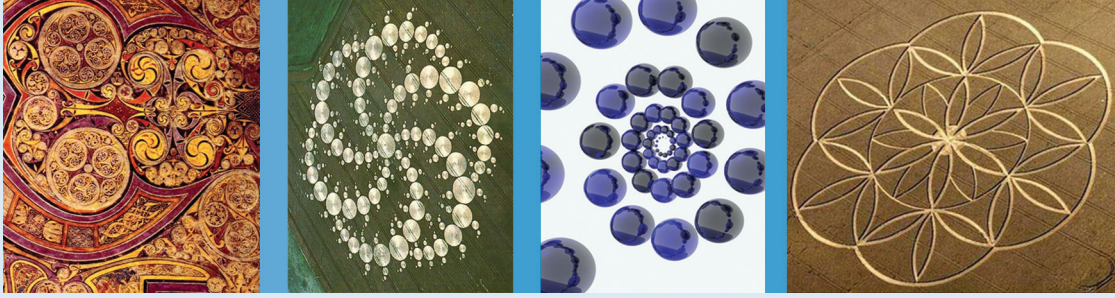
8. Alanı  $96\sqrt{3}$  cm olan bir düzgün altıgenin iç teğet çemberinin çevresi kaç br dir?



## 4.12. Düzlemde Çember Yardımıyla Desen, Fraktal Görüntüsü Oluşturma

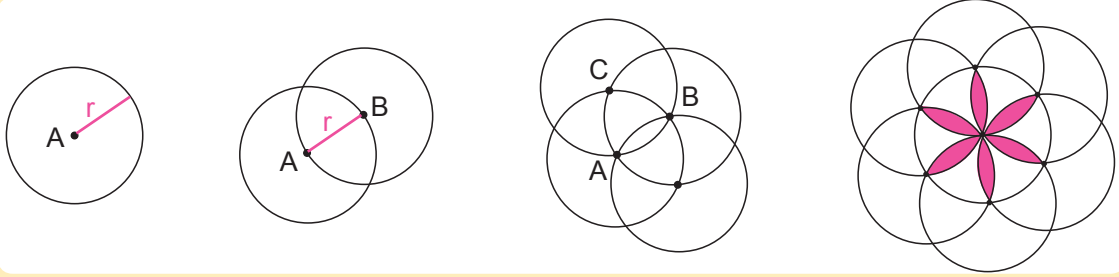


Aşağıda verilen fraktal ve desen şekillerini inceleyiniz. Bu görüntülerin oluşturulma süreçleri hakkında yorumlar yapınız.



### Etkinlik

1. Aşağıda çember yardımıyla oluşturulmuş bir desenin çizim aşamaları verilmiştir. Bunları inceleyiniz.



#### 1. Adım

A merkezli  $r$  yarıçaplı bir çember çizilir.

#### 2. Adım

A'ya uzaklığı  $r$  br olan bir B noktası seçilerek B merkezli çember çizilir.

#### 3. Adım

B merkezli çember A noktası etrafında  $\frac{2\pi}{6}$  açısı kadar döndürülerek C merkezli çember elde edilir.

#### 4. Adım

Bu işleme 5 defa devam edilerek 6 yapraklı çiçeği kapsayan desen elde edilir.

2. Yukarıdaki desen oluşturma sürecinde dönme dönüşümünü kullanmadan aynı deseni oluşturma sürecini nasıl açıklayabilirsiniz?

3. Siz de çemberler yardımıyla, bilgisayar yazılımları veya gönye, açıölçer, cetvel, pergeli vb. kullanarak kendi desenlerinizi oluşturunuz. Deseni oluşturma sürecinizin adımlarını yazınız.



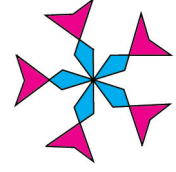
### Araştırma Sorusu

"Mandala" şekillerini ve bu şekillerin oluşturulmasında çemberlerden nasıl yararlanıldığını araştırarak sınıfınızla paylaşınız.

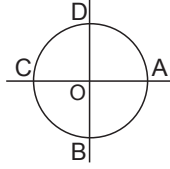


## Örnek

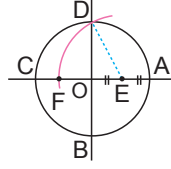
Yandaki desenin çizim aşamalarını belirleyelim.



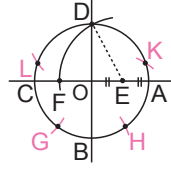
## Çözüm



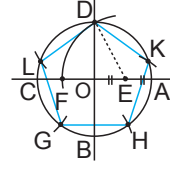
1. Adım



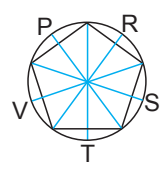
2. Adım



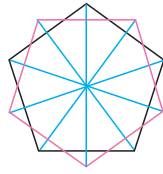
3. Adım



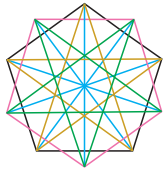
4. Adım



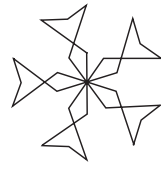
5. Adım



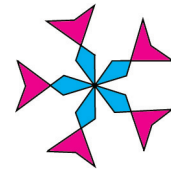
6. Adım



7. Adım



8. Adım



9. Adım

**1. Adım:** Dik kesişen iki doğru ile O merkezli bir çember çizilir. Doğruların çemberle kesiştiği noktalar A, B, C ve D olarak adlandırılır.

**2. Adım:**  $|OA|$  yarıçap uzunluğunun orta noktası cetvel yardımıyla bulunup E olarak adlandırılır. Pergel  $|ED|$  kadar açılarak E merkezli,  $[AC]$  nı kesen bir yay çizilir. Kesim noktası F olarak adlandırılır.

**3. Adım:** Pergel  $[DF]$  uzunluğu kadar açılarak, çemberi kesen D merkezli bir yay çizilir. Yayın çemberi kestiği nokta L olarak adlandırılır. Pergel açıklığı değiştirilmeden L merkezli bir yay çizilerek yayın çemberi kestiği nokta G olarak adlandırılır. Aynı işlemlerle çember yayı D, L, G, H ve K noktaları ile beş eş parçaya ayrılır.

**4. Adım:** D, L, G, H ve K noktaları birleştirilerek düzgün beşgen elde edilir.

**5. Adım:** Dik doğrular, yardımcı harfler ve yaylar silinir. Düzgün beşgenin iç açıortayları çizilip açıortayların çemberi kestiği noktalar (düzgün beşgenin köşeleri dışındaki) P, R, S, T ve V olarak adlandırılır.

**6. Adım:** P, R, S, T ve V noktaları birleştirilerek PRSTV düzgün beşgeni elde edilir ve yardımcı harfler silinir.

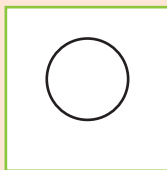
**7. Adım:** Beşgenlerin tüm köşegenleri çizilir.

**8. Adım:** Şekildeki doğrular kalacak biçimde diğer doğruların tümü silinir.

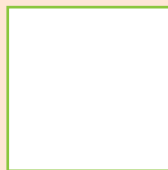
**9. Adım:** Elde edilen desen boyanır.

## Uygulama Köşesi

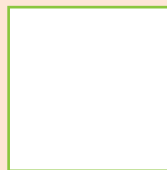
Bir çemberle başlanarak 5 adımda oluşturulan aşağıdaki desenin çizim aşamalarında eksik bırakılan yerleri çizerek tamamlayınız.



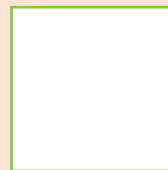
1. Adım



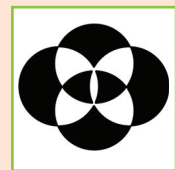
2. Adım



3. Adım



4. Adım



5. Adım



## Araştırma Sorusu

Geometride yer alan “cyclotomy” (siglotomi) ile ilgili araştırma yaparak sınıfınızla paylaşınız.



## Etkinlik

**Araç ve gereç:** pergeli, renkli kalem

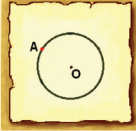
1. Fotoğrafta görülen kapı tokmağındaki düğüm deseninin oluşturulma süreci aşağıda açıklanmıştır. İnceleyiniz.



### Çizimler

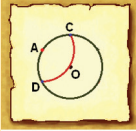
### Açıklamalar

1



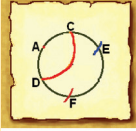
Pergel yardımıyla O merkezli bir çember çizilir ve üzerinde herhangi bir A noktası işaretlenir.

2



Pergel açıklığı değiştirilmeden O noktasından geçen A merkezli bir yay çizilir. Yayın çemberi kestiği noktalar C ve D olarak adlandırılır.

3



Pergel açıklığı değiştirilmeden C ve D merkezli yaylar çizilir. Yayların çemberi kestiği noktalar E ve F olarak adlandırılır.

4



Pergel açıklığı değiştirilmeden O noktasından geçecek biçimde E ve F merkezli yaylar çizilir.

5



Düğümü oluşturacak çizgiler istenilen genişlikte kalınlaştırılır.

6



Kalın çizgilerin ortası silinir.

7



Çizgilerin kesiştikleri yerlerdeki çizimler yapılırken şu işlemler uygulanır: Şeridin üst sağdan gelen kısmının kenar çizgileri çizilerek şeride üstten geçmiş görünümü verilir. Aynı şeridin devamındaki kesişme yerinde, diğer şerit çizilerek ilk şeride alttan geçmiş görünümü verilir. Bu şekilde şeritlere bir üstten bir alttan geçmiş görünümü vermek için gerekli çizimler yapılır.

2. Sizler de çemberler yardımıyla, bilgisayar yazılımları veya gönye, açıölçer, cetvel, pergeli vb. kullanarak kendi desenlerinizi oluşturunuz. Desen oluşturma sürecinizin adımlarını yazınız.

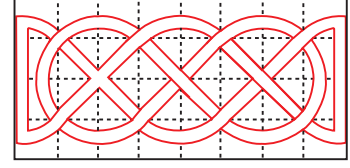
## Araştırma Sorusu

Keltlerin düğümleri ile ilgili araştırma yaparak sınıfınızla paylaşınız.



## Örnek

Yandaki düğüm deseninin çizim aşamalarını belirleyelim.



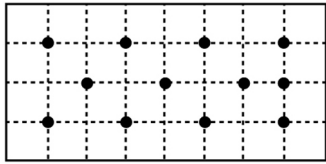
## Çözüm

### Çizimler

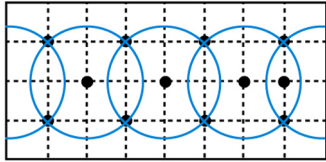
1



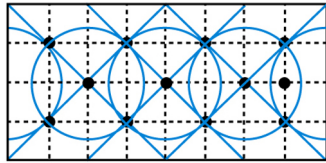
2



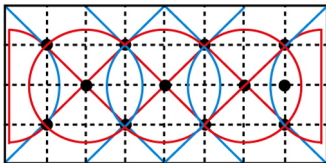
3



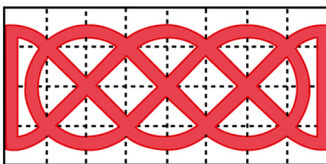
4



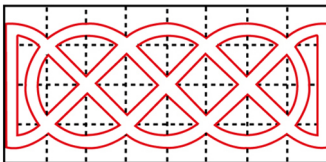
5



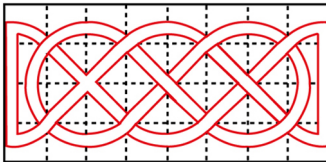
6



7



8



### Açıklamalar

Kareli kâğıttan 4br×8br boyutunda bir dikdörtgen kesilir.

Kesilen dikdörtgensel bölge üzerinde noktalar yandaki gibi işaretlenir.

Ortadaki noktaları merkez, yarıçapları iki nokta arasındaki uzunluk olan üç çember, kenarlara da iki yarım çember çizilir.

Çapraz noktalar düz çizgilerle şekildeki gibi birleştirilir.

Düğümü oluşturacak çizgiler farklı renkte bir kalemle vurgulanır.

Çizgiler istenilen kalınlıkta kalınlaştırılır.

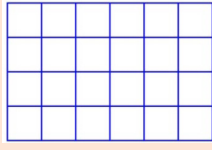
Kalın çizgilerin ortası silinir.

Sol üstten başlanarak şerit alttan-üstten-alttan-üstten-alttan-üstten geçmiş izlenimi oluşturmak için gerekli çizim yapılır. Sağ üstten başlayarak ise şerit üstten-alttan-üstten-alttan-üstten-alttan geçmiş izlenimi elde etmek için gerekli çizim yapılır.

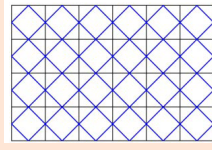


## Uygulama Köşesi

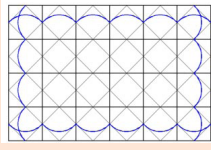
Aşağıda çemberler yardımıyla 9 adımda oluşturulan düğüm deseninin çizim adımları verilmiştir. Her bir adımda yapılan işlemleri açıklayınız.



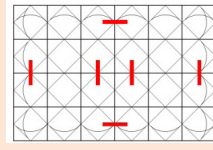
1. Adım



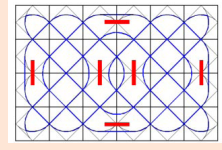
2. Adım



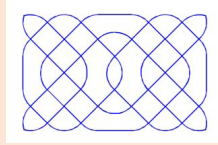
3. Adım



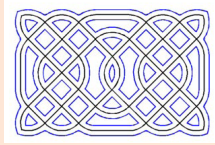
4. Adım



5. Adım



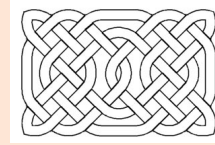
6. Adım



7. Adım



8. Adım



9. Adım

## Araştırma Sorusu

“Telkari”, “Kazaziye” ve “Erhan-ı” gibi yöresel desen örneklerini araştırarak sınıfınızda paylaşınız.

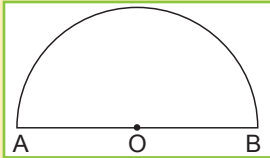
## Etkinlik

**Araç ve gereç:** pergeli, cetvel

1. Aşağıda yarım çemberlerden oluşturulmuş bir fraktal görüntüsü verilmiştir. İnceleyiniz.

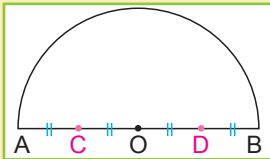
### Çizimler

1



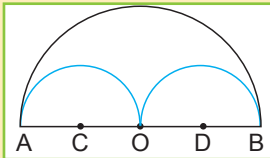
O merkezli,  $[AB]$  çaplı yarım çember çizilir.

2



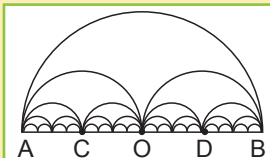
$[AO]$  ve  $[OB]$  nın orta noktaları cetvel yardımıyla belirlenerek sırayla C ve D olarak adlandırılır.

3



Pergelin sivri ucu C noktasına konularak pergeli, O noktasına kadar açılır. Daha sonra C merkezli yarım çember çizilir. Benzer şekilde D merkezli,  $[OD]$  yarıçaplı yarım çember çizilir.

4



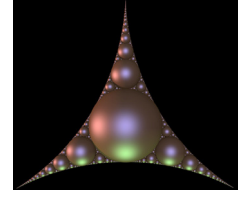
Her defasında aynı işlemler uygulanarak şekildeki fraktal görüntüsü elde edilir.

2. Yukarıdaki işlemleri tam çember için de uygulayarak farklı bir fraktal görüntüsü elde ediniz.

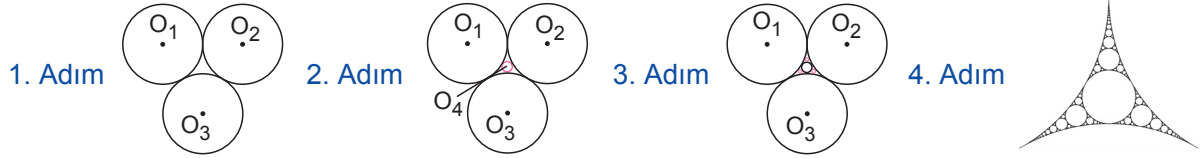


## Örnek

Yandaki şekilde “Apollony (Apolloni) Fraktalı” olarak bilinen görüntü verilmiştir. Bu fraktalın oluşturulma sürecini belirleyelim.



## Çözüm



**1. Adım:** Birbirine dıştan teğet üç eş çember çizilir. Bu çemberlerin merkezleri  $O_1$ ,  $O_2$  ve  $O_3$  olarak adlandırılır.

**2. Adım:**  $O_1$ ,  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli çemberlerin arasındaki bölgeye bu çemberlere dıştan teğet olacak biçimde  $O_4$  merkezli çember çizilir.

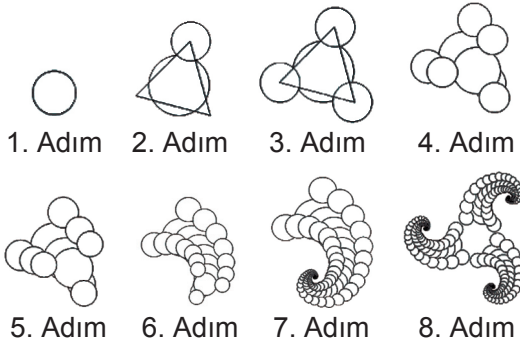
**3. Adım:**  $O_4$  merkezli çember ile  $O_1$ ,  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli çemberlerin arasında kalan bölgelere, bulunduğu bölgedeki çemberlere dıştan teğet olacak biçimde üç çember çizilir.

**4. Adım:** Her çizim sonrasında oluşan boşluklar aynı yöntemle çember çizilerek doldurulur.  $O_1$ ,  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli çemberlerin teğet noktaları arasında kalan parçaları dışındaki diğer parçalar silinip aynı adımlar tekrarlanarak fraktal görüntüsü elde edilir.

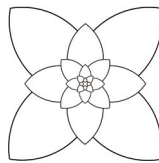


## Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen fraktal görüntüsünün oluşturulma aşamalarını inceleyerek bu fraktalın nasıl oluşturulduğunu açıklayınız.



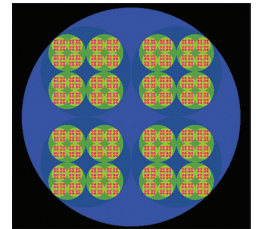
2. Çemberler yardımıyla oluşturulmuş yandaki desenin oluşturulma sürecini açıklayınız.



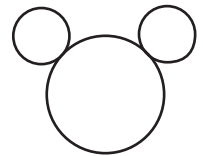
3. Aşağıda çemberler yardımıyla oluşturulmuş düğüm deseninin çizim aşamaları verilmiştir. Bu aşamaları açıklayınız.



4. Çemberler yardımıyla oluşturulmuş yandaki fraktal görüntüsünün oluşturulma sürecini belirleyiniz.



5. Yandaki şekilde bir çemberin belirli bir oranda küçültülmüş üç kopyası ile oluşturulan fraktalın 1. adımı verilmiştir. Bu fraktalın 2. adımını çiziniz.







## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

1. Bir çemberde ..... kirişlerin merkeze olan uzaklıkları eşittir.
2. Çemberin içindeki bir A noktasından geçen kirişlerden en kısa olanı A noktasında ..... kiriştir.
3. Çemberin herhangi bir noktasının yer vektörüne dik olan doğrusuna bu noktadaki ..... , yer vektörünü doğrultman kabul eden doğruya ..... denir.
4. Köşesi çember üzerinde olan ve bir kiriş ile bir teğetin belirlediği açıya ..... denir.
5. Karşılıklı açıları bütünler olan dörtgen bir ..... dörtgenidir.
6. Dıştan teğet üç çemberin değme noktaları arasında kalan yayları gören çevre açılarının ölçüleri toplamı ..... derecedir.
7. Bir çemberin paralel iki kirişi arasında kalan yayların ölçüleri .....
8. Bir çembere öteleme dönüşümü uygulandığında yarıçapının uzunluğu .....
9. Çevresinin uzunluğu 8 br olan karenin çevrel çemberinin çevresinin uzunluğu .....br dir.
10. Bir çemberin herhangi bir noktasındaki teğet ve normal doğrularının eğimleri çarpımı ..... dir.
11. Kuvvet fonksiyonu çemberin ..... bir nokta için pozitif tanımlıdır.

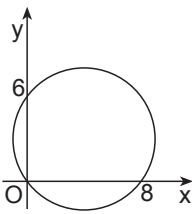
B. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

1. Bir çemberin  $[AB]$  ve  $[CD]$  kirişleri dik kesişiyorsa  $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CB}) + m(\widehat{AD})$  dür. (.....)
2. Karşılıklı kenar uzunlukları toplamaları birbirine eşit olan her dörtgen teğetler dörtgenidir. (.....)
3. Denklemi  $x^2 + (y-1)^2 = 5$  olan çember  $\vec{u} = (-1, 3)$  doğrultusunda ötelenirse denklemi  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$  olan çember elde edilir. (.....)
4. İki çember K ve L noktalarında kesişiyorsa ve ortak teğetleri  $[AB]$  ise KL doğrusu  $[AB]$  nı iki eşit parçaya ayırır. (.....)
5. Parametrik denklemi  $\begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = 1 + 3 \sin t \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$  olan çemberin  $t = \frac{3\pi}{2}$  parametre değerine karşılık gelen nokta A(0,1) dir. (.....)
6.  $[AB] \cap [CD] = \{T\}$  olmak üzere,  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$  ise A, B, C ve D noktaları bir kirişler dörtgeninin köşeleridir. (.....)
7. Bir kenarının uzunluğu a br olan karenin kenarlarına teğet olan dairenin alanı  $\frac{\pi \cdot a^2}{2} \text{ br}^2$  dir. (.....)
8. Genel denklemi  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$  olan çemberin merkezinin koordinatları M(0,3) ve yarıçapının uzunluğu r=2 br dir. (.....)





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

- Her iki eksene teğet olan ve merkezi  $x - 2y = 6$  doğrusu üzerinde bulunan çemberlerden birinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$
  - $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$
  - $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$
  - $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
  - $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
- Koordinat düzleminde  $O(0,0)$ ,  $A(0,-6)$  ve  $B(8,0)$  noktalarından geçen çemberin genel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
  - $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$
  - $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$
  - $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
  - $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$
- Yandaki analitik düzlemde verilen çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
 
  - $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 100$
  - $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
  - $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 50$
  - $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
  - $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = (2x, 2y)$  homoteti dönüşümü altında denklemi  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  olan çemberin görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?
  - $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$
  - $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
  - $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$
  - $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$
  - $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$
- Düzlemde  $M(4, -1)$  noktası için  $\|\overrightarrow{MP}\| = 2$  koşulunu sağlayan noktaların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 2$
  - $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4$
  - $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2$
  - $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 4$
  - $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 2$
- $\begin{cases} x = 3 + 4 \cos t \\ y = -1 + 4 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$  parametrik denklemi ile verilen çemberin genel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 9 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
- Vektörel denklemi  $\|\overrightarrow{OX}\| = \sqrt{2}$  olan orijin merkezli çembere üzerindeki  $A(-1, 1)$  noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $y = x - 2$
  - $y = -x + 1$
  - $y = x + 2$
  - $y = x - 1$
  - $y = -x + 2$
- Standart denklemi  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  olan çembere üzerindeki  $A(6, k)$  noktasından çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
  - $y = -1$
  - $y = 1$
  - $y = 4$
  - $y = -4$
  - $y = 6$
- $3x - 4y - 14 = 0$  doğrusu  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$  çemberine teğet olduğuna göre,  $r$  kaçtır?
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5



10. Şekildeki  $O_1$  ve

$O_2$  merkezli

çemberlerin

A, B, C ve D

noktalarındaki

teğetleri P noktasında kesişmektedir.

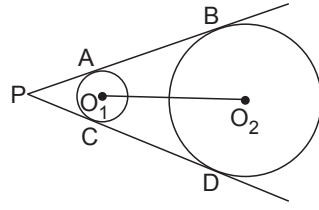
$O_1$  merkezli çemberin yarıçapının uzunluğu

$2\sqrt{3}$  br,  $|O_1O_2| = 8\sqrt{3}$  br ve  $m(\widehat{DPB}) = 60^\circ$

olduğuna göre,  $|CD|$  kaç br dir?

A)  $2\sqrt{3}$  B) 6 C)  $4\sqrt{3}$

D) 8 E) 12



11. Şekildeki O merkezli

çemberde

$m(\widehat{OAB}) = 65^\circ$  ve

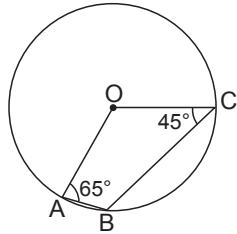
$m(\widehat{OCB}) = 45^\circ$

olduğuna göre,

$m(\widehat{ABC})$  kaç

derecedir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140



12. Şekildeki çemberde

$4m(\widehat{BD}) = m(\widehat{FC})$  ve

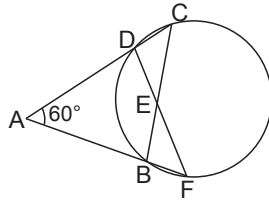
$m(\widehat{CAF}) = 60^\circ$

olduğuna göre,

$m(\widehat{CEF})$

kaç derecedir?

A) 100 B) 105 C) 110 D) 115 E) 120



13. Şekildeki O merkezli

çeyrek çemberde

$[CA] \perp [BO]$  dir.

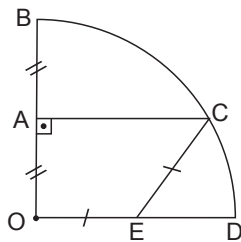
$|BA| = |AO|$  ve

$|OE| = |EC|$

olduğuna göre,

$m(\widehat{CED})$  kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75



14. Şekildeki O merkezli

çemberde

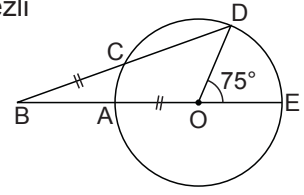
$|BC| = |AO|$  ve

$m(\widehat{DOE}) = 75^\circ$

olduğuna göre,

$m(\widehat{DBE})$  kaç derecedir?

A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25



15. Şekildeki çembere

$[CA]$  ve  $[CE]$  B ve

D noktalarında

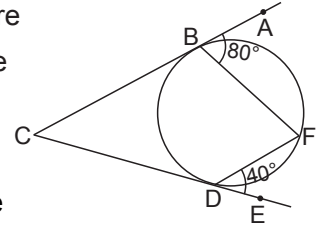
teğettir.

$m(\widehat{ABF}) = 80^\circ$  ve

$m(\widehat{FDE}) = 40^\circ$

olduğuna göre,  $m(\widehat{ACE})$  kaç derecedir?

A) 60 B) 55 C) 50 D) 45 E) 40



16. Yandaki şekilde

$[BE]$  ve  $[CG]$  çembere

sırayla A ve D

noktalarında

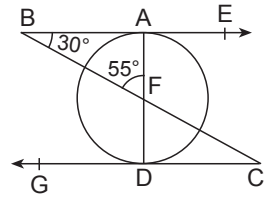
teğettir.

$[AD] \cap [BC] = \{F\}$ ,

$m(\widehat{EBC}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BFA}) = 55^\circ$  olduğuna

göre,  $m(\widehat{GCB})$  kaç derecedir?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50



17. Denklemleri  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 81$  ve

$(x - 9)^2 + (y + 1)^2 = r^2$  olan çemberler birbirine dıştan teğet olduğuna göre, r kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

18. Standart denklemleri  $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 144$

ve  $(x - 7)^2 + (y - k)^2 = 25$  olan iki çemberin

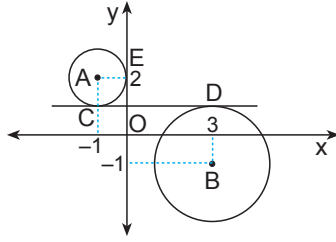
$90^\circ$  altında iki noktaları ortak olduğuna göre,

k'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15



19.



Şekildeki analitik düzlemde  $A(-1, 2)$  ve  $B(3, -1)$  merkezli çemberler verilmiştir. A merkezli çember y eksenine E noktasında teğet ve B merkezli çemberin yarıçapının uzunluğu 2 br olduğuna göre, bu iki çemberin  $[CD]$  ortak dış teğet parçasının uzunluğu kaç br dir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

20. Şekildeki çembere  $[BA]$ , A noktasında teğettir.

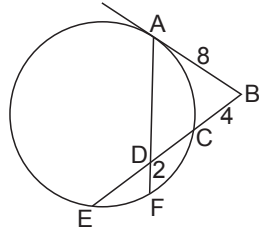
$$[BE] \cap [AF] = \{D\},$$

$$|DE| = |DC|,$$

$$|AB| = 8 \text{ br},$$

$|BC| = 4 \text{ br}$  ve  $|DF| = 2 \text{ br}$  olduğuna göre,  $|AD|$  kaç br dir?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20



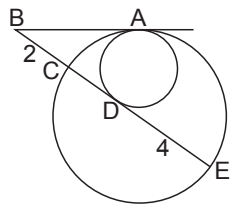
21. Şekildeki çemberler A noktasında içten teğet ve  $[BA]$  çembere A noktasında teğettir.

$$|BC| = 2 \text{ br ve}$$

$$|DE| = 4 \text{ br}$$

olduğuna göre,  $|BA|$  kaç br dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



22. Şekildeki O merkezli çemberde

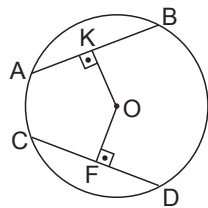
$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \text{ ve}$$

$$|AB| = 16 \text{ br dir.}$$

$$|OK| + |OF| = 12 \text{ br}$$

olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç br dir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6



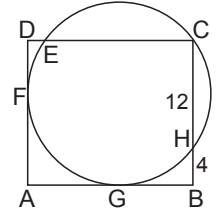
23. Şekildeki ABCD dikdörtgeni çembere F ve G noktalarında teğettir.

$$|CH| = 12 \text{ br ve}$$

$$|HB| = 4 \text{ br}$$

olduğuna göre,  $|EC|$  kaç br dir?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16



24. Şekildeki O merkezli çemberde

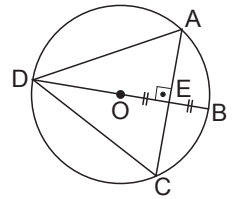
$$[DB] \perp [AC] \text{ ve}$$

$$|OE| = |EB| = 2\sqrt{3} \text{ br}$$

olduğuna göre,

$m(\widehat{ABC})$  kaç derecedir?

- A) 80 B) 100 C) 120 D) 140 E) 150



25. Yandaki şekilde

ABCD dik yamuğu

ve iç teğet çemberi verilmiştir.

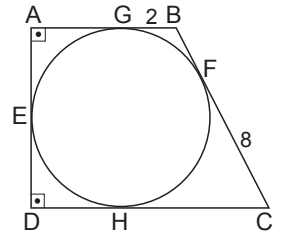
$$[AB] \parallel [DC],$$

$$[BA] \perp [AD],$$

$$|GB| = 2 \text{ br ve } |FC| = 8 \text{ br}$$

olduğuna göre,  $A(ABCD)$  kaç  $\text{br}^2$  dir?

- A) 36 B) 60 C) 72 D) 80 E) 144



26. Şekildeki ABCD

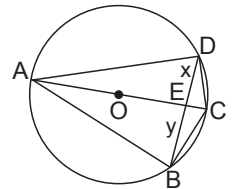
kirişler dörtgeninde

O noktası çemberin merkezi,

$$[AC] \cap [BD] = \{E\},$$

$m(\widehat{BCD}) = 150^\circ$  ve  $x + y = 6 \text{ br}$  olduğuna göre,  $|AC|$  kaç br dir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12





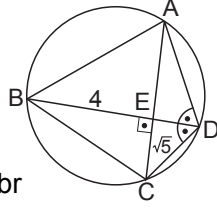
27. Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde

$[AC] \perp [BD]$  ve  $[BD]$ ,

D açısının iç açıortayıdır.

$|BE| = 4$  br ve  $|DC| = \sqrt{5}$  br olduğuna göre,  $|AC|$  kaç br dir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



28. Yandaki şekilde

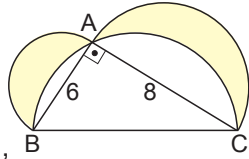
$[AB]$ ,  $[AC]$  ve  $[BC]$

çaplı yarım daireler

verilmiştir.  $[BA] \perp [AC]$ ,

$|AB| = 6$  br ve  $|AC| = 8$  br olduğuna göre, taralı alanların toplamı kaç  $br^2$  dir?

- A)  $\pi + 6$  B)  $\pi + 12$  C)  $4\pi - 6$   
D) 36 E) 24



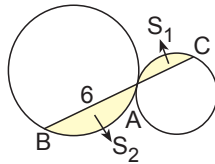
29. Şekildeki daireler birbirine A noktasında teğet, B, A ve C noktaları doğrusaldır.

$S_1$  ve  $S_2$  bulundukları bölgelerin alanları,

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$  ve  $|AB| = 6$  br olduğuna göre,

$|AC|$  kaç br dir?

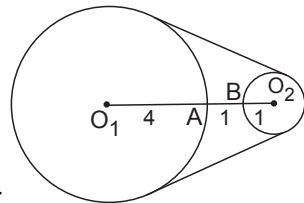
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



30. Şekildeki  $O_1$  ve  $O_2$  merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla 4 br ve 1 br dir.  $|AB| = 1$  br

olduğuna göre, çemberi saran ipin uzunluğu kaç br dir?

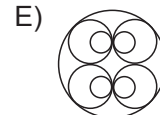
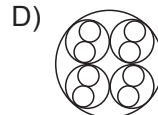
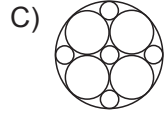
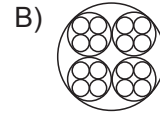
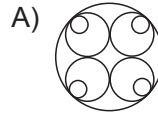
- A)  $8\pi - 2\sqrt{3}$  B)  $6\pi + 6\sqrt{3}$   
C)  $6\pi - 4\sqrt{3}$  D)  $4\pi + 4\sqrt{3}$   
E)  $4\pi - 2\sqrt{3}$



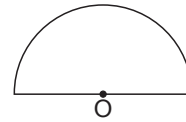
- 31.



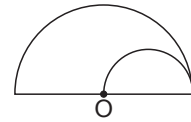
Yukarıda ilk iki adımı verilen örüntünün bir fraktal modeli oluşturması için 3. adımı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?



- 32.



Başlangıç

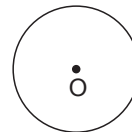


1. Adım

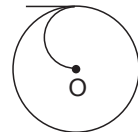
Yukarıda bir fraktalın başlangıç ve 1. adımı verilmiştir. 1. adımındaki görüntü oluşturulurken başlangıç şeklinin yarıçapını çap kabul eden yarım çember çizilmiştir. Buna göre, fraktalın 10. adımında elde edilen çemberin çevresinin uzunluğu kaç br dir? (Başlangıç şeklinin yarıçapının uzunluğu 4 br dir.)

- A)  $\frac{\pi}{32}$  B)  $\frac{\pi}{64}$  C)  $\frac{\pi}{128}$  D)  $\frac{\pi}{256}$  E)  $\frac{\pi}{512}$

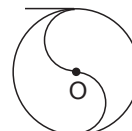
- 33.



1. Adım



2. Adım



3. Adım



Desen

Yukarıda çemberler yardımıyla oluşturulmuş bir desenin ilk üç adımı verilmiştir. Buna göre, desen kaç adımda oluşturulmuştur? (Boyama işlemi bir adım kabul edilecektir.)

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3



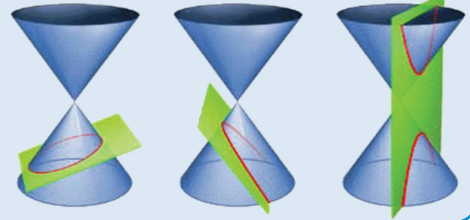
## 5. ÜNİTE

# KONİKLER

### 5.1. Konik ve Koniğin Temel Elemanları

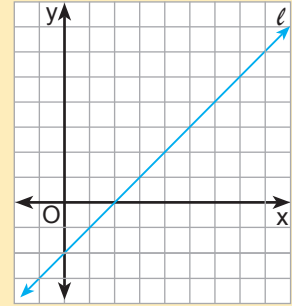


Yandaki şekilde verilen 3 koninin düzlemlerle kesişiminden oluşan eğriler kırmızı çizgilerle gösterilmiştir. Bu eğrilerin benzer ve farklı yönlerini yorumlayarak çevrenizden bu eğrilere benzeyen örnekler veriniz.



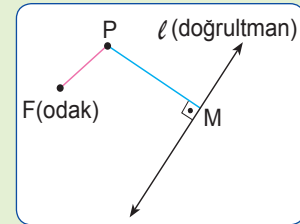
#### Etkinlik

- Yandaki analitik düzlemde denklemleri  $\ell: x - y - 2 = 0$  olan  $\ell$  doğrusu çizilmiştir.  $F(3, 5)$ ,  $P(5, 4)$  ve  $Q(7, 7)$  noktalarını analitik düzlemde göstererek  $|PF|$  ve  $|QF|$  nu bulunuz.
- $P$  ve  $Q$  noktalarından  $\ell$  doğrusuna birer dikme çizip dikme ayaklarını sırayla  $M$  ve  $N$  olarak adlandırınız. Bir noktanın doğru olan uzaklık formülünden yararlanarak  $|PM|$  ve  $|QN|$  nu bulunuz.
- $\frac{|PF|}{|PM|} = e$  olmak üzere,  $e$  sayısını bulunuz.  $\frac{|QF|}{|QN|}$  oranını bularak  $e$  sayısı ile karşılaştırınız.
- $F$  noktasına uzaklığının,  $\ell$  doğrusuna uzaklığı oranı  $e$  sayısına eşit olan noktaların geometrik yerini yorumlayınız.
- $F$  noktasından geçen ve  $\ell$  doğrusuna dik olan doğruyu çizip  $d$  şeklinde adlandırınız. Dik doğruların eğimlerini göz önünde bulundurarak  $d$  doğrusunun denklemini bulunuz.
- $d$  ve  $\ell$  doğrularının denklemlerinin ortak çözümünü yaparak doğruların kesim noktasının koordinatlarını bulunuz ve kesim noktasının geometrik yere göre konumunu sorgulayınız.
- $P$  noktasının  $d$  doğrusuna göre simetrisini bulup  $P'$  olarak adlandırınız.  $P'$  noktasının  $F$  noktasına uzaklığının  $\ell$  doğrusuna uzaklığı oranını bularak  $e$  sayısı ile karşılaştırınız.
- Yaptığınız karşılaştırmaya göre, geometrik yerin  $d$  doğrusuna göre simetrik olup olmadığını açıklayınız.



#### Bilgi Kutusu

- Düzlemde sabit bir noktaya uzaklığının, sabit bir doğruya uzaklığına oranı sabit olan noktaların geometrik yerine **konik** denir. Buradaki sabit doğruya **koniğin doğrultmanı** ( $\ell$ ), sabit noktaya **koniğin odağı** ( $F$ ), sabit orana da **koniğin dış merkezliği** ( $e$ ) denir.
- Koniğin temel elemanları doğrultmanı, odağı ve dış merkezliğidir.
- $[PM] \perp \ell$  olmak üzere, koniğin denklemi  $\frac{|FP|}{|PM|} = e$  şeklindedir.





### Örnek

Odağı  $F(-1, 2)$  noktası ve doğrultmanı  $\ell: 4x - 3y + 2 = 0$  doğrusu olan koniğin üzerindeki bir noktada  $P(-2, 3)$  olmak üzere, koniğin dış merkezliğini bulalım.

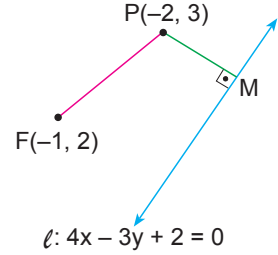
### Çözüm

Verilen bilgilere göre yandaki şekil çizildiğinde,

$$|PM| = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ br ve}$$

$$|FP| = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2} \text{ br olur.}$$

$$\text{Buradan koniğin dış merkezliği } e = \frac{|FP|}{|PM|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ bulunur.}$$



### Örnek

Odağı  $F(5, 4)$  noktası, doğrultmanı  $\ell: x + 2y = 6$  doğrusu ve üzerindeki bir noktası  $A(3, 6)$  olan bir konik veriliyor. Buna göre;

a. Koniğin odağından geçen ve doğrultmanını dik kesen doğru d olmak üzere, d doğrusunun denklemini bulalım.

b. d doğrusu ile  $\ell$  doğrusunun kesim noktasının koordinatlarını bulalım.

### Çözüm

a.  $\ell: x + 2y = 6$  ise  $m_\ell = -\frac{1}{2}$  dir.  $d \perp \ell$  olduğundan  $m_d \cdot m_\ell = -1 \Rightarrow m_d \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m_d = 2$  dir.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde  $d: y - 4 = 2(x - 5) \Rightarrow d: y = 2x - 6$  bulunur.

b. d ve  $\ell$  doğrularının kesim noktası D olsun. Doğru denklemlerinin ortak çözümünden,

$x + 2y = 6 \Rightarrow x + 2(2x - 6) = 6 \Rightarrow 5x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{5}$  ve  $y = 2x - 6 \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{18}{5} - 6 = \frac{6}{5}$  elde edilir. Buradan  $D\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$  bulunur.

### Örnek

Odağı  $F(-5, 5)$  noktası, doğrultmanı  $3y - x - 6 = 0$  doğrusu ve üzerindeki bir noktası  $A(-7, 1)$  olan konik ile aynı odağa ve doğrultmana sahip, üzerindeki bir noktası  $A'(-1, 3)$  olan koniğin dış merkezliklerini bularak birbirleri ile karşılaştıralım.

### Çözüm

A ve  $A'$  noktalarının odak noktasına uzaklıkları,  $|AF| = \sqrt{(-5 - (-7))^2 + (5 - 1)^2} = 2\sqrt{5}$  br ve  $|A'F| = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (5 - 3)^2} = 2\sqrt{5}$  br dir. A ve  $A'$  noktalarının doğrultman üzerindeki dik izdüşümleri B ve  $B'$  olmak üzere,  $|AB| = \frac{|3 \cdot 1 - (-7) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$  br ve  $|A'B'| = \frac{|3 \cdot 3 - (-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$  br'dir.

Koniklerin dış merkezlikleri  $e_1$  ve  $e_2$  olmak üzere,  $e_1 = \frac{|AF|}{|AB|} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$  ve  $e_2 = \frac{|A'F|}{|A'B'|} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$  elde edilir. Dolayısıyla bu koniklerin dış merkezlikleri birbirine eşittir.

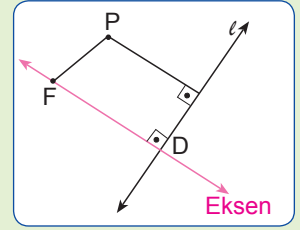




### Bilgi Kutusu

1. Koniğin odağından geçen ve doğrultmana dik olan doğruya **koniğin eksen** denir. Koniğin eksenini ile doğrultmanın kesiştiği nokta "D" ile gösterilir.

2. Her konik kendi eksenine göre simetrik.



### Örnek

Odağı  $F(-3, 4)$  noktası ve doğrultmanı  $\ell: x + y + 5 = 0$  doğrusu olan koniğin eksenini ve D noktasını bulalım.

### Çözüm

Koniğin doğrultmanı olan  $\ell$  doğrusunun eğimi  $m_\ell = -1$  dir. Koniğin eksenini  $d$  doğrusu olmak üzere,  $d \perp \ell$  olduğundan  $m_d \cdot m_\ell = -1 \Rightarrow m_d \cdot (-1) = -1 \Rightarrow m_d = 1$  dir. Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde  $d: y - 4 = 1(x + 3) \Rightarrow d: y = x + 7$  olur.

D noktası,  $d$  ve  $\ell$  doğrularının kesim noktası olduğu için doğru denklemlerinin ortak çözümünden,  $x + y + 5 = 0 \Rightarrow x + x + 7 + 5 = 0 \Rightarrow 2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -6$  ve  $y = x + 7 \Rightarrow y = -6 + 7 \Rightarrow y = 1$  elde edilir. Buradan  $D(-6, 1)$  bulunur.

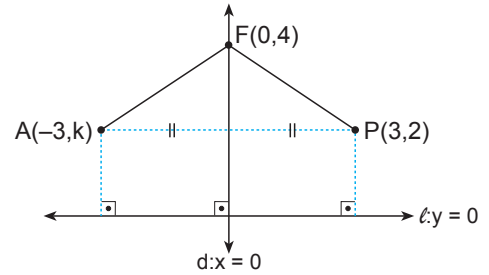
### Örnek

Odağı  $F(0, 4)$  noktası, doğrultmanı  $y = 0$  doğrusu olan bir koniğin üzerindeki iki nokta  $P(3, 2)$  ve  $A(-3, k)$  olduğuna göre,  $k$  değerini bulalım.

### Çözüm

Verilen koniğin odağı  $F(0, 4)$  noktası ve doğrultmanı  $y = 0$  doğrusu olduğundan eksenini  $x = 0$  doğrusudur. Her konik kendi eksenine göre simetrik olduğundan konik üzerindeki her noktada eksenine göre simetrik olmalıdır. Yandaki şekil incelendiğinde  $P$  noktasının eksenine göre simetrisinin  $A$  noktası olduğu görülür.

O hâlde,  $k = 2$  olmalıdır.



### Uygulama Köşesi

Koniklerle ilgili aşağıda verilen tabloyu doğru olacak şekilde doldurunuz.

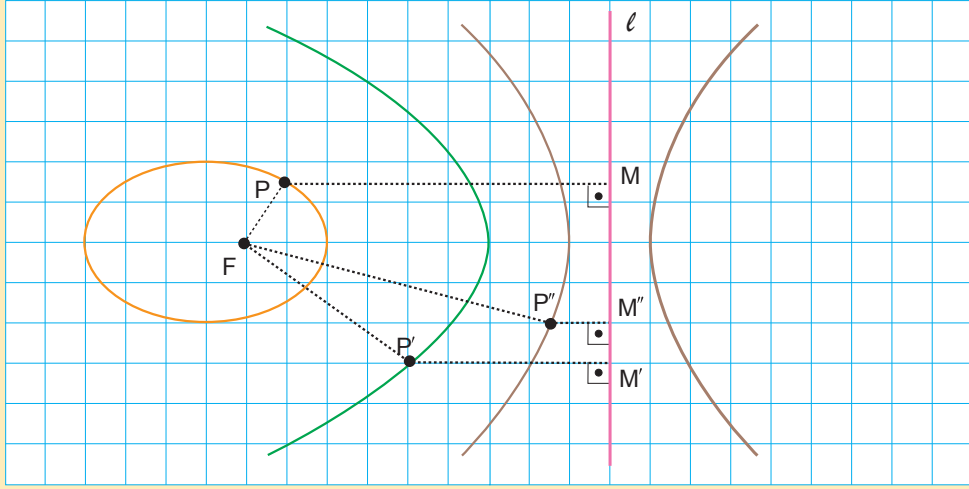
Odağı (F)	Üzerindeki bir noktası (P)	Dış merkezliği (e)	Doğrultmanı ( $\ell$ )	Eksenini (d)	D noktası
$F(-2, 3)$	$P(3, 7)$		$x = 4$		
$F(3, 3)$	$P(-2, 8)$				$(0, 0)$
$F(2, 2)$	$F(4, 4)$		$y = -x + 4$		

Tablo: 5.1.1





## Etkinlik



Yukarıdaki şekilde birim kareli kâğıt üzerine çizilmiş bazı eğriler ile  $\ell$  doğrusu verilmiştir.  $P, P'$  ve  $P''$  noktaları eğriler üzerinde,  $M, M'$  ve  $M''$  noktaları ise  $\ell$  doğrusu üzerinde hareketli noktalardır. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

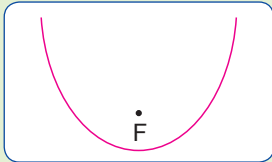
1.  $\frac{|FP|}{|PM|}$ ,  $\frac{|FP'|}{|P'M'|}$  ve  $\frac{|FP''|}{|P''M''|}$  oranlarını bulunuz. Bulduğunuz oranlardan 0 ile 1 arasında, 1 e eşit veya 1 den büyük olanları belirleyiniz.
2.  $P, P'$  ve  $P''$  bulundukları eğri üzerinde  $M, M'$  ve  $M''$  ise bulundukları doğru üzerinde kalmak şartıyla, bu noktalar hareket ettirildiğinde yukarıdaki bulduğunuz oranların değişimini yorumlayınız.
3. Verilen eğrileri, odağı  $F$  noktası, doğrultmanı  $\ell$  doğrusu olan konikler şeklinde düşünerek bu koniklerin grafiklerini dış merkezlikleri ile ilişkilendiriniz.
4. Koniklerin eksenlerini çizerek  $D$  noktalarını ve eksenlerinin konikleri kestiği noktaları işaretleyiniz.
5. İşaretlediğiniz kesim noktalarını  $[DF]$  nın üzerinde veya dışında olma durumlarına göre sınıflandırınız. Yaptığınız bu sınıflandırmanın koniklerin dış merkezlikleri ile ilişkisini tartışınız.



## Bilgi Kutusu

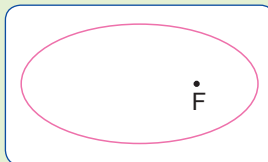
1. Konikler dış merkezliklerine göre, aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

a.



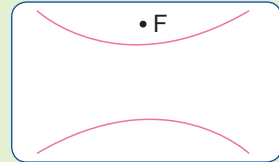
$e = 1$  ise konik parabolüdür.

b.



$0 < e < 1$  ise konik elipstir.

c.



$e > 1$  ise konik hiperboldür.

2. Koniğin eksenini ile kesiştiği noktalara koniğin **tepe noktaları** denir.  $F$ , koniğin odak noktası ve  $T, T'$  koniğin tepe noktaları olmak üzere,  $T \in [DF]$  ise  $T = \frac{F + eD}{1 + e}$  ve  $T' \notin [DF]$  ise  $T' = \frac{F - eD}{1 - e}$ , ( $e \neq 1$ ) biçimindedir.



### Örnek

Doğrultmanları  $x + y - 2 = 0$  doğrusu ve odakları  $F(5, 3)$  noktası olan üç konik veriliyor.

Buna göre,

- a.  $A(2, 6)$  noktasından geçen koniğin cinsini,
- b.  $B(1, 8)$  noktasından geçen koniğin cinsini,
- c.  $C(4, 2)$  noktasından geçen koniğin cinsini bulalım.

### Çözüm

a. A noktasının doğrultmana olan uzaklığı  $h_1$  olmak üzere,

$$h_1 = \frac{|2 + 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ br ve } |AF| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ br dir.}$$

Buradan dış merkezlik  $e = \frac{|AF|}{h_1} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1$  elde edilir.  $e = 1$  olduğundan A noktasından geçen konik bir paraboldür.

b. B noktasının doğrultmana olan uzaklığı  $h_2$  olmak üzere,

$$h_2 = \frac{|1 + 8 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ br ve } |BF| = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{41} \text{ br dir. Buradan dış merkezlik}$$

$$e = \frac{|BF|}{h_2} = \frac{\sqrt{41}}{\frac{7}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{82}}{7} \text{ elde edilir. } e > 1 \text{ olduğundan B noktasından geçen konik bir hiperboldür.}$$

c. C noktasının doğrultmana olan uzaklığı  $h_3$  olmak üzere,

$$h_3 = \frac{|4 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ br ve } |CF| = \sqrt{(5 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2} \text{ br dir. Buradan dış merkezlik}$$

$$e = \frac{|CF|}{h_3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ elde edilir. } 0 < e < 1 \text{ olduğundan C noktasından geçen konik bir elipstir.}$$

### Örnek

Odağı  $F(3, 0)$  noktası, dış merkezliği  $e = \frac{3}{5}$  olan elipste  $D\left(\frac{25}{3}, 0\right)$  olduğuna göre,  $[DF]$  üzerinde olan ve olmayan tepe noktalarının koordinatlarını bulalım.

### Çözüm

Elipsin  $[DF]$  üzerinde olan tepe noktası  $T$ , üzerinde olmayan tepe noktası  $T'$  olmak üzere,

$$T = \frac{F + eD}{1 + e} = \frac{(3, 0) + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{25}{3}, 0\right)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{(3, 0) + (5, 0)}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \cdot (8, 0) = (5, 0) \text{ ve}$$

$$T' = \frac{F - eD}{1 - e} = \frac{(3, 0) - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{25}{3}, 0\right)}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{(3, 0) - (5, 0)}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \cdot (-2, 0) = (-5, 0) \text{ bulunur.}$$





## Alıştırımlar

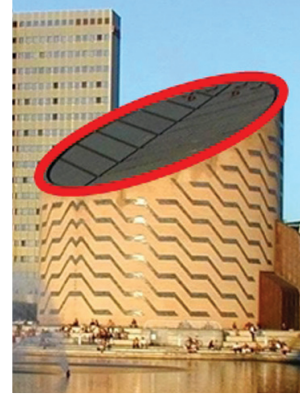
1.



1



2

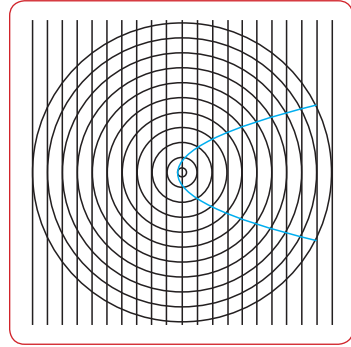
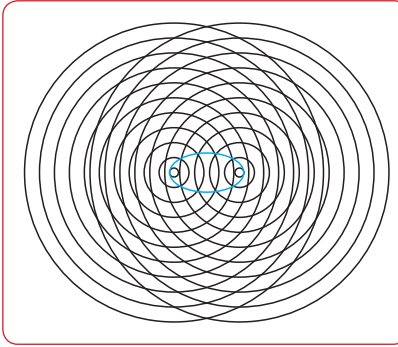
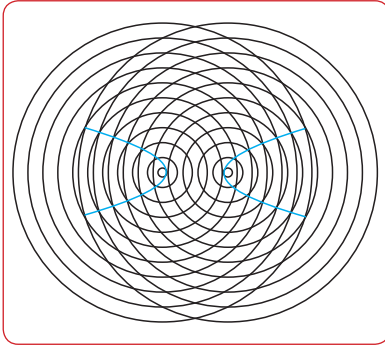


3

Yukarıdaki fotoğraflarda kırmızı çizgilerle belirlenmiş konikler için aşağıdaki boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- a. 1. fotoğraftaki koniğin cinsi ..... olduğundan dış merkezliği ..... dir.  
b. 2. fotoğraftaki koniğin cinsi ..... olduğundan dış merkezliği ..... dir.  
c. 3. fotoğraftaki koniğin cinsi ..... olduğundan dış merkezliği ..... dir.

2. Aşağıdaki şekillerde çember ve doğru sistemleri yardımıyla konik çizimleri yapılmıştır. Çizimlerin nasıl yapıldığını sorgulayarak her şekil üzerinde koniğin benzerlerini çizimlerle elde ediniz.



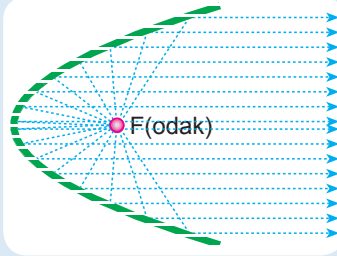
3. Odağı  $F(-7, 2)$  noktası ve doğrultmanı  $12x + 5y - 7 = 0$  doğrusu olan koniğin üzerindeki bir noktada  $A(-4, -2)$  olduğuna göre, bu koniğin cinsi nedir?
4. Odağı  $F(3, -1)$  noktası ve doğrultmanı  $x - 2y + 1 = 0$  doğrusu olan koniğin ekseninin denklemini bulunuz.
5. Odağı  $F(2, 1)$  noktası olan bir parabolde  $D(3, -3)$  olduğuna göre, bu parabolün tepe noktasının koordinatlarını bulunuz.
6. Odağı  $F(4, 0)$  noktası, dış merkezliği  $e = 2$  olan bir hiberbolde  $D(-4, 6)$  olduğuna göre, bu hiperbolün  $[DF]$  nın üzerinde olan ve olmayan tepe noktalarının koordinatlarını bulunuz.
7. Odağı  $F(-3, 0)$  noktası ve  $[DF]$  üzerinde olmayan tepe noktasının koordinatları  $T(4, 0)$  olan elipste  $D\left(\frac{16}{3}, 0\right)$  olduğuna göre, elipsin dış merkezliği kaçtır?



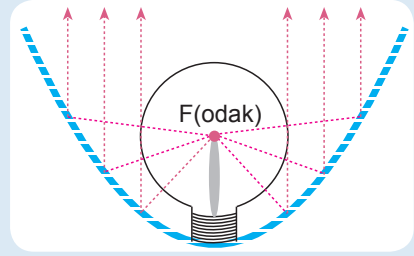
## 5.2. Parabol ve Standart Denklemleri



Şekil 1’de verilen parabolik bir bilyardo masası modelinde masanın odak noktasına konulan bir topun merkezine istekle ile herhangi bir istikâmete doğru vurulursa parabole çarpan top parabolün simetri eksenine paralel gider. Araba farlarının çalışma sistemlerinde de parabolün bu özelliğinden faydalanılır. Şekil 2’deki far içinde bulunan parabolik aynanın odak noktasına yerleştirilen ampulden çıkan ışık parabolik aynaya çarparak simetri eksenine paralel bir şekilde yansır ve yolu aydınlatır. Siz de parabolün bu özelliğinin kullanıldığı alanlara örnekler veriniz.



Şekil 1

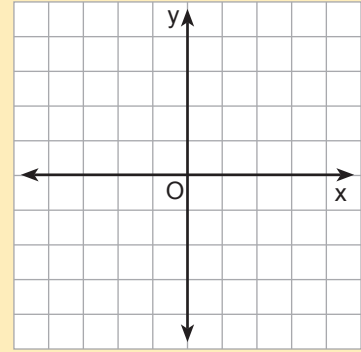


Şekil 2



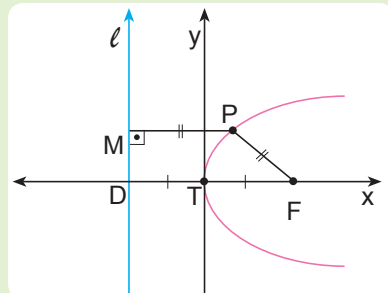
### Etkinlik

1. Yandaki analitik düzlemde  $F(3, 0)$  noktasını işaretleyip  $\ell: x = -3$  doğrusunu çiziniz.
2.  $F$  noktasına ve  $\ell$  doğrusuna eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.
3. Geometrik yer üzerinde ve analitik düzlemin farklı bölgelerinde olan noktalar seçiniz. Bu noktaların  $F$  noktasına ve  $\ell$  doğrusuna olan uzaklıklarının eşitliğini göz önünde bulundurarak geometrik yerin dış merkezliğini bulunuz.
4. Dış merkezliği 1 sayısı ile karşılaştırarak geometrik yerin belirttiği koniği söyleyiniz. Koniğin grafiğini etkinliğin 3. adımında seçtiğiniz noktalardan geçecek şekilde çiziniz.
5. Koniğin eksenini çizip  $d$  olarak adlandırınız.  $d$  doğrusunun denklemini bulunuz.
6.  $d$  ve  $\ell$  doğrularının kesim noktası  $D$  olmak üzere,  $d$  noktasının koordinatlarını bulunuz.
7. Koniğin tepe noktası  $T$ , odağı  $F$  olmak üzere,  $T$  noktasının  $D$  ve  $F$  noktaları türünden ifadesini bulunuz.
8. Dış merkezliği 1 olan koniğin denklemi verildiğinde, koniğin odak noktasının koordinatlarının ve doğrultmasının denkleminin nasıl bulunabileceğini açıklayınız.



### Bilgi Kutusu

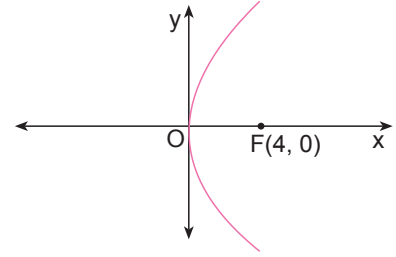
1. Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **parabol** denir.
2.  $e = \frac{|PF|}{|PM|} = 1$  değerine, **parabolün dış merkezliği** denir.
3. Parabolün dış merkezliği  $e = 1$  olduğundan tek tepe noktası  $T = \frac{D+F}{2}$  dir.





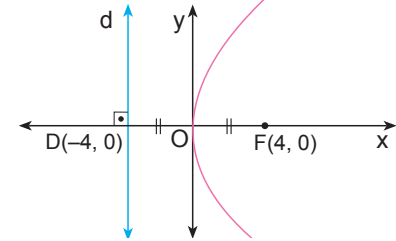
### Örnek

Yandaki şekilde odak noktası  $F(4, 0)$  ve tepe noktası orijin olan bir parabolün grafiği verilmiştir. Parabolün doğrultmanının denklemini bulalım.



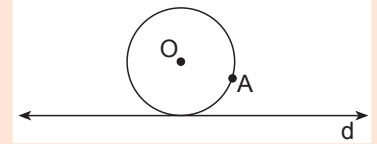
### Çözüm

Parabolün doğrultmanı şekil üzerinde  $d$  doğrusu ile gösterilmiştir. Parabolün tepe noktası orijin olduğundan  $|DO| = |OF| = 4$  br olur. Bundan dolayı  $D(-4, 0)$  dir. Buradan parabolün doğrultmanının denklemini  $d: x = -4$  bulunur.

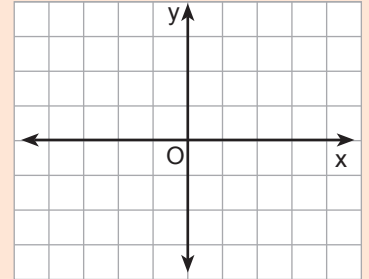


### Uygulama Köşesi

1. Yandaki şekilde  $d$  doğrusuna teğet olan ve  $A$  noktasından geçen  $O$  merkezli bir çember verilmiştir.  $A$  noktasından geçen ve  $d$  doğrusuna teğet olan farklı çemberler çiziniz. Bu çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini yorumlayarak denklemini bulunuz.



2. Odak noktası  $F(0, 3)$  ve tepe noktası orijin olan parabolün doğrultmanının denklemini bularak grafiğini çiziniz.



### Örnek

Aşağıda odağı ve doğrultmanları verilen parabollerin standart denklemlerini bulalım.

- a. Odağı  $F(c, 0)$  noktası ve doğrultmanı  $x + c = 0$  doğrusu
- b. Odağı  $F(0, c)$  noktası ve doğrultmanı  $y + c = 0$  doğrusu

### Çözüm

a. Parabol üzerindeki herhangi bir nokta  $P(x, y)$  ve  $P$  noktasının odağa olan uzaklığı  $a$  br olmak üzere, parabolün tanımından  $a = |PF|$  olmalıdır. Buradan parabolün standart denklemini,  $a = |PF| \Rightarrow |x + c| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 4cx$  bulunur.

b. Parabol üzerindeki herhangi bir nokta  $P(x, y)$  ve  $P$  noktasının odağa olan uzaklığı  $b$  br olmak üzere, parabolün tanımından  $b = |PF|$  olmalıdır. Buradan parabolün standart denklemini,  $b = |PF| \Rightarrow |y + c| = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \Rightarrow y^2 + 2cy + c^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2 \Rightarrow x^2 = 4cy$  bulunur.

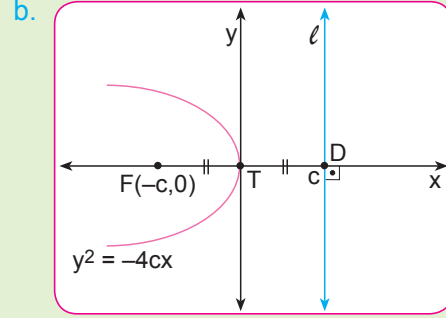
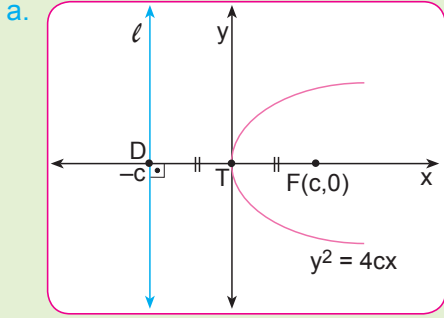




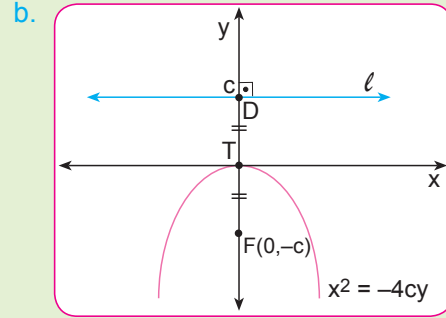
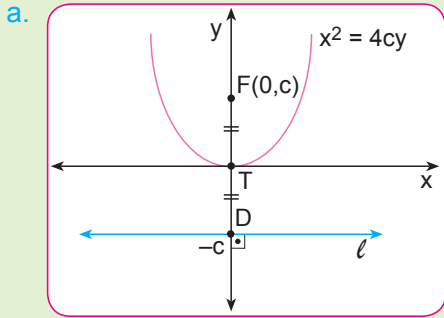
### Bilgi Kutusu

Tepe noktası orijin olan bir parabolde  $T = \frac{D+F}{2} \Rightarrow D = -F$  dir.

1. Parabolün eksenini X eksen, T noktasından geçen ve doğrultmana paralel olan doğru da Y eksen alınarak oluşturulan dik koordinat sisteminde,  $F(c, 0)$  seçildiğinde  $D(-c, 0)$  olur. Bu parabolün standart denklemi  $y^2 = 4cx$  ve doğrultmanın denklemi  $x + c = 0$  dir. Bu denkleme ait grafikler a ve b maddelerinde gösterilmiştir.



2. Parabolün eksenini Y eksen, T noktasından geçen ve doğrultmana paralel olan doğru da X eksen alınarak oluşturulan dik koordinat sisteminde  $F(0, c)$  seçildiğinde  $D(0, -c)$  olur. Bu parabolün standart denklemi  $x^2 = 4cy$  ve doğrultmanın denklemini  $y + c = 0$  dir. Bu denkleme ait grafikler a ve b maddelerinde gösterilmiştir.



### Örnek

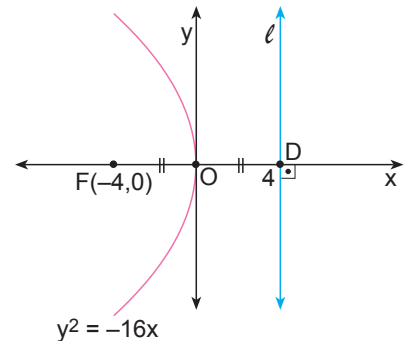
Tepe noktası orijin ve doğrultmanı  $x - 4 = 0$  doğrusu olan parabolün odak noktasını, doğrultmanlarını ve standart denklemini bularak grafiğini çizelim.

### Çözüm

Tepe noktası orijin ve odak noktası  $F(c, 0)$  olan parabolün denklemi  $y^2 = 4cx$  ve doğrultmanı  $x + c = 0$  doğrusudur.

$x - 4 = 0$  ve  $x + c = 0$  doğruları karşılaştırıldığında  $c = -4$  olduğu görülür. Buradan parabolün odağı  $F(c, 0) = F(-4, 0)$  noktası ve doğrultmanı  $x = 4$  doğrusu olarak elde edilir.

Parabolün standart denklemi  $y^2 = 4cx \Rightarrow y^2 = -16x$  bulunur. Doğrultman ve odak analitik düzlemde gösterilerek parabolün grafiği yandaki gibi çizilir.





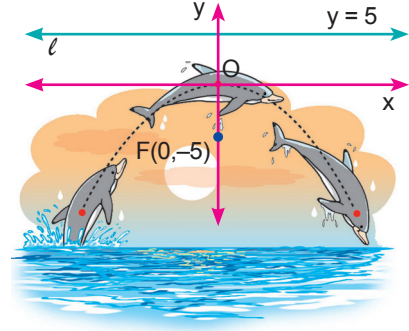
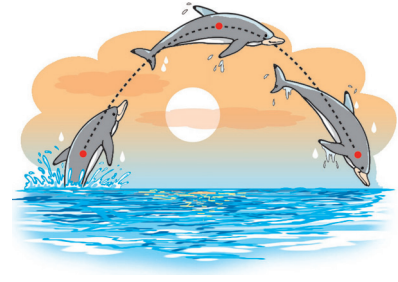
### Örnek

Yandaki fotoğrafta bir yunusun su yüzeyindeki atlayışı verilmiştir. Yunusun atlayışı boyunca çizdiği eğri bir parabol oluşturmaktadır. Yunusun atlayışı boyunca ulaştığı en yüksek seviyeyi orijin kabul ederek bu eğriyi analitik düzlemde modelleyelim. Eğrinin doğrultmanını  $y - 5 = 0$  doğrusu olarak modellenen parabolün denklemini bulalım.

### Çözüm

Yunusun hareketi boyunca oluşturduğu eğri analitik düzlemde şekildeki gibi modellenmiştir. Tepe noktası orijin, ekseni y ekseni olan parabolün doğrultmanı  $y + c = 0$  ve standart denklemi  $x^2 = 4cy$  dir. Modeldeki parabolün doğrultmanı  $y - 5 = 0$  olduğundan  $c = -5$  tir. Bundan dolayı parabolün denklemi,

$$x^2 = 4cy \Rightarrow x^2 = 4(-5)y \Rightarrow x^2 = -20y \text{ bulunur.}$$



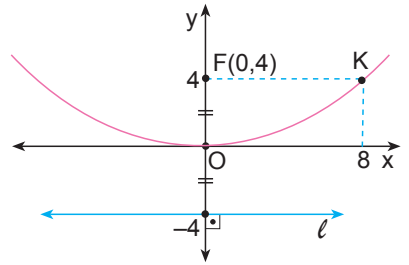
### Örnek

Tepe noktası orijin, ekseni y ekseni olan ve  $K(8, 4)$  noktasından geçen parabolün denklemini bularak grafiğini çizelim.

### Çözüm

Tepe noktası orijin ekseni y ekseni olan parabolün standart denklemi  $x^2 = 4cy$  dir. Parabol  $K(8, 4)$  noktasından geçtiği için  $x = 8$  ve  $y = 4$  değerleri parabolün denklemini sağlar.

Buradan  $8^2 = 4.c.4 \Rightarrow c = 4$  br elde edilir. O hâlde parabolün odağı  $F(0,4)$  noktası, denklemi  $x^2 = 16y$  şeklinde bulunur. Parabolün grafiği yandaki analitik düzlemde verilmiştir.



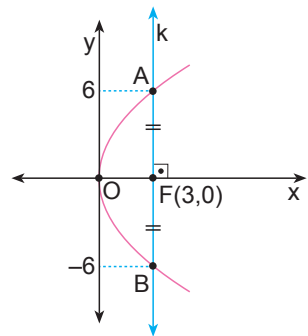
### Örnek

Standart denklemi  $y^2 = 12x$  olan parabolün odağından geçen en kısa kirişin uzunluğunu bulalım.

### Çözüm

Parabolün odağından geçen en kısa kiriş, parabolün eksenini dik kesen doğru üzerindedir. Şekildeki  $k$  doğrusunun parabolü kestiği noktalar  $A$  ve  $B$  olmak üzere, odaktan geçen en kısa kiriş  $[AB]$  dir.  $y^2 = 12x$  ve  $y^2 = 4cx$  denklemleri karşılaştırıldığında  $12 = 4c \Rightarrow c = 3$  olduğu görülür. Buradan odak noktası  $F(3, 0)$  bulunur.

Parabolün denkleminde  $x = 3$  yazılarak  $A$  ve  $B$  noktalarının koordinatları  $x = 3 \Rightarrow y^2 = 12.3 \Rightarrow y_1 = 6$  ve  $y_2 = -6 \Rightarrow A(3, 6)$  ve  $B(3, -6)$  elde edilir. Buradan  $|AB| = 6 + 6 = 12$  br bulunur.





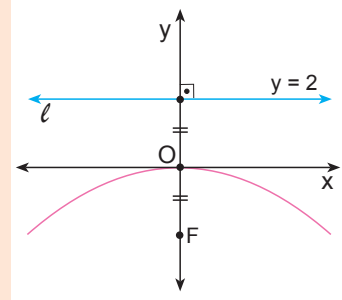
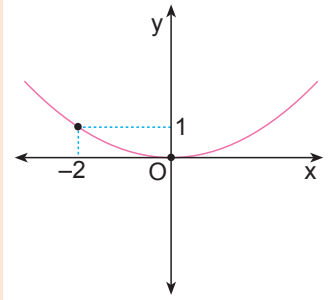
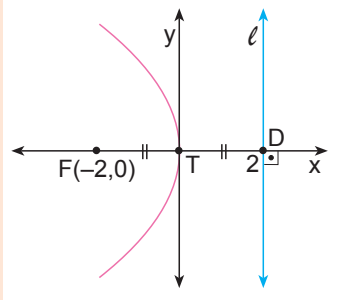
## Uygulama Köşesi

1. Tepe noktası orijin olan parabollerle ilgili verilen aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde tamamlayınız

Parabolün odak noktası	Parabolün doğrultmanı	Parabolün denklemi
$F(10, 0)$		
	$x - 6 = 0$	
		$y^2 = 8x$

Tablo: 5.2.1

2. Aşağıda grafikleri verilen parabollerin denklemlerini bulunuz.



## Alıştırmalar

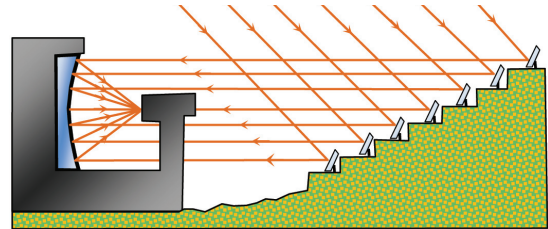
1. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

- Denklemi  $y = 3x^2$  olan parabolün kolları ..... doğrudur.
- Odağı  $F(1,0)$  noktası ve doğrultmanı  $x = -1$  olan parabolün standart denklemi ..... dir.
- Standart denklemi  $x^2 = -16y$  olan parabolün odağı ..... noktasıdır.
- Standart denklemi  $y^2 = -6x$  olan parabolün odağı ..... eksenı üzerindedir.

2. Tepe noktası orijin ve odak noktası  $F(0, 4)$  olan parabolün üzerinde  $A(2, k)$  noktası veriliyor. Buna göre,  $k$  kaçtır?

3. Tepe noktası orijin ve standart denklemi  $x^2 = 24y$  olan parabol veriliyor. Bu parabolün odak ve tepe noktalarının orta noktasından geçen en kısa kirisin uzunluğu kaç br dir?

4.



Şekilde verilen güneş enerji santralinde, güneş ışınları ile dönen bilgisayar destekli, 7 düz aynadan oluşan enerji panelleri bulunmaktadır. Güneşten gelen ve panellerden yansıyan ışınlar büyük bir parabolik aynaya çarparak belirli bir noktada toplanır ve en sıcak bölgeyi oluşturur. Buna göre;

- Parabolik aynadan yansıyan ışınların neden bir noktada toplandığı tartışınız.
- Doğrultmanını  $x = 10$  doğrusu kabul ederek modellenen parabolün denklemini bulunuz.

5.  $y^2 = 6x$  parabolünün  $y = x + 5$  doğrusuna en yakın noktasının ordinatı kaçtır?



### 5.3. Elips ve Standart Denklemi



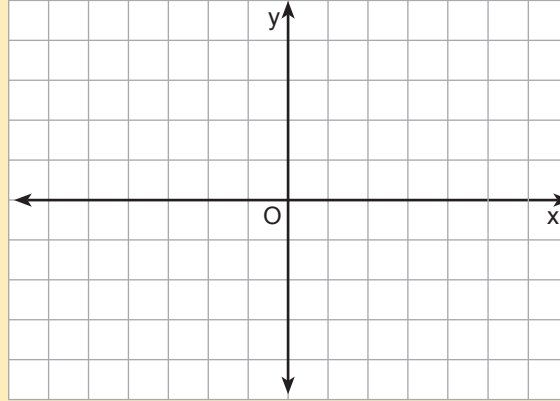
Düzlemi bakış doğrumuza dik olmayan bir çemberin elips olarak görünmesini, eğik tutulmuş ve yarısına kadar su dolu silindir biçimindeki bir bardağın su yüzeyinin görünümünü, gezegenlerin güneş etrafındaki yörüngelerini birer elips olarak düşünebiliriz. Elipsin iki odak noktası olan kapalı bir eğri biçiminde olması onun bu özelliğinin çeşitli alanlarda kullanılmasına olanak sağlar.

Örneğin böbrek taşlarının kırılmasında kullanılan cihazlarda elips şeklindeki çelik çanağın bir odağından gönderilen şok dalgaları taşın bulunduğu diğer odakta yoğunlaşarak taşı kırar. Siz de elipsin bu özelliğinin kullanıldığı alanlara örnekler veriniz.



#### Etkinlik

1. Aşağıdaki koordinat düzleminde  $F_1(-3, 0)$ ,  $F_2(3, 0)$ ,  $A(-5, 0)$ ,  $C(5, 0)$ ,  $B(0, 4)$  ve  $D(0, -4)$  noktalarını işaretleyiniz.



2.  $F_1OB$  ve  $F_2OB$  üçgenlerini oluşturarak Pisagor teoremi yardımıyla  $|F_1B|$  ve  $|F_2B|$  bulunuz. Bu uzunlukların toplamını  $2a$  olarak adlandırınız.

3.  $|AF_1| + |AF_2|$ ,  $|CF_1| + |CF_2|$  ve  $|DF_1| + |DF_2|$  toplamalarını bularak  $2a$  değeri ile karşılaştırınız.

4. Koordinat düzleminde,  $F_1$  ve  $F_2$  noktalarına uzaklıkları toplamı  $2a$  değerine eşit olan başka noktalar bularak bu noktaların geometrik yerinin hangi konik olduğunu belirleyiniz.

5. Belirlediğiniz koniğin grafiğini A, B, C ve D noktalarından geçecek şekilde çizin.

6. Çizdiğiniz grafik üzerinde koniğin odak noktalarını ve tepe noktalarını belirleyiniz.

7. Çizdiğiniz grafik üzerindeki her noktanın koniğin odak noktaları ile arasındaki ilişkiyi açıklayınız.





### Bilgi Kutusu

1. Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. Sabit olan iki noktaya **elipsin odakları**, uç noktaları odaklar olan doğru parçasının orta noktasına **elipsin merkezi** denir.

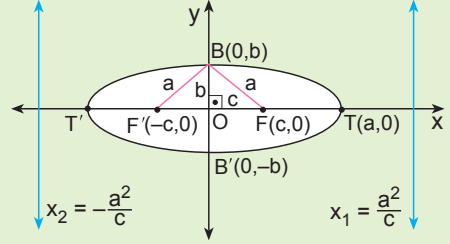
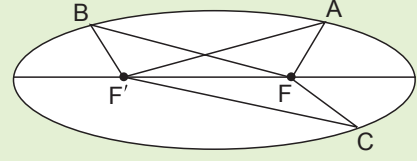
Şekildeki elipsin odakları F ve F' noktaları olmak üzere,  $|AF| + |AF'| = |BF| + |BF'| = |CF| + |CF'| = \dots = 2a$  dir.

2. Şekildeki O merkezli elipsin tepe noktaları T, T', B ve B' olmak üzere, TT' doğrusuna elipsin **büyük eksen**, BB' doğrusuna **elipsin küçük eksen** denir.

\* Elipsin büyük eksen uzunluğu  $|TT'| = 2a$  br ve küçük eksen uzunluğu  $|BB'| = 2b$  br dir.

\*  $|BF| + |BF'| = 2a$  ve  $|BF| = |BF'|$  olduğundan  $|BF| = |BF'| = a$  br dir. BOF dik üçgeninde  $a^2 = b^2 + c^2$  ve  $a > b$  dir.

\* Elipsin dış merkezliği  $e = \frac{c}{a}$  ( $0 < e < 1$ ) ve doğrultmanları  $x = \pm \frac{a^2}{c}$  doğrularıdır.



### Örnek

Büyük eksen x eksenine olan orijin merkezli bir elipsin büyük eksen uzunluğu 10 br, küçük eksen uzunluğu 8 br olduğuna göre, elipsin odakları arası uzaklığını, dış merkezliğini ve doğrultmanlarını bulalım.

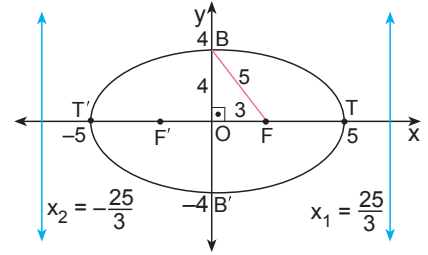
### Çözüm

Verilen bilgilere göre şekildeki elipste  $|TT'| = 10$  br ve  $|BB'| = 8$  br dir. O noktası elipsin merkezi olduğundan,  $a = |OT'| = |OT| = 5$  br ve  $b = |OB| = |OB'| = 4$  br'dir.

Elipsin odağı F(c, 0) noktası olmak üzere,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ br dir.}$$

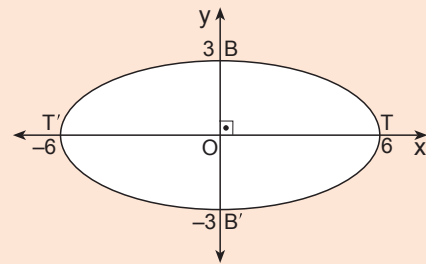
Buradan elipsin odaklar arası uzaklığı  $|FF'| = 2c = 2 \cdot 3 = 6$  br, dış merkezliği  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$  ve doğrultmanları  $x = \pm \frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm \frac{25}{3}$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Yanda grafiği verilen elipsin;

- ▶ odak noktalarının koordinatlarını,
- ▶ büyük ve küçük eksen uzunluklarını,
- ▶ dış merkezliğini ve doğrultmanlarını,
- ▶ elipsin küçük eksen uzunluğunu çap kabul eden çemberin denklemini bulunuz.





### Örnek

$F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  noktalarına uzaklıkları toplamı  $2a$  olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulalım.

### Çözüm

Geometrik yer üzerinde değişken bir nokta  $P(x, y)$  olsun.

Buradan  $|F_1P| + |F_2P| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$  dır.

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınarak gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\ 4a^2 + 4xc &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ a^2 + xc &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (a^2 + xc)^2 &= a^2((x+c)^2 + y^2) \\ a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 &= a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\ a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \text{ eşitliği elde edilir. } (\star) \end{aligned}$$

$a^2 - c^2 = b^2$  eşitliği  $(\star)$  eşitliğinde yerine yazılırsa  $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  olur.

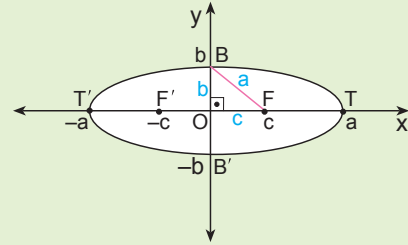
Eşitliğin her iki tarafı  $a^2b^2$  terimine bölünürse  $\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  bulunur.



### Bilgi Kutusu

Odakları  $F(c, 0)$  ve  $F'(-c, 0)$  noktaları ve üzerindeki bir noktası  $P(x, y)$  olan orijin merkezli elipste  $|FP| + |F'P| = 2a$  olmak üzere, bu elipsin denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dir.

Burada  $b^2 = a^2 - c^2$  ve  $a > b$  olmak üzere, bu elips **yatay elips** olarak adlandırılır.



### Örnek

Orijin merkezli yatay bir elipsin odağı  $F(4, 0)$  noktası ve küçük eksen uzunluğu  $8\sqrt{3}$  br ise bu elipsin grafiğini çizerek denklemini bulalım.

### Çözüm

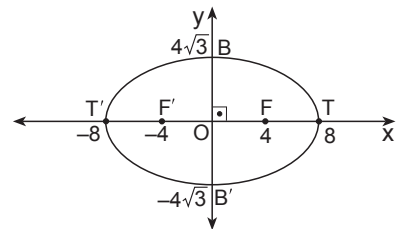
Verilen bilgilere göre elipsin grafiği şekildeki gibi olur.

Buradan  $2b = 8\sqrt{3} \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$  br ve  $c = 4$  br dir.

Elips, yatay elips olduğundan,

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = a^2 - 4^2 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$  br olur.

Buradan elipsin denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$  bulunur.





### Örnek

Denklemi  $x^2 + 4y^2 = 16$  olan elipsin dış merkezliğini ve odaklar arası uzaklığını bulalım.

### Çözüm

Elipsin denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  olduğundan verilen denklemin her terimi 16 ile bölündüğünde  $x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  olur. Bu denklemde  $a^2 = 16$  olduğundan  $a = 4$  br ve  $b^2 = 4$  olduğundan  $b = 2$  br dir. Buradan  $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 4 = 16 - c^2 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$  br elde edilir. Bundan dolayı elipsin dış merkezliği  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ve odaklar arası uzaklığı  $2c = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  br bulunur.

### Uygulama Köşesi

Aşağıdaki tabloda verilen orijin merkezli yatay elipsler için tabloyu doğru olacak şekilde tamamlayınız.

Elipsin denklemi	Odaklar arası uzaklığı	Büyük eksen uzunluğu	Küçük eksen uzunluğu	Dış merkezliği
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$				
		10	6	
$2x^2 + 3y^2 = 6$				
	24	30		

Tablo: 5.3.1

### Etkinlik

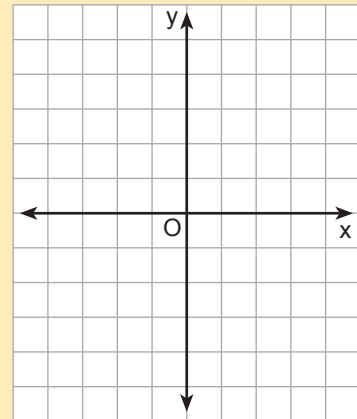
1. Denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  olan orijin merkezli elipsin grafiğinin koordinat düzleminde çizilebilmesi için hangi elemanların bilinmesi gerektiğini sorgulayınız.

2. Denklemi  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  olan orijin merkezli elipsin büyük eksen ve küçük eksen uzunluklarını, odak noktalarının koordinatlarını, dış merkezliğini ve doğrultmanlarının denklemlerini bulunuz.

3. Bulduğunuz değerlerden yararlanarak elipsin grafiğini yandaki analitik düzlemde çizin. Grafiğin x eksenini kestiği noktaları T ve T', y eksenini kestiği noktaları B ve B' olarak adlandırınız.

4. Elipsin odak noktasını T noktası ile birleştirdiğinizde oluşan dik üçgenden yararlanarak a, b ve c değerleri arasında bir bağıntı elde ediniz.

5. Elde ettiğiniz bağıntıyı elipsin büyük ekseninin konumuna göre yorumlayınız.



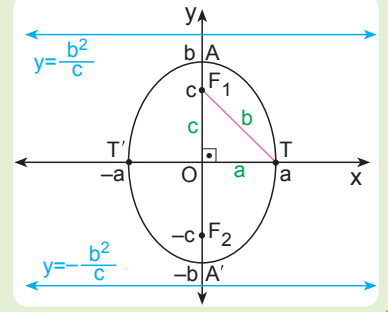




### Bilgi Kutusu

Odakları  $F_1(0, c)$  ve  $F_2(0, -c)$  noktaları ve orijin merkezli bir elipsin denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dir. Burada  $a^2 = b^2 - c^2$  ve  $b > a$  olmak üzere, bu elips **düşey elips** olarak adlandırılır.

Şekildeki düşey elipsin dış merkezliği  $e = \frac{c}{b}$  ve doğrultmanları  $y = \pm \frac{b^2}{c}$  doğrularıdır.



### Örnek

Büyük eksen uzunluğu 10 br, odak uzaklığı  $\sqrt{21}$  br olan orijin merkezli düşey elipsin denklemini bulalım ve grafiğini çizelim

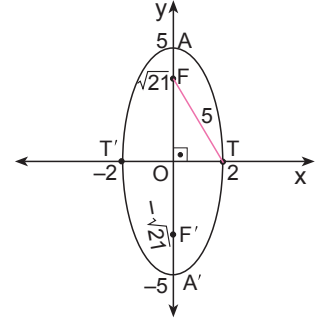
### Çözüm

Verilen bilgilere göre,  $2b = 10 \Rightarrow b = 5$  br ve  $c = \sqrt{21}$  br dir. Elips düşey elips olduğundan,

$$a^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 - (\sqrt{21})^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ br elde edilir.}$$

$$\text{Buradan elipsin denklemi } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerler analitik düzlemde gösterilerek elipsin grafiği yandaki gibi çizilir.



### Örnek

Denklemleri  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$  olan orijin merkezli elipsin doğrultmanlarını ve dış merkezliğini bulalım.

### Çözüm

Verilen denkleme göre,  $a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}$  br ve  $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$  br dir.  $b > a$  olduğundan bu elips düşey elipstir ve  $a^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow 7 = 16 - c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$  br dir. Buradan elipsin doğrultmanları  $y = \pm \frac{b^2}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{16}{3}$  doğruları ve dış merkezliği  $e = \frac{c}{b} \Rightarrow e = \frac{3}{4}$  bulunur.

### Örnek

Denklemleri  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  olan orijin merkezli elips veriliyor. Çapı elipsin büyük eksen uzunluğuna eşit olan orijin merkezli çemberin denklemini bulalım.

### Çözüm

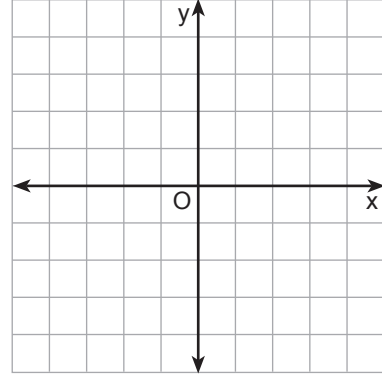
Verilen denklemde  $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$  olduğundan bu elipsin büyük eksen uzunluğu  $2a = 2 \cdot 3 = 6$  br bulunur. Bundan dolayı çapı elipsin büyük eksen uzunluğuna eşit olan orijin merkezli çemberin yarıçapı 3 br olur. Buradan çemberin denklemi  $x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$  bulunur.



### Uygulama Köşesi

Denklemleri  $3x^2 + 2y^2 = 12$  olan orijin merkezli bir elips için aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde doldurarak grafiğini analitik düzlemde çiziniz.

Büyük eksen uzunluğu	
Küçük eksen uzunluğu	
Odaklar arası uzaklığı	
Dış merkezliği	
Doğrultmanlarının denklemi	
Odağından geçen en kısa kirisinin uzunluğu	

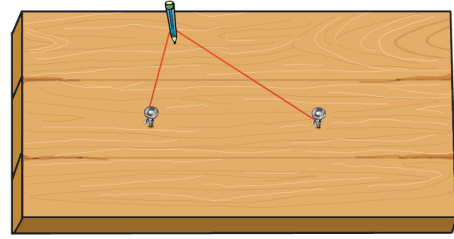


Tablo: 5.3.2

### Etkinlik

Şekil 1'de bir tahta üzerine çakılmış iki çivi ve bu çivilere bağlanmış ipten oluşan bir düzenek verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

1. Bir kalem düzenekteki ip gergin olacak şekilde hareket ettirilirse, kalemin ucunun belirleyeceği yörünge'nin hangi geometrik şekli oluşturduğunu söyleyiniz.
2. Çivilerin bulunduğu noktalar ve ipin uzunluğu bu şeklin hangi elemanlarıdır? Açıklayınız.
3. Bu şeklin denkleminin belirlenmesi için nelerin bilinmesi gerektiğini sorgulayınız.
4. Çivilerin çakışık ve orijinde olma durumlarını yorumlayınız.

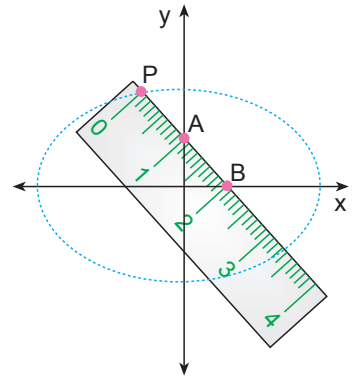


### Örnek

Kâğıt üzerine çizilen bir dik koordinat sistemi üzerinde cetvel yardımıyla bir elips çizelim.

### Çözüm

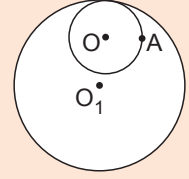
4 cm uzunluğundaki düz bir cetvelin 0 cm, 1 cm ve 2 cm lerinin üzeri işaretlenerek sırayla P, A ve B şeklinde adlandırılır. Cetveldeki A ve B noktaları, sırayla y ve x eksenlerine şekildeki gibi yerleştirilir. A ve B noktaları bulundukları eksenler üzerinde kalmak şartıyla cetvel hareket ettirilerek P noktasının belirlediği yörünge işaretlenir. Şekilden de görüldüğü gibi P noktasının belirlediği yörünge, büyük eksen uzunluğu 4 br ve küçük eksen uzunluğu 2 br olan orijin merkezli bir elipstir. Cetvelin uzunluğu ile A ve B noktalarının cetvel üzerindeki yerleri değiştirilerek farklı eksen uzunluklarına sahip elipsler çizilebilir.





## Uygulama Köşesi

Yandaki şekilde  $O_1$  merkezli bir çember ile bu çembere içten teğet olan ve A noktasından geçen O merkezli bir çember verilmiştir. A noktasından geçen ve  $O_1$  merkezli çembere içten teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini yorumlayınız.



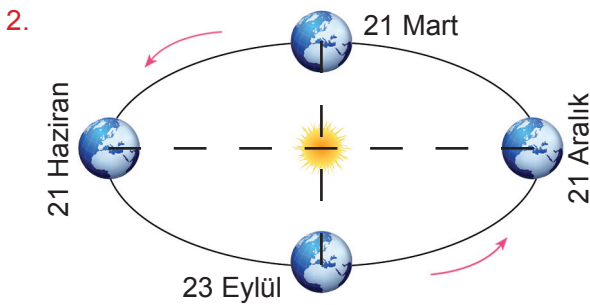
## Araştırma Sorusu

Farklı elips çizimleri ile ilgili araştırma yaparak sınıfınızla paylaşınız.



## Alıştırmalar

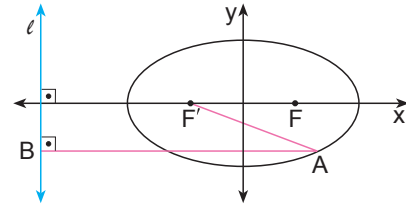
- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.
  - Elipsin odakları  $F_1$  ve  $F_2$  olmak üzere,  $[F_1 F_2]$  nin orta noktasına elipsin merkezi denir. (.....)
  - Bir çembere dıştan teğet olan eş çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir elipstir. (.....)
  - Odağı y eksenini üzerinde olan elipse düşey eksen denir. (.....)
  - Standart denklemi  $2x^2 + y^2 = 2$  olan elipsin odaklar arası uzaklığı  $\sqrt{5}$  br dir. (.....)



Dünya Güneş etrafında dönerken elips şeklinde bir yörünge izler. Dünya'nın bu yörünge üzerinde 21 Mart ve 23 Eylül'de Güneş'e olan uzaklığı yaklaşık 16 milyon km, 21 Aralık ve 21 Haziran'da ise 20 milyon km'dir.

Güneş'i ve Dünya'yı birer nokta modeli kabul ederek Dünya'nın yörüngesinin belirttiği eğri- nin denklemini bulunuz.

3.



Şekildeki elipsin odakları F, F' noktaları, doğrultmanı  $\ell$  doğrusu ve standart denkle- mi  $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$  dir.  $|AB| = 35$  br olduğuna göre,  $|AF'|$  kaç br dir?

- F(4, 0) noktasına olan uzaklığı  $x = 16$  doğ- rusuna uzaklığının yarısı olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.
- Standart denklemi  $x^2 + y^2 = 16$  olan çemberin her noktasından x eksenine çizilen dikmele- rin orta noktalarının geometrik yerinin den- klemini bulunuz.
- Standart denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  olan elipsin dış merkezliği  $\frac{4}{5}$  ve  $a + b = 8$  olduğuna göre, küçük eksen uzunluğu kaç br dir?
- A(1,  $\sqrt{3}$ ) ve B(2,  $\sqrt{2}$ ) noktalarından geçen elipsin denklemini bulunuz.

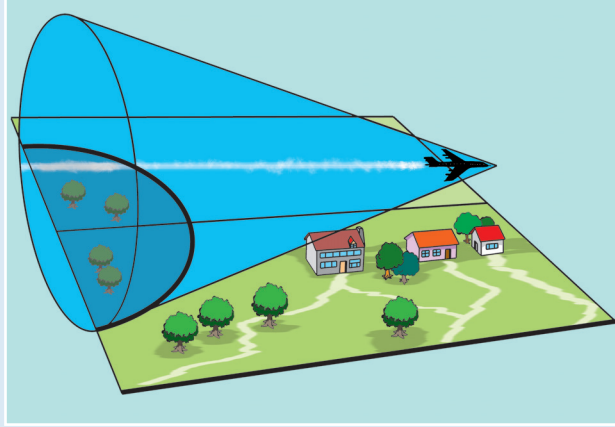


## 5.4. Hiperbol ve Standart Denklemi



Hızla giden bir uçağın ardında bıraktığı ses dalgaları havada bir koni biçiminde yayılır. Yeryüzünün bir düzlem olduğunu varsayarsak yere çarpan ses dalgalarının oluşturduğu noktalar kümesi hiperbolün bir parçasıdır.

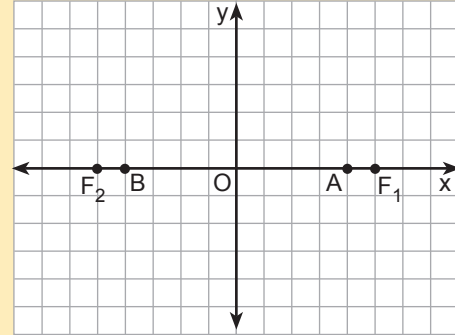
Konik şeklindeki bir abajurun duvarda bıraktığı gölge ve altıgen şeklindeki bir kurşun kalemin kalemtraşla açılması bir hiperbol oluşturur mu? Yorumlayınız.



### Etkinlik

1. Yandaki koordinat düzleminde  $F_1$ ,  $F_2$ , A ve B noktaları işaretlenmiştir.  $||AF_1| - |AF_2||$  değerini bulup bu değeri  $2a$  olarak adlandırınız.

2. Koordinat düzleminde  $C(5, \frac{9}{4})$ ,  $D(5, -\frac{9}{4})$ ,  $E(-5, \frac{9}{4})$  ve  $F(-5, -\frac{9}{4})$  noktalarını işaretleyiniz. İşaretlediğiniz her noktanın  $F_1$  ve  $F_2$  noktalarına olan uzaklıkları farkını hesaplayarak bulduğunuz değerleri  $2a$  değeri ile karşılaştırınız.



3.  $F_1$  ve  $F_2$  noktalarına olan uzaklıkları farkı  $2a$  değerine eşit olan başka noktalar bulunabilir mi? Bu noktaların geometrik yerinin hangi konik olabileceğini belirleyiniz.

4. Belirlediğiniz koniğin grafiğini A, B, C, D, E ve F noktalarından geçecek şekilde çiziniz.

5. Çizdiğiniz grafiğin hangi eksenlere göre simetrik olduğunu açıklayınız.

6. Çizdiğiniz grafik üzerinde koniğin odak noktalarını ve tepe noktalarını belirleyiniz.

7. Koniğin odak noktalarının orijine olan uzaklıklarını  $c$  olarak alınız ve  $c^2 = a^2 + b^2$  eşitliğini sağlayan  $b$  değerlerini bulunuz.

8.  $T(0, b)$  ve  $T'(0, -b)$  noktalarını koordinat düzleminde işaretleyiniz. Koniğe A ve B noktalarında teğet olan ve T, T' noktalarından geçen dikdörtgeni çiziniz. Dikdörtgenlerin köşegenlerini taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz.

9. Koniğin, odak noktalarını  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  ve üzerindeki herhangi bir noktayı  $K(x, y)$  olarak alınız.  $c^2 = a^2 + b^2$  ( $a > b$ ) eşitliğini kullanarak koniğin denklemini bulunuz.

10. Etkinliğin 9. adımını  $F_1(0, c)$ ,  $F_2(0, -c)$  noktaları için tekrarlayınız. Bulduğunuz denklemlerin arasındaki farkı açıklayınız.





### Bilgi Kutusu

1. Düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri, sabit olan noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir. Sabit olan iki noktaya **hiperbolün odakları**, uç noktaları odaklar olan doğru parçasının orta noktasına **hiperbolün merkezi** denir.

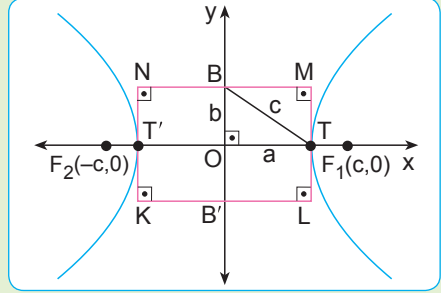
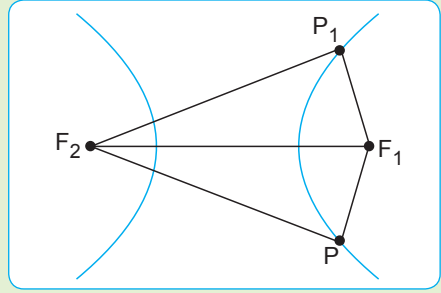
Şekilde hiperbolün odakları  $F_1$  ve  $F_2$  noktaları olmak üzere,  $||P_1F_1| - |P_1F_2|| = ||PF_1| - |PF_2|| = 2a$  dir.

2. Şekildeki O merkezli hiperbolün tepe noktaları T ve T' olmak üzere, TT' doğrusuna **asal eksen**, BB' doğrusuna **yedek eksen** denir.

\* Asal eksen uzunluğu  $|TT'| = 2a$  br ve yedek eksen uzunluğu  $|BB'| = 2b$  br dir.

\* BOT dik üçgeninde  $c^2 = a^2 + b^2$  ve  $c > a$  dir.

\* Hiperbolün dış merkezliği  $e = \frac{c}{a}$  ( $e > 1$ ) ve doğrultmanları  $x = \mp \frac{a^2}{c}$  doğrularıdır.



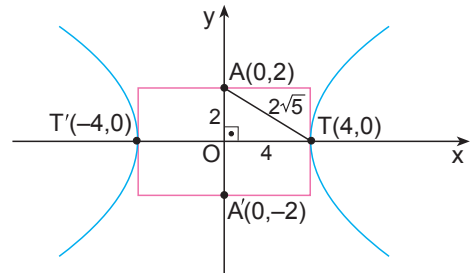
### Örnek

Asal eksenini x eksenini ve yedek eksenini y eksenini olan orijin merkezli bir hiperbolün asal eksen uzunluğu 8 br ve yedek eksen uzunluğu 4 br dir. Buna göre, hiperbolün odaklarının koordinatlarını, dış merkezliğini ve doğrultmanlarını bulalım.

### Çözüm

Verilenlere göre şekildeki hiperbolde  $|TT'| = 8$  br ve  $|AA'| = 4$  br dir. O noktası hiperbolün merkezi olduğundan  $a = |OT| = |OT'| = 4$  br ve  $b = |OA| = |OA'| = 2$  br dir.

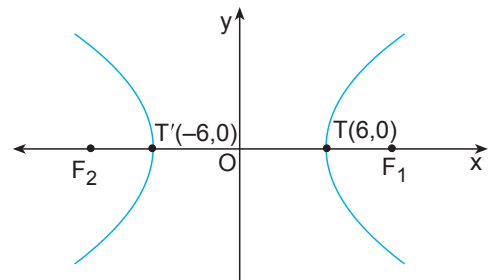
$c^2 = a^2 + b^2$  bağıntısından  $c^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$  br elde edilir. Buradan hiperbolün odak noktaları  $F_1(2\sqrt{5}, 0)$ ,  $F_2(-2\sqrt{5}, 0)$ , dış merkezliği  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  ve doğrultmanları  $x = \mp \frac{16}{2\sqrt{5}} = \mp \frac{8}{\sqrt{5}}$  doğrularıdır.



### Uygulama Köşesi

Yandaki O merkezli ve  $F_1(2\sqrt{13}, 0)$  ve  $F_2(-2\sqrt{13}, 0)$  odaklı hiperbolün;

- yedek eksen uzunluğunu,
- dış merkezliğini,
- doğrultmanlarını,
- merkezi orijin, çapı asal eksen uzunluğuna eşit olan çemberin denklemini bulunuz.





### Örnek

$F_1(c, 0)$  ve  $F_2(-c, 0)$  noktalarına uzaklıkları farkının mutlak değeri  $2a$  br olan noktaların geometrik yerini bulalım.

### Çözüm

Geometrik yer üzerinde değişken bir nokta  $P(x, y)$  olsun.

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a \text{ ise } |PF_1| - |PF_2| = 2a \text{ veya } |PF_1| - |PF_2| = -2a \text{ olur.}$$

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a \Rightarrow |PF_1| = |PF_2| + 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2a \text{ dır.}$$

Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınarak gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + 4a^2$$

$$-2xc - a^2 = a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} \Rightarrow x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (\star) \text{ eşitliği elde edilir.}$$

$c^2 - a^2 = b^2$  ifadesi  $(\star)$  eşitliğinde yerine yazılırsa  $x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  olur. Eşitliğin her iki tarafı  $a^2b^2$  terimine bölünürse  $\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  eşitliği bulunur.

Yukarıdaki işlemler  $||PF_1| - |PF_2|| = -2a$  eşitliği içinde uygulandığında  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  olur. Bundan dolayı  $F_1$  ve  $F_2$  noktalarına uzaklıkları farkının mutlak değeri  $2a$  br olan noktaların geometrik yeri  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  bulunur.



### Bilgi Kutusu

1. Odakları  $F_1(c, 0)$  ve  $F_2(-c, 0)$  noktaları ve üzerindeki bir noktası  $P(x, y)$  olan orijin merkezli bir hiperbolde  $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$  olmak üzere, bu hiperbolün denkleminin  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dir. Burada  $c^2 = a^2 + b^2$  ve  $c > a$  dır.

2. Hiperbol denkleminin sağ tarafı 0 alındığında hiperbolün asimptotları  $y = \pm \frac{b}{a}x$  biçiminde bulunur.

### Örnek

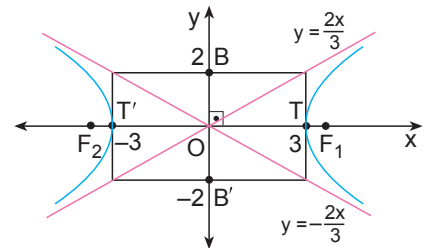
Denklemin  $4x^2 - 9y^2 = 36$  olan hiperbolün grafiğini çizelim.

### Çözüm

Verilen denklemin her iki tarafı 36 ile bölünürse,

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ olur. Bu denklemde } a^2 = 9 \text{ ve } b^2 = 4 \text{ olduğundan } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 \Rightarrow c = \sqrt{13} \text{ br elde edilir.}$$

Bundan dolayı hiperbolün odakları  $F_1(\sqrt{13}, 0)$  ve  $F_2(-\sqrt{13}, 0)$  noktaları, asimptotları  $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x$  doğrularıdır. Asimptot doğruları çizilip değerler analitik düzlemde gösterildiğinde hiperbolün grafiği yandaki gibi olur.

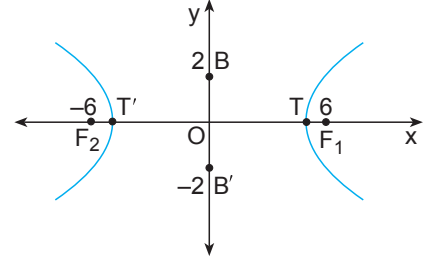




### Örnek

Yandaki analitik düzlemde verilen hiperbolün odak noktaları  $F_1$  ve  $F_2$ , yedek eksenin uç noktaları B ve B' noktalarıdır.

Buna göre, hiperbolün eksen uzunluğunu, denklemini ve asimptotlarını bulalım.

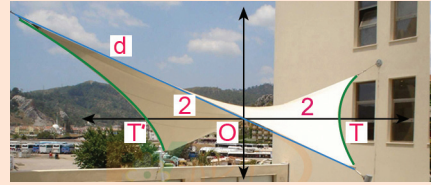


### Çözüm

Grafiğe göre,  $c = 6$  ve  $b = 2$  dir.  $c^2 = a^2 + b^2$  olduğundan  $6^2 = a^2 + 2^2 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$  elde edilir. Buradan hiperbolün asal eksen uzunluğu  $|TT'| = 2a = 8\sqrt{2}$  br bulunur.  $a^2 = 32$  ve  $b^2 = 4$  olduğundan hiperbolün denklemi  $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1$  dir. Hiperbolün asimptotları ise  $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{4\sqrt{2}}x \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$  doğrularıdır.

### Uygulama Köşesi

1. Yandaki fotoğrafta hiperbol şeklinde olan bir tente verilmiştir. Tente üzerine analitik düzlem çizilerek bir modelleme yapıldığında  $|OT| = 2$  m ve asimptot olan d doğrusunun denklemi  $y = -\frac{x}{2}$  olmaktadır. Buna göre, tentenin belirlediği hiperbolün denklemini bulunuz.

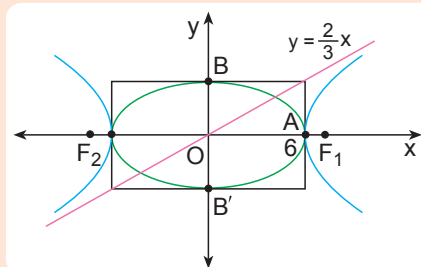


2. Asal eksenini x eksenini olan orijin merkezli hiperboller için aşağıdaki tabloyu doğru olacak şekilde tamamlayınız.

Denklemi	Odak noktası	Dış merkezliği	Asal eksenin uzunluğu	Yedek eksenin uzunluğu	Doğrultmanları	Asimptotları
$25x^2 - 9y^2 = 1$						
	2	4				
			6	$2\sqrt{7}$		
				10	$x = \pm \frac{25}{10}$	

Tablo: 5.4.1

3. Yandaki analitik düzlemde asimptotlarından biri  $y = \frac{2}{3}x$  doğrusu olan ve A(6, 0) noktasından geçen orijin merkezli bir hiperbol verilmiştir. Hiperbolün eksenlerini eksen kabul eden elipsin dış merkezliğini bulunuz.



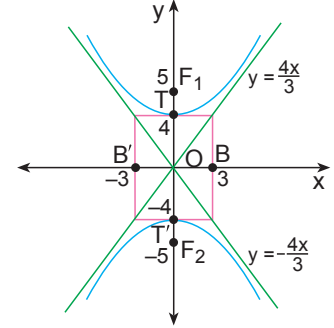


### Örnek

Odakları  $F_1(0, 5)$  ve  $F_2(0, -5)$  noktaları olan orijin merkezli hiperbolün asal eksen uzunluğu 8 br dir. Buna göre, hiperbolün grafiğini çizerek denklemini ve asimptotlarını bulalım.

### Çözüm

Verilen hiperbolün odakları y ekseninde olduğundan grafiği şekildeki gibi olur. Hiperbolün asal eksen uzunluğu 8 br olduğundan  $2a = 8 \Rightarrow a = 4$  br dir. TOB dik üçgeninde Pisagor teoremin-den  $|BO|^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow |BO|^2 = 9 \Rightarrow |BO| = 3$  br dir. Hiperbolün yedek eksenini  $[BB']$  olduğundan  $b = 3$  br dir. Buradan hiperbolün denklemi  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  ve asimptotları  $y = \pm \frac{4}{3}x$  şeklinde bulunur.



### Bilgi Kutusu

Odakları  $F_1(0, c)$  ve  $F_2(0, -c)$  olan orijin merkezli hiperbolün denklemi  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  dir. Bu denklemin sağ tarafı 0 alındığında hiperbolün asimptotları  $y = \pm \frac{a}{b}x$  biçiminde bulunur.

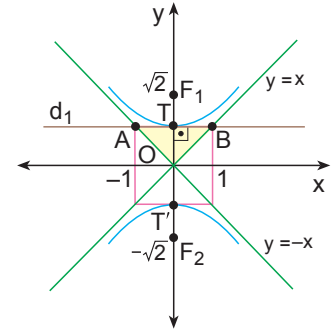
### Örnek

Denklemi  $y^2 - x^2 = 1$  olan hiperbolün grafiğini çizerek iki asimptotu ile tepe noktasındaki teğetin oluşturduğu üçgenin alanını bulalım.

### Çözüm

Verilen denkleme göre,  $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ ,  $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$  ve  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$  dir. O hâlde, hiperbolün asimptotları  $y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm x$  doğrularıdır. Bulunan değerlere göre, hiperbolün grafiği yandaki analitik düzlemde verilmiştir. Hiperbolün T noktasındaki teğetin  $(d_1)$  doğrusunun asimptotlarla kesiştiği noktalar A ve B olsun. A noktasının  $y = -x$  doğrusuna göre ordinatı 1 olduğundan apsisi de 1 olur. Benzer şekilde B noktasının  $y = x$  doğrusuna göre ordinatı 1 olduğundan apsisi de 1 olur.

O hâlde,  $|AB| = 2$  br dir. Buradan  $A(\widehat{OAB}) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ br}^2$  bulunur.



### Örnek

Koordinat düzleminde orijin merkezli bir hiperbol ve bu hiperbol üzerinde  $A(3, 5)$  ile  $B(-3, k)$  noktaları veriliyor. Buna göre,  $k$  değerini bulalım.

### Çözüm

Konikler kendi eksenlerine göre simetrik olduğundan hiperbolde asal ve yedek eksenlerine göre simetriktir. Bundan dolayı hiperbol  $180^\circ$  lik dönme simetrisine sahiptir. A ve B noktalarının apsilerinin y eksenine göre simetrik olduğundan  $A(3, 5)$  ve  $B(-3, k)$  noktalarının görüntüleri eşit olmalıdır. Buradan  $k = 5$  bulunur.





### Uyarı

Bir hiperbol merkezinin göre  $180^\circ$  lik dönme simetrisine sahiptir. Hiperbolün iki tane simetri eksenini vardır. Bunlar asal ve yedek eksenleri olan x ve y eksenleridir.

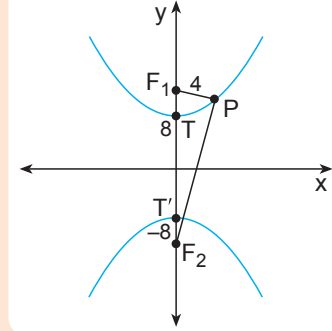


### Uygulama Köşesi

Yanda grafiği verilen orijin merkezli hiperbolün odakları  $F_1(0, 4\sqrt{5})$  ve  $F_2(0, -4\sqrt{5})$  noktalarıdır.

Buna göre hiperbolün;

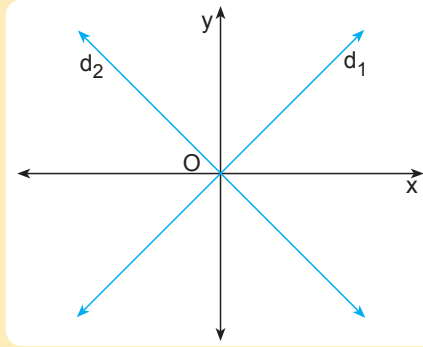
- ▶ eksen uzunluklarını,
- ▶ denklemini,
- ▶ asimptotlarının denklemlerini,
- ▶  $|PF_1| = 4$  için  $|PF_2|$  nu bulunuz.



### Etkinlik

Yandaki koordinat düzleminde  $d_1: y = x$  ve  $d_2: y = -x$  doğruları verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki adımları uygulayınız:

1.  $P(x, y)$  noktasının  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularına olan uzaklıklarını hesaplayınız.
2. Bulduğunuz uzaklıkların çarpımını 2 ye eşitleyerek bir denklem elde ediniz.
3. Elde ettiğiniz denklemin hangi koniği belirttiğini sorgulayarak bu koniğin grafiğini koordinat düzleminde çiziniz.
4. Uyguladığınız adımlara göre, verilen iki doğruya uzaklıkları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yerini açıklayınız.



### Örnek

Dik koordinat sisteminde köşelerinin koordinatları  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  için  $A(-a, 0)$ ,  $B(x, y)$  ve  $C(a, 0)$  olan bir ABC üçgeni verilsin.  $[BA]$  ve  $[BC]$  nin eğimlerinin çarpımını  $\frac{b^2}{a^2}$  ( $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ) sayısına eşitleyerek B noktasının geometrik yerini bulalım.

### Çözüm

$[AB]$  ve  $[BC]$  nin eğimleri sırayla  $m_{AB}$  ve  $m_{BC}$  olmak üzere,

$$m_{AB} = \frac{y-0}{x-(-a)} = \frac{y}{x+a} \text{ ve } m_{BC} = \frac{y-0}{x-a} = \frac{y}{x-a} \text{ dır. Buradan}$$

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y}{x+a} \cdot \frac{y}{x-a} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 x^2 - a^2 b^2 = a^2 y^2 \Rightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ olur.}$$

$$\text{Eşitliğin her iki tarafı } a^2 b^2 \text{ ifadesi ile bölüldüğünde } \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2} = \frac{b^2 x^2}{a^2 b^2} - \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla B noktasının geometrik yeri, denklemi  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  olan hiperboldür.

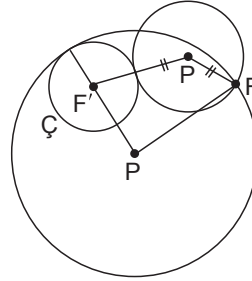


## Örnek

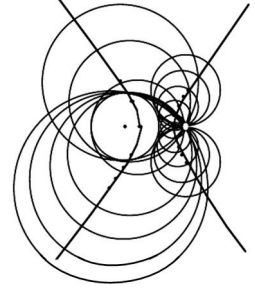
Verilen bir çembere teğet olan ve bu çember dışında verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulalım.

## Çözüm

Verilen çemberi  $\mathcal{C}$ , noktayı  $F$  olarak adlandıralım.  $P$  ve  $F$  çemberin dışında olmak üzere,  $\mathcal{C}$  çemberinin merkezi  $F'$  noktası, yarıçapının uzunluğu ise  $2a$  br olsun. Şekil 1'de de görüldüğü gibi  $F'$ 'den geçen ve  $\mathcal{C}$  çemberine teğet olan iki farklı çember çizilebilir. Bu çemberler  $P$ 'nin  $F'$  noktasına  $F'$ 'den yakın olup olmamasına göre  $\mathcal{C}$  çemberinin içinde ya da dışında kalır.



Şekil 1



Şekil 2

Bu iki çemberin teğet olabilmeleri için gerek ve yeter koşul  $||PF| - |PF'|| = 2a$  br olmasıdır. O hâlde verilen şartları sağlayan geometrik yer  $F$  ve  $F'$  odaklı ve asal eksen uzunluğu  $2a$  br olan hiperboldür. Bu hiperbolün çizimi şekil 2'de gösterilmiştir.



## Ağıştırmalar

- Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktali yerlere cümle doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.
  - Hiperbolün doğrultmanları  $x = \mp \frac{a}{e}$  doğrularıdır. (.....)
  - $x^2 - y^2 = 1$  denklemi asal eksen uzunluğu yedek eksen uzunluğuna eşit olan bir hiperbol belirtir. (.....)
  - Hiperbolün dış merkezliği 1 den küçüktür. (.....)
  - Hiperbolün iki asimptotu ve herhangi bir teğetinin oluşturduğu üçgenin alanı, asal eksen uzunluğunun yarısı ile yedek eksen uzunluğunun yarısının çarpımına eşittir. (.....)
  - Hiperbolün asimptotları arasındaki açı  $45^\circ$  dir. (.....)
- Odaklarından biri  $F(7, 0)$  olan orijin merkezli eksen uzunluğu 10 br olduğuna göre, bu hiperbolün asimptotlarının denklemlerini bulunuz.
- $F(7, 0)$  ve  $F(-7, 0)$  noktalarına uzaklıkları farkı 8 br olan noktaların geometrik yerini bulunuz.
- Asal eksen  $x$  eksenini olan orijin merkezli bir hiperbolün asal eksen uzunluğu  $2a$  br, yedek eksen uzunluğu  $2b$  br ve odaklar arası uzaklığı  $2c$  br dir. Buna göre, aşağıdaki şartları sağlayan hiperbollerin denklemlerini bulunuz.
 

►  $a = 3$  br,  $b = 2$  br

►  $a = 4$  br,  $c = 5$  br

►  $b = 2$  br,  $c = 6$  br
- Yandaki şekilde asimptotlarından biri  $y = \frac{2}{3}x$  doğrusu olan ve  $A(6, 0)$  noktasından geçen bir hiperbol ile hiperbolün eksenlerini eksen kabul bir elips verilmiştir. Buna göre, elipsin dış merkezliği kaçtır?
- $(x + 5)^2 + y^2 = 64$  çemberine teğet olan ve  $F(5, 0)$  noktasından geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemini bulunuz.
- Denklemi  $9y^2 - 4x^2 = 36$  olan hiperbolün asal eksen uzunluğunu çap kabul eden orijin merkezli çemberin denklemini bulunuz.





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

### A. Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları doğru olacak şekilde doldurunuz.

1. Düzlemde sabit bir noktaya uzaklığının, sabit bir doğruya uzaklığı oranı sabit olan noktaların geometrik yerine ..... denir.
2. Koniğin temel elemanları ....., ..... ve ..... dir.
3. Koniğin eksenini ile kesiştiği noktalara ..... denir.
4. Dış merkezliği ..... olan konik bir paraboldür.
5. Denklemi  $y^2 = 4x$  olan orijin merkezli parabolün odak noktasının koordinatları ..... dir.
6. Denklemi  $25x^2 + 4y^2 = 100$  olan elipsin odaklar arası uzaklığı ..... br dir.
7. Asal eksen uzunluğu 8 br ve dış merkezliği  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  olan elipsin denklemi ..... dir.
8. Denklemi  $x^2 - y^2 = 6$  olan hiperbolün asal ve yedek eksen uzunlukları ..... ve ..... br dir.
9. Denklemi  $4x^2 + 9y^2 = 36$  olan elipsin eksenlerini eksen kabul eden ve asal eksenini x eksenini orijin merkezli hiperbolün denklemi ..... dir.
10. Doğrultman denklemleri  $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$  ve yedek eksen uzunluğu  $2\sqrt{6}$  br olan orijin merkezli hiperbolün odaklar arası uzaklığı ..... br dir.

### B. Aşağıdaki cümlelerin sonlarındaki noktalı yerlere cümle doğru ise “D” yanlış ise “Y” yazınız.

1. Doğrultmanı  $x = -2$  doğrusu olan orijin merkezli parabolün denklemi  $y^2 = 8x$  dir. (.....)
2. Denklemi  $x^2 = 12y$  olan orijin merkezli parabolün odağı  $F(0, 6)$  noktasıdır. (.....)
3. Denklemi  $x = -4$  olan doğruya ve  $A(4, 0)$  noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri denklemi  $y^2 = 16x$  olan bir paraboldür. (.....)
4.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ifadesi  $a^2 = b^2$  ise çember,  $a^2 \neq b^2$  ise elips belirtir. (.....)
5. Denklemi  $y^2 = -5x$  olan parabol üzerindeki  $A(a, \sqrt{5})$  noktasının parabolün doğrultmanına olan uzaklığı  $\frac{3}{2}$  br dir. (.....)
6. Odakları y eksenini üzerinde bulunan elipse düşey elips denir. (.....)
7. Koniğin odağından geçen ve doğrultmanına dik olan doğruya koniğin eksenini denir. (.....)
8. Sabit bir noktadan geçen ve sabit bir noktaya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir hiperboldür. (.....)
9. Verilen bir çembere içten teğet olan ve bu çemberin içinde verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir paraboldür. (.....)
10. Hiperbol  $180^\circ$  lik dönme simetrisine sahiptir. (.....)





## ÜNİTE DEĞERLENDİRME TESTİ

1. Odağı  $F(0, 2)$  noktası olan orijin merkezli parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $y^2 = 8x$       B)  $x^2 = 8y$       C)  $x^2 = -4y$   
D)  $y^2 = 4x$       E)  $x^2 = 2y$

2. Denklemleri  $y^2 + 8x = 0$  ve  $y^2 - 6x = 0$  olan parabolün odakları sırayla  $F_1$  ve  $F_2$  noktaları olduğuna göre,  $|F_1 F_2|$  kaç br dir?

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{3}{2}$       C)  $\frac{5}{2}$       D)  $\frac{7}{2}$       E)  $\frac{9}{2}$

3.  $x^2 = 9y$  parabolünün odağından geçen en kısa kirişinin uzunluğu kaç br dir?

A)  $\frac{3}{2}$       B)  $\frac{9}{4}$       C)  $\frac{9}{2}$       D) 9      E) 12

4. Denklemi  $y^2 = -12x$  olan parabol için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

A) Odak noktası  $F(-3, 0)$  dir.  
B) Doğrultmanı  $x = -3$  doğrusudur.  
C) Üzerindeki bir nokta  $A(-1, -2\sqrt{3})$  tür.  
D) Tepe noktası  $O(0, 0)$  dir.  
E)  $x$  eksenini simetri eksenidir.

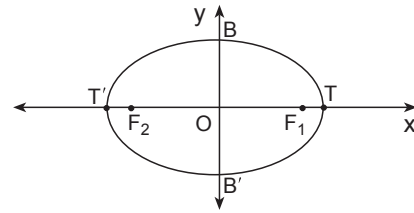
5.  $x^2 + 4y = 0$  parabolünün dik kesişen teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $x = 4$       B)  $x = 1$       C)  $y - 1 = 0$   
D)  $x - 2 = 0$       E)  $y + 1 = 0$

6. Denklemi  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  olan elips için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

A) Odaklar arası uzaklığı 16 br dir.  
B) Büyük eksen uzunluğu 20 br dir.  
C) Dış merkezliği  $e = \frac{4}{5}$  tir.  
D) Odak noktaları  $F_1(8, 0)$  ve  $F_2(-8, 0)$  dir.  
E) Doğrultmanları  $y = \pm \frac{25}{2}$  doğrularıdır.

7.



Yandaki analitik düzlemde  $F_1$  ve  $F_2$  odaklı orijin merkezli elips verilmiştir.  $|TT'| = 12$  br ve  $|BB'| = 8$  br olduğuna göre, elipsin dış merkezliği kaçtır?

A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$       C)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$   
D)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       E)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

8. Odakları  $F_1(4, 0)$  ve  $F_2(-4, 0)$  noktaları olan orijin merkezli elips  $A(0, 3)$  noktasından geçtiğine göre, elipsin doğrultmanları aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $x = \pm \frac{3}{4}$       B)  $x = \pm \frac{25}{4}$       C)  $x = \pm \frac{9}{4}$   
D)  $x = \pm \frac{16}{3}$       E)  $x = \pm \frac{7}{3}$

9. Denklemi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  olan elipsin dış merkezliği  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  ve  $a - b = \sqrt{3}$  olduğuna göre, elipsin küçük eksen uzunluğu kaç br dir?

A)  $2\sqrt{3}$       B)  $3\sqrt{3}$       C)  $4\sqrt{3}$   
D)  $5\sqrt{3}$       E)  $6\sqrt{3}$

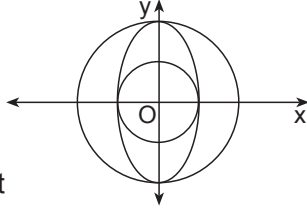


10. Yandaki analitik

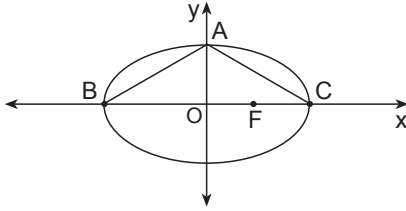
düzlemde orijin  
merkezli bir elips  
ile elipse tepe  
noktalarında teğet

olan çemberler verilmiştir. Çemberlerin  
denklemleri  $x^2 + y^2 = 4$  ve  $x^2 + y^2 = 16$  oldu-  
ğuna göre, elipsin denklemi aşağıdakilerden  
hangisidir?

- A)  $4x^2 + y^2 = 16$   
B)  $16x^2 + y^2 = 16$   
C)  $2x^2 + 3y^2 = 6$   
D)  $6x^2 + 3y^2 = 1$   
E)  $2x^2 + y^2 = 4$



11.



Yukarıdaki analitik düzlemde odağı  $F(3, 0)$   
noktası olan orijin merkezli elips verilmiştir.  
Elipsin doğrultmanlarından biri  $x = 12$  doğ-  
rusu olduğuna göre,  $A(\widehat{ABC})$  kaç  $br^2$  dir?

- A) 9 B)  $9\sqrt{3}$  C) 18  
D)  $9\sqrt{5}$  E)  $18\sqrt{3}$

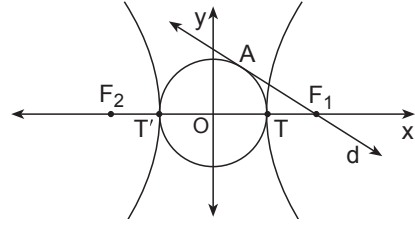
12. Denklemi  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$  olan hiperbolün  
asimptotlarından biri aşağıdakilerden hangi-  
sidir?

- A)  $y = \frac{4x}{3}$  B)  $y = \frac{3x}{5}$  C)  $y = \frac{5x}{4}$   
D)  $y = \frac{4x}{5}$  E)  $y = \frac{\sqrt{41}x}{5}$

13. Denklemi  $3x^2 - y^2 = 60$  olan hiperbolün  
asimptotlarından birinin x eksenini yaptığı  
pozitif yönlü açı kaç derecedir?

- A)  $150^\circ$  B)  $120^\circ$  C)  $90^\circ$  D)  $45^\circ$  E)  $30^\circ$

14.



Denklemi  $16x^2 - 9y^2 = 144$  olan hiperbol ve  
T, T' noktalarından hiperbole teğet olan ori-  
jin merkezli çember yukarıdaki analitik düz-  
lemde verilmiştir. Buna göre, çembere A  
noktasında teğet olan d doğrusunun eğimi  
aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $-\frac{3}{5}$  B)  $-\frac{4}{5}$  C)  $-\frac{4}{3}$   
D)  $-\frac{3}{4}$  E)  $-\frac{5}{4}$

15.  $P(6, 0)$  noktasına olan uzaklığı,  $x = 3$  doğru-  
suna olan uzaklığının  $\sqrt{2}$  katı olan noktala-  
rın geometrik yerinin denklemi aşağıdakiler-  
den hangisidir?

- A)  $x^2 - y^2 = 18$  B)  $3x^2 - 2y^2 = 6$   
C)  $2x^2 - y^2 = 5$  D)  $5x^2 - 4y^2 = 3$   
E)  $x^2 - y^2 = 12$

16. Asal eksen uzunluğu yedek eksen uzunlu-  
ğuna eşit olan hiperbolün odaklarından biri  
 $F(0, 4)$  noktası olduğuna göre, hiperbolün  
denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $y^2 - x^2 = 8$  B)  $x^2 - y^2 = 4$   
C)  $x^2 - y^2 = 8$  D)  $y^2 - x^2 = 4$   
E)  $y^2 - x^2 = 16$

17. Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları top-  
lamı 16 cm olan noktaların geometrik yerini  
sağlayan noktalardan birbirine en yakın olan  
iki nokta arasındaki uzaklık kaç br dir?

- A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20



## YANIT ANAHTARLARI

### 1. Ünite Değerlendirme Soruları

A	1. orta taban		2. dış bükey dörtgen		3. 20°	4. 160°	5. kareleri toplamları		
	6. çevresinin uzunluğu		7. 12		8. $6\sqrt{3}$				
B	1. Y	2. D	3. Y	4. D	5. Y	6. D	7. Y	8. Y	9. D

### 1. Ünite Değerlendirme Testi

1. B	2. B	3. B	4. C	5. A	6. A	7. D	8. E	9. E	10. D	11. D	12. C	13. A	14. C	15. E	16. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

### 2. Ünite Değerlendirme Soruları

A	1. dikdörtgen	2. tabanları	3. (2, 1)	4. 64	5. 11					
	6. eşkenar dörtgen	7. 90°,180°, 270° – dönme simetrisine		8. eşkenar dörtgen ve kare						
	9. $4\sqrt{3}$	10. ötelemelerin bileşkesi								
B	1. D	2. D	3. Y	4. D	5. Y	6. D	7. Y	8. D	9. Y	10. D

### 2. Ünite Değerlendirme Testi

1. C	2. C	3. D	4. E	5. D	6. A	7. D	8. C	9. C	10. B	11. A	12. D
13. E	14. D	15. A	16. C	17. C	18. A	19. B	20. E	21. D	22. D	23. E	24. B

### 3. Ünite Değerlendirme Soruları

A	1. 36° – 72°	2. bir kenara uzaklığının	3. 6 – 4	4. 4	5. 3 / 4	6. dual	7. 90°		
B	1. D	2. Y	3. D	4. Y	5. D	6. Y	7. Y	8. D	9. D

### 3. Ünite Değerlendirme Testi

1. C	2. A	3. E	4. C	5. D	6. B	7. B	8. A	9. E	10. D	11. C	12. B	13. D	14. A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------

### 4. Ünite Değerlendirme Soruları

A	1. eş	2. yarıçapa dik olan	3. teğet doğrusu - normal doğrusu		4. teğet - giriş açısı			
	5. kırımlar	6. 90°	7. eşittir			8. değişmez		
	9. $4\sqrt{2}\pi$	10. - 1	11. dışındaki					
B	1. D	2. D	3. Y	4. D	5. Y	6. D	7. Y	8. D

### 4. Ünite Değerlendirme Testi

1. C	2. D	3. B	4. C	5. B	6. A	7. C	8. A	9. E	10. E	11. B	12. A
13. D	14. E	15. A	16. D	17. B	18. B	19. C	20. D	21. D	22. A	23. E	24. C
25. C	26. E	27. D	28. E	29. D	30. B	31. B	32. C	33. A			

### 5. Ünite Değerlendirme Soruları

A	1. konik	2. doğrultmanı - odağı - dış merkezliği		3. koniğin tepe noktaları		4. 1	5. $F(1, 0)$			
	6. $2\sqrt{21}$	7. $x^2 + 4y^2 = 16$	8. birbirine eşit - $2\sqrt{6}$	9. $4x^2 - 9y^2 = 36$		10. $4\sqrt{2}$				
B	1. D	2. Y	3. D	4. D	5. Y	6. D	7. D	8. Y	9. Y	10. D

### 5. Ünite Değerlendirme Testi

1. B	2. D	3. D	4. B	5. C	6. E	7. C	8. B	9. C	10. A	11. E	12. D
13. B	14. D	15. A	16. A	17. D							



– A –

**açı:** Ortak bir noktadan çıkan iki ışının birleşimi.

**açıortay:** Bir açıyı iki eş açıya ayıran ışın.

**ağırlık merkezi:** Sonlu sayıda noktadan oluşan bir sistemin kütle merkezi.

**alan:** Yüzölçümü.

**altın oran:**  $[AB]$  doğru parçası üzerinde seçilen bir C noktası için  $|AB| / |AC| = |AC| / |CB|$  eşitliğini sağlayan oran.

**analitik düzlem:** Koordinat eksenleri ile oluşturulmuş düzlem.

**apsis:** Bir P noktasının düzlemdeki (x,y) koordinatlarının x sayısı.

– B –

**benzer geometrik şekiller:** Bir benzerlik dönüşümü altında birisi ötekine dönüşebilen iki geometrik şekil.

**birim:** Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.

**birim kare:** Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan kare.

**bütünler açı:** Ölçüleri toplamı  $180^\circ$  olan iki açıdan her biri.

– C-Ç –

**çap:** Bir çemberde merkezden geçen kiriş.

**çevre uzunluğu:** Düzlemsel bir şekli sınırlayan kenarların toplam uzunluğu.

**çokgensel bölge:** Sınırı bir çokgen olan bölge.

– D –

**derece:** Açı ölçme birimi.

**dış açı:** Bir çokgende herhangi bir iç açının bütünler açısı.

**dışbükey dörtgen:** Her bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den küçük olan dörtgen.

**dik açı:** Ölçüsü  $90^\circ$  olan açı.

**dik doğrular:** Doğrultuları arasındaki açı  $90^\circ$  olan doğrular.

**doğru:** Uçlarından sınırsız uzatılabilen düz çizgi.

**doğru parçası:** Verilen bir doğru üzerinde bulunan ve söz konusu doğru üzerindeki iki nokta arasında kalan parça

**doğrultman:** Bir geometrik şeklin oluşumuna dayanak olan doğru veya eğri.

**dönüşüm:** Dönme, öteleme, yansıma ve homoteti gibi fonksiyonlar.

**dönme simetrisi:** Bir şeklin kendi merkezi etrafında  $360^\circ$  den küçük açılı dönmelerinde en az bir defa kendisi ile çakışması durumu.

**dörtgen:** Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren dört doğru parçasından oluşan kapalı şekil.

**dual:** Kaplamadaki düzgün çokgensel bölge ile komşu düzgün çokgensel bölgenin merkezinin doğru parçalarıyla birleştirilmesi.

**düzgün çokgen:** Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit ve açıları eş olan çokgen.

– E –

**eğim:** Bir doğrunun x-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açının tanjantı.

**eksen:** Koordinat düzlemlerini oluşturan sayı doğrularından her biri.

**eş:** Birisi ötekiyle çakışabilen nesneler.

**eşitlik:** Eşit olma durumu.

**eşitsizlik:** Bir çokluğun bir diğerinden küçük, küçük veya eşit, büyük, büyük veya eşit olduğunu bildiren önerme.

– F –

**fraktal:** Bir şekilden belirli bir kurala göre ardışık şekiller oluşturulması.



– G –

**geometrik yer:** Belirli koşulları sağlayan noktaların oluşturduğu küme.

**grafik:** Bir bağıntının tüm elemanlarının analitik düzlemde gösterilmesiyle oluşan noktaların kümesi.

– H –

**hipotenüs:** Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenar.

**hipotenüs-dik kenar eşliği:** İki dik üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, üçgenlerin hipotenüs ve bir dik kenar uzunluklarının eşit olması hâlinde diğer kenarlarının da eşit olma durumu.

**homoteti:** Benzerlik dönüşümü.

**homotetik:** Aralarında bir homoteti bulunan iki geometrik şekil.

– İ-İ –

**ışın:** Bir doğru üzerinde alınan bir noktanın aynı tarafında kalan tüm noktaların birleşimi.

**içbükey dörtgen:** Herhangi bir iç açısının ölçüsü  $180^\circ$  den büyük olan dörtgen.

**ispat:** Bir önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının gösterilmesi.

– K –

**kaplama:** Bir yüzeyin geometrik şekillerle boşluk kalmayacak şekilde süslenmesi.

**kenarortay:** Bir üçgende bir köşeyi karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçası.

**kesen:** Çemberi iki noktada kesen doğru.

**kiriş:** Çember üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçası.

**kirişler dörtgeni:** Köşe noktaları çemberin üzerinde bulunan dörtgen.

**konik:** Düzlemde sabit bir noktaya uzaklığının, sabit bir doğruya uzaklığı oranı sabit olan noktaların geometrik yeri.

– M –

**merkez açısı:** Köşesi çemberin merkezinde olan açı.

– N –

**normal doğru:** Düzlemsel bir eğrinin bir P noktasından geçen ve eğrinin P noktasındaki teğetine dik olan doğru.

– O –

**oran:** İki sayıdan veya iki çokluktan birinin ötekine bölümü.

**orantı:** İki oranın eşit olma durumu.

**ordinat:** Bir P noktasının düzlemdeki (x, y) koordinatlarının y sayısı.

**orijin:** Koordinat eksenlerinin kesişme noktası.

**orta dikme:** Bir doğru parçasının orta noktasına dik olan doğru.

**orta taban:** Bir dörtgenin komşu olmayan iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçası.

– P –

**parametre:** En az iki değişkeni bağlayan ortak değişken.

**periyodik kaplama:** Sadece öteleme kullanılarak düzlemde boşluk kalmayacak ve çokgensel bölgeler çakışmayacak biçimde düzlemin örtülmesi.

– T –

**teğet:** Bir eğri ile ortak noktası tek olan doğru.

**teğet-kiriş açısı:** Köşesi çemberin üzerinde olan ve bir teğet ile bir kirişin oluşturduğu açı.

**teğetler dörtgeni:** Kenarları bir çembere teğet olan dörtgen.

**teorem:** Verilen belirli varsayımlar altında kanıtlanabilen genel yargı.

– V –

**vektör:** Düzlemde ve uzayda yönü, doğrultusu ve uzunluğu aynı olan doğru parçalarının ayırdığı denklik sınıflarından her biri.

– Y –

**yarı çap:** Çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktaya birleştiren doğru parçası.

**yay:** Çemberin bir parçası.

**yer vektörü:** Bir vektörü başlangıç noktasında temsil eden vektör.



## PROJE DEĞERLENDİRME FORMU

Grubunun adı: ..... Projenin adı: ..... Sınıf: .....

I. PROJEYİ HAZIRLAMA SÜRECİ	Zayıf (1)	Geliştirilmeli (2)	Orta (3)	İyi (4)	Çok iyi (5)
1. Projenin amacını belirleme					
2. Projeye uygun plan yapma					
3. İhtiyaçları belirleme					
4. Grup içinde görev dağılımı yapma ( grup çalışması için)					
5. Farklı kaynaklardan bilgi toplama					
6. Projeyi plana göre gerçekleştirme					
7. Proje çalışmasını istekli olarak gerçekleştirme					
<b>TOPLAM</b>					
II. PROJENİN İÇERİĞİ					
1. Yazılı metinlerde Türkçeyi doğru kullanma					
2. Kullanılan bilgilerin doğruluğu					
3. Toplanan bilgileri analiz etme					
4. Elde edilen bilgilerden çıkarımda bulunma					
5. Hazırlanan raporun; resimler, çizimler, tablo, grafik ve istatistiklerle destekleme					
6. Yaratıcılık yeteneğini kullanma					
7. Projeyi belirlenen sürede tamamlama					
<b>TOPLAM</b>					
III. SUNU YAPMA					
1. Türkçeyi doğru kullanma					
2. Sorulara cevap verme					
3. Konuyu, dinleyicilerin ilgisini çekecek şekilde sunma					
4. Sunuyu, amaca yönelik materyalle destekleme					
5. Sunuda, akıcı bir dil ve beden dilini kullanma					
6. Sunuyu verilen sürede yapma					
<b>TOPLAM</b>					
<b>GENEL TOPLAM</b>					

Öğretmenin yorumu: .....



## SEMBOLLER VE OKUNUŞLARI

$\Rightarrow$ : ise

$\in$ : elemanıdır

$\notin$ : elemanı değildir

$\cap$ : kesişim

$\neq$ : eşit değildir

$\leq$ : küçük veya eşittir

$\geq$ : büyük veya eşittir

$\perp$ : diklik

br: birim

$br^2$ : birim kare

$T_u$ : öteleme dönüşümü

$R_\alpha$ : dönme dönüşümü

$\Delta$ : diskriminant

$[AB]$ : AB doğru parçası

$\overline{AB}$ : AB ışını

$|AB|$ : AB uzunluğu

$|AB| = |CD|$ : AB uzunluğu eşit CD uzunluğu

$[AB] \parallel [CD]$ : AB doğru parçası paralel CD doğru parçası

$\widehat{A}$ : A açısı

$\widehat{ABC}$ : ABC açısı

$\widehat{AB}$ : AB yayı

$m(\widehat{A})$ : A açısının ölçüsü

$m(\widehat{ABC})$ : ABC açısının ölçüsü

$m(\widehat{AB})$ : AB yayının ölçüsü

$m(\widehat{ABC})$ : ABC yayının ölçüsü

$|\widehat{AB}|$ : AB yayının uzunluğu

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ : ABC açısının ölçüsü eşit DEF açısının ölçüsü

$h_a$ : a kenarına ait yükseklik

cos: kosinüs fonksiyonu

sin: sinüs fonksiyonu

tan: tanjant fonksiyonu

$\widehat{ABC}$ : ABC üçgeni

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ : ABC üçgeni benzer DEF üçgeni

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ : ABC üçgeni eş DEF üçgeni

$\text{Ç}(\widehat{ABC})$ : ABC üçgeninin çevresi

$A(\widehat{ABC})$ : ABC üçgeninin alanı

$\vec{A}$ : A vektörü

$\|\vec{A}\|$ : A vektörünün uzunluğu

$A(x, y)$ : A noktasının koordinatları

## KAYNAKÇA

1. Fine, H. B. , Thompson, H. D. , Coordinate Geometry, New York, 1911.
2. <http://www.meb.gov.tr>
3. <http://ttkb.meb.gov.tr>
5. Küpeli, S. , 100 Yılın Olimpiyat Sorularıyla Geometri, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 2010.
6. Matematik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu Yayınları, İstanbul, 2009.
7. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ortaöğretim Geometri Dersi 9-10. Sınıf Öğretim Programı, MEB, Ankara, 2010.
8. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ortaöğretim Geometri Dersi 11. Sınıf Öğretim Programı, MEB, Ankara, 2011.
9. TDK Yazım Kılavuzu, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 2009.
10. TDK Türkçe Sözlük, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 2009.
11. Türk Matematik Derneği, Konikler, Matematik Dünyası, 2005, 2. Sayı.
12. Wells, D. , Geometrinin Gizli Dünyası, Çeviri: Aslan, S. , Doruk Yayıncılık, Ankara, 2002.