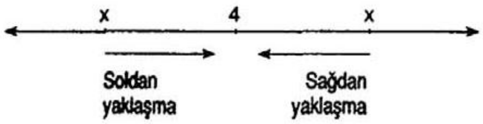
FONKSİYONLARDA LİMİT

Soldan ve Sağdan Yaklaşma



x	x
3	5
3,5	4,5
3,9	4,1
3,99	4,01
3,999	4,001
....	....
$x \to 4^-$	$x \to 4^+$

x değişkeni a reel sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma denir ve $x \to a^-$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni a reel sayısına, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 1

$f : R \to R$, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunda x, 2 ye sağdan ve soldan yaklaştığında f(x) kaça yaklaşır?

Çözüm

x, 2 ye soldan yaklaşıyor — x, 2 ye sağdan yaklaşıyor

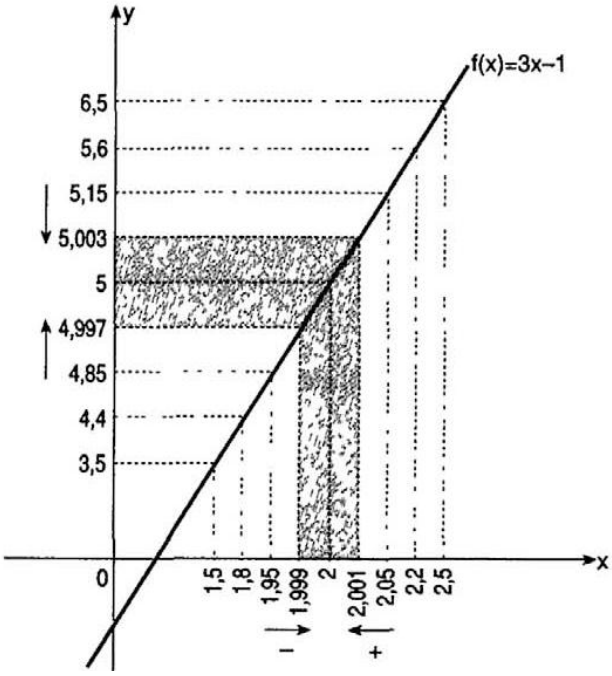
$-\infty$ ⟶ 2 ⟵ ∞

x	1,5	1,8	1,95	1,999	2,001	2,05	2,2	2,5
f(x)	3,5	4,4	4,85	4,997	5,003	5,15	5,6	6,5

f(x), artarak 5 e yaklaşıyor — f(x), azalarak 5 e yaklaşıyor

O halde, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunda x, 2 ye sağdan ve soldan yaklaştığında f(x) 5 e yaklaşır.

Bu durumu, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun grafiği üzerinde de görelim.



Grafikte de görüldüğü gibi, $x \to 2^-$ için fonksiyonun değeri 5 sayısına yaklaşmaktadır. 5 sayısına f fonksiyonunun x = 2 noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$ şeklinde gösterilir.

Aynı şekilde, $x \to 2^+$ için fonksiyonun değeri 5 sayısına yaklaşmaktadır. 5 sayısına f fonksiyonunun x = 2 noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$ şeklinde gösterilir.

LİMİT

x değişkeni a ya soldan yaklaştığında $(x \to a^-)$ f(x) fonksiyonu da L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa "f(x) in x = a daki soldan limiti L_1 dir." denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni a ya sağdan yaklaştığında $(x \to a^+)$ f(x) fonksiyonu da L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa "f(x) in x = a daki sağdan limiti L_2 dir." denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

✳ Soldan limit, sağdan limite eşit ise fonksiyonun limiti vardır. Farklı ise fonksiyonun limiti yoktur.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dir.

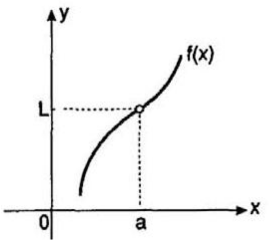
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK 2

1. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

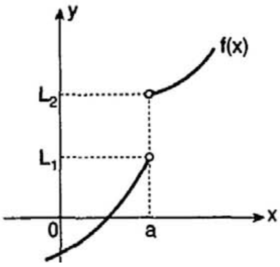
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

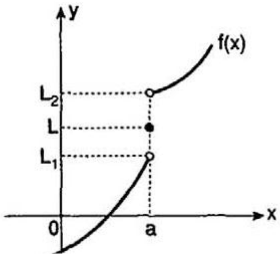
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

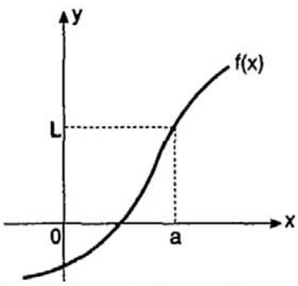
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



4. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



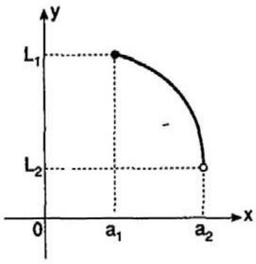
5. $f : [a_1, a_2) \to R$ ise

$\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = \lim\limits_{x \to a_1^+} f(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a_2} f(x) = \lim\limits_{x \to a_2^-} f(x) = L_2$

şeklinde belirlenir.

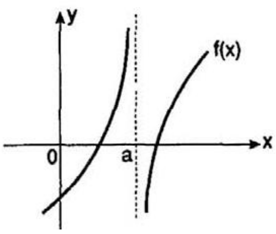
a_1 noktasındaki limit, sadece sağdan *limitle* belirlenir. a_2 noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.



6. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

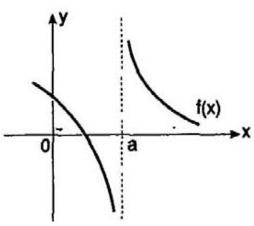
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



7. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

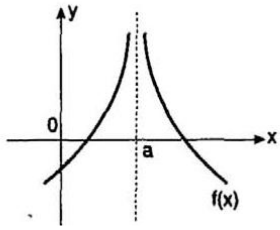
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



8. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

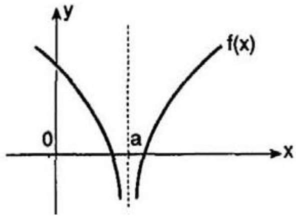
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



9. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

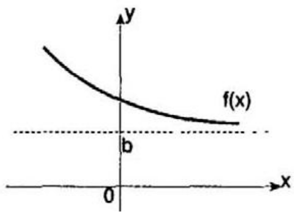
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



ÖRNEK 3

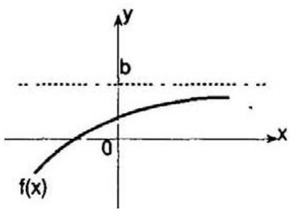
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



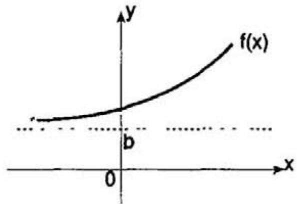
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



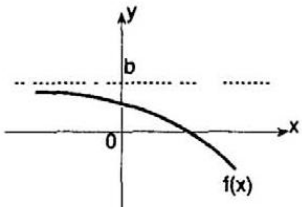
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$



4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$



ÖRNEK 4

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 3 \text{ ise} \\ 2, & x = 3 \text{ ise} \\ 2x + 2, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ değeri kaçtır?

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ değeri kaçtır?

c) $f(3)$ kaçtır?

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM :

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (3x-1) = 3.3-1 = 8$

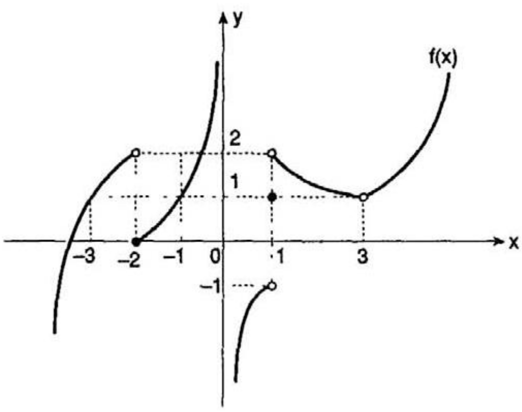
b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x+2) = 2.3+2 = 8$

c) $f(3) = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 8$ olduğundan

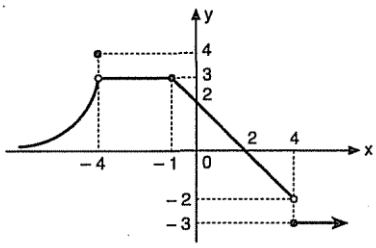
$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 8$ dir.

ÖRNEK 5



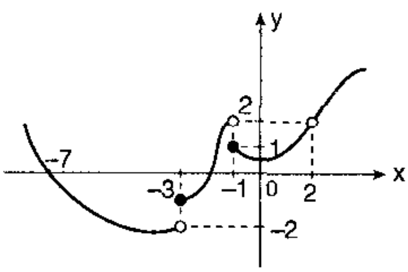
Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x in −3, −2, −1, 0, 1 ve 3 değerlerinden bazıları için var olan limitlerini bulunuz.

ÖRNEK 6



Yukarıda verilen f(x) fonksiyonu için −4, −3, −1, 0, 2, 4 ve 5 noktaları için var olan limitler toplamı kaçtır?

ÖRNEK 7



Yukarıdaki şekilde f(x) fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

değerlerini bulalım:

LİMİTLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

$A \subset R$, $a \in R$, $L_1 \in R$, $L_2 \in R$, $f: A \to R$

$g: A \to R$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ ise

1. $c \in R$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to a} c = c$, $\lim\limits_{x\to a} [c.f(x)] = c.\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1.L_2$

5. $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

6. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ise

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ dır.

ÖRNEK 8

1. $\lim\limits_{x\to 5} 7 = 7$

2. $\lim\limits_{x\to 3} 5x = 5.\lim\limits_{x\to 3} x = 5.3 = 15$

3. $\lim\limits_{x\to 2} (3x+5) = \lim\limits_{x\to 2} 3x + \lim\limits_{x\to 2} 5 = 3.2 + 5 = 11$

4. $\lim\limits_{x\to 0} [(x^2+2).(x+3)] = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+2).\lim\limits_{x\to 0} (x+3)$

$= (0^2+2).(0+3)$

$= 6$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\dfrac{2^2-2}{2+2}=\dfrac{4-2}{4}=\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+4x+1)=3.1^2+4.1+1=8$

ÖRNEK 9

$$\lim_{x\to 3}\left[\left(x^2-3x+1\right)+\left(x-2\right)^2\right]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM :

$\lim\limits_{x\to 3}\left[x^2-3x+1+x^2-4x+4\right]$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left[2x^2-7x+5\right]$

$=\lim\limits_{x\to 3}2x^2-\lim\limits_{x\to 3}7x+\lim\limits_{x\to 3}5$

$=2\lim\limits_{x\to 3}x^2-7\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}5$

$=2.(3)^2-7.3+5$

$=18-21+5=2$ bulunur.

ÖRNEK 10

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x-3}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x-3}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x-3)}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}2x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}3}$

$=\dfrac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}{3\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}$

$=\dfrac{2.4-3.2+1}{3.2-3}=\dfrac{3}{3}$

$=1$ bulunur.

UYARI:

Bir fonksiyonun kritik noktalarında limit soruluyorsa, bu noktalarda sağdan ve soldan limite bakılır.

Kritik noktalar:

a) Kesirli fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler,

b) Parçalı fonksiyonlarda fonksiyonun kuralının değiştiği (parçalandığı) noktalar,

c) Mutlak değer fonksiyonunda;
$y=|f(x)|$ fonksiyonunda $f(x)=0$ yapan değerler,

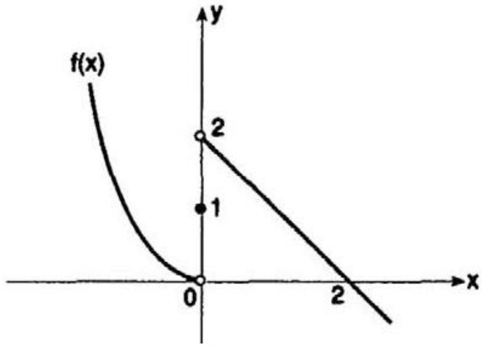
ÖRNEK 11

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x<0 \\ 1 & , \ x=0 \\ -x+2 & , \ x>0 \end{cases}$$ **olduğuna göre,**

aşağıdaki limitleri (varsa) bulunuz.

a. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

Çözüm



a. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}x^2$

$=(-1)^2$

$=1$

b. $x=0$ **kritik nokta olduğundan soldan ve sağdan limitlerine bakılmalıdır.**

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2$

$=0^2$

$=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+2)$

$=-0+2$

$=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ **olduğundan**

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **yoktur.**

c. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(-x+2)$

$=-3+2$

$=-1$

7. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a}f(x)\right|$

ÖRNEK 12

$\lim\limits_{x\to 1}|x^2-x-3|$ **limitinin değeri kaçtır?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 1}|x^2-x-3| = \left|\lim_{x\to 1}(x^2-x-3)\right|$$
$$= |1^2-1-3| = |-3|$$
$$= 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 13

$f(x) = (2x+1).|x+3| + 4$ ise $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x\to -5} f(x) = \lim_{x\to -5}(2x+1).\lim_{x\to -5}|x+3| + \lim_{x\to -5} 4$$
$$= (2.(-5)+1).\left|\lim_{x\to -5}(x+3)\right| + 4$$
$$= (-10+1).|-5+3| + 4$$
$$= (-9).|-2| + 4$$
$$= (-9).2 + 4$$
$$= -18 + 4$$
$$= -14 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 14

$$\lim_{x\to 2}\left(|x-3| + |x^2-x-12|\right)$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 2}\left(|x-3| + |x^2-x-12|\right)$$
$$= |2-3| + |2^2-2-12| = |-1| + |-10| = 11$$

ÖRNEK 16

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-7|}{x+1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-7|}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}|x^2-7|}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}$$
$$= \frac{|2^2-7|}{2+1} = \frac{|-3|}{3}$$
$$= \frac{3}{3}$$
$$= 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 17

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = 1$ paydayı ve mutlak değerin içini sıfır yaptığından sağdan ve soldan limitine bakalım.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{|1^+-1|}{1^+-1} = \frac{|0^+|}{0^+} = \frac{0^+}{0^+} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{|1^--1|}{1^--1} = \frac{|0^-|}{0^-} = \frac{0^+}{0^-} = -1$$

veya

$x \to 1^+$ için $|x-1| = x-1$

$x \to 1^-$ için $|x-1| = -x+1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-x+1}{x-1} = -1$$

Sağdan ve soldan limitleri farklı olduğundan $x = 1$ noktasında limit yoktur.

ÖRNEK 18

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{|x^2-4|}{x+2}$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

x		-2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

$x = -2^+$ için $|x^2-4| = -x^2+4$ tür.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}\frac{-(x^2-4)}{x+2}$$
$$= \lim_{x\to -2^+}\frac{-(x-2).(x+2)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -2^+}[-(x-2)] = \lim_{x\to -2^+}(2-x) = 2-(-2) = 4 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 19

Örnek:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{|x^2+x|} + \frac{|x|}{|x+1|}\right)$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{|x.(x+1)|} + \frac{|x|}{|x+1|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{|x|.|x+1|} + \frac{|x|}{|x+1|}\right)$$

$x \to 0^-$ için $|x| = -x$ tir.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{-x.|x+1|} + \frac{-x}{|x+1|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-1}{|x+1|} - \frac{x}{|x+1|}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-1}{|0+1|} - \frac{0}{|0+1|}\right) = \left(\frac{-1}{1} - \frac{0}{1}\right) = -1 \text{ dir.}$$

8. $c \in R^+$ **olmak üzere,**

$$\lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

ÖRNEK 20

$\lim\limits_{x\to 3} 2^{x^2-x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x\to 3} 2^{x^2-x-2} = 2^{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x-2)}$$
$$= 2^{3^2-3-2} = 2^{9-3-2} = 2^4$$
$$= 16 \text{ bulunur.}$$

9. n bir tek doğal sayı ya da n bir çift doğal sayı olduğunda a nın bir komşuluğunda $f(x) \geq 0$ ise

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ dir.

ÖRNEK 21

$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+5x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+5x-2} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-2)}$$
$$= \sqrt{1^2+5.1-2} = \sqrt{4}$$
$$= 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 22

$\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2+4x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2+4x-2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2+4x-2)}$$
$$= \sqrt[3]{(-1)^2+4(-1)-2}$$
$$= \sqrt[3]{1-4-2}$$
$$= \sqrt[3]{-5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 23

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9} + \lim\limits_{x\to 13}\sqrt{x^2-25}$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM :

$$\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)} + \sqrt{\lim_{x\to 13}(x^2-25)}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9} + \sqrt{\lim_{x\to 13} x^2 - \lim_{x\to 13} 25}$$
$$= \sqrt{16+9} + \sqrt{169-25}$$
$$= \sqrt{25} + \sqrt{144}$$
$$= 5 + 12 = 17 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 24

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{2x^2+4x+3} + 2^{\frac{x+3}{x+1}}\right)$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{2x^2+4x+3} + 2^{\frac{x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2.1^2+4.1+3} + 2^{\frac{1+3}{1+1}}$$
$$= \sqrt{9} + 2^2 = 3 + 4 = 7 \text{ dir.}$$

10. $\lim\limits_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$

ÖRNEK 25

$\lim\limits_{x\to 3}[\log_5(x^2+1)]$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 3}[\log_5(x^2+1)] = \log_5[\lim_{x\to 3}(x^2+1)]$$
$$= \log_5(3^2+1)$$
$$= \log_5 10 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 26

$\lim\limits_{x\to 2}[\log(x^3+2)]$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x\to 2}[\log(x^3+2)] = \log[\lim_{x\to 2}(x^3+2)]$$
$$= \log(2^3+2)$$
$$= \log 10$$
$$= 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 27

$\lim\limits_{x\to 1}[\,|2x-3| + \log_2(5x+3)\,]$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 1}[\,|2x-3|+\log_2(5x+3)\,] = \lim_{x\to 1}|2x-3| + \lim_{x\to 1}\log_2(5x+3)$$
$$= |2.1-3| + \log_2(5.1+3)$$
$$= |-1| + \log_2 8$$
$$= 1 + \log_2 2^3$$
$$= 1 + 3.\log_2 2$$
$$= 1 + 3$$
$$= 4 \text{ bulunur.}$$

11. *Trigonometrik Fonksiyonların Limiti*

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

- $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$
- $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$
- $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$, $(\cos a \neq 0)$
- $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$, $(\sin a \neq 0)$

ÖRNEK 28

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cot x = \cot\frac{\pi}{2} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - \sqrt{3}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6} - 1}{\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ÖRNEK 29

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sqrt{3}\,.\tan x}{2\cos x + 1}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

ÖRNEK 30

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 3}{2\cot x - 1}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM :

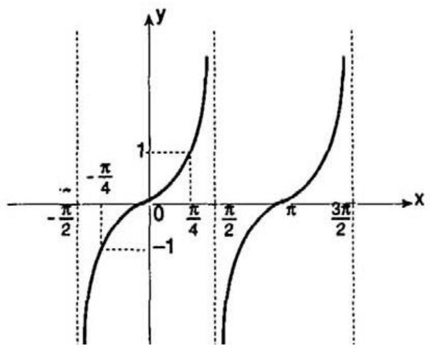
$\dfrac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x - 3}{2\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cot x - 1} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - 3}{2.\cot\frac{\pi}{4} - 1}$

$= \dfrac{1-3}{2-1} = \dfrac{-2}{1} = -2$ bulunur.

ÖRNEK 31

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ limitinin değeri (varsa) nedir?

Çözüm



Yukarıda $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ aralığındaki grafiği çizilmiştir.

Bu grafiğe göre,

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x \neq \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ yoktur.

12. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & , \text{ n pozitif çift sayı} \\ \text{yoktur} & , \text{ n pozitif tek sayı} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$, $(n \in Z^+)$

ÖRNEK 32

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$

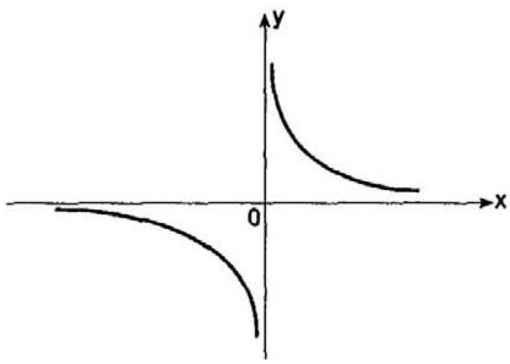
Çözüm

	−				+		
x	-10^{-1}	-10^{-10}	-10^{-100}	0	10^{-100}	10^{-10}	10^{-1}
$\frac{1}{x}$	-10	-10^{10}	-10^{100}	tanımsız	10^{100}	10^{10}	10

x	1	10	100	1000	$\cdots \to \infty$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\cdot \to 0$

x	−1	−10	−100	−1000	$\cdot \to -\infty$
$\frac{1}{x}$	−1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$\cdot \to 0$

O halde, $f(x) = \frac{1}{x}$ in grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafikten de görüldüğü gibi;

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ olduğundan, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ yoktur.

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ bulunur.

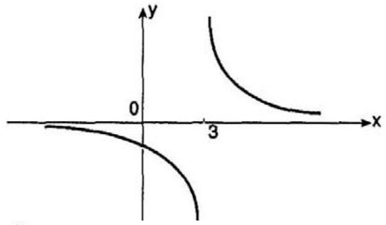
ÖRNEK 33

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x-3}$ **b.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x-3}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-3}$

Çözüm

$f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ nin grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre;

a. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{2}{0^+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3} \neq \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-3}$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x-3}$ yoktur.

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$ bulunur.

$a \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

- $\dfrac{a}{a} = 1$, $\dfrac{0}{a} = 0$, $a \pm\infty = \pm\infty$
- $\infty + \infty = \infty$, $\infty . \infty = \infty$
- $a > 0$ ise $\dfrac{a}{0^+} \to \infty$, $\dfrac{a}{0^-} \to -\infty$

  $\dfrac{a}{\infty} \to 0$, $\dfrac{\infty}{a} \to \infty$, $a . \infty \to \infty$

  $a < 0$ ise $\dfrac{a}{a^+} \to -\infty$, $\dfrac{a}{a^-} \to \infty$

  $\dfrac{a}{\infty} \to 0$, $\dfrac{\infty}{a} \to -\infty$, $a . \infty \to -\infty$
- $\dfrac{0}{0^+} \to 0$, $\dfrac{0}{0^-} \to 0$
- $\dfrac{a}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{0}$, $\dfrac{0^\pm}{0}$ ifadeleri tanımsızdır.
- $\dfrac{0^\pm}{0^\pm}$, $0 . \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ belirsizliktir.

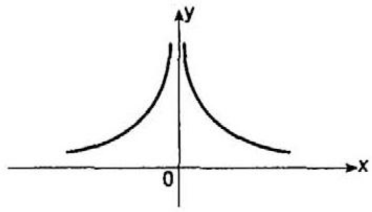
ÖRNEK 34

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ **b.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$

Çözüm

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre;

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ dur.

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

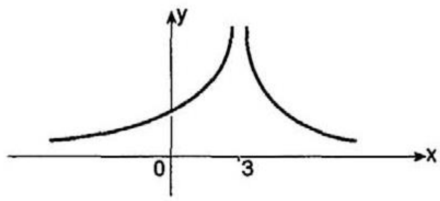
c. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

olarak bulunur.

ÖRNEK 35

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

Çözüm



$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$ bulunur.

ÖRNEK 36

Aşağıda bazı limitler hesaplanmıştır. İnceleyiniz.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2}{x} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2}{x} = \dfrac{-2}{0^-} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-x}{x^2} = \dfrac{2-0}{(0^-)^2} = \dfrac{2}{0^+} = \infty$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3-x}{2^x-1} = \dfrac{3-0}{1^+-1} = \dfrac{3}{0^+} = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \dfrac{2+1}{0^+} = \infty$

6. $\lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{x}{1-\ln x} = \dfrac{e}{1-1^+} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1-0 = 1$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\dfrac{3}{x}\right) = 2+0 = 2$

9. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-2}{|x-1|} = \dfrac{1^2-2}{|1^+-1|} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

10. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2}{|x-2|} = \dfrac{2^2-2}{|2^--2|} = \dfrac{4-2}{|0^-|} = \dfrac{2}{0^+} = \infty$

13. $a > 1$ ise

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$ ise

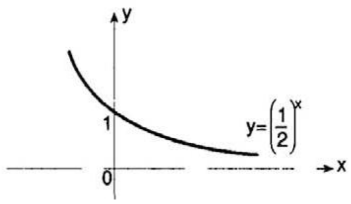
$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$

ÖRNEK 37

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

x	1	2	3	4	$\to\infty$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\to 0$



Basit kesirlerin kuvveti büyüdükçe değeri sıfıra yaklaşır. O halde,

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$ dır.

ÖRNEK 38

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

Pozitif bileşik kesirlerin kuvveti büyüdükçe değeri de büyür. O halde,

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \infty$ dur.

ÖRNEK 39

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

$= \infty$ bulunur.

ÖRNEK 40

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

x	1	3	5	$\cdots \to\infty$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^x$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{27}$	$-\frac{32}{243}$	$\cdot \to 0$

x	2	4	6	$\cdots \to\infty$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^x$	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{64}{729}$	$\cdots \to 0$

O halde,

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$ bulunur.

ÖRNEK 41

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(5^{\frac{1}{x}}+2^{-x}+1\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM :

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(5^{\frac{1}{x}}+2^{-x}+1\right) =$

$=5^{\frac{1}{\infty}}+2^{-\infty}+1$

$=5^{\frac{1}{\infty}}+\dfrac{1}{2^{\infty}}+1$

$=5^0+\dfrac{1}{\infty}+1$

$= 1 + 0 + 1$

$= 2$ bulunur.

ÖRNEK 42

$$\lim_{x \to -\infty}\left(7^{\frac{1}{x}} + 5^{x} + 1\right)$$ **limiti kaçtır?**

ÇÖZÜM :

$$\lim_{x \to -\infty}\left(7^{\frac{1}{x}} + 5^{x} + 1\right) = 7^{\frac{1}{-\infty}} + 5^{-\infty} + 1$$

$$= 7^{0} + \frac{1}{5^{\infty}} + 1$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} + 1$$

$$= 1 + 0 + 1$$

$= 2$ bulunur.

14. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ve a nın bir komşuluğunda g sınırlı fonksiyon ise

$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = 0$ dır.

ÖRNEK 43

$$\lim_{x \to 0}\left(x.\sin\frac{1}{x}\right)$$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$\lim_{x \to 0} x = 0$ ve $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ olduğundan,

yani $\sin\frac{1}{x}$ sınırlı olduğundan;

$\lim_{x \to 0}\left(x.\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ bulunur.

15. $f(x) \le h(x) \le g(x)$ olmak üzere,

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) = b$ dir.

ÖRNEK 44

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x}$$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}$$

$0 \le \lim_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x} \le 0$ ise $\lim_{x \to \infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ dır.

ÖRNEK 45

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\cos x}{x}$$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x \to \infty}\frac{\cos x}{x} \le \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}$$

$0 \le \lim_{x \to \infty}\frac{\cos x}{x} \le 0$ ise $\lim_{x \to \infty}\frac{\cos x}{x} = 0$ dır.

ÖRNEK 46

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\sin 3x}{x^2}$$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$-1 \le \sin 3x \le 1$$

$$-\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin 3x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \le \lim_{x \to \infty}\frac{\sin 3x}{x^2} \le \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}$$

$0 \le \lim_{x \to \infty}\frac{\sin 3x}{x^2} \le 0$ ise $\lim_{x \to \infty}\frac{\sin 3x}{x^2} = 0$ dır.

LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMLARI

Limit hesaplamalarında karşılaşılan

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}

biçimindeki ifadelere belirsiz ifadeler denir.

1. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Genellikle özdeşlikler kullanılarak çarpanlarına ayrılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak sonuç bulunur. Bunlar sağlanmıyorsa türev konusunda anlatacağımız L'HOSPITAL yöntemi kullanılır.

ÖRNEK 47

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\lim_{x \to 1}(x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$, $\lim_{x \to 1}(x - 1) = 1 - 1 = 0$

olduğundan $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$= \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2$ bulunur.

ÖRNEK 48

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8) = 2^3-8=0$, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=2^2-4=0$

olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$$= \frac{2^2+2.2+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 49

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin 0}{1-\cos 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x.(1+\cos x)}{(1-\cos x).(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x.(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x.(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1+\cos 0}{\sin 0} = \frac{1+1}{0^+} = \infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 50

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x).(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 51

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

O merkez

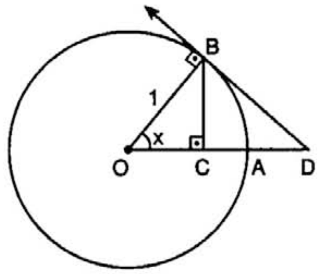
[DB teğet

$m(\widehat{BOD}) = x$

$|BC| = \sin x$

$|OC| = \cos x$

$|BD| = \tan x$



$A(\widehat{OCB}) <$ BOA daire diliminin alanı $< A(\widehat{BOD})$

$$\frac{|OC|.|BC|}{2} < \frac{\pi r^2.x}{2\pi} < \frac{|OB|.|BD|}{2}$$

$$\frac{\cos x.\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

$$\cos x.\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad / \quad \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$1 > \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} > 1$ olduğundan, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir.

$\ast$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

$\ast$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(m.f(x))}{n.f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{m.f(x)}{\sin(n.f(x))} = \dfrac{m}{n}$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tan(m.f(x))}{n.f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{m.f(x)}{\tan(n.f(x))} = \dfrac{m}{n}$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tan(m.f(x))}{\sin(n.f(x))} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(m.f(x))}{\tan(n.f(x))} = \dfrac{m}{n}$

ÖRNEK 52

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x \to 1 \Rightarrow (x-1) \to 0$, $x-1=\alpha$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ olduğundan,

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$ dir.

ÖRNEK 53

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4).(x+2)}{(x-2).(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2)\right]$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}.\lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 1.(2+2)$$

$= 4$ tür.

ÖRNEK 54

$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\tan(2x-10)}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\tan(2x-10)} = \lim_{x\to 5} \frac{1(x-5)}{\tan 2(x-5)}$$

$= \dfrac{1}{2}$ dir.

ÖRNEK 55

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{5x^2}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5}.1^2$$

$$= \frac{1}{5}$$

ÖRNEK 56

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + \tan 4x}{\sin 2x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + \tan 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 2x} + \frac{\tan 4x}{\sin 2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} + \lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

ÖRNEK 57

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{1}{-1} = -1$ dir.

ÖRNEK 58

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\text{ belirsizliği}$$

$\frac{1}{x}=t$ olsun. $x\to\infty$ ise $\frac{1}{x}=t\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3.t}$$

$$=\frac{1}{3}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 59

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$$ **limitinin değeri nedir?**

Çözüm

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}=\frac{1-\sqrt[3]{1-0}}{3.0}=\frac{0}{0}\text{ belirsizliği}$$

$\sqrt[3]{1-x}=t\Rightarrow 1-x=t^3$, $x\to 0$ ise $t\to 1$

$\Rightarrow x=1-t^3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{3(1-t^3)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{3(1-t)(1+t+t^2)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{3(1+t+t^2)}$$

$$=\frac{1}{3.(1+1+1^2)}$$

$$=\frac{1}{9}\text{ dur.}$$

ÖRNEK 60

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x+n}}{x^2-1}$$ **ifadesi hangi reel sayıya eşit olabilir?**

Çözüm

$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ olduğundan, $\lim_{x\to 1}(x-\sqrt{x+n})=0$ olursa $\frac{0}{0}$ belirsizliği oluşur. Bu belirsizliği gidererek verilen limitin reel sayı eşitini bulabiliriz.

$$\lim_{x\to 1}(x-\sqrt{x+n})=0\Rightarrow 1-\sqrt{1+n}=0\Rightarrow n=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{(1+1)(\sqrt{1}+1)}$$

$$=\frac{1}{2.2}=\frac{1}{4}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 61

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}$$

limit değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}-1}=\frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır.

Bu durumda $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ eşitliği kullanılarak ifade sadeleştirilirse

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}=\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ bulunur.}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

✳ $n\in N$ olmak üzere

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$

polinom fonksiyonunda,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(a_nx^n)$$

✳ $m, n\in N$ olmak üzere

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots\ldots+b_1x+b_0}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}0, & n<m\text{ ise}\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\text{ ise}\\ \infty\text{ veya }-\infty, & n>m\text{ ise}\end{cases}$$

ÖRNEK 62

$\lim\limits_{x\to\infty} (4x^3 - x^2 + 3)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty} (4x^3 - x^2 + 3) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}\right)$$
$$= \infty^3.(4 - 0 + 0)$$
$$= \infty.4$$
$$= \infty$$

ÖRNEK 63

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^5 + x^2 - 1)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to-\infty} (2x^5 + x^2 - 1) = \lim_{x\to-\infty} x^5\left(2+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)$$
$$= (-\infty)^5.(2 + 0 - 0)$$
$$= (-\infty).2$$
$$= -\infty$$

ÖRNEK 64

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+1}{-2x+3}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{-\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{-2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-2+\frac{3}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{-2+\frac{3}{x}}$$
$$= \frac{4+0}{-2+0} = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{-2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\boxed{4}x+1}{\boxed{-2}x+3}$$
$$= \frac{4}{-2} = -2 \text{ olduğuna dıkkat edıniz.}$$

ÖRNEK 65

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+2x}{3x^2+1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 66

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{\infty}{1-0} = \infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 67

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2+3}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(x+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}$$
$$= \frac{-\infty+0}{1+0} = -\infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 68

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x(2x+1)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2x+1}$$
$$= \frac{3+0}{\infty+1} = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 69

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x^2}$ lımitinin değeri nedir?

Çözüm

$\dfrac{-\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$$
$$= 0 + 0 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 70

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{3x-1}$$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|.\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x.\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{4+0+0}}{3}=\frac{2}{3}$$ tür.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|2x|}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x}$$

$=\frac{2}{3}$ *olduğuna dikkat ediniz.*

ÖRNEK 71

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2+x-1}+3x+1}{\sqrt{x^4+x^3-x^2+1}}$$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2+x-1}+3x+1}{\sqrt{x^4+x^3-x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x.|x|}{|x^2|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x.(-x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$ dir.

ÖDEV: 1. $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+2}{2x^3-3x^2+2}$$

limit değerini bulalım.

2. $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{\sqrt{4x^2+3}}$$

limit değerini bulalım.

3. $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-3x+3}-x}{2x+\sqrt{x^2}-x}$$

limit değerini bulalım.

4. $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x+1}{\sqrt{x^2+1}-2x-1}$$

limit değerini bulalım.

5. $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^3}+x^2}{2x+\sqrt{x^2+9}}$$

limit değerini bulalım.

ÖRNEK 72

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^x}$$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Pay ve paydayı en büyük tabanlı terimin parantezine alalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x\left(1-\frac{2^x}{3^x}\right)}{3^x\left(3+\frac{2^x}{3^x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

$$=\frac{1-0}{3+0}=\frac{1}{3}$$ bulunur.

ÖRNEK 73

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+2^{x+1}}{5^{x+1}-2^x}$$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Küçük tabanlı terim parantezine alalım.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+2^{x+1}}{5^{x+1}-2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(\frac{5^x}{2^x}+2\right)}{2^x\left(5.\frac{5^x}{2^x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^x + 2}{5.\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1} = \frac{0+2}{5.0-1} = -2$$

ÖDEV: 1.⇒ ⇒

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^{x+1} + 3^x}{5^x - 3^x}$$

limit değerini bulalım.

2.⇒ ⇒

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x - 2^{x+1}}{3^{x-1} + 2^x}$$

limit değerini bulalım.

3.⇒ ⇒

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7^x - 2^{x+1}}{7^x + 2^x}$$

limit değerini bulalım.

3. $\infty - \infty$ Belirsizliği

Bu tür belirsizliklerde, bazı cebirsel işlemlerle (payda eşitleme, pay ve paydayı eşlenikle çarpma, ...) düzenlenerek limit kuralları yardımı ile çözülür.

$a > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{a}.\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)$$

ÖRNEK 74

$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-x-2}\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Payda eşitleyelim.

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-x-2}\right) = \lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{x+1-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2+1}$$

$= \frac{1}{3}$ bulunur.

ÖRNEK 75

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{a}.\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ ise

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1}.\left|x+\frac{4}{2.1}\right| - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} (|x+2| - x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} (x+2-x)$$

$= 2$ *bulunur.*

ÖRNEK 76

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6}\right)$$

limit değerini bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x\to2} \left(\underset{(x+3)}{\frac{1}{x-2}} - \frac{5}{x^2+x-6}\right) = \lim_{x\to2} \frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{1}{x+3}$$

$= \frac{1}{5}$ bulunur.

ÖRNEK 77

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1}\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Eşleniği ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{3x-1}\right)}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+1-(3x-1)}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+1-3x+1}{\sqrt{x}.\sqrt{5+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}.\sqrt{3-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{5+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}} = \frac{\infty.(2+0)}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$= \infty$ bulunur.

ÖRNEK 78

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$= 0$ bulunur.

ÖRNEK 79

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x-1\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4}.\left|x+\frac{0}{2.4}\right|+2x-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2.|x|+2x-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-2x+2x-1\right)$$

$= -1$ bulunur.

ÖRNEK 80

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right) = -\infty + \infty = \infty - \infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 82

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(9x^2-1)\right]$ değeri nedir?

Çözüm

$\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(9x^2-1)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\log_3\frac{x^2+1}{9x^2-1}\right]$$

$$= \log_3 \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{9x^2-1}$$

$$= \log_3\frac{1}{9} = \log_3 3^{-2}$$

$= -2$ bulunur.

ÖDEV: 1. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+2}-3x\right)$$

limit değerini bulalım.

2. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$$

limit değerini bulalım.

3. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+2}-3x\right)$$

limit değerini bulalım.

4. $0.\infty$ Belirsizliği

$0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ veya $0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$

olduğundan, $0.\infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek limit hesaplanır.

ÖRNEK 83

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x.\sin\frac{2}{x}\right)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$\infty.0$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x.\sin\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}, \quad \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(2.\frac{1}{x}\right)}{1.\frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 84

$\lim\limits_{x\to 0} (x.\cot x)$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}(x.\cot x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\cot x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 85

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x+2}.(3x-5)\right]$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x+2}.(3x-5)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x+2}=\frac{3}{1}=1 \text{ dir.}$$

5: 1^∞ Belirsizliği

$\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{g(x)}$ ifadesinde 1^∞ belirsizliği varsa,

$\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=k$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{g(x)}=e^k$ dır.

ÖRNEK 86

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{3x+1}\right]^{6x-1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

1^∞ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{3x+1}.(6x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-2}{3x+1}=4$$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{3x+1}\right]^{6x-1}=e^4$ tür.

ÖRNEK 87

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{3x+1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{3x+1}$$

$=1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x+1}.(3x+1)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{x+1}=6 \text{ ise}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{3x+1}=e^6 \text{ dır.}$$

ÖRNEK 88

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

1^∞ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2x.\frac{1}{x}\right)=2 \text{ ise } \lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2 \text{ bulunur.}$$

ÖDEV:

1. ⇒ ⇒

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-2}\right)^{4x-1}$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) $\frac{1}{e}$ B) 1 C) e D) e^2 E) e^3

2. ⇒ ⇒

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1}$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) e^2 D) e^3 E) e^4

3. ⇒ ⇒

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{2x-5}$

limitinin değeri kaçtır?