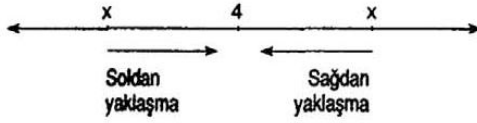


FONKSİYONLARDA LİMİT

Soldan ve Sağdan Yaklaşma



x	x
3	5
3,5	4,5
3,9	4,1
3,99	4,01
3,999	4,001
.....
$x \rightarrow 4^-$	$x \rightarrow 4^+$

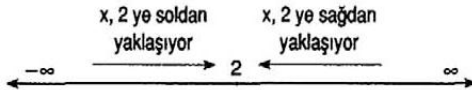
x değişkeni a reel sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşıma soldan yaklaşma denir ve $x \rightarrow a^-$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni a reel sayısına, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşıma sağdan yaklaşma denir ve $x \rightarrow a^+$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunda x , 2 ye sağdan ve soldan yaklaştığında $f(x)$ kaç'a yaklaşır?

Çözüm

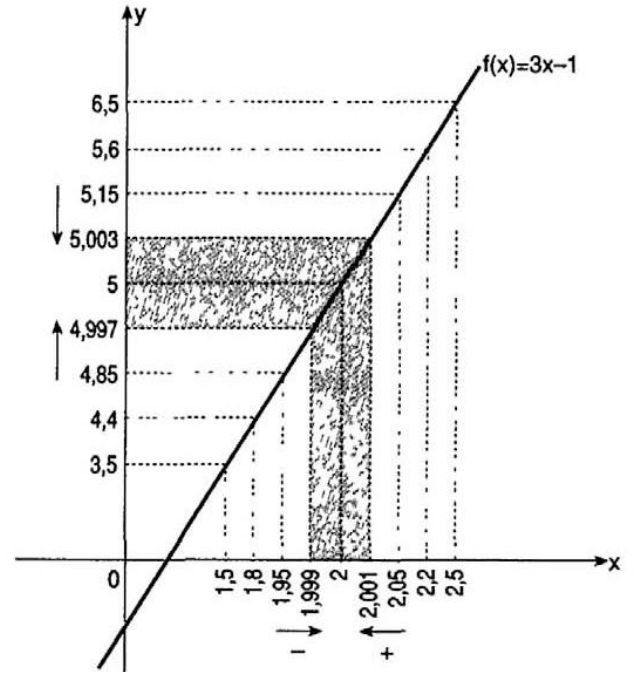


x	1,5	1,8	1,95	1,999	2,001	2,05	2,2	2,5
$f(x)$	3,5	4,4	4,85	4,997	5,003	5,15	5,6	6,5

$f(x)$, artarak 5'e yaklaşıyor
 $f(x)$, azalarak 5'e yaklaşıyor

O halde, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunda x , 2 ye sağdan ve soldan yaklaştığında $f(x)$ 5'e yaklaşır.

Bu durumu, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunun grafiği üzerinde de görelim.



Grafikte de görüldüğü gibi, $x \rightarrow 2^-$ için fonksiyonun değeri 5 sayısına yaklaşımaktadır. 5 sayısına f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ şeklinde gösterilir.

Aynı şekilde, $x \rightarrow 2^+$ için fonksiyonun değeri 5 sayısına yaklaşımaktadır. 5 sayısına f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ şeklinde gösterilir.

LİMİT

x değişkeni a ya soldan yaklaştığında ($x \rightarrow a^-$) $f(x)$ fonksiyonu da L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa " $f(x)$ in $x = a$ daki soldan limiti L_1 dir." denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni a ya sağdan yaklaştığında ($x \rightarrow a^+$) $f(x)$ fonksiyonu da L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa " $f(x)$ in $x = a$ daki sağdan limiti L_2 dir." denir ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

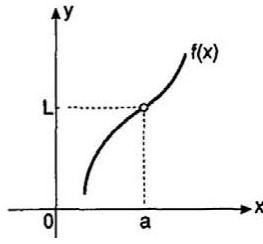
* Soldan limit, sağdan limite eşit ise fonksiyonun limiti vardır. Farklı ise fonksiyonun limiti yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ dir.}$$

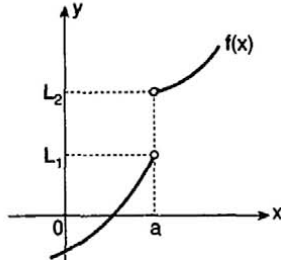
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ yoktur.}$$

ÖRNEK 2

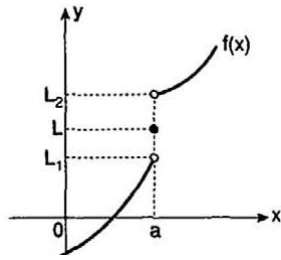
1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



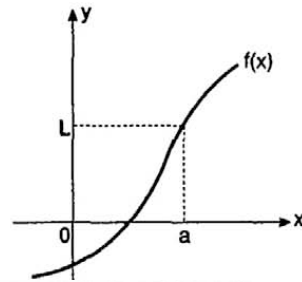
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.



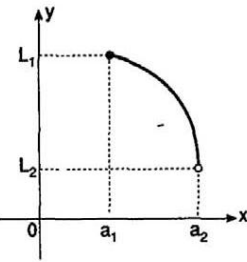
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.



4. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



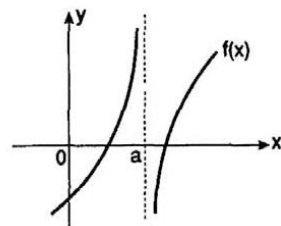
5. $f: [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ise
 $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_1^+} f(x) = L_1$
 $\lim_{x \rightarrow a_2} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_2^-} f(x) = L_2$
 şeklinde belirlenir.



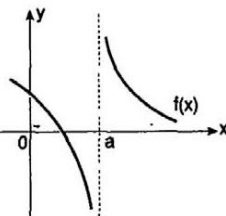
a_1 noktasındaki limit, sadece sağdan limitle

belirlenir. a_2 noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

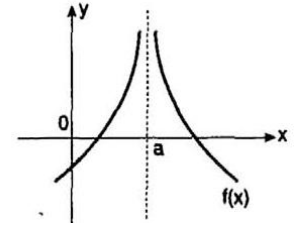
6. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.



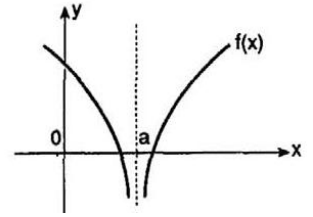
7. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.



8. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

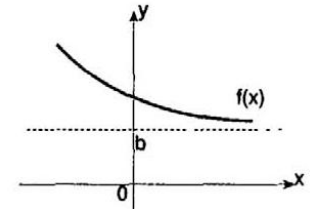


9. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

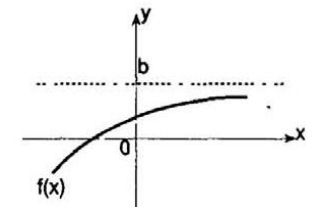


ÖRNEK 3

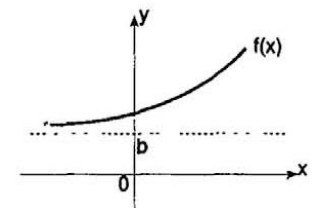
1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$



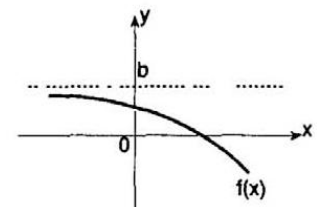
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$



3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$



4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$



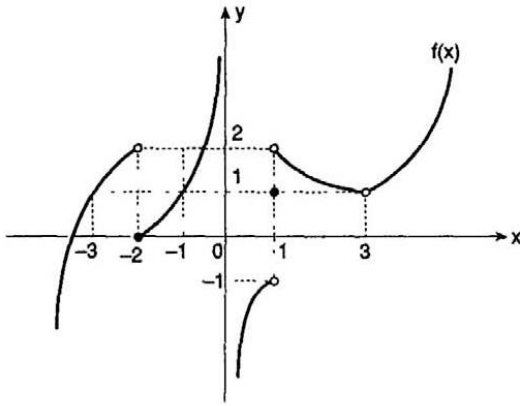
ÖRNEK 4

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 3 \text{ ise} \\ 2, & x = 3 \text{ ise} \\ 2x + 2, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

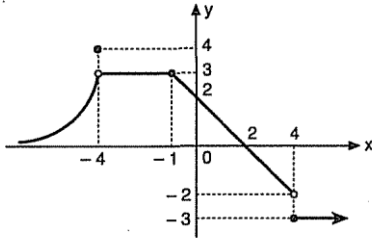
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ değeri kaçtır?
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ değeri kaçtır?
- $f(3)$ kaçtır?
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ değeri kaçtır?

ÖRNEK 5



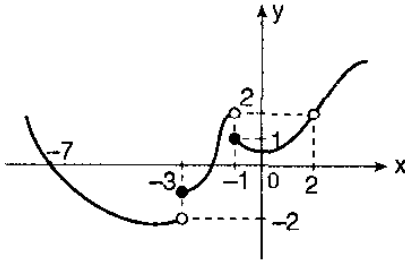
Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x in $-3, -2, -1, 0, 1$ ve 3 değerlerinden bazıları için var olan limitlerini bulunuz.

ÖRNEK 6



Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonu için $-4, -3, -1, 0, 2, 4$ ve 5 noktaları için var olan limitler toplamı kaçtır?

ÖRNEK 7



Yukarıdaki şekilde $f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |

değerlerini bulalım:

LİMİTLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

$A \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, L_1 \in \mathbb{R}, L_2 \in \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ise

- $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
- $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$
- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ise
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dır.

ÖRNEK 8

- $\lim_{x \rightarrow 5} 7 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 3} 5x = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x = 5 \cdot 3 = 15$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 2) \cdot (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3)$
 $= (0^2 + 2) \cdot (0 + 3)$
 $= 6$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)} = \frac{2^2 - 2}{2 + 2} = \frac{4 - 2}{4} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 4x + 1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 8$

ÖRNEK 9

$$\lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 - 3x + 1) + (x - 2)^2]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 10

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x - 3}$ ifadesinin değeri kaçtır?

UYARI:

Bir fonksiyonun kritik noktalarında limit soruluyorsa, bu noktalarda sağdan ve soldan limite bakılır.

Kritik noktalar:

- a) Kesirli fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler,
- b) Parçalı fonksiyonlarda fonksiyonun kuralının değiştiği (parçalandığı) noktalar,
- c) Mutlak değer fonksiyonunda;
 $y = |f(x)|$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ yapan değerler,

ÖRNEK 11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \\ -x + 2 & , \quad x > 0 \end{cases} \text{ olduğuna göre,}$$

aşağıdaki limitleri (varsa) bulunuz.

- a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

7. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$

ÖRNEK 12

$\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - x - 3|$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 13

$f(x) = (2x + 1) \cdot |x + 3| + 4$ ise $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 14

$$\lim_{x \rightarrow 2} (|x - 3| + |x^2 - x - 12|)$$

değeri kaçtır?

ÖRNEK 16

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 - 7|}{x + 1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 17

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

değeri kaçtır?

ÖRNEK 18

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$$

değeri kaçtır?

ÖRNEK 19**Örnek:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{|x^2 + x|} + \frac{|x|}{|x + 1|} \right)$$

değeri kaçtır?

8. $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a} c^{f(x)} = c^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

ÖRNEK 20

$\lim_{x \rightarrow 3} 2^{x^2 - x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

9. n bir tek doğal sayı ya da n bir çift doğal sayı olduğunda a nın bir komşuluğunda $f(x) \geq 0$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 21

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 22

$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^2 + 4x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 23

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9} + \lim_{x \rightarrow 13} \sqrt{x^2 - 25}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 24

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{2x^2 + 4x + 3} + 2^{\frac{x+3}{x+1}} \right)$$

değeri kaçtır?

$$10. \lim_{x \rightarrow a} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$$

ÖRNEK 25

$\lim_{x \rightarrow 3} [\log_5(x^2 + 1)]$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 26

$\lim_{x \rightarrow 2} [\log(x^3 + 2)]$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 27

$\lim_{x \rightarrow 1} [|2x - 3| + \log_2(5x + 3)]$ limitinin değeri nedir?

11. Trigonometrik Fonksiyonların Limiti $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$
- $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$, ($\cos a \neq 0$)
- $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$, ($\sin a \neq 0$)

ÖRNEK 28

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cot x = \cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 1}{\cos x - \sqrt{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6} - 1}{\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ÖRNEK 29

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{3} \cdot \tan x}{2 \cos x + 1} \text{ ifadesinin değeri kaçtır?}$$

ÖRNEK 30

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 3}{2 \cot x - 1} \text{ ifadesinin değeri kaçtır?}$$

ÖRNEK 31

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \text{ limitinin değeri (varsa) nedir?}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & , n \text{ pozitif çift sayı} \\ \text{yoktur} & , n \text{ pozitif tek sayı} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0, \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

ÖRNEK 32

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

ÖRNEK 33

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

$$a. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-3}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-3}$$

$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

• $\frac{a}{a} = 1$, $\frac{0}{a} = 0$, $a \pm \infty = \pm \infty$

• $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$

• $a > 0$ ise $\frac{a}{0^+} \rightarrow \infty$, $\frac{a}{0^-} \rightarrow -\infty$
 $\frac{a}{\infty} \rightarrow 0$, $\frac{\infty}{a} \rightarrow \infty$, $a \cdot \infty \rightarrow \infty$

$a < 0$ ise $\frac{a}{0^+} \rightarrow -\infty$, $\frac{a}{0^-} \rightarrow \infty$
 $\frac{a}{\infty} \rightarrow 0$, $\frac{\infty}{a} \rightarrow -\infty$, $a \cdot \infty \rightarrow -\infty$

• $\frac{0}{0^+} \rightarrow 0$, $\frac{0}{0^-} \rightarrow 0$

• $\frac{a}{0}$, $\frac{\pm \infty}{0}$, $\frac{0^\pm}{0}$ ifadeleri tanımsızdır.

• $\frac{0^\pm}{0^\pm}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ belirsizliktir.

ÖRNEK 34

Aşağıdaki limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

ÖRNEK 35

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ limitlerin değerlerini (varsa) bulunuz.

ÖRNEK 36

Aşağıda bazı limitler hesaplanmıştır. İnceleyiniz.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{0^-} = \infty$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{x^2} = \frac{2-0}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = \infty$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-x}{2^x-1} = \frac{3-0}{1^+-1} = \frac{3}{0^+} = \infty$

5. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{2+1}{0^+} = \infty$

6. $\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{x}{1-\ln x} = \frac{e}{1-1^+} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2 + 0 = 2$

9. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2}{|x-1|} = \frac{1^2-2}{|1^+-1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

10. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2}{|x-2|} = \frac{2^2-2}{|2^--2|} = \frac{4-2}{|0^-|} = \frac{2}{0^+} = \infty$

13. $a > 1$ ise

$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$ ise

$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$

ÖRNEK 37

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 38

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

Çözüm**ÖRNEK 39**

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 40

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^x$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5^{\frac{1}{x}} + 2^{-x} + 1\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 42

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(7^{\frac{1}{x}} + 5^x + 1\right) \text{ limiti kaçtır?}$$

14. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve a nın bir komşuluğunda g sınırlı fonksiyon ise
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ dir.

ÖRNEK 43

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$ limitinin değeri kaçtır?

15. $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \text{ dir.}$$

ÖRNEK 44

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 45

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$ limitinin değeri kaçtır?

ÖRNEK 46

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{x^2}$ limitinin değeri kaçtır?

LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMLARI

Limit hesaplamalarında karşılaşılan

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0$$

biçimindeki ifadelere belirsiz ifadeler denir.

1. $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Genellikle özdeşlikler kullanılarak çarpanlarına ayrılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak sonuç bulunur. Bunlar sağlanmıyorsa türev konusunda anlatacağımız L'HOSPITAL yöntemi kullanılır.

ÖRNEK 47

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 48

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 49

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 50

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 51

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(m \cdot f(x))}{n \cdot f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m \cdot f(x)}{\sin(n \cdot f(x))} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(m \cdot f(x))}{n \cdot f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m \cdot f(x)}{\tan(n \cdot f(x))} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(m \cdot f(x))}{\sin(n \cdot f(x))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(m \cdot f(x))}{\tan(n \cdot f(x))} = \frac{m}{n}$$

ÖRNEK 52

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 53

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 54

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\tan(2x-10)} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 55

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{5x^2} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 56

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 4x}{\sin 2x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 57

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 58

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{3}{x}} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 59

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 60

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x+n}}{x^2-1} \text{ ifadesi hangi reel sayıya eşit olabilir?}$$

ÖRNEK 61

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - 1}$$

limit değerini bulalım.

ÖRNEK 63

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + x^2 - 1) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 64

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-2x+3} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

* $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinom fonksiyonunda,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n)$$

* $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad n < m \text{ ise} \\ \frac{a_n}{b_m} & , \quad n = m \text{ ise} \\ \infty \text{ veya } -\infty & , \quad n > m \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK 62

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - x^2 + 3) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 65

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x}{3x^2 + 1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 66

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 67

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 3} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 68

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x^2+x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 69

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 70

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{3x-1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 71

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2+x-1}+3x+1}{\sqrt{x^4+x^3-x^2+1}} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖDEV: 1. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 2}$$

limit değerini bulalım.**2. $\Rightarrow \Rightarrow$**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-2}{\sqrt{4x^2+3}}$$

limit değerini bulalım.**3. $\Rightarrow \Rightarrow$**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-3x+3}-x}{2x+\sqrt{x^2-x}}$$

limit değerini bulalım.**4. $\Rightarrow \Rightarrow$**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x+1}{\sqrt{x^2+1}-2x-1}$$

limit değerini bulalım.**5. $\Rightarrow \Rightarrow$**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x^3+x^2}}{2x+\sqrt{x^2+9}}$$

limit değerini bulalım.

ÖRNEK 72

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2^x}{3^{x+1} + 2^x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 73

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + 2^{x+1}}{5^{x+1} - 2^x} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖDEV: 1. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x+1} + 3^x}{5^x - 3^x}$$

limit değerini bulalım.**2.** $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2^{x+1}}{3^{x-1} + 2^x}$$

limit değerini bulalım.**3.** $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x - 2^{x+1}}{7^x + 2^x}$$

limit değerini bulalım.**3. $\infty - \infty$ Belirsizliği**

Bu tür belirsizliklerde, bazı cebirsel işlemlerle (payda eşitleme, pay ve paydayı eşlenikle çarpma, ...) düzenlenerek limit kuralları yardımı ile çözülür.

$a > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a} \cdot \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right)$$

ÖRNEK 74

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2 - x - 2} \right) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 75

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x \right) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 76

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2 + x - 6} \right)$$

limit değerini bulalım.

ÖRNEK 77

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1})$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 78

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 79

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} + 2x - 1)$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 80

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right)$ limitinin değeri nedir?

ÖRNEK 82

$\lim_{x \rightarrow \infty} [\log_3(x^2 + 1) - \log_3(9x^2 - 1)]$ değeri nedir?

ÖDEV: 1. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 - 3x + 2} - 3x)$$

limit değerini bulalım.

2. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$$

limit değerini bulalım.

3. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 2} - 3x)$$

limit değerini bulalım.

4. $0 \cdot \infty$ Belirsizliği

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad \text{veya} \quad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

olduğundan, $0 \cdot \infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek limit hesaplanır.

ÖRNEK 83

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{2}{x} \right) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 84

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x) \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 85

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x+2} \cdot (3x-5) \right] \text{ limitinin değeri nedir?}$$

5. 1^∞ Belirsizliği

$\lim_{x \rightarrow a} [1 + f(x)]^{g(x)}$ ifadesinde 1^∞ belirsizliği varsa,

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = k$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow a} [1 + f(x)]^{g(x)} = e^k$ dir.

ÖRNEK 86

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{3x+1} \right]^{6x-1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 87

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{3x+1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖRNEK 88

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

ÖDEV:

1. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-2} \right)^{4x-1} \text{ ifadesinin değeri nedir?}$$

A) $\frac{1}{e}$ B) 1 C) e D) e^2 E) e^3

2. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3} \right)^{4x-1}$$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) e^2 D) e^3 E) e^4

3. $\Rightarrow \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+3} \right)^{2x-5}$$

limitinin değeri kaçtır?