

Kümeler ve Küme İşlemleri

ÜNİTE

2

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- küme kavramını, küme işlemlerini, küme işlemlerinin özelliklerini ve kullanılan simgeleri tanıyacaksınız.
- küme ailelerini, kümelerin dik çarpımını, sonlu ve sonsuz kümeleri inceleyeceksiniz.
- küme kavramının ve küme dilinin matematikte nasıl önemli bir araç olduğunu göreceksiniz.

İçindekiler

- Giriş: Küme Kavramı
- Kümeler İçin Temel Tanımlar
- Venn Çizenekleri
- Küme İşlemleri
- Küme İşlemlerinin Özellikleri
- Sonlu ve Sonsuz Kümeler
- Küme Aileleri
- Çarpım Kümeler
- Değerlendirme Soruları

Çalışma Önerileri

- 1. Ünite için yaptığımız çalışma önerilerimizi bu ünite için de aynen yineliyoruz.

2.1. Giriş: Küme Kavramı

Matematik denildiğinde birçok insanın aklına ilk gelen şey sayılar ve sayıların toplanıp-çıkarılması, çarpılıp-bölünmesi gibi aritmetik işlemlerdir. Sayılar ve sayılar arasındaki işlemler, ilişkiler, matematik dünyasının önemli bir parçasıdır, ama bütünü değildir. Bugün sayı kavramıyla doğrudan ilişkisi olmayan nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini düzenleyen kimi kurallar da sayılar dünyası kadar ilginç, tutarlı matematiksel yapılar oluştururlar. Bu tür yapılar, bazen üst yapı olarak sayılar kuramı, kümeler kuramı, geometri gibi adlar, bazen de bu tür üst yapılar içinde alt yapı olarak grup, halka, cisim, vektör uzayı, topolojik uzay, ölçüm uzayı gibi adlar alırlar. Bir matematiksel yapı temel tanımlar, aksiyomlar ve onlardan çıkartılan sonuçlardan oluşur. Tanımlara, aksiyomlara yapının temel elemanları onlardan çıkartılan sonuçlara da yapı elemanları diyebiliriz. Böyle bir yapıyı oluşturmada kullanılan önemli araçlardan biri küme kavramı ve buna bağlı olarak küme işlemleridir. Bu ünite de küme kavramını ve küme işlemlerini tanıtmaya çalışacağız.

Aşağıda ayrıntılı tanımı verilecek olan **küme**, aslında matematikte de dilimizdeki sözlük anlamının ifadesiyle tanımlanabilir. Küme "**nesneler topluluğu veya yığı-nı**" olarak tanımlanan bir sözcüktür. Bu tanımdaki "**nesne**" soyut ya da somut bir şeydir; fakat her ne olursa olsun iyi tanımlanmış olan bir şeyi, bir eşyayı ifade eder. Örneğin, "**Tüm canlılar topluluğu**", "**Dilimiz abecesindeki harflerin topluluğu**", "**Masamın üzerindeki kağıtlar yığını**" tümcelerindeki nesnelerin anlaşılabilir, belirgin oldukları, kısaca iyi tanımlı oldukları açıktır. Dolayısıyla bu tümcelerin her biri bir kümedir. Konuşma dilinde bu tümceler yerine daha çok eşanlamlı olan, sırasıyla, "**Tüm canlılar kümesi**", "**Dilimiz abecesindeki harfler kümesi**", "**Masamın üzerindeki kağıtlar kümesi**" tümcelerini kullanırız. O halde, matematikte "**İyi tanımlı nesnelerin bir topluluğuna küme denir**" biçiminde bir tanımlama yeterli olacaktır.

Küme kavramının matematiğe Georg Cantor (1845-1918) ile girdiği kabul edilir. Elbette Cantor'dan önce de, adına küme denilme de, matematikçiler bu kavramı yer yer örtülü bir şekilde kullanıyorlardı. Cantor, kümeler kuramının temellerini ortaya koyan matematikçidir. Bu sayede matematikte yepyeni ufuklar açılmış ve matematiğin her alanında kullanılmaya başlanmıştır. Bu gelişmeler matematikte "Modern matematik", "Klasik matematik" sınıflamasına yol açmıştır. Fakat bugün matematik için böyle bir sınıflama yapmanın çok gerekli olmadığını matematiğe biraz ilgi duyanlar iyi bilirler.

Bu ünite de amacımız, bir problemin matematiksel modelinin kurulması, açıklanması ve çözümünde oldukça yararlı bir araç olarak kullanılabilecek küme kavramını, küme işlemlerini tanıtmaktır. Kümelerin derinlemesine ele alınması, incelenmesi başlı başına bir konudur ve bu kitaptaki amacımızı aşan bir durumdur. Bu nedenle, konuya ilişkin temel kavramları daha çok sezgiye dayalı olarak açıklamaya çalış-

şacağız; kullanılan simgeleri, kavramları ve matematikte kullanışlarını tanıtmakla yetineceğiz.

2.2. Kümeler İçin Temel Tanımlar

2.2.1. Tanım

Nesnelerin oluşturduğu herhangi bir topluluğa bir **küme** denir.

Bu tanım üzerinde biraz duralım. Açıkça görüldüğü gibi tanım tümüyle sezgiye dayalı bir tanımdır. Çünkü tanımda geçen nesne sözcüğü aslında yeterince açıklık ifade eden bir sözcük değildir. Ama sezgisel olarak, kümeyi oluşturan nesnelerin iyi tanımlı olduklarını; yani belirgin, başka nesnelerden ayırdedilebilir şeyler olduklarını düşünüyoruz demektir. Bir bakıma, bir kümeyi oluşturan nesnelerin tek tek neler olduklarını düşünmekten çok, birarada düşünebilir olmalarını önemsiyoruz. Şimdi bir kaç örnek verelim:

2.2.2. Örnek

Aşağıdaki topluluklardan her biri birer kümedir:

- (i) Yeryüzünde yaşayan tüm canlılar topluluğu
- (ii) Bir kitaplıktaki tüm kitaplar topluluğu
- (iii) Evrendeki tüm yıldızlar yığını
- (iv) Üç rakamlı pozitif tam sayılar topluluğu
- (v) Bir çiftlikteki tüylü canlılar topluluğu
- (vi) a, b, c, d, 3, 5, 7 den oluşan harfler ve sayılar topluluğu

Bu örneklerden anlaşılabileceği gibi bir kümeyi oluşturan nesneler insanlar, kuşlar, kitaplar, ... gibi somut ya da harfler, sayılar, ... gibi soyut nesneler olabilirler. Ayrıca (vi) örnekte olduğu gibi bir kümeyi oluşturan nesneler arasında belirgin ortak bir özellik var olmayabilir (diğer örneklerde kümeyi oluşturan nesneler arasında ortak özelliklerin varlığına dikkat ediniz).

Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin **öğeleri** adı verilir. Örneğin, 2.2.2 Örnek (i) deki kümenin öğeleri yaşayan canlılardır. Güneş, evrendeki yıldızlar kümesinin bir ögesidir. 2.2.2 Örnek (vi) deki kümenin iki ögesi b ve 5 dir. Bir kümenin ögesi olan bir nesneye o kümenin içindedir ya da kümeye aittir denir. Bundan böyle nesne sözcüğünü fazla kullanmayacağız, onun yerine öge sözcüğünü kullanacağız. Küme tanımına göre bir öge ya kümenin içindedir ya da değildir.

Küme, öge, içinde olma ya da olmama gibi ifadeleri simgelerle göstermek çoğu zaman birçok kolaylıklar sağlar. Çünkü matematik dilinde kavramları simgelerle gös-

termek, ifade etmek, açıklamak hem kısalık için yararlıdır hem de kesinlik taşır. Bu nedenle kümeler dilinde kullanılan gösterimleri, simgeleri tanıtarak konuya devam edelim:

Kümeleri A, B, C, X, Y, \dots gibi büyük harfler ile onların öğelerini de a, b, c, x, y, \dots gibi küçük harfler ile göstermek gelenek haline gelmiştir. 2.2.2. Örnek (vi) deki kümeyi E ile gösterirsek, E kümesinin öğeleri $a, b, c, d, 3, 5, 7$ dir. b , E kümesi içinde olan bir öğe, e ise E içinde olmayan bir öğedir. Bir a öğesinin bir A kümesi içinde olduğunu belirtmek için Yunan harfi " \in " den yararlanacağız ve kısaca " $a \in A$ " (a eleman A diye okunur) gösterimini kullanacağız. " $a \in A$ ", " a öğesi A kümesi içindedir" önermesinin simgesel olarak yazılışıdır. " $a \in A$ " önermesinin değili olan " a öğesi A kümesi içinde değildir" önermesini de simgesel olarak " $a \notin A$ " biçiminde yazacağız. Bu önerme " a eleman değil A " diye okunacaktır. 2.2.2. Örnek (iv) deki kümeyi B ile gösterirsek $100 \in B$, $503 \in B$, $999 \in B$, ...; ancak $5 \notin B$, $83 \notin B$, $1000 \notin B$, ... olacaktır. Burada üç noktanın anlamı B kümesi içinde olan ya da olmayan daha birçok sayının varlığı anlamındadır.

Bir küme ya bütün öğelerin tek tek yazılmasıyla ya da bütün öğeleri tanıtan bir özelliğin verilmesiyle belirlenir. Kümenin bütün öğeleri tek tek yazılabiliyorsa, bu öğeler $\{ , \}$ ayraçlar içine yazılarak kümeyi belirleme yoluna gideriz. Bir kümenin bu biçimde yazılabilişine **liste yöntemiyle yazılış** denir. Söz gelişi, 2.2.2. Örnek (vi) deki kümeyi E ile gösterirsek, $E = \{ a, b, c, d, 3, 5, 7 \}$ olarak yazılır. Verilen bir A kümesinin bütün öğelerini ortak bir p özelliği tanıtiyorsa, x ile A nın herhangi bir öğesini göstermek üzere, A kümesi için " A , p özelliğini sağlayan tüm x öğelerinin kümesidir" deriz ve bu tümceyi

$$A = \{ x \mid x \text{ öğesi } p \text{ özelliğine sahiptir} \}$$

biçiminde yazarız. Burada büyük ayraç içindeki " $|$ " dik doğru parçasını "öyleki" anlamında kullanıyoruz. A kümesinin bu simgesel gösterimi " A , x öğelerinin kümesi öyleki x , p özelliğine sahiptir" biçiminde okunur. Bir kümenin bu biçimdeki yazılışına **ortak özellikle yazılış** diyoruz. Örneğin A , 4 ile bölünebilen pozitif tamsayılar kümesi olsun (burada kalansız olarak bölünmeden söz ediyoruz). A kümesini liste yöntemiyle yazamayız; ama ortak özellikle

$$A = \{ x \mid x, 4 \text{ ile bölünebilen pozitif tamsayı} \}$$

biçiminde yazılabilir. Benzer olarak, 2.2.2. Örnek (i) ve (iv) deki kümeleri, sırasıyla, B ve C ile gösterecek olursak, bu kümelerin ortak özellikle yazılışları

$$B = \{ x \mid x \text{ yeryüzünde yaşayan bir canlıdır} \}$$

$$A = \{ x \mid x \text{ tamsayıdır ve } 99 < x < 1000 \text{ dir} \}$$

olur. C kümesi liste yöntemiyle de yazılabilir. Bu biçimdeki yazılışı da şöyledir:

$$C = \{ 100, 101, 102, \dots, 999 \}$$

- C kümesinin son yazılışında büyük ayraç içindeki üç nokta sayıların başladığı gibi benzer olarak birer artarak 999 a kadar devam edeceğini gösterir.
- C kümesi hem ortak özellikle hem de liste yöntemiyle yazılabildiği halde, B kümesinin liste yöntemiyle yazılamayacağı açıktır. Nedenini siz açıklayınız.



- Ortak özelliklerle verilen bazı kümeler liste yöntemine benzer biçimde yazılabilirler. Örneğin, doğal sayılar (sayma sayıları) kümesi N ve tamsayılar kümesi Z için genelde
 $N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
 $Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
 biçiminde yazılışları yeğleriz.

Yukarıdaki C kümesi örneğinde olduğu gibi, bir küme farklı şekillerde yazılabildiğine göre, herhangi iki kümenin aynı küme mi farklı kümeler mi olduklarına nasıl karar vermeliyiz? Aşağıda vereceğimiz küme eşitliği tanımıyla bunu açıklığa kavuşturacağız.

2.2.3. Tanım

A ve B kümeleri verilmiş olsun. A kümesinin bütün öğeleri B içinde ve B kümesinin bütün öğeleri de A içindeyse, bu kümelere **eşit kümeler** deriz ve bu durumu $A = B$ yazarak belirtiriz.

Eşit kümeler tümüyle aynı öğelerden oluşmuş kümelerdir. Bu tanım aynı zamanda iki kümenin ne zaman farklı olacağını da ifade eder. Eğer A ve B kümelerinden birinin öğesi olan diğerinin olmayan en az bir öğe varsa, bu iki küme farklı kümelerdir ve bu durumu $A \neq B$ yazarak belirtiriz.

Örneğin; $A = \{ 0, 1, 2 \}$ ve $B = \{ 2, 0, 1 \}$ kümeleri aynı öğelerden oluşan iki küme olduklarından bunlar eşit kümelerdir; yani $A = B$ dir. Fakat $C = \{ r, s, t \}$ ve $D = \{ r, s, t, u \}$ kümeleri farklı kümelerdir. Çünkü $u \in D$ olduğu halde $u \notin C$ dir. Bu örneklerden birincisinde olduğu gibi, küme eşitliği tanımına göre, bir kümenin öğeleri liste yöntemiyle yazılabiliyorsa öğelerin yazılış sırasının bir önemi yoktur. Örneklerden ikincisinde, C nin bütün öğeleri D nin de öğeleri olduğu halde $C \neq D$ dir. Böyle bir durum bizi iki küme arasında yeni bir ilişki tanımlamaya götürür; alt küme olma durumu.

2.2.4. Tanım

Eğer bir A kümesinin tüm öğeleri bir B kümesinin de öğeleri ise, A ya B kümesinin bir alt kümesi denir ve bu durum $A \subseteq B$ (A alt küme B diye okunur) yazılarak belirtilir.

$A \subseteq B$ gösterimi " A alt küme B " diye okunduğu gibi, " A , B içindedir", " A , B tarafından kapsanır", " B , A yı kapsar" ifadelerin herbiriyle de okunabilir.

Alt küme tanımından dolayı, her küme kendi kendisinin alt kümesi olacaktır; başka bir deyişle, bir A kümesi için $A \subseteq A$ dır. A , B kümeleri için $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise, A ya B nin **öz alt kümesi** denir ve bu durum için $A \subset B$ yazılır.

2.2.5. Örnek

$A = \{ a, b, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b, c, 1, 2, 3, 4 \}$, $C = \{ x \mid x, \text{ ortaöğretim diploma-}$
 $\text{lı T.C. vatandaşı} \}$, $D = \{ x \mid x, \text{ yükseköğretim diplomalı T.C. vatandaşı} \}$ kü-
 meleri veriliyor. $A \subset B$ ve $C \subseteq D$ dir. Neden?

Çözüm

A kümesinin her ögesinin B içinde olduğu görülüyor. O halde, $A \subseteq B$ dir. Ayrıca $4 \in B$, fakat $4 \notin A$ olduğundan A, B nin öz alt kümesidir; yani $A \subset B$ dir. Yükseköğre-
 tim diplomasına sahip olan her T.C. vatandaşının ortaöğretim diploması da olaca-
 ğından $C \subseteq D$ dir.

$A = \{ a, d, e, f, h, i \}$, $B = \{ a, h, j \}$, $C = \{ d, h, i \}$, $D = \{ a, f, h, i, j, k \}$ kümele-
 rinden hangisi hangisinin öz alt kümesidir?



Aşağıdaki teoremden birbirlerinin alt kümesi olan iki kümenin eşit olduğu kanıtlan-
 maktadır.

2.2.6. Teorem

A ve B kümeleri verilsin. $A = B$ olması için gerekli ve yeterli koşul $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olmasıdır; simgesel yazılışla

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A$$

dır.

Kanıt

$A = B$ olsun. 2.2.3. Tanım gereğince, $x \in A$ ise $x \in B$ olacağından $A \subseteq B$ dir. Benzer olarak, $x \in B$ ise $x \in A$ olacağından $B \subseteq A$ dır.

Tersine olarak, $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olsun. $A \subseteq B$ olması A içindeki tüm öğelerin B içinde olmasını, $B \subseteq A$ olması da B içindeki tüm öğelerin A içinde olmasını gerektirir. O halde, A ve B kümeleri tümüyle aynı öğelerden oluşan kümelerdir. Sonuç olarak, 2.2.3. Tanıma göre $A = B$ dir.

2.2.7. Tanım

Hiçbir ögesi olmayan bir kümeye **boş küme** denir ve bu küme \emptyset simgesiyle gösterilir.

Bu tanım üzerinde biraz düşünecek olursak, boş kümenin her kümenin alt kümesi olduğu kolayca doğrulanır. Yani herhangi bir A kümesi için $\emptyset \subseteq A$ dır. Çünkü \emptyset nin A nın bir alt kümesi olmaması durumunda \emptyset içinde olduğu halde A içinde olmayan en az bir öğenin var olması demektir. Oysa \emptyset içinde hiçbir öğe ola-

maz. Ayrıca küme eşitliği tanımı göz önüne alınırsa, boş kümenin tek olduğu doğrulanabilir.

2.2.8. Tanım

Belirli bir konu ele alındığında, o konuyla ilgili tüm nesnelerin oluşturduğu kümeye **evrensel küme** denir.

2.2.9. Örnek

Aşağıdaki boş küme ve evrensel küme örneklerini inceleyelim:

- (i) A ile karesi negatif olan tam sayılar kümesini gösterelim. Her x tam sayısı için $x^2 \geq 0$ olduğundan, A nın hiçbir ögesi yoktur; yani $A = \emptyset$ dir.
- (ii) B ile ölümsüz canlılar kümesini gösterelim. Tüm canlılar ölümlü olduğuna göre, B nin hiçbir ögesi yoktur; yani $B = \emptyset$ dir.
- (iii) Türkçe sözcükler üreten biri için evrensel küme Türk abecesidir.
- (iv) Hep iki basamaklı tamsayılar ile çalışan birisi için evrensel küme $E = \{ x \mid x \text{ tamsayı ve } 10 \leq x < 100 \}$ dür.
- (v) Türkiye'de yükseköğrenim gören gençler üzerinde bir araştırma yapmak isteyen birisi için evrensel küme, Türkiye'deki tüm üniversite öğrencileridir.



$A = \{ x \mid x \text{ hem sesli hem de sessiz bir harftir} \}$, $B = \{ x \mid x \text{ bir gerçel sayı ve } x^2 = 3 \}$ kümelerinden hangisi boş kümedir?

Evrensel küme tanımından ve son üç örnekten anlaşılacağı gibi, evrensel küme ihtiyaca göre belirlenen bir kümedir. Nesneleri saymak için kullandığımız sayılar kümesi, doğal sayılar kümesi $N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ dir. O halde, sayma için gerekli olan evrensel küme N dir. Doğal sayılar arasında toplama-çıkarma yapmak istersek, işin içine negatif tamsayılarda gireceğinden, evrensel küme tüm tamsayılar kümesi $Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ dir. Eğer tamsayılar arasında bölme işlemi düşünülürse, evrensel küme tüm rasyonel sayılar kümesi Q dur. Gündelik işlerimiz için bile rasyonel sayılar kümesi Q yetmez. Eğer ölçme-biçme gibi işler yaparsak evrensel kümemiz gerçel sayılar kümesi R olmalıdır (1 birim çaplı çemberin çevre uzunluğunu düşününüz!). Bu sayı kümeleri arasında

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

ilişkisi olduğu açıktır.

2.2.10. Tanım

Bir kümenin tüm alt kümelerinden oluşan kümeye, o kümenin **kuvvet kümesi** denir ve söz konusu küme A ise, A nın kuvvet kümesi $P(A)$ ile gösterilir.

2.2.11. Örnek

$A = \{ 1 \}$ ve $B = \{ a, b, c \}$ kümelerinin kuvvet kümelerini yazınız.

Çözüm

$$P(A) = \{ \emptyset, A \},$$

$$P(B) = \{ \emptyset, B, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \} \}$$

olur.

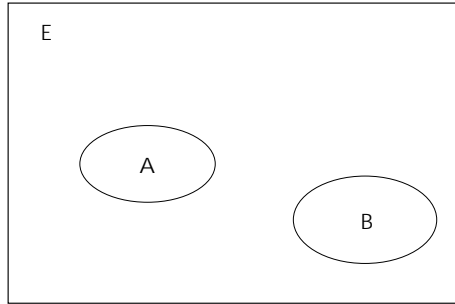
$A = \{ \Delta, \square, ? \}$ kümesinin kuvvet kümesini yazınız.€

?

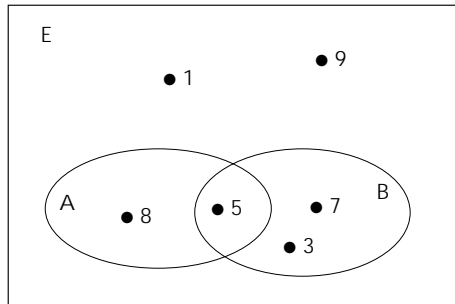
Bir kümenin kuvvet kümesi, öğeleri kümeler olan bir kümedir. Bu tür kümeler için ileride **küme ailesi** deyimini kullanacağız. Açık ki, bir kümenin kuvvet kümesi daima boş kümeden farklı bir kümedir. Sözelgesi \emptyset için $P(\emptyset) = \{ \emptyset \} \neq \emptyset$ dir.

2.3. Venn Çizenekleri

Kümeler arasındaki ilişkileri kavramada kolaylık sağlayan bir araç, adına **Venn Çizenekleri** denilen düzlemde çizilen kapalı eğrilerdir. İlk kez J.Venn (1834-1923) tarafından önerilen bu gösterimde, genel olarak, evrensel kümeler dikdörtgenlerle ve bunların alt kümeleri de bu dikdörtgenler içine çizilen yuvarlak bölgelerle gösterilirler. Sözelgesi, E bir evrensel küme ve A, B de E nin iki alt kümesi ise, bu kümeler aşağıdaki şekilde bir Venn çizeneği ile gösterilirler:

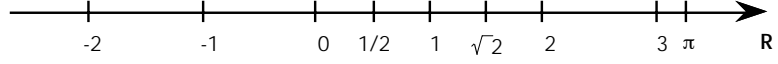


Eğer E liste yöntemiyle yazılabilen bir küme ise, o zaman E nin öğeleri dikdörtgen içine, alt kümelerin öğeleri de ilgili kapalı eğriler içine serpiştirilir. Örneğin, $E = \{ 1, 3, 5, 7, 8, 9 \}$, $A = \{ 5, 8 \}$, $B = \{ 3, 5, 7 \}$ kümelerinin Venn çizeneğiyle gösterilişi



olur. Venn çizenekleri kümeler arasındaki ilişkileri açıklamak için çok yararlı araçlardır. Ancak, bunlar kanıtlama aracı olarak kullanılamazlar.

Gerçek sayılar kümesi \mathbf{R} nin öğeleriyle bir doğrunun noktalarını birebir karşılık getirerek elde edilen doğruya **sayı doğrusu** ya da **gerçek eksen** denildiğini Analiz derslerinden biliyoruz. Bir sayı doğrusu \mathbf{R} kümesinin geometrik modelidir.



Gerçek eksen

\mathbf{R} nin özel öneme sahip alt kümeleri aralıklardır. Geometrik olarak, bir aralık bir sayı doğrusu üzerinde bir doğru parçası olarak tanımlanır. Sözelimi, $a < b$ için uç noktaları a ve b olan, a dan b ye $[a, b]$ ile gösterilen **kapalı aralık**

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

kümesi olarak ve (a, b) açık aralığı da

$$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$$

kümesi olarak tanımlanır. $[a, b]$ kapalı aralığı uç noktaları a ve b yi bulundurur. (a, b) açık aralığı ise uç noktalar a ve b yi bulundurmaz. Aralık kavramı genişletilerek, uç noktaların durumuna göre, yarı-açık (ya da yarı-kapalı) ve sınırsız aralıklar tanımlanır. Aşağıdaki çizelge ile aralıkların gösterilişi, tanımlanışı, geometrik modeli ve adlandırılışı verilmiştir:

ARALIKLAR			
Gösterilişi	Küme olarak tanımlanışı	Geometrik modeli	Adlandırılışı
$[a, b]$	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$		Sınırlı kapalı
(a, b)	$\{ x \mid a < x < b \}$		Sınırlı açık
$[a, b)$	$\{ x \mid a \leq x < b \}$		Sınırlı yarı-açık (yarı-kapalı)
$(a, b]$	$\{ x \mid a < x \leq b \}$		Sınırlı yarı-kapalı (yarı-açık)
$[a, \infty)$	$\{ x \mid a \leq x \}$		Sınırsız kapalı
(a, ∞)	$\{ x \mid a < x \}$		Sınırsız açık
$(-\infty, a]$	$\{ x \mid x \leq a \}$		Sınırsız kapalı
$(-\infty, a)$	$\{ x \mid x < a \}$		Sınırsız açık

Kimi zaman \mathbf{R} nin kendisi de sınırsız bir açık aralık olarak düşünülebilir. Böyle bir durumda $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ yazılır.

2.4. Küme İşlemleri

Kümeler arasında iki kümeye yeni bir küme karşılık getirme şeklinde birçok işlem tanımlanabilir. Bu kesimde, küme işlemlerinden sırasıyla tümleyen, birleşim, kesişim, fark, simetrik fark işlemlerini tanıtacağız.

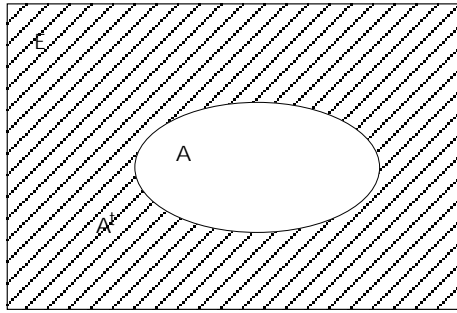
2.4.1. Tanım

Bir E kümesi ile E nin bir A alt kümesi verilsin. E nin A içinde olmayan öğeleri kümesine **A nın E ye göre tümleyeni** adı verilir.

E kümesi evrensel küme olarak alınırsa "A nın E ye göre tümleyeni" demek yerine kısaca "**A nın tümleyeni**" denir ve söz konusu küme A^t ile gösterilir. Simgesel olarak

$$A^t = \{ x \in E \mid x \notin A \}$$

olduğu açıktır. $A^t \subseteq E$ olduğu ve A ile A^t nin hiçbir ortak öğesi bulunmadığı tümleyen tanımından kolayca doğrulanır. Aşağıdaki Venn çizeneğindeki koyu taralı bölge tümleyen küme A^t yi göstermektedir.



2.4.2. Örnek

- (i) $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$, $A = \{ 3, 4, 5 \}$ ise $A^t = \{ 1, 2, 6, 7, 8 \}$ dir.
- (ii) Gerçek sayılar kümesi \mathbf{R} ye göre rasyonel sayılar kümesi \mathbf{Q} nun tümleyeni \mathbf{Q}^t rasyonel olmayan (irrasyonel) sayılar kümesidir.
- (iii) E, Anadolu Üniversitesinde okuyan öğrenciler kümesi; A, bu Üniversitedeki erkek öğrenciler kümesi ve B de kız öğrenciler kümesi ise, A nın E ye göre tümleyeni B ve B nin E ye göre tümleyeni A dır.

Dilimiz abecesindeki sesli harfler kümesinin tümleyeni hangi kümedir?



Bundan böyle, zorunlu olmadıkça, evrensel kümeden söz etmeyeceğiz. Ancak, kümeler arasında işlemler söz konusu olduğunda bu kümelerin aynı bir (evrensel) kümenin alt kümeleri olduğunu varsayacağız.

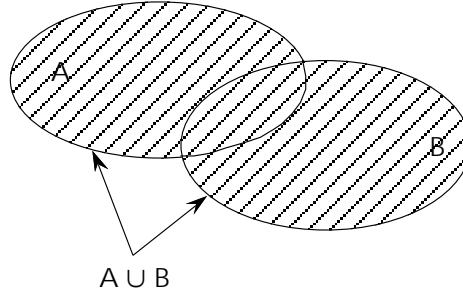
2.4.3. Tanım

A ve B kümeleri verilmiş olsun. Öğeleri ya A nın ya da B nin (ya da her ikisinin) öğeleri olan kümeye **A ve B nin birleşimi** denir ve bu küme $A \cup B$ (**A birleşim B** diye okunur) simgesiyle gösterilir.

A ve B nin birleşimi olan küme, simgesel olarak,

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$$

biçiminde yazılır ve Venn çizeneğiyle şöyle gösterilebilir:



2.4.4. Örnek

(i) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ve $B = \{ 3, 5, 6, 7 \}$ kümeleri için

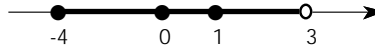
$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

olur.

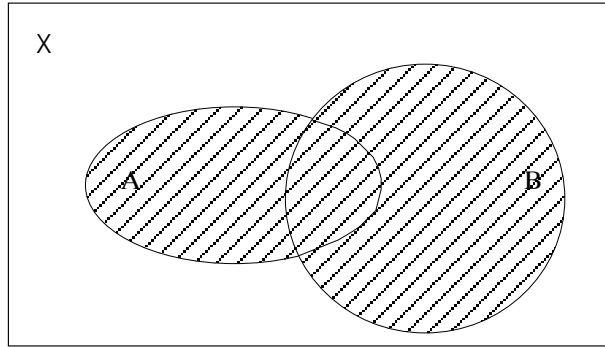
(ii) $A = [-4, 1)$, $B = (0, 3)$ aralıkları için

$$A \cup B = [-4, 1) \cup (0, 3) = \{ x \mid -4 \leq x < 1 \text{ veya } 0 < x < 3 \} = \{ x \mid -4 \leq x < 3 \}$$

yarı-kapalı aralığı olur.



(iii) X kentinde oturan kahve sevenler kümesi A , süt sevenler kümesi B olsun. $A \cup B$ kümesi kahve veya süt sevenler kümesidir.



$$A \cup B = \{ x \in X \mid x \text{ kahve veya süt sever} \}$$

?

$A = (-3, 2)$, $B = [1, 7]$ aralıklarının bileşimi hangi aralıktır?

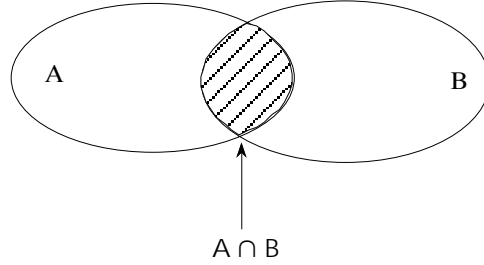
2.4.5. Tanım

A ve B kümesi verilmiş olsun. Hem A hem de B kümesi içinde bulunan öğelerin oluşturduğu kümeye **A ve B nin kesişimi** (ya da arakesiti) denir ve bu küme $A \cap B$ (**A kesişim B** diye okunur) simgesiyle gösterilir.

Simgesel olarak, A ve B nin kesişimi

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$$

biçiminde yazılır ve Venn çizeneğiyle şöyle gösterilebilir:



2.4.6. Örnek

- (i) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ve $B = \{ 3, 5, 6, 7 \}$ kümeleri için $A \cap B = \{ 3, 5 \}$ olur.
- (ii) Anadolu Üniversitesindeki kız öğrenciler kümesi A, Fen Fakültesindeki öğrenciler kümesi B ise, $A \cap B$ kümesi Fen Fakültesindeki kız öğrenciler kümesidir.
- (iii) $A = \{ x \mid x \text{ pozitif tamsayı} \}$, $B = \{ x \mid x \text{ negatif tamsayı} \}$ kümeleri için $A \cap B = \emptyset$ dir.

$A = \{ x \mid x \text{ tamsayı ve } -3 \leq x < 5 \}$, $B = \{ x \mid x \text{ tamsayı ve } 0 \leq x < 8 \}$ kümeleri için $A \cap B$ kümesini hem liste yöntemiyle hem de ortak özelliklerle yazınız.

?

2.4.7. Tanım

Ortak hiçbir ögesi bulunmayan iki kümeye **ayrık kümeler** denir.

A ve B nin ayrık kümeler olması, $A \cap B = \emptyset$ olması anlamına gelir. Bu nedenle, kesişimi boş olan kümelere **kesişmeyen kümeler** ve kesişimi boş olmayan kümelere de **kesişen kümeler** denir. Sözgelisi, rasyonel sayılar kümesi ile tamsayılar kümesi kesişen kümeler, rasyonel sayılar kümesi ile rasyonel olmayan sayılar kümesi kesişmeyen kümelerdir.

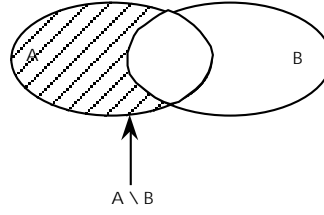
2.4.8. Tanım

A ve B kümeleri verilsin. A kümesi içinde bulunmasına karşın B kümesi içinde bulunmayan öğelerin oluşturduğu kümeye **A ile B nin farkı** adı verilir ve bu küme $A \setminus B$ (ya da $A - B$) ile gösterilir.

A ile B nin farkı, simgesel olarak

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B \}$$

biçiminde yazılır ve Venn çizeneğiyle şöyle gösterilebilir:



2.4.9. Örnek

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f, g, h\}$ kümeleri için $A \setminus B = \{b, d\}$ ve $B \setminus A = \{f, g, h\}$ olur.

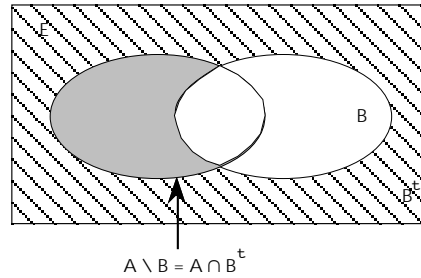


$A = (-4, 3]$ yarı-açık aralığı ile $B = [2, 6)$ yarı-kapalı aralığının farkı olan $A \setminus B$ kümesinin $(-4, 2)$ açık aralığı olduğunu hem kümesel olarak hem de geometrik olarak gösteriniz.

Yukarıdaki 2.4.9. Örnekte görüldüğü gibi, genelde $A \setminus B$ ile $B \setminus A$ kümeleri farklıdır. Ayrıca 2.4.1. Tanım göz önüne alınacak olursa, $A \setminus B$ kümesi B nin A ya göre tümleyenisidir ve

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B^t\} \\ &= A \cap B^t \end{aligned}$$

dir. Bu küme aşağıdaki Venn çizeneğinde çift taralı bölge ile temsil edilmektedir.



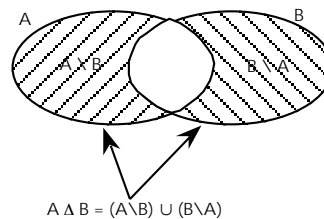
2.4.10. Tanım

A ve B kümeleri verilsin. A içinde olup B içinde olmayan veya B içinde olup A içinde olmayan öğelerin kümesine **A ile B kümesinin simetrik farkı** denir ve bu küme $A \Delta B$ (**A simetrik fark B** diye okunur) simgesiyle gösterilir.

A ile B nin simetrik farkı, simgesel olarak

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \mid x \in A \setminus B \text{ veya } x \in B \setminus A\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır ve Venn çizeneğiyle şöyle gösterilebilir:



2.4.11. Örnek

$A = \{-3, -2, -1\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümeleri için

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{-3, -2\} \cup \{0, 1, 2\} = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$$

olur.

$A = [-3, 2)$, $B = (1, 3)$ aralıkları için $A \Delta B = [-3, 1] \cup [2, 3)$ olduğunu geometrik olarak doğrulayınız.



2.5. Küme İşlemlerinin Özellikleri

Tanımladığımız küme işlemlerinin sağladıkları özellikleri bulma işine kümeler cebiri adı verilir. Bu kesimin sonuna dek hep bu işle uğraşacak ve söz konusu özelliklerin belli başlılarını sıralayıp, örnek kanıtlar vererek konuya devam edeceğiz.

2.5.1. Teorem

Bir E kümesinin herhangi A, B, C alt kümeleri için

- (i) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$
 - (ii) $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$
 - (iii) $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$
- dir.

Kanıt

- (i) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olduğunu varsayalım. x, A içinde bir öge ($x \in A$) olsun. $A \subseteq B$ olduğundan 2.2.4. Tanıma göre, $x \in B$ ve $B \subseteq C$ olduğundan gene aynı tanıma göre $x \in C$ olur. O halde A içindeki her bir öge C içerisindedir. 2.2.4. Tanım gereğince $A \subseteq C$ çıkar.

Bu kanıtı önermeler dilini kullanmak yoluyla daha kısa biçimde yapabiliriz: " $x \in A$ ", " x ögesi A kümesinin ögesidir" önermesinin simgesel olarak yazılışıdır. Buna göre,

$A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olsun. $x \in A \Rightarrow x \in B$ (Çünkü $A \subseteq B$) $\Rightarrow x \in C$ (Çünkü $B \subseteq C$). Öyleyse $A \subseteq C$ dir.

- (ii) $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ (2.4.3. Tanımdan). Öyleyse $A \subseteq A \cup B$ olur. Benzer olarak, $B \subseteq A \cup B$ olduğu kanıtlanır.
- (iii) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B$ (2.4.5. Tanımdan). Öyleyse $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ dir.

2.5.2. Teorem

Bir E kümesinin herhangi bir A alt kümesi için

- | | | | |
|-------|------------------------|--------|--------------------------------|
| (i) | $A \cup \emptyset = A$ | (i') | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| (ii) | $A \cup E = E$ | (ii') | $A \cap E = A$ |
| (iii) | $\emptyset^t = E$ | (iii') | $E^t = \emptyset$ |
| (iv) | $A \cup A^t = E$ | (iv') | $A \cap A^t = \emptyset$ |
- dir.

Kanıt

(i), (ii'), (iii), (iv') yü kanıtlayıp ötekilerin kanıtlarını okuyucuya bırakalım:

- (i) $A \cup \emptyset = A$ eşitliğini doğrulamak için 2.2.6. Teoreme göre, $A \cup \emptyset \subseteq A$ ve $A \subseteq A \cup \emptyset$ olduğunu göstermemiz yetecektir:
 $x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A$ veya $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ (çünkü $x \notin \emptyset$). Öyleyse $A \cup \emptyset \subseteq A$ dir.

Diğer taraftan,

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup \emptyset$ (\cup işleminin tanımından). Öyleyse $A \subseteq A \cup \emptyset$ dir.

Böylece, $A \cup \emptyset = A$ eşitliği kanıtlanmış olur.

- (ii') $x \in A \cap E \Rightarrow x \in A$ ve $x \in E$. Öyleyse $A \cap E \subseteq A$ dır.
 $x \in A \Rightarrow x \in A$ ve $x \in E$ (çünkü $A \subseteq E$ idi) $\Rightarrow x \in A \cap E$; yani $A \subseteq A \cap E$ dir.
 Böylece $A \cap E = A$ eşitliği kanıtlanmış olur.

- (iii) Tümleneyen işlemi tanımına (2.4.1. Tanım) göre,
 $\emptyset^t = \{x \mid x \in E, x \notin \emptyset\} = E$
 dir. Çünkü E nin hiçbir ögesi boş küme içinde olamaz.

- (iv') Eğer $A \cap A^t \neq \emptyset$ olsa idi, $A \cap A^t$ içinde en az bir x ögesi bulunurdu. Şimdi böyle bir x ögesi için
 $x \in A \cap A^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \in A^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin A$
 çıkar. Bu sonuç bir çelişkidir. Çünkü bir öge aynı bir kümenin hem içinde hem de içinde değil olamaz. O halde, $A \cap A^t = \emptyset$ dir.

2.5.3. Teorem

Bir E kümesinin A ve B gibi iki alt kümesi için

- | | | |
|-------|---|-------------------------|
| (i) | $A \setminus B = A \cap B^t$ | |
| (ii) | $(A^t)^t = A$ | |
| (iii) | $A \subseteq B \Leftrightarrow B^t \subseteq A^t$ | } (De Morgan kuralları) |
| (iv) | $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ | |
| (v) | $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$ | |

Kanıt

- (i) $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin B \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B^t \Rightarrow x \in A \cap B^t$ olduğundan $A \setminus B \subseteq A \cap B^t$ çıkar.

Tersine, $x \in A \cap B^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$ olduğundan $A \cap B^t \subseteq A \setminus B$ çıkar.

Böylece $A \setminus B = A \cap B^t$ eşitliği kanıtlanmış olur.

Burada önerme eşdeğerliği gözönünde tutularak her iki yöndeki kanıt birleştirilerek aşağıdaki şekilde daha kısa bir kanıt verilebilir:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B^t \Leftrightarrow x \in A \cap B^t$$

olur. Bu şu demektir; satırın başındaki $A \setminus B$ kümesi ile sonundaki $A \cap B^t$ aynı öğelerden oluşan kümelerdir, yani $A \setminus B = A \cap B^t$

- (iii) $A \subseteq B$ olsun. $x \in B^t \Rightarrow x \notin B \Leftrightarrow x \notin A$ (çünkü $A \subseteq B$ dir) $\Rightarrow x \in A^t$, böylece $B^t \subseteq A^t$ olur.

Tersine, $B^t \subseteq A^t$ olsun. $x \in A \Rightarrow x \notin A^t \Rightarrow x \notin B^t$ (çünkü $B^t \subseteq A^t$ dir) $\Rightarrow x \in B$, böylece $A \subseteq B$ olur.

- (iv) $x \in (A \cup B)^t \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ ve $x \notin B$ (çünkü $x \in A$ veya $x \in B$ olsa idi $x \in A \cup B$ olurdu) $\Leftrightarrow x \in A^t$ ve $x \in B^t \Leftrightarrow x \in A^t \cap B^t$ olur. Aynı öğelerden oluşan kümeler eşit olacağından istenilen kanıtlanmış olur.

- (ii) ve (v) nin kanıtları okuyucuya bırakılmıştır.

2.5.4. Teorem

Herhangi A, B, C kümeleri için \cup birleşim ve \cap kesişim işlemlerinin aşağıdaki özellikleri vardır:

- (i) $A \cup A = A$ (i') $A \cap A = A$
(Aynılık özellikleri)

- (ii) $A \cup B = B \cup A$ (ii') $A \cap B = B \cap A$
(Değişme özellikleri)

- (iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (iii') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
(Birleşme özellikleri)

- (iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iv') $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(Dağılma özellikleri)

Kanıt

- (i'), (ii), (iii'), (iv) yi kanıtlayıp ötekilerin kanıtlarını okuyucuya bırakalım:

$$(i') \quad A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$$

$$(ii) \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in A\} = B \cup A$$

$$\begin{aligned} (iii') \quad x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ve } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ve } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

olduğuna göre $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dir. Burada parantezi öne kaydırırken önerme işlemlerinden \wedge nin birleşme özelliğinin kullanılmış olduğuna dikkat ediniz.

$$\begin{aligned} (iv) \quad x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C) \\ &\text{(önerme işlemlerinden } \wedge \text{ nin } \vee \text{ üzerine dağılma özelliğinden)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ veya } x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Böylece $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliği kanıtlanmış olur.

2.5.4. Teorem (iii) ve (iii') de sözü edilen özelliklere \cup ve \cap işlemlerinin parantez kaydırma özellikleri de denir. Bu özellikler sayesinde üç ya da daha fazla sayıda kümenin parantez kullanmadan birleşimini ya da kesişimini yazabiliriz. Yani $A \cup B \cup C$ ya da $A \cap B \cap C$ türünde yazılışlar anlamlıdır. Oysa $A \cap B \cup C$ biçiminde bir yazılış anlamlı değildir (Neden?). (iv) deki özelliğe kesişimin birleşim üzerine dağılımı ve (iv') deki de birleşimin kesişim üzerine dağılımı denir.

Şimdiye dek öğrendiğimiz küme bilgileri ışığında birkaç örnek soru çözelim.

2.5.5. Örnek

$A \cap C = \emptyset$ ise, $A \cap (B \cup C) = A \cap B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Arakesitin birleşim üzerine dağılımı özelliğini kullanalım:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

eşitliği bulunur.

2.5.6. Örnek

$A \cap (A \cup B)^t = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
A \cap (A \cup B)^t &= A \cap (A^t \cap B^t) && \text{(De Morgan özelliğinden)} \\
&= (A \cap A^t) \cap B^t && \text{(arakesitin birleşme özelliğinden)} \\
&= \emptyset \cap B^t \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

olur.

2.5.7. Örnek

$x^2 + 5x > 14$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi eşitsizliği sağlayan sayılar kümesidir. Şimdi bu kümeyi bulalım. Eşitsizliğin her iki yanına -14 eklersek

$$x^2 + 5x - 14 > 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sol yanı çarpanlara ayıralım,

$$(x - 2)(x + 7) > 0$$

olur. Aşağıdaki çizelgenin son satırının + işaretli aralıkları bileşimi, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi olur.

	$-\infty$	-7	2	$+\infty$
$x - 2$	- - -	- - -	+ + +	
$x + 7$	- - -	+ + +	+ + +	
$(x - 2)(x + 7)$	+ + +	- - -	+ + +	

O halde, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$$C = (-\infty, -7) \cup (2, \infty)$$

olarak bulunur.

2.6. Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Bir A kümesi liste yöntemiyle yazılabiliyorsa, A'nın öğelerini tek tek sayabiliriz ve bu sayı bir doğal sayı (negatif olmayan tamsayı) olur. Bu sayıya A'nın öğeleri sayısı ya da A'nın nicelik sayısı deriz. Örneğin A, Türk abecesindeki harfler kümesi ise, A'nın öğeleri sayısı 29 dur. Bir küme liste yöntemiyle yazılamasa ya da kümenin öğelerini pratik olarak saymak olanaklı olmasa bile, öğeleri sayısı bir doğal sayı olabilir. Sözcüğü, dünyadaki tüm canlılar kümesinin öğeleri sayısı bir doğal sayıdır. Fakat böyle kümeler vardır ki, hiçbir doğal sayı o kümenin öğeleri sayısı olamaz. Örneğin; $Z = \{ \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ tamsayılar kümesinin ya da bir doğru parçası üzerindeki noktalar kümesinin öğeleri sayısı hiçbir doğal sayı değildir. Kümelere bu açıdan bakılarak

bir sınıflama yapılır; sonlu kümeler ve sonsuz kümeler olarak. Konuya bu tanımları vererek devam edelim:

2.6.1. Tanım

Bir A kümesinin öğeleri sayısı (nicelik sayısı) bir doğal sayı ise, A ya **sonlu küme** adı verilir ve bu sayı $s(A)$ ile gösterilir. Sonlu olmayan bir kümeye de **sonsuz küme** denir.

2.6.2. Örnek

Aşağıdaki sonlu ve sonsuz küme örneklerini dikkatlice inceleyiniz.

- (i) Boş küme \emptyset sonlu bir kümedir ve $s(\emptyset) = 0$ dır.
- (ii) $A = \{a, b, c, d, e\}$ sonlu bir kümedir ve $s(A) = 5$ dir.
- (iii) $B = \{x \mid x \text{ tamsayı ve } 0 \leq x \leq 1000\}$ sonlu bir kümedir ve $s(B) = 1001$ dir.
- (iv) C, dünyadaki tüm canlılar kümesi olsun. C sonlu kümedir; fakat $s(C)$ sayısını belirlemek olanaklı değildir.
- (v) Doğal sayılar kümesi $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sonsuz bir kümedir.
- (vi) 5 ile bölünebilen doğal sayılar kümesi sonsuz bir kümedir.
- (vii) (a, b) açık aralığı sonsuz bir kümedir.

Aşağıdaki kümeleri sonlu ya da sonsuz küme diye sınıflandırınız.



- Bir yıl içindeki ayların kümesi
- 1997 yılı içinde dünyada doğan çocuklar kümesi
- Pozitif tamsayılar kümesi
- Bir doğru parçası üzerindeki noktalar kümesi

Sonraki ünitelerimizde sonsuz kümeleri sayılabilir sonsuz ve sayılamaz olmak üzere, iki sınıfa ayıracağız. Bu kesimde daha çok sonlu kümeler üzerinde duracağız. Sonlu ve sonsuz kümeler için aşağıda verilen önermelerin doğrulukları sezgisel olarak açıktır; bir kanıtlamaya girmeden bu önermeleri sıralayalım:



- Sonlu bir kümenin her alt kümesi de sonludur.
- Sonsuz bir kümenin her üst kümesi de sonsuzdur.
- Sonlu iki kümenin birleşimi sonlu bir kümedir.
- Sonlu bir küme ile sonsuz bir kümenin birleşimi sonsuz bir kümedir.
- Sonlu bir küme ile sonsuz bir kümenin kesişimi sonlu bir kümedir.

- A sonlu bir küme ve $s(A) = n$ ise A'nın öğeleri a_1, a_2, \dots, a_n olarak numaralandırılabilir (damgalanabilir) ve A kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olarak yazılabilir.
- Her bir doğal sayı sonlu bir kümenin nicelik sayısıdır.

2.6.3. Teorem

A sonlu bir küme ve $s(A) = n$ ise, A'nın tüm alt kümeleri sayısı 2^n dir.

Kanıt

A sonlu bir küme ve $s(A) = n$ olsun. A'nın alt kümelerinin üye sayıları 0 dan n ye kadar değişecektir. Öyleyse 0 öğeli, 1 öğeli, 2 öğeli, ..., n öğeli tüm alt kümelerin sayılarını bulup bu sayıları toplarsak A'nın alt kümeleri sayısını buluruz.

A'nın m ($0 \leq m \leq n$) öğeli alt kümeleri sayısı n'nin m-li kombinezonları sayısı kadardır; yani $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ dir. Buna göre,

$$m = 0 \quad \text{için} \quad C_0^n = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1 \quad \text{dir.}$$

(Bu sayı A'nın öğeleri sayısı 0 olan alt kümeleri sayısıdır. Gerçekten öğeleri sayısı 0 olan tek küme boş kümedir ve $\emptyset \subseteq A$ dır.)

$$m = 1 \quad \text{için} \quad C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$m = 2 \quad \text{için} \quad C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$m = n-1 \quad \text{için} \quad C_{n-1}^n = \frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$m = n \quad \text{için} \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

olur. Şimdi bu sayıların toplamı olan sayıyı bulalım.

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + n + 1 \quad (1)$$

dir. Diğer taraftan, $(a+b)^n$ ifadesinin Binom açılımı

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + na b^{n-1} + b^n$$

olduğundan bu eşitlikte $a = b = 1$ alırsak,

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + n + 1 \quad (2)$$

olur. Böylece (1) ve (2) eşitliklerinin ikinci tarafları eşit olduğundan

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

bulunur. Sonuç olarak, n -öğeli A kümesinin tüm alt kümeleri sayısı 2^n olur.

A nın tüm alt kümeleri sayısı aynı zamanda A nın kuvvet kümesinin öğeleri sayısıdır. Sözcüğü, $s(A) = 3$ ise A nın kuvvet kümesi $P(A)$ için $s(P(A)) = 2^3 = 8$ dir.

2.6.4. Örnek

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin tüm alt kümeleri sayısının 2^4 olduğunu A nın tüm alt kümelerini bularak doğrulayınız.

Çözüm

Sıfır öğeli alt kümeden başlayarak dört öğeli alt kümeye kadar tüm alt kümeleri yazalım.

$A_1 = \emptyset$ (öğesi sayısı sıfır olan alt küme)

$A_2 = \{a\}$
 $A_3 = \{b\}$
 $A_4 = \{c\}$
 $A_5 = \{d\}$

(öğesi sayısı bir olan alt kümeler)

$A_6 = \{a, b\}$
 $A_7 = \{a, c\}$
 $A_8 = \{a, d\}$
 $A_9 = \{b, c\}$
 $A_{10} = \{b, d\}$
 $A_{11} = \{c, d\}$

(öğesi sayısı iki olan alt kümeler)

$A_{12} = \{a, b, c\}$
 $A_{13} = \{a, b, d\}$
 $A_{14} = \{a, c, d\}$
 $A_{15} = \{b, c, d\}$

(öğesi sayısı üç olan alt kümeler)

$A_{16} = \{a, b, c, d\} = A$ (öğesi sayısı dört olan alt küme)

Bu yazılanlar dışında başka bir alt küme yazılamayacağına göre A nın tüm alt kümeleri sayısı 16, yani 2^4 olduğu doğrulanmış olur.

Kümeler arasında bulundurdıkları öge sayısına göre, sonlu-sonsuz ötesinde, adına eşgüçlülük diyeceğimiz bir sınıflama yapılabilir. Bu kesimde, sonlu kümeler arasında böyle bir sınıflama tanımlayacağız. İlerideki ünitelerimizde bu kavramı sonsuz kümelere de genişleteceğiz.

2.6.5. Tanım

Bulundurdıkları öge sayıları (nicelik sayıları) aynı olan iki sonlu kümeye **eşgüçlü kümeler** denir.

2.6.6. Örnek

$A = \{\text{Ev, Kalem, defter}\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ kümeleri eşgüçlü kümelerdir. Çünkü her iki kümenin öge sayıları 3 tür.

Sonlu kümeler arasında "eşgüçlülük" kümeleri 1-öğeli, 2-öğeli, 3-öğeli, ... , n-öğeli kümeler sınıfı (küme ailesi) diyeceğimiz sınıflara ayırır. Bir başka ifadeyle, her n doğal sayısı için n-öğeli kümelerin oluşturduğu bir sınıf vardır. Açık ki, bu sınıflardan herhangi ikisinin hiçbir ortak ögesi (ortak kümesi) bulunamaz ve her sonlu küme bu sınıflardan birisi içindedir. Ayrıca 0-öğeli sınıf hariç (sıfır öğeli sınıfın tek ögesi \emptyset dir), her bir sınıfın sonsuz çoklukta ögesi vardır. İleride küme aileleri ve denklik bağıntıları konularında bu sınıflara tekrar değineceğiz.

Sonlu bir kümenin eşgüçlü alt kümelerinin bir sayısı verildiğinde o kümenin ögeleri sayısını bulabiliriz. Buna bir örnek olarak aşağıdaki soruyu yanıtlayalım.

2.6.7. Örnek

Dört öğeli alt kümeleri sayısı 70 olan bir kümenin ögeleri sayısı ne olur?

Çözüm

Dört öğeli alt kümeleri sayısı 70 olan bir A kümesi sonlu bir kümedir. Şimdi $s(A) = n$ diyelim. n öğeli kümenin dört öğeli alt kümeleri sayısı, n nin 4-lü kombinezonları sayısı kadardır; O halde

$$C_4^n = 70$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} = 70$$

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!} = 70,$$

$$(n-3)(n-2)(n-1)n = 4! \cdot 70$$

eşitliği elde edilir. n bir doğal sayı olduğundan birinci taraf dört ardışık sayının çarpımıdır. O halde, ikinci taraf da dört ardışık sayının bir çarpımı biçimine dönüştürülebilir, n bu ardışık çarpanların en büyüğü olacaktır.

$$\begin{aligned}(n-3)(n-2)(n-1)n &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^3 \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8\end{aligned}$$

Öyleyse $n = 8$ dir.

?

Üç ögeli alt kümeleri sayısı 10 olan bir kümenin ögeleri sayısı nedir?

2.6.8. Teorem

A ve B sonlu kümeler ise,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

dir.

Kanıt

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B nin hiçbir ortak ögesi olmadığından $s(A \cap B) = 0$, $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ dir ve böylece formül geçerli olur.

$A \cap B \neq \emptyset$ ise, $s(A) + s(B)$ toplamında ortak ögeler iki kez sayılmış olacağından $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olur.

2.6.9. Sonuç

A sonlu bir küme olmak üzere,

$$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$$

dir.

Kanıt

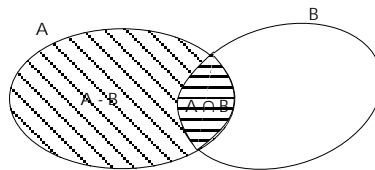
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ve $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ olduğundan

$$s(A) = s(A \setminus B) + s(A \cap B)$$

ya da

$$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$$

olur.



$$\begin{aligned}
s(A \setminus (\dot{I} \cup F)) &= s(A) - s(A \cap (\dot{I} \cup F)) \\
&= s(A) - s[(A \cap \dot{I}) \cup (A \cap F)] \\
&= s(A) - s(A \cap \dot{I}) - s(A \cap F) + s(\dot{I} \cap A \cap F) \\
&= s(A) - s(A \cap F) - 23 + 0
\end{aligned}$$

veya

$$s(A \setminus (\dot{I} \cup F)) = s(A) - s(A \cap F) - 23 \quad (1)$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan

$$s(\dot{I} \cup F \cup A) = s(\dot{I}) + s(F) + s(A) - s(\dot{I} \cap F) - s(\dot{I} \cap A) - s(F \cap A) + s(\dot{I} \cap F \cap A)$$

veya bilinenleri yerine yazınca

$$349 = 233 + 101 + s(A) - 30 - 23 - s(F \cap A) + 0$$

$$s(A) - s(F \cap A) = 349 - 281 = 68 \quad (2)$$

olur. (2) eşitliği (1) de yerine yazılınca

$$s(A \setminus (\dot{I} \cup F)) = 68 - 23 = 45$$

elde edilir.



50 kişilik bir turist grubu içindeki herkesin İngilizce ya da Fransızca dillerinden en az birini bildiğini varsayalım. İngilizce bilenler sayısı 35, Fransızca bilenler sayısı 29 ise, bu grup içinde her iki dili bilenler sayısı ne kadardır? (2.6.8. Teoremden yararlanabilirsiniz).

2.7. Küme Aileleri

Bir A kümesinin kuvvet kümesini $P(A)$ ile göstermiştik (2.2.10. Tanım). $P(A)$, A nın tüm alt kümeleri kümesi idi. Sözelce, $A = \{0, 1\}$ için $P(A) = \{\emptyset, A, \{0\}, \{1\}\}$ olur. Kuvvet kümesi, öğeleri kümeler olan bir kümedir. Bu tür kümelere "küme ailesi" deyinmini kullanacağız ve küme ailelerini A, B, L, \dots gibi süslü harflerle göstereceğiz.

n bir doğal sayı olmak üzere, A_1, A_2, \dots, A_n gibi farklı n tane küme verildiğinde bu kümelerin oluşturduğu küme ailesini

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

olarak gösterebiliriz. \mathcal{A} nın öğeleri $1, 2, \dots, n$ doğal sayılarıyla numaralandırılmış (damgalanmış) olduğu için \mathcal{A} yı ortak özellik yöntemiyle

$$\mathcal{A} = \{A_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

olarak da yazabiliriz. Şimdi bu küme ailesinin öğelerini damgalayan sayı kümesine I dersek, yani $I = \{1, 2, \dots, n\}$ alırsak, o zaman \mathcal{A} ailesini

$$\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$$

biçiminde de yazabiliriz. Bu tür bir yazılıştaki I kümesine \mathcal{A} küme ailesinin "**damgalayan kümesi**" ya da kısaca "**damgalayanı**" denir. Burada I bir sayı kümesidir; fakat I boş olmayan herhangi bir küme olabilir. Dolayısıyla genel tanım aşağıdaki şekilde verilebilir:

2.7.1. Tanım

İboş olmayan bir küme olsun. Eğer her $i \in I$ için bir A_i kümesi varsa, A_i kümelerinin topluluğuna (kümesine) **damgalayan kümesi** I olan bir **küme ailesi** denir ve bu aile

$\{A_i \mid i \in I\}$
olarak gösterilir.

2.7.2. Örnek

$A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, ... , $A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, ... kümelerinin oluşturduğu küme ailesi A , damgalayanı doğal sayılar kümesi N olan bir küme ailesidir; yani

$A = \{A_n \mid n \in N\}$
dir.

2.7.3. Örnek

Dilimizdeki sesli harfler kümesi I olsun. $x \in I$ olmak üzere, diyelim ki x ile başlayan tüm anlamlı sözcükler kümesini S_x ile gösterelim; sözcelişi, a ile başlayanlar kümesi S_a , e ile başlayanlar kümesi S_e ... gibi. O zaman damgalayanı I olan S_x kümeler ailesi $\{S_x \mid x \in I\}$, liste yöntemiyle

$\{S_a, S_e, S_i, S_v, S_o, S_ö, S_u, S_ü\}$

olur. (Bir Türkçe sözlükte S_a, S_e, \dots kümelerinin hangi kümeler olduğunu düşününüz) .

Küme birleşimi ve kesişimi işlemlerinin birleşme özelliklerinin varlığından söz etmiştik. Bu özellikler sayesinde üç ya da daha fazla sayıda kümenin birleşiminden ya da kesişiminden söz edebiliyoruz. Sözcelişi, verilen A_1, A_2, A_3 kümeleri için $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$ olduğundan, bu üç kümenin birleşimi için doğrudan $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ yazabiliyoruz. Eğer verilen kümeler A_1, A_2, A_3, A_4 ise $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ kümesini $(A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup A_4)$ kümesi, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ kümesini de $(A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cap A_4)$ olarak düşünebiliriz. O halde, küme birleşimi ve kesişimi kavramlarını genelleştirerek bir küme ailesi içindeki kümelerin birleşimini ve kesişimini tanımlayabiliriz. Şimdi sırayla bu tanımları verelim:

2.7.4. Tanım

$A = \{A_i \mid i \in I\}$ küme ailesi verilsin. Bu aile içindeki kümelerden en az biri içinde bulunan tüm öğelerin kümesine A ailesinin birleşimi denir ve $\bigcup_{i \in I} A_i$ ya da $\bigcup_{i \in I} A_i$ singelerinden biriyle gösterilir.

Bu tanım simgesel olarak,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

biçiminde verilebilir.

2.7.5. Örnek

(i) 2.7.2. Örnekte verilen küme ailesinin birleşimi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$$

dir. $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ yerine } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ de yazılabilir.})$

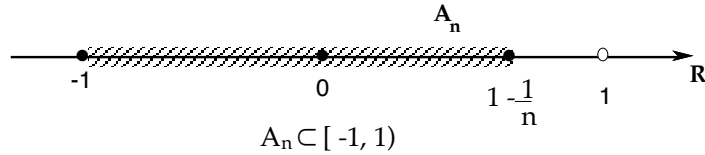
(ii) 2.7.3. Örnekte verilen küme ailesinin birleşimi $\bigcup_{x \in I} S_x$, dilimizde sesli harflerle başlayan tüm anlamlı sözcükler kümesidir.

(iii) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ için $A_n = [-1, 1 - \frac{1}{n}]$ kapalı aralıklarından oluşan $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ küme ailesinin birleşimi $[-1, 1)$ açık aralığıdır; Yani

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [-1, 1)$$

dir. $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \text{ yerine } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ de yazılabilir.})$ Şimdi bu küme eşitliğini doğrulayalım:

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}^+$ için gerçel eksen üzerinde A_n kapalı aralığını tarayalım. n yi yeterince büyütünce $1/n$ sıfıra ve A_n aralığının üst ucu $1 - \frac{1}{n}$ de 1 e yaklaşır; fakat hiçbir zaman 1 olamaz.



Diğer taraftan $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ ailesinin ilk birkaç kümesini açık yazacak olursak,

$$A_1 = [-1, 0], A_2 = [-1, \frac{1}{2}], A_3 = [-1, \frac{2}{3}], \dots$$

kümelerinin iç içe yuvalanmış, $[-1, 1)$ yarı açık aralığı içinde kalan kümeler olduğunu görürüz, yani

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq [-1, 1)$$

dir. Dolayısıyla bu küme ailesinin birleşiminin $[-1, 1)$ olacağı kolayca sezinlenebilir.

Öte yandan biliyoruz ki sezgi kanıt değildir. Öyleyse $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [-1, 1)$ küme eşitliğinin matematiksel kanıtını vermeliyiz. Bunun için eşitliğin her iki yanındaki kümelerin aynı öğelerden oluştuğunu göstermeliyiz:

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ öyleki } x \in A_n = \left[-1, 1 - \frac{1}{n}\right] \subseteq [-1, 1)$$

$$\Rightarrow x \in [-1, 1). \text{ Yani}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \subseteq [-1, 1) \quad (1)$$

olur.

Tersine,

$$x \in [-1, 1) \Rightarrow -1 \leq x < 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ öyleki } -1 \leq x \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } x \in \left[-1, 1 - \frac{1}{n}\right] = A_n$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \quad \text{Yani}$$

$$[-1, 1) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \quad (2)$$

olur. Böylece (1) ve (2) kapsamalarından

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [-1, 1)$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

n pozitif tamsayı olmak üzere, $A_n = (-n, n)$ açık aralıklar ailesinin birleşimi hangi kümedir?

?

2.7.6. Tanım

$\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ küme ailesi verilsin. Bu aile içindeki kümelerin herbiri içinde olan ortak öğeler kümesine \mathcal{A} ailesinin **kesişimi** adı verilir, $\bigcap \mathcal{A}$ ya da $\bigcap_{i \in I} A_i$ simgelerinden biriyle gösterilir.

Bu tanım simgesel olarak,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

biçiminde verilebilir.

2.7.7. Örnek

(i) 2.7.2. Örnekte verilen $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 2\}$, ...

$A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, ... kümeleri ailesinin kesişimi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

dir. Çünkü küme ailesi içindeki her bir küme içinde bulunan ortak tek öge 0 dır.

(ii) 2.7.3. Örnekte verilen küme ailesinin kesişimi $\bigcap_{x \in I} S_x$, boş kümedir. Nedenini siz açıklayınız.

(iii) 2.7.5. örnek (iii) de verilen küme ailesinin kesişimi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [-1, 0]$$

dir. Çünkü iç içe yuvalanmış bu kümelerin kesişimi en dar küme olan $A_1 = [-1, 0]$ dır. Simgelerle şu kanıtı verebiliriz:

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } x \in A_n = \left[-1, 1 - \frac{1}{n}\right] \Rightarrow n = 1 \text{ için}$$

$x \in A_1 = [-1, 0]$. Yani

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \subseteq [-1, 0] \quad (1)$$

olur.

Tersine,

$$x \in [-1, 0] = A_1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için}$$

$$-1 \leq x \leq 0 \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } x \in \left[-1, 1 - \frac{1}{n}\right] = A_n$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \text{ . Yani}$$

$$[-1, 0] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \quad (2)$$

olur. Böylece (1) ve (2) kapsamaları

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = [-1, 0]$$

eşitliğini kanıtlar.

$n \in \mathbb{N}^+$ için $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ kapalı aralıkların oluşturduğu $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ küme ailesi için

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = \{0\}$$

eşitliğini kanıtlayabilir misiniz? Lütfen deneyiniz.



2.7.8. Teorem

Bir $\{A_i \mid i \in I\}$ küme ailesi verilsin. Herhangi bir $i_0 \in I$ için

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

olur.

Kanıt

$i_0 \in I$ verilsin

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \forall i \in I$ için $x \in A_i \Rightarrow i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}$. Öyleyse

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$$

olur. Benzer olarak,

$x \in A_{i_0} \Rightarrow \exists i \in I$ için $x \in A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Öyleyse

$$A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

olur.

Yukarıdaki teoremde verilen sonuç sözel olarak şöyle ifade edilebilir: Bir küme ailesinin kesişimi, aileyi oluşturan kümelerin herbirinin içindedir; aileyi oluşturan kümelerden herbiri de küme ailesinin birleşimi içindedir.

2.7.9. Teorem

Bir E kümesinin alt kümelerinden oluşan bir küme ailesi $\{A_i \mid i \in I\}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^t = \bigcap_{i \in I} A_i^t \quad \text{ve} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^t = \bigcup_{i \in I} A_i^t$$

olur.

Kanıt

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^t &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x \notin A_i \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x \in A_i^t \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^t
\end{aligned}$$

Böylece birinci eşitlik kanıtlanmış olur. Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^t &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ öyleki } x \notin A_i \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ öyleki } x \in A_i^t \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i^t
\end{aligned}$$

olduğundan ikinci eşitlik doğrulanmış olur.

Yukarıda kanıtlanan eşitlikler 2.5.3. Teorem (iv) ve (v) de iki küme için verilen kural-
ların ikiden fazla sayıda kümeye genelleştirilmiş halidir. Bu nedenle de **Genel-
leştirilmiş De Morgan Kuralları** olarak bilinirler.

2.7.10. Örnek

$n \in \mathbf{N}$ için $A_n = (-\infty, n]$ aralıklarının oluşturduğu $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ küme ailesi için
Genelleştirilmiş De Morgan kurallarını doğrulayınız.

Çözüm

$A_n = (-\infty, n]$ yarı kapalı aralığı için $A_n^t = (n, \infty)$ açık aralığı olduğundan

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \right)^t = \mathbf{R}^t = \emptyset = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n^t$$

olur. Böylece birinci kural doğrulanmış olur. İkinci kuralı da siz doğrulayınız.



**Bir A kümesi için $P(A)$ kuvvet kümesinin birleşimi ve kesişimi hangi kümeler-
dir?**

2.7.11. Tanım

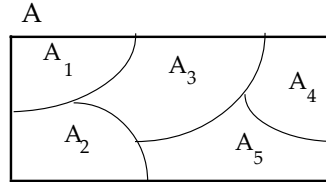
Bir A kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu bir küme ailesi $\{A_i \mid i \in I\}$ olsun. Aşağı-
daki üç koşul sağlanıyorsa bu küme ailesine A'nın bir **ayrışımı** denir. Bu koşullar

- (a) Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$,
- (b) $i, j \in I$ için $A_i \neq A_j$ ise $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- (c) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

dır.

2.7.12. Örnek

Yandaki Venn çizeneği $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ küme ailesinin A nın bir ayrışımı olduğunu göstermektedir.



2.7.13. Örnek

Z_t ile tek sayılar kümesini, $Z_ç$ ile çift tamsayılar kümesini gösterecek olursak, $\{Z_t, Z_ç\}$ küme ailesi tamsayılar kümesi Z nin bir ayrışımıdır.

Z^+ pozitif tamsayılar kümesi Z^- negatif tamsayılar kümesi olmak üzere, $\{Z^+, Z^-\}$ küme ailesi Z nin bir ayrışımı olur mu?



2.7.14. Örnek

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesi için $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$, $A_4 = \{g\}$ alt kümeler ailesi $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, A nın bir ayrışımıdır.

2.8. Çarpım Kümeler

Bu kesimde, kümeler arasında adına kartezyen çarpım ya da dik çarpım denilen yeni bir işlem tanımlayacağız. Önce bu işlemin tanımı için gerekli olan sıralı ikili kavramını tanımlamalıyız.

A ile B kümeleri ve $a \in A$, $b \in B$ öğeleri verildiğinde bu öğelerin belirlediği, sıra gözetilerek tanımlanan **sıralı ikili** (a, b) ile gösterilen yeni bir öğedir; a ya bu sıralı ikilinin birinci öğesi, b ye de ikinci öğesi denir. Bir sıralı ikilide kimin birinci öğe kimin ikinci öğe olduğu önemlidir. Dolayısıyla iki sıralı ikilinin nasıl eşit olduğu önemlidir. (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) gibi ikili sıralı ikilinin eşit oluşu

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ve } b_1 = b_2$$

diye tanımlanır. O halde (a, b) sıralı ikilisi $\{a, b\}$ kümesinden farklı bir nesnedir. Çünkü $a \neq b$ ise $\{a, b\} = \{b, a\}$ olmasına karşın $(a, b) \neq (b, a)$ dır.

Burada tanımlanan sıralı ikili kavramının esasda verilen iki öğeye sıra gözetilerek yeni bir öğe karşılık getirmekten başka bir şey olmadığı açıktır. Dolayısıyla (a, b) sıralı ikilisi ile a, b gerçel sayılar olduğundan onların belirlediği (a, b) açık aralığı birbirlerinden farklı şeylerdir. (a, b) gösterimi bir sıralı ikili mi, yoksa bir açık aralık mı gösterir kolay fark edilecektir.

2.8.1. Tanım

A ve B kümeleri verilsin. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere, tüm (a, b) sıralı ikililer kümesine A ve B nin **çarpım kümesi** denir ve bu küme $A \times B$ simgesiyle gösterilir.

Tanımı simgelerle ifade edecek olursak

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B \}$$

olur. $A \times B$ çarpım kümesi için A ya **birinci çarpan** B ye de **ikinci çarpan** küme denir.

2.8.2. Örnek

(i) $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ 1, 2 \}$ kümeleri için

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) \}$$

ve

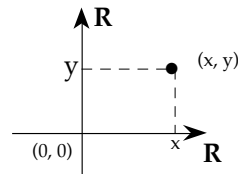
$$B \times A = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \}$$

olur. Burada $A \times B \neq B \times A$ olduğuna dikkat ediniz.

(ii) Gerçel sayılar kümesi \mathbf{R} nin kendisiyle çarpımı olan

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$$

kümesinin geometrik temsiline Kartezyen düzlem denildiğini ve $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ kısaltması yapıldığını biliyoruz. Kartezyen düzlemde (x, y) sıralı ikilisiyle temsil edilen nokta için x e noktanın birinci koordinatı y ye de ikinci koordinatı denir. $(0, 0)$ sıralı ikilisi de Kartezyen düzlemin başlangıç noktası adını alır.

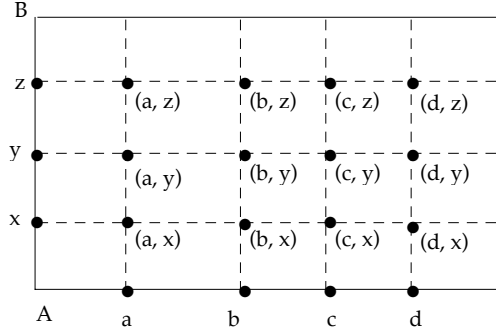


?

- $A = \{ \Delta, \square, O \}$ ile $B = \{ +, 1 \}$ kümesinin $A \times B$ çarpım kümesini yazınız.
- $\mathbf{R} \times (1, 3]$ kümesini Kartezyen düzlemde tarayınız.

Bir A kümesi ile bir B kümesinin $A \times B$ çarpım kümesini Venn çizeneğiyle göstermek istersek çoğunlukla aşağıdaki gibi bir dikdörtgen çizeriz. Dikdörtgenin alt tabanı birinci çarpan küme A yı, ilk düşey kenarı da ikinci çarpan küme B yi temsil eder. Dola-

yısıyla $A \times B$ içindeki tüm (a, b) sıralı ikilileri dikdörtgen içinde bir nokta ile temsil edilirler. Örneğin $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ kümeleri için $A \times B$ çarpım kümenin Venn çizeneğiyle temsili aşağıdaki biçimde verilebilir:



$$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z), (d, x), (d, y), (d, z) \}$$

2.8.3. Teorem

Küme çarpımının küme birleşimi, kesişimi ve fark üzerine dağılma özellikleri vardır; Yani A, B, C kümeleri için

- (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 - (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 - (iii) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
- dir.

Kanıt

(i) ve (iii) yi kanıtlayıp (ii) nin kanıtını size bırakalım:

- (i) Eşitliğin her iki tarafında bulunan kümeler çarpım kümeler olduğundan öğeleri sıralı ikililer olacaktır. O halde, eşitliğin iki yanındaki kümelerin aynı sıralı ikililerden oluştuğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \cup C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (y \in B \text{ veya } y \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ veya } (x, y) \in A \times C \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
 \end{aligned}$$

olduğuna göre $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ eşitliği geçerlidir.

Bu kanıtın üçüncü adımında \wedge nin \vee üzerine dağılımı özelliğinin kullanıldığına dikkat ediniz.

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad (x, y) \in A \times (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (y \in B \text{ ve } y \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ ve } y \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \notin A \times C \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)
\end{aligned}$$

olduğundan $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ eşitliği geçerlidir.

2.8.4. Tanım

Boş olmayan bir A kümesi için $A \times A$ çarpım kümesinin

$$D_A = \{ (a, a) \mid a \in A \}$$

olarak tanımlanan alt kümesine A nın **köşegeni** adı verilir.

Sözgelimi $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümesinin köşegeni

$$D_A = \{ (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2) \}$$

olur.

Sıralı ikili kavramı genişletilerek sıralı üçlü, sıralı dördü, kısaca n bir pozitif tamsayı olmak üzere, sıralı n -li tanımlanabilir. Böylece küme çarpımı genişletilerek üç kümenin çarpımı, dört kümenin çarpımı ya da n kümenin çarpımı tanımlanabilir. Şimdi kısaca bu konulara değinelim.

a, b, c öğeleri verilsin. (a, b) sıralı ikilisi ile c nin oluşturduğu sıralı ikiliye **sıralı üçlü** denir ve bu öge (a, b, c) olarak gösterilir; yani

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

dir. Benzer olarak a, b, c, d öğelerinin (a, b, c, d) sıralı dördüsü

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d)$$

olarak tanımlanır. a_1, a_2, \dots, a_n öğelerinin (a_1, a_2, \dots, a_n) sıralı n -lisi de, $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ tanımlı ise

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

olur.

Böylece A_1, A_2, \dots, A_n kümeleri verildiğinde bu kümelerin çarpım kümesi

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}$$

olarak tanımlanır. Sözgelisi, \mathbf{R} gerçel sayılar kümesi için

$$\underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_{n \text{ tane}} = \mathbf{R}^n$$

kümesi gerçel sayıların tüm sıralı n -liler kümesidir; Yani

$$\mathbf{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \}$$

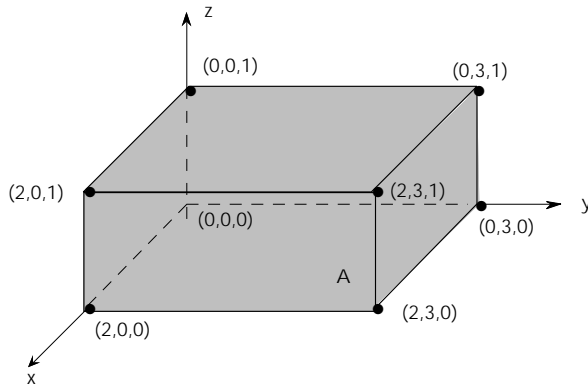
dir.

2.8.5. Örnek

\mathbb{R}^3 de $A = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1 \}$ kümesini geometrik olarak belirleyiniz.

Çözüm

\mathbb{R}^3 gerçel sayıların tüm sıralı 3-lüler kümesidir. \mathbb{R}^3 e kartezyen uzay ya da koordinat uzayı denildiğini biliyorsunuz. Bu uzayda A kümesi aşağıdaki şekilde görülen dikdörtgenler prizmasının üzerinde ve içinde olan noktalar kümesidir.

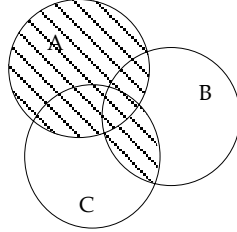


Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, A = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2 \text{ ve } x^2 = -1\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki eşitliklerden **hangisi doğrudur**?
 A. $\emptyset = \{\emptyset\}$
 B. $\emptyset = \{0\}$
 C. $A = \emptyset$
 D. $A = \{0\}$
 E. $A = \{\emptyset\}$
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 4, 5\}, C = \{x \mid x \text{ tek basamaklı pozitif tamsayı}\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden **yanlış olan hangisidir**?
 A. $B \subset A$
 B. $A \subset C$
 C. $A \cap C = A$
 D. $A \cup C = C$
 E. $C \setminus A = B$

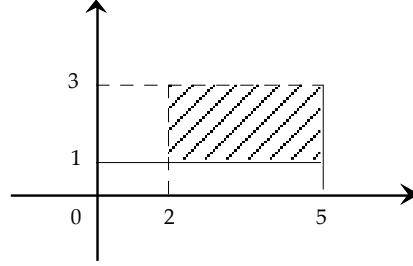
3. $A \cup B \cup C$ kümesi aşağıdakilerden **hangisidir**?
- A. $A \cup (B \cap C)$
 B. $A \cup B \cup C$
 C. $(A \cap B) \cup C$
 D. $B \cup C$
 E. $A \cap B \cap C$
4. $(A \cup B \cup C)$ kümesi nin tümleyeni aşağıdakilerden **hangisidir**?
- A. $A^t \cap B^t \cap C^t$
 B. $A^t \cup B^t \cup C^t$
 C. $(A^t \cup B^t) \cap C^t$
 D. $(A^t \cap B^t) \cup C^t$
 E. $A^t \cup (B^t \cap C^t)$
5. A, B, C kümeleri birer daire ile gösterilmektedir. Şekildeki taralı kısım aşağıdakilerden **hangisidir**?



- A. $A \cap B \cap C$
 B. $(A \cap B) \cup C$
 C. $A \cup (B \cap C)$
 D. $A \cup B \cup C$
 E. $A \cap (B \cup C)$
6. \mathbf{N} doğal sayılar kümesi, a pozitif bir tamsayı olmak üzere $a\mathbf{N} = \{ an \mid n \in \mathbf{N} \}$ kümesi olduğuna göre, $8\mathbf{N} \cap 12\mathbf{N}$ kümesi aşağıdakilerden **hangisine eşittir**?
- A. $4\mathbf{N}$
 B. $16\mathbf{N}$
 C. $24\mathbf{N}$
 D. $32\mathbf{N}$
 E. $48\mathbf{N}$
7. $A = \{x \mid x=3n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x=3n+1, n \in \mathbf{N}\}$, $C = \{x \mid x=3n+2, n \in \mathbf{N}\}$ olduğuna göre, $A \cup B \cup C$ kümesinin eğiti aşağıdakilerden **hangisidir**?
- A. \mathbf{N}
 B. $2\mathbf{N}$
 C. $3\mathbf{N}$
 D. $4\mathbf{N}$
 E. $5\mathbf{N}$

8. A, B, C şu iki özelliği sağlayan üç kümedir:
 $A \cap B = A \cap C, A \cup B = A \cup C$
 Aşağıdakilerden **hangisi doğrudur**?
 A. $A \subset C$
 B. $A = C$
 C. $B \subset C$
 D. $B = C$
 E. $A = B$
9. A ve B herhangi iki kümedir. $A \cup B, A \cap B$, ve $A \setminus B$ kümelerinin tüm alt kümeleri sayısı, sırasıyla 128, 1 ve 8 olduğuna göre $B \setminus A$ kümesinin **öge sayısı nedir**?
 A. 3
 B. 4
 C. 5
 D. 6
 E. 7
10. 16 kişilik bir sınıfta İngilizce öğrenenler kümesi \dot{I} , Fransızca öğrenenler kümesi F dir. $s(\dot{I}) = 8, s(F) = 9, s((\dot{I} \cap F)^c) = 14$ olduğuna göre, bu sınıfta **Fransızca öğrenen öğrenciler sayısı nedir**?
 A. 3
 B. 4
 C. 5
 D. 6
 E. 7
11. Koordinat düzleminde merkezi başlangıç noktasında olan 3 yarıçaplı çembere içten teğet olan 2 yarıçaplı tüm dairelerin ailesi A ile gösteriliyor. A ailesinin kesişimi olan $\cap A$ kümesi aşağıdakilerden **hangisidir**?
 A. Merkezi başlangıç noktasında olan 3 yarıçaplı daire
 B. Merkezi başlangıç noktasında olan 2 yarıçaplı daire
 C. Merkezi başlangıç noktasında olan 1 yarıçaplı daire
 D. Merkezi başlangıç noktasında olan 1 yarıçaplı çember
 E. Boş küme
12. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ kapalı aralıkları tanımlanıyor.
 $\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ küme ailesinin kesişimi olan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi aşağıdakilerden **hangisidir**?
 A. $[0,1]$
 B. $(0,1)$
 C. $[-1,2]$
 D. $(-1,2)$
 E. $(0,1]$

13. Aşağıdaki küme ailelerinden **hangisi** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin bir ayrışımıdır?
- A. $\{\{0,1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9\}\}$
 B. $\{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$
 C. $\{\{0, 1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$
 D. $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$
 E. $\{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$
14. $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4\}$ kümeleri için $A \times B$ kümesi aşağıdakilerden **hangisidir**?
- A. $\{(3, 2), (4, 3), (5, 2), (2, 5), (7, 2), (4, 7)\}$
 B. $\{(3, 2), (5, 2), (7, 4)\}$
 C. $\{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$
 D. $\{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4)\}$
 E. $\{(2, 3), ((2, 5), (7, 2))\}$
15. Şekildeki koordinat düzleminde taralı olan küme **hangi aralıkların çarpım kümesidir**?



- A. $(2, 5) \times (1, 3)$
 B. $[2, 5) \times [1, 3]$
 C. $[1, 3) \times (2, 5]$
 D. $(2, 5] \times (1, 3]$
 E. $(2 \times 5) \times [1, 3)$
16. Herhangi A , B , C kümeleri için $s(A) = 5$, $s(B) = 10$, $s(C) = 8$ ve $B \cap C = \emptyset$ dir. $A \times (B \cup C)$ kümesinin **öğeleri sayısı** nedir?
- A. 400
 B. 120
 C. 90
 D. 130
 E. 23