2012

10. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

TOLGA YAVAN

Matematik Öğretmeni

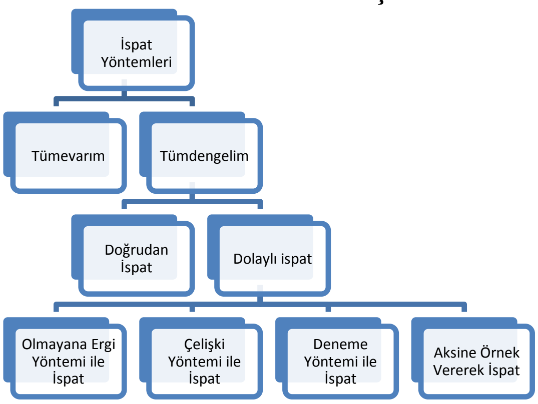
10. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

1. ÜNİTE: DÜZLEM GEOMETRİDE TEMEL ELEMANLAR VE İSPAT BİÇİMLERİ

Temel Postulatlar
İspatlanamayan ve ispatına gerek duyulmayan ancak doğru olduğu kabul edilen geometrik önermelere **postulat** denir.
Aşağıda, geometrinin temeli sayılan Öklid postulatları verilmiştir.
1. Postulat: Farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Postulat: Bir doğru parçası sağ ve sol tarafa doğru sınırsız şekilde uzatılabilir.
3. Postulat: Merkezi ve yarıçapı verilen yalnız bir çember çizilebilir.
4. Postulat: Bütün dik açılar eştir.
5. Postulat: Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız ve yalnız bir tek paralel doğru çizilir.

Teorem: Doğruluğu tanımlardan ya da ispatsız kabul edilen önermelerden yola çıkılarak genel anlamda ispatlanabilen ve problemlerin çözümlerinde dayanak olarak kullanılabilen önermelerdir.

GEOMETRİK İSPAT BİÇİMLERİ



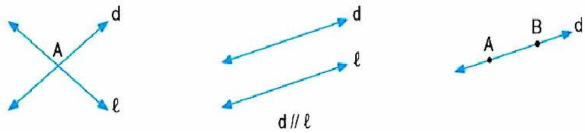
İspatlar ya doğrudan ya da dolaylı olarak yapılır. Bir teoremde hipotezin doğruluğu kabul edilerek hükmün de doğru olduğunun gösterilmesi seklinde yapılan ispat yöntemine **doğrudan (direkt) ispat yöntemi** denir. Bir teoremin doğrudan ispatı yerine, teoremin karşıt tersinin ispatlanmasına **dolaylı ispat yöntemi** denir. Bu ispatlar yapılırken farklı yazım biçimleri kullanılır. Paragraf, akış diyagramı, iki kolonlu ispat gibi ispat biçimleri farklı ispat yöntemleri değil, aksine ispat yöntemlerinin farklı biçimde gösterilmesidir.
İki kolonlu ispat biçiminde ilk kolonda "**İfadeler**" başlığı yer alır. Sıra numarası verilerek adım adım son ifadeye kadar yazılır. İkinci kolonda ise "**Gerekçeler**" başlığı altında ilk kolon numaralarına paralel olacak şekilde ilk kolondaki "İfadeler" başlığının yazılma gerekçeleri belirtilir. Gerekçeler; özellikler, teoremler, postulatlar ve tanımlar olabilir.
İki kolonlu ispat biçimi aşağıdaki bileşenlere sahip olmalıdır:
a. Orijinal teorem, önerme vb. ifadesi
b. Verilen bilgilerin akış diyagramı
c. İspatta verilenlerin yeni ifadeleri
ç. İspattaki her birim adımı tam destekleyen nedenler
d. İspatı yapılan ifade
Akış diyagramlı ispat bicimi, ispat yapısı, kutular içinde yazılan açıklamalar ve bunların dışındaki okların yönlendirilmesi ile oluşur. Verilenler, özellikler, teoremler, postulatlar ve tanımlar, kutuların altına veya yanına yazılır. Bu akış diyagramını, bilgisayar programcıları sıkça kullanırlar. Her bir adım kolayca ve acık olarak görüldüğü için bu ispat bicimi, cebirsel ve geometrik ispatlara kolayca uyarlanabilir.
Paragraf ispat biçiminde, ispat boyunca detaylı açıklamalara yer verilir. İspatı sonlandırana kadar her adım için gerekçe ayrıntılı şekilde belirtilir ve paragraf biçiminde yazılır.

2.ÜNİTE: DÜZLEMDE NOKTA, DOĞRU VE VEKTÖRLER

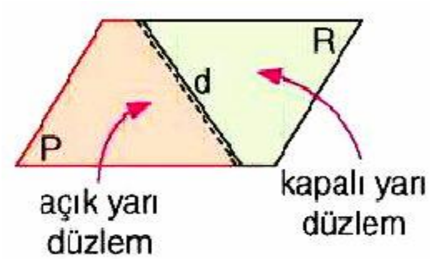
DOĞRULARDA DOĞRULTU KAVRAMI
Doğrular kümesi üzerinde tanımlı paralellik bağıntısını inceleyelim:
1. Her doğru kendine paralel olduğundan doğrular kümesinde paralellik bağıntısının yansıma özelliği vardır. Yandaki şekilde AB//AB olur.
2. AB//CD⇔CD//AB olduğundan doğrular kümesinde paralellik bağıntısının simetri özelliği vardır. Yandaki şekilde AB//CD ise CD//AB olur.
3. AB//CD iken CD//EF ve AB//EF olduğundan doğrular kümesinde paralellik bağıntısı geçişendir. Yandaki şekilde AB//CD//EF olur.
Doğrular kümesinde paralellik bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri olduğundan, paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.
Doğrular kümesi üzerindeki paralellik bağıntısının, her bir denklik sınıfının bir doğrultusu vardır.

İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

1. Bir ortak noktaları varsa kesişirler.
2. Düzlemsel olup, kesişmiyorlarsa paralel doğrulardır.
3. Düzlemsel olmayıp kesişmiyorlarsa aykırı doğrulardır.

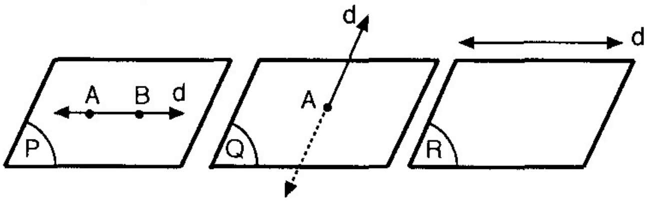


Düzlemdeki bir doğru, düzlemi iki parçaya ayırır. Ayrılan parçalardan her birine **yarı düzlem** adı verilir. Düzlem parçalarına doğru dâhil ise **kapalı yarı düzlem**, dâhil değilse **açık yarı düzlem** denir.



BİR DOĞRU İLE BİR DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

1. Doğru ile düzlemin iki ortak noktası varsa doğru düzlemin içindedir.
2. Doğru ile düzlemin bir ortak noktası varsa doğru düzlemi deler.
3. Doğru ile düzlemin ortak noktaları yoksa doğru düzleme paraleldir.



Herhangi bir sabit noktayla başlayıp sonsuz sayıdaki noktalar ile düz olarak sürekli tek yöne uzatılabilen, uzunluğu sınırsız, kalınlığı bulunmayan geometrik sekle **kapalı yarı doğru (ışın)**, başlangıç noktası dâhil edilmediğinde ise **açık yarı doğru** denir.

[AB : AB kapalı yarı doğrusu

]AB : AB açık yarı doğrusu

Farklı iki nokta ile bunlar arasında bulunan ve doğrudaş olan tüm noktaların kümesine doğru parçası, bu iki noktaya doğru parçasının uç noktaları denir.

(AB) AB doğru parçasının iç noktaları

[AB) AB doğru parçasından B çıkarılmış

(AB] AB doğru parçasından A çıkarılmış

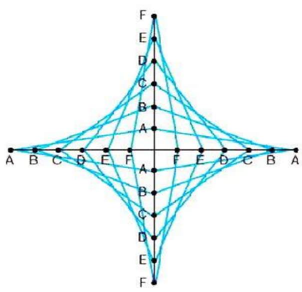
Uyarı:

1. Bir doğru parçasının doğrultusu, üzerinde bulunduğu doğrunun doğrultusuyla aynıdır.
2. İki doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrular kesişiyorsa bu doğru parçaları farklı doğrultuda, kesişmiyorsa aynı doğrultudadır.
3. Uç noktaları çakışık olan doğru parçaları nokta belirtir. Dolayısıyla tüm noktaların doğrultuları aynıdır ve tüm noktalar aynı denklik sınıfındadır.

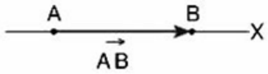
Desen Oluşturma

Doğru parçaları ile desen oluşturmada aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir:

1. Doğru parçaları ile eksenler oluşturulur. Eksenler arasındaki açılar dar, dik veya geniş açı olarak alınabilir.
2. Doğru parçaları farklı boylarda alınabilir. Her bir seklin altına doğru parçalarının birbirlerine oranları yazılır.
3. Eksenler üzerinde kendi içinde eşit aralıklarla noktalar alınır. Nokta sayılarının eşit olmasına dikkat edilerek bu noktalar harfler veya sayılarla isimlendirilir.
4. Aynı harflere ait noktalar doğru parçası oluşturacak şekilde birleştirilerek tasarımlar oluşturulur.
5. Tasarım oluşturulduktan sonra noktaların isimleri silinir.
6. Elde edilen şekillerde bazı bölgeler boyanarak farklı desen ve tasarımlar oluşturulur.



Yönlü Doğru Parçası
Uzunluğu, doğrultusu ve yönü olan doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir. Başlangıç noktası A ve bitiş noktası B olan yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir.



A ve B noktaları arasındaki uzaklığa AB yönlü doğru parçasının **uzunluğu** denir. Bu uzunluk $|\overrightarrow{AB}|$ ile gösterilir.

Uyarı:

1. Yönlü doğru parçası, başlangıç ve bitiş noktasının belli olması sebebiyle ısından farklıdır. Işının başlangıç noktası, yönü, doğrultusu belli olmasına rağmen bitiş noktası yoktur.
2. Doğrultuları farklı olan yönlü doğru parçalarının yönleri farklıdır. Ancak bu yönlü doğru parçalarının uzunlukları eşit olabilir.
3. Doğrultuları aynı olan yönlü doğru parçalarının yönleri aynı veya zıttır. Bu yönlü doğru parçalarının uzunlukları da eşit ya da farklıdır.
4. Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan yönlü doğru parçaları üzerindeki yön ve doğrultu, kullanım amacına göre değişiklik gösterebilir.

Vektör Kavramı

Eş yönlü doğru parçaları: Uzunluğu ve yönü aynı olan yönlü doğru parçalarına eş yönlü doğru parçaları denir.
$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ eş yönlü doğru parçaları $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şeklinde gösterilir.

Vektör:
Yönlü doğru parçaları üzerinde tanımlanan "$\sim$" bağıntısı, yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu için bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının her denklik sınıfı bir **vektördür**.
$[\overrightarrow{AB}]$ denklik sınıfı genellikle $\overrightarrow{AB}$ biçiminde gösterilir.
Vektörler $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, ...$ gibi harflerle gösterilir.
Düzlemde bütün vektörlerin kümesi V ile gösterilir.
Vektörler ile işlem yapılırken denklik sınıfının temsilci elemanları kullanılır.

Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)
Bir vektörün uzunluğu (büyüklüğü) bu vektörün temsil ettiği yönlü doğru parçalarından birinin uzunluğudur ve $|\overrightarrow{AB}|$ ile gösterilir.

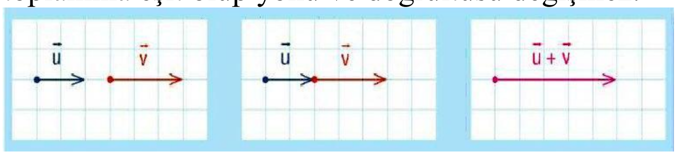
Birim vektör: Uzunluğu (büyüklüğü) 1 birim olan vektöre **birim** vektör denir.

Sıfır vektörü: Başlangıç ve bitim noktası aynı olan $\overrightarrow{AA}$ vektörüne **sıfır vektörü** denir. Sıfır vektörü $\vec{0}$ ile de gösterilir.

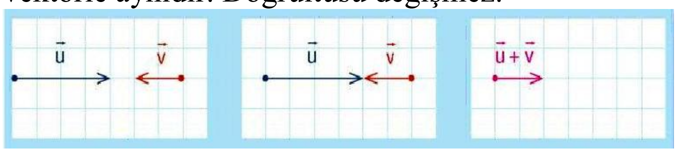
Ters (zıt) vektörler: Doğrultu ve uzunlukları aynı, yönleri farklı olan vektörlere **ters (zıt) vektörler** denir. $\vec{u}$ *ve* $\vec{v}$ ters vektörleri için $\vec{u} = -\vec{v}$ dür.

Dik vektörler: Başlangıç noktaları aynı olan ve aralarındaki açı 90^o olan vektörlere **dik vektörler** denir.

VEKTÖRLERDE TOPLAMA İŞLEMİ
Doğrultuları ve yönleri aynı olan iki vektörün toplamının uzunluğu, vektörlerin uzunlukları toplamına eşit olup yönü ve doğrultusu değişmez.



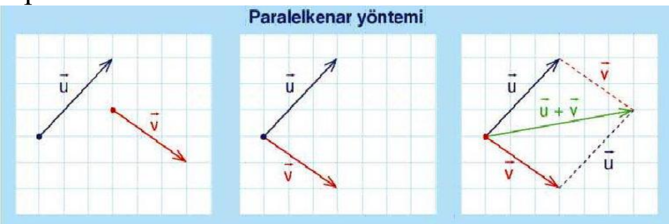
Doğrultuları aynı, yönleri farklı olan iki vektörün toplamının uzunluğu, vektörlerin uzunlukları farkına eşit olup yönü, büyük olan vektörle aynıdır. Doğrultusu değişmez.



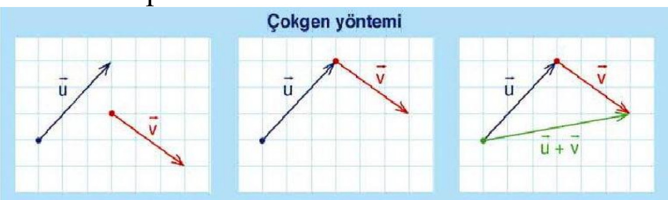
Doğrultuları farklı olan iki vektörün toplamının uzunluğu vektörlerin uzunlukları toplamından küçük, yönü ve doğrultusu bu iki vektörün yön ve doğrultusundan farklıdır.
Bu şekildeki vektörlerin toplamında **paralelkenar ve çokgen yöntemi** kullanılır.

Paralelkenar yöntemi
İki vektörün toplamı, paralelkenar yöntemi ile bulunurken vektörlerin başlangıç noktaları sabit bir noktaya taşınır.
Başlangıç noktaları ortak olan $\vec{u}$ *ve* $\vec{v}$ vektörlerine eş vektörler çizilir.

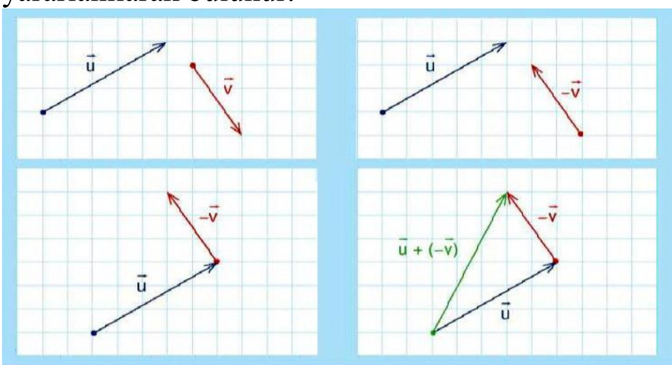
Başlangıç noktası $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin başlangıç noktasıyla aynı olan köşegen, bu iki vektörün toplam vektörüdür.



Çokgen yöntemi
İki vektörün toplamı çokgen yöntemi ile yapılırken birinin bitim noktası ile diğerinin başlangıç noktası sabit bir noktaya taşınır.
İlk vektörün başlangıç noktasını ikinci vektörün bitim noktasına birleştiren vektör, bu iki vektörün toplamıdır.



İki vektörün farkı $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ eşitliğinden yararlanılarak bulunur.



V vektörler kümesi üzerinde tanımlanan toplama işleminin kapalılık, değişme, birleşme özellikleri vardır. Birim (etkisiz) elemanı $\vec{0}$ (sıfır) vektörüdür. Herhangi bir $\vec{u}$ vektörünün tersinden bahsedilebilir ve $-\vec{u}$ şeklinde gösterilir.

BİR VEKTÖRÜ BİR GERÇEK (REEL) SAYI İLE ÇARPMA

Herhangi bir $\vec{u}$ vektörü, $k \in R$ ile çarpıldığında elde edilen yeni vektörün;

- $0 < k < 1$ ise yönü ve doğrultusu değişmez, uzunluğu küçülür.
- $k > 1$ ise yönü ve doğrultusu değişmez, uzunluğu büyür.
- $-1 < k < 0$ ise yönü değişir, doğrultusu değişmez, uzunluğu küçülür.
- $k < -1$ ise yönü değişir, doğrultusu değişmez, uzunluğu büyür.
- $k = 0$ ise $\vec{0}$ elde edilir.
- $k = 1$ ise hiçbir değişim olmaz.
- $k = -1$ ise yönü değişir, doğrultusu ve uzunluğu değişmez.

Vektörlerin Gerçek Sayı İle Çarpımında Dağılma ve Birleşme Özellikleri

1. **Birinci Dağılma Özelliği:**
$$k.(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$
2. **İkinci Dağılma Özelliği:**
$$(k + m).\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$$
3. **Birleşme Özelliği:**
$$k(m\vec{v}) = (km)\vec{v}$$

VEKTÖRLERİN LİNEER BAĞIMLILIĞI

Düzlemde biri diğerinin gerçek bir sayı katı olarak yazılabilen iki vektöre **lineer bağımlı vektörler** denir.
Doğrultuları aynı olan iki vektör **lineer bağımlı**dır.
Doğrultuları farklı olan iki vektör ise **lineer bağımsız**dır.
Aynı düzlemde olan ikiden fazla vektör, doğrultularına bakılmaksızın lineer bağımlıdır.
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri için, k ve t $\in$ R olmak üzere,
$k.\vec{a} + t.\vec{b} = \vec{c}$ ise $\vec{c}$ vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **lineer bileşimi** denir.
Lineer bağımlı vektörler birbirlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir.

3.ÜNİTE: KOORDİNAT SİSTEMLERİ

DİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Düzlemde bir O noktası ve başlangıç noktaları O olan, birbirine dik $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ birim vektörleri verilsin. $\{0, e_1, e_2\}$ üçlüsününün oluşturduğu yapıya **dik koordinat sistemi** denir. O noktasına sistemin **orijini**, $\vec{e_1}$ ve $\vec{e_2}$ vektörlerine **birim vektörler**, bu vektörleri taşıyan doğrulara koordinat sisteminin **x ve y eksenleri** denir. Bu eksenler, düzlemi dört bölgeye ayırır.
Dik koordinat sisteminde alınan herhangi bir P noktası için $\overrightarrow{OP}$ vektörünün $\vec{e_1}$ ve $\vec{e_2}$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak gösterimi $\overrightarrow{OP} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2}$ şeklinde yapılır. Buradaki x ve y değerlerine P noktasının koordinatları denir ve P(x ,y) biçiminde gösterilir.

İKİ VEKTÖRÜN ÖKLİD İÇ ÇARPIMI

Dik koordinat sisteminde $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vektörleri için $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2$ şeklinde tanımlanan işlem,

$\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^2$ ve $\forall k \in R$ için,

i. $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a},\rangle$ (simetri özelliği)

ii. $\langle k\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\rangle = k\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle\vec{b}, \vec{c}\rangle$ (1. yere göre lineerlik)

$\langle\vec{a}, k\vec{b} + \vec{c}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + k\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle$ (2. yere göre lineerlik)

iii. $\vec{a} \neq 0$ için $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle > 0$

$\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$ (pozitif tanımlılık özelliği)

özelliklerini sağlar.

Bu yüzden bu işleme **Öklid İç Çarpımı** adı verilir. $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ biçiminde gösterilir.

Öklid iç çarpımı ile birlikte R^2 ye **Öklid Düzlemi** denir.

BİR VEKTÖRÜN UZUNLUĞU

$\vec{u} = (x, y)$ olmak üzere, $\|\vec{u}\|$ ifadesine $\vec{u}$ vektörünün **uzunluğu (normu)** denir.

$\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = x^2 + y^2$ olduğundan $\vec{u}$ vektörünün normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle}$ ile hesaplanır.

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere iki nokta arasındaki uzaklık,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ biçiminde hesaplanabileceği gibi $\overrightarrow{AB}$ yardımıyla

$d(A, B) = \sqrt{\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle}$ ile de hesaplanabilir ve $\|\overrightarrow{AB}\|$ biçiminde gösterilir.

Sıfırdan farklı bir $\vec{a}$ **ile aynı doğrultulu ve aynı yönlü birim vektör** $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ işlemi ile bulunur.

İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

$\vec{a} = (a_1, a_2) \neq \vec{0}$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2) \neq \vec{0}$ arasındaki açının ölçüsü α ise

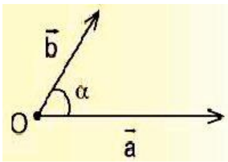
$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.cos\alpha$$

eşitliği geçerlidir. Özel olarak

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle > 0$,

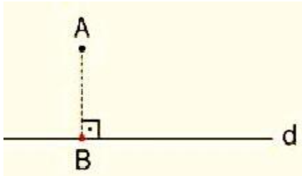
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle < 0$,

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$,

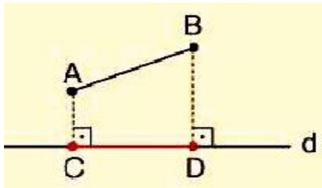


BİR VEKTÖRÜN BAŞKA BİR VEKTÖR ÜZERİNE DİK İZDÜŞÜMÜ

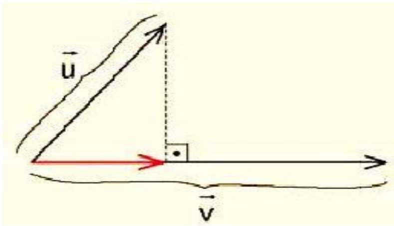
Düzlemde bir d doğrusu ve bu doğrunun dışında bir A noktası alınıyor. A noktasından d doğrusuna çizilen dikmenin ayağı olan B noktasına, A noktasının d doğrusu üzerindeki **dik izdüşümü** denir.



Bir [AB] nın d doğrusu üzerindeki dik izdüşümü, A ve B noktalarının d doğrusu üzerindeki dik izdüşümleri olan C ve D noktalarını birleştiren CD doğru parçasıdır.



$\vec{u}$ nün $\vec{v}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörü, $\frac{\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}.\vec{v}$ bağıntısı ile bulunur.



4.ÜNİTE: DOĞRULAR

Doğru Denklemleri

Düzlemde bir $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{u} = (u_1, u_2)$ olan doğrunun, $X = (x, y)$ düzlemde herhangi bir nokta ve k parametre olmak üzere

Vektörel denklemi: $X = A + k\vec{u}$

Parametrik denklemi: $\begin{cases} x = x_0 + k.u_1 \\ y = y_0 + k.u_2 \end{cases}$

Kapalı denklemi: Doğrultman vektörü $\vec{u} = (-b, a)$ olarak verilirse

$ax + by + c = 0 \;\; a, b, c \in R \;\; a^2 + b^2 \neq 0$

şeklindedir.

Özel olarak m eğimi göstermek üzere $\mathbf{y = mx + n}$ şeklinde de verilebilir.

$ax + by + c = 0$ kapalı denklemiyle verilen doğru,

$a = 0$ ise x eksenine paralel,

$b = 0$ ise y eksenine paraleldir.

$c = 0$ ise orijinden geçer.

İki Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{u} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere;

Vektörel denklemi: $(x, y) = A + k\vec{u}$

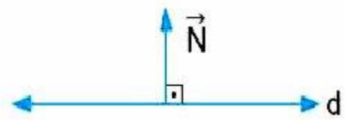
Parametrik denklemi: $\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \end{cases}$

Kapalı denklemi: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ şeklindedir.

Doğrultman vektörü $\vec{u} = (b, -a)$ olarak verilirse m eğimi göstermek üzere $(y - y_1) = m(x - x_1)$ şeklinde de verilebilir.

k parametresi $[0,1]$ aralığında seçildiğinde A ve B noktalarıyla sınırlı doğru parçası elde edilir.

Doğrunun Normal Vektörü



Bir doğrunun doğrultusuna dik olan vektöre doğrunun **normal vektörü** denir ve $\vec{N}$ ile gösterilir.
a, b, c ∈ R ve ax + by + c = 0 ise doğrunun normal vektörlerinden biri $\vec{N} = (a, b)$ dir. Bir doğrunun birden fazla normal vektörü vardır.
Bir A noktası ve normal vektörü verilen doğrunun kapalı denklemi $\langle \overrightarrow{AX}, \vec{N} \rangle = 0$ olur.

ax + by + c = 0 doğrusunun düzlemde ayırdığı açık ya da kapalı yarı düzlemler
aşağıdaki gibi gösterilir:
ax + by + c > 0 (açık yarı düzlemi)
ax + by + c < 0 (açık yarı düzlemi)
ax + by + c ≥ 0 (kapalı yarı düzlemi)
ax + by + c ≤ 0 (kapalı yarı düzlemi)

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Doğrultu vektörleri $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ olan iki doğru;

- $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ lineer bağımlı ise paralel ya da çakışık,
- $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ lineer bağımsız ise kesişen doğrulardır.

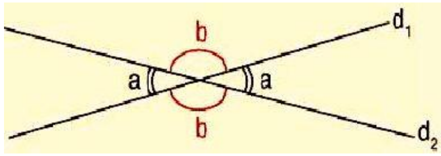
Yukarıdaki kuralın bir sonucu olarak normal vektörleri lineer bağımlı olan iki doğru, paralel ya da çakışıktır; normal vektörleri lineer bağımsız ise doğrular kesişir.

$(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$(d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilsin.

- k sıfırdan farklı bir gerçek sayı olmak üzere, $(a_1, b_1) = k.(a_2, b_2)$ ise doğrular çakışık ya da paraleldir.

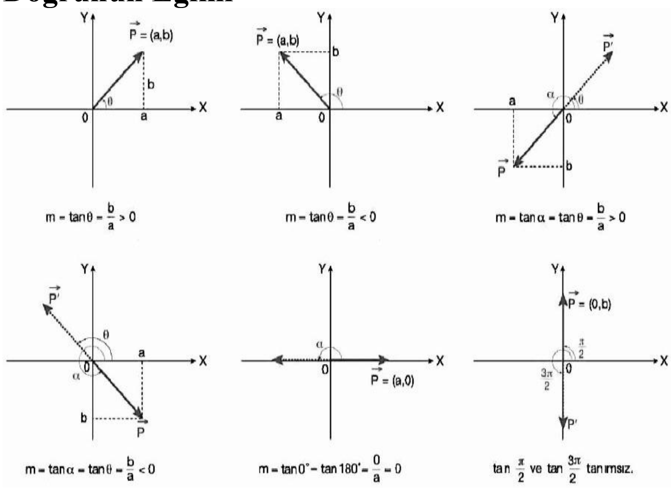
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $(c_1 = k.c_2)$ şartını sağlıyorsa çakışık,
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ $(c_1 \neq k.c_2)$ şartını sağlıyorsa paraleldir.

- $(a_1, b_1) = k.(a_2, b_2)$ eşitliğini sağlayan bir k gerçek sayısı yoksa doğrular kesişir.
  Bu durumda doğruların kesişim noktası, doğru denklemlerinin oluşturduğu sistemin çözümüdür.



İki doğru arasında dik, dar ve geniş açı olmak üzere üç çeşit açı oluşabilir.
Dar olanın bu iki açı arasındaki açı, geniş olanı da bu iki doğru arasındaki açının bütünleyeni olduğu dikkate alınır.
İki doğrunun doğrultu vektörlerinin iç çarpımı pozitif ise bu vektörler arasında kalan açı, doğrular arasındaki açıdır.
Benzer şekilde, iki doğrunun normal vektörlerinin iç çarpımı pozitif ise bu vektörler arasındaki açı, doğrular arasındaki açıdır.
Doğrultu vektörleri ya da normalleri dik olan iki doğru birbirine diktir.

Doğrunun Eğimi



Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantına **doğrunun eğimi** denir ve eğim **m** ile gösterilir.
Vektörel olarak eğim, bir doğrunun doğrultu vektörünün eğimine bu **doğrunun eğimi** denir.
Doğrunun, x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ ise eğim, **m = tanθ** olarak ifade edilir.
$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi, bu noktalarda geçen doğrultu

vektörünün ordinatının apsisine oranıdır.

Doğrultman vektörü:

$\vec{u} = B - A = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

Eğimi: $m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Doğrultman vektörü $\vec{u} = (b, -a)$ olarak verilirse eğimi $m_{AB} = -\frac{a}{b}$ olur.

İki Açının Toplam ve Farklarının Trigonometrik Oranları

a, b ∈ R için aşağıdaki trigonometrik özdeşlikler vardır:

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

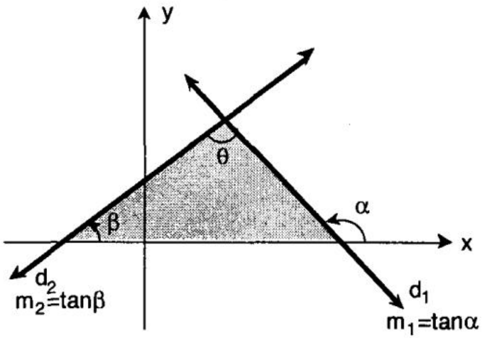
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a.\cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a.\cot b + 1}{\cot a - \cot b}$$

Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı

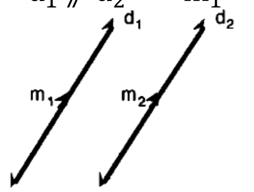


$\theta \neq 90^0$ olmak üzere; $\tan\theta = \frac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}$ dir.

θ değeri pozitif ise iki doğrunun arasındaki açının ölçüsü, negatif ise bütünleyen açının ölçüsü bulunur.

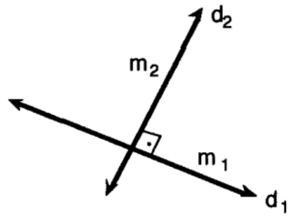
1. $\theta = 0^0$ ise iki doğru paralel veya çakışıktır. Buna göre;

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

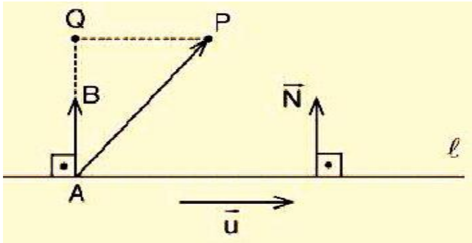


2. $\theta = 90^0$ ise iki doğru birbirine dik olur. Buna göre;

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$$



BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA OLAN UZAKLIĞI



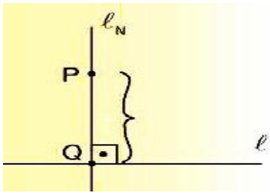
$\overrightarrow{AQ} = \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{N}\rangle}{\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}\rangle}.\overrightarrow{N}$ vektörü $\overrightarrow{AP}$ vektörünün $\overrightarrow{N}$ normal vektörü üzerine **dik izdüşüm vektörüdür.**

$\|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{N}\rangle|}{\|\overrightarrow{N}\|}$ uzunluğu **P noktasının ℓ doğrusuna uzaklığıdır.** Bu uzaklık d(P , ℓ) ile de gösterilir.

Bir $P(x_0, y_0)$ noktasının, normali $\overrightarrow{N} = (a, b)$ olan ax+by+c=0 **doğrusuna uzaklığı**

$$d(P,d) = \frac{|\langle \vec{P}, \vec{N}\rangle + c|}{\|\vec{N}\|} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

olur.



P noktasından geçen ve ℓ ye dik olan ℓ_N doğrusu bulunur. Bu doğrunun ℓ doğrusu ile arakesit noktası Q ise nun P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$ olur.

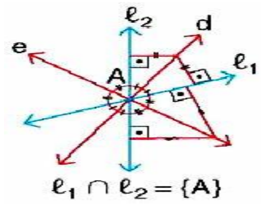
Doğrular kesişiyor ya da çakışıyor ise bu iki doğrunun arasındaki uzaklık sıfır olur.

Geometrik Yer

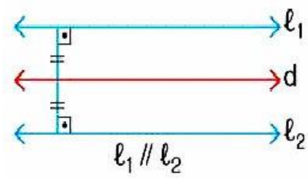
Belli bir özelliği taşıyan tüm noktaların oluşturduğu kümeye, o özelliği sağlayan noktaların **geometrik yeri** denir.

1. Kesişen iki doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, bu iki doğrunun **açıortay doğrularıdır.**

Yandaki şekilde, kesişen iki doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri e ve d açıortay doğrularıdır.

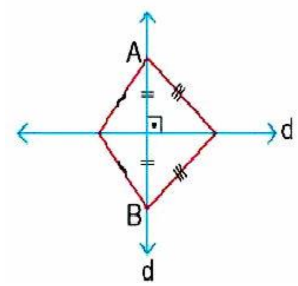


2. Paralel olan iki doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, bu iki doğruya paralel olan **orta paralel doğrusu**dur.
Yandaki şekilde paralel olan ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri d doğrusudur.



3. Bir doğruya sabit bir uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu **doğruya paralel olan iki doğru**dur.
Yandaki şekilde ℓ doğrusuna sabit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri d ve e doğrularıdır.

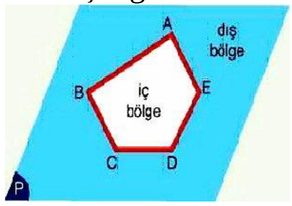
4. İki noktaya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, bu noktaları uç nokta kabul eden doğru parçasının **orta dikme doğrusu**dur.
Yandaki şekilde A ve B noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri d doğrusudur. yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının **orta dikme doğrusu**dur.



5.ÜNİTE: ÜÇGENLER

DIŞBÜKEY ÇOKGEN VE TEMEL ELEMANLARI

Çokgen: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ düzlemsel farklı n tane (n≥3) nokta olsun. Bunların herhangi ardışık üçü doğrusal değilse yalnız uç noktalarında kesişen $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \ldots, [A_n, A_1]$ doğru parçalarının birleşimine **çokgen** denir. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ noktalarına, çokgenin köşeleri; $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \ldots, [A_n, A_1]$ doğru parçalarına da çokgenin kenarları denir.



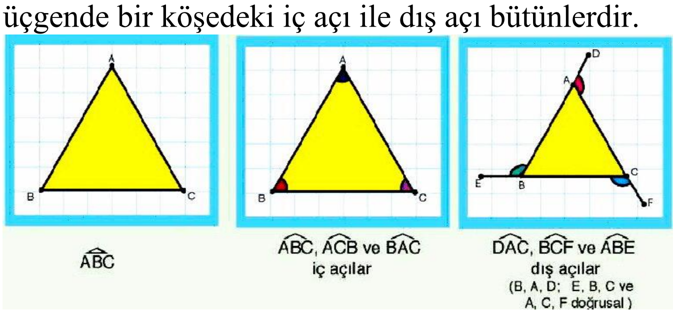
Çokgenin iç bölgesinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası daima çokgenin iç bölgesinde kalıyorsa bu çokgene **dışbükey (konveks) çokgen** denir. Tersi oluştuğu zaman bu çokgene **içbükey (konkav) çokgen** denir.
Dışbükey (konveks) çokgen denilince çokgen, "çokgenin açıları" deyimi ile bu çokgenin "iç açıları" kastedilir.

Formüller:
n kenarlı bir konveks çokgenin;

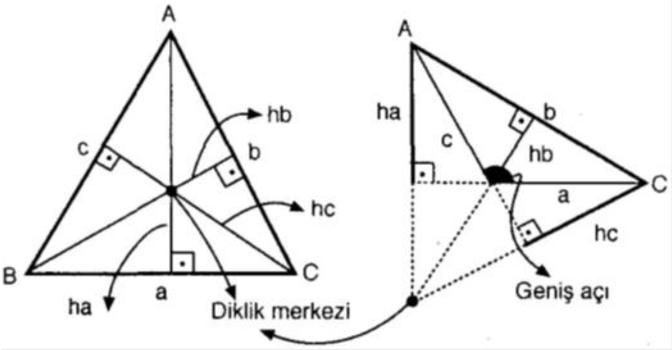
- Bir köşesinden çizilen köşegenlerle çokgen $(n-2)$ tane üçgene ayrılır.
- Bir köşesinden çizilen köşegenlerin sayısı $(n-3)$ tür.
- Bir çokgenin köşegenlerinin sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ dir.
- İç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2).180^0$
- Dış açılarının ölçüleri toplamı 360^0
- n kenarlı bir dışbükey çokgen, en az n − 2 tanesi **uzunluk** olmak üzere, 2n – 3 tane **temel elemanının** verilmesiyle tam olarak belirli olur.

ÜÇGENİN TEMEL VE YARDIMCI ELEMANLARI

Üçgen: Üç kenarlı çokgene üçgen denir. Aşağıda verilen üçgen örneği, ABC üçgeni olarak isimlendirilir ve $\widehat{ABC}$ diye gösterilir. [AB], [BC] ve [AC] na $\widehat{ABC}$ nin kenarları; A, B ve C noktalarına da üçgenin köşeleri adı verilir. Aşağıdaki şekillerde üçgenin iç ve dış açıları gösterilmiştir. Herhangi bir üçgende bir köşedeki iç açı ile dış açı bütünlerdir.

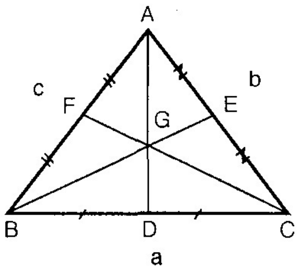


Üçgenler kenarlarına göre **ikizkenar**, **eşkenar** ve **çeşitkenar üçgen**; açılarına göre **geniş açılı**, **dar açılı** ve **dik açılı üçgen** şeklinde isimlendirilir.



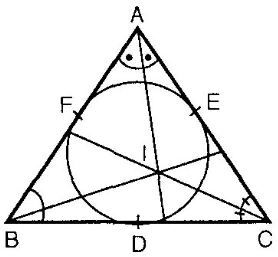
Bir üçgenin bir köşesinden karşı kenara indirilen dik doğru parçasına üçgenin o kenarına ait **yüksekliği** denir.
a kenarına ait yükseklik uzunluğu h_a ile gösterilir.

$|AD| = \vartheta_a$
$|BE| = \vartheta_b$ kenarortaylar
$|CF| = \vartheta_c$



Bir üçgenin herhangi bir köşesini, karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına üçgenin bu kenarına ait **kenarortayı** denir.
a kenarına ait kenarortayın uzunluğu V_a ile gösterilir.

$[AD] = n_A$
$[BE] = n_B$ içaçıortaylar
$[CF] = n_C$



Bir üçgenin herhangi bir iç açısını iki eş parçaya ayırarak köşeyi karşı kenara birleştiren doğru parçasına üçgenin **iç açıortayı** denir.
A açısına ait açıortayın uzunluğu n_A ile gösterilir.

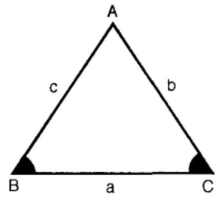
Bir üçgende yükseklikler, açıortaylar ve kenarortaylar yardımcı elemanlardır.

ÜÇGENİN KENARLARI VE AÇILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

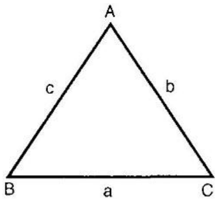
1. Bir üçgende eş açılar karşısındaki kenar uzunlukları eşittir.

$m(\hat{B}) \cong m(\hat{C}) \Leftrightarrow b = c$

dir.



2. Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur.

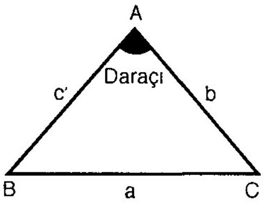


$m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C}) \Leftrightarrow a > b > c$

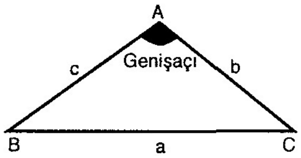
3. Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, uzunlukları farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.

$$|b - c| < a < b + c$$
$$|a - c| < b < a + c$$
$$|a - b| < c < a + b$$

4. Bir üçgende geniş açı karşısındaki kenar en büyüktür.
5. $m(\hat{A}) < 90^0$ ise $|b - c| < a < \sqrt{b^2 + c^2}$dir.



6. $m(\hat{A}) > 90^0$ ise $\sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$ dir.



7. Üçgenin dış açılarının ölçüleri $m(\hat{A}'), m(\hat{B}'), m(\hat{C}')$ olmak üzere;

$$|m(\hat{B}') - m(\hat{C}')| < m(\hat{A}') < m(\hat{B}') + m(\hat{C}')$$
$$|m(\hat{A}') - m(\hat{C}')| < m(\hat{B}') < m(\hat{A}') + m(\hat{C}')$$
$$|m(\hat{A}') - m(\hat{B}')| < m(\hat{C}') < m(\hat{A}') + m(\hat{B}')$$

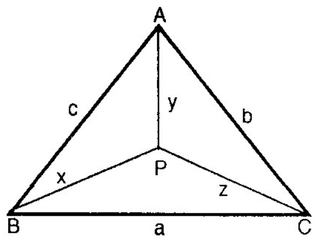
dür.

8. Bir üçgende bir köşeden geçen yükseklik, iç açıortay ve kenarortay uzunlukları arasında $h_a \le n_a \le v_A$ sıralaması vardır.
9. Bir üçgende kenarlar arasındaki sıralamanın tersi yükseklik, iç açıortay ve kenarortaylar arasında vardır.

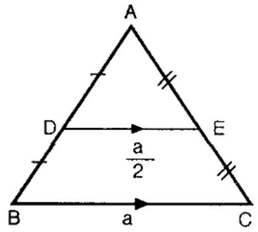
$a < b < c \Rightarrow h_a > h_b > h_c$
$a < b < c \Rightarrow v_a > v_b > v_c$
$a < b < c \Rightarrow n_A > n_B > n_C$ dir.

10. $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere;
$u<h_a+h_b+h_c<2u$
$u<v_a+v_b+v_c<2u$
$u<n_A+n_B+n_C<2u$

11. Bir üçgenin içbölgesinde alınacak olan herhangi bir noktanın üçgenin köşe noktalarına olan uzaklıklarının toplamı, yarı çevreden büyük, çevreden küçüktür.
$u<x + y + z<2u$ dur.

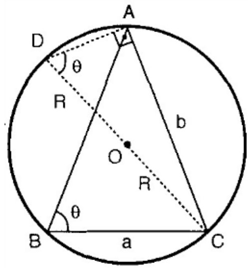


12. Bir üçgende iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçası, üçüncü kenara paralel ve yarısına eşittir.
[DE] // [BC] ve $|DE| = \frac{|BC|}{2}$ dir.



SİNÜS TEOREMİ

Bir üçgenin köşe noktalarından geçen çembere o üçgenin **çevrel çemberi** denir.



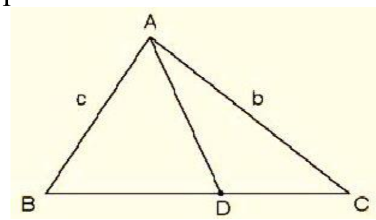
Kenarlarının uzunlukları a, b, c; iç açılarının ölçüleri A, B, C ve çevrel çemberinin yarıçapı R olan üçgen için,

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$$

bağıntısı vardır.
Bu bağıntıya üçgende **Sinüs teoremi** adı verilir.

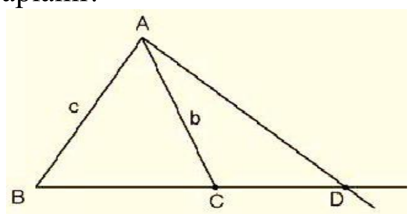
BİR ÜÇGENİN HERHANGİ BİR KENARINI DİĞER KENARIN ORANINDA BÖLEN NOKTA VE UYGULAMALARI

Bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerindeki $\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{DC}\|} = k$ ise $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$ olacak biçimde D noktası $D = \frac{B+kC}{1+k}$ olarak hesaplanır.



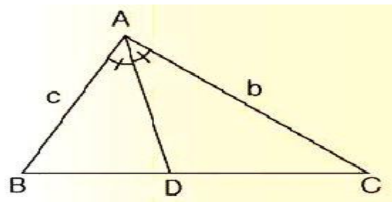
k=1 için [AD]= v_a olur.

Bir ABC üçgeninin BC kenarı dışındaki $\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{DC}\|} = k$ ise $\overrightarrow{BD} = -k\overrightarrow{CD}$ olacak biçimde D noktası $D = \frac{B-kC}{1-k}$ olarak hesaplanır.



İç Açıortay Teoremi

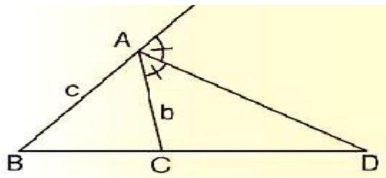
Bir üçgende iç açıortay kestiği kenarı komşu kenarları oranında böler.



ABC üçgeninde [AD], A açısının açıortayı olmak üzere, $\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{c}{b}$ dir.

Dış Açıortay Teoremi

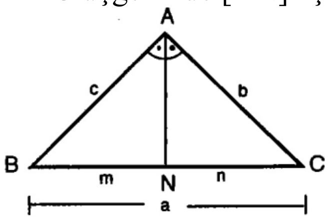
Bir üçgende dış açıortay kestiği kenarı komşu kenarları oranında böler.



ABC üçgeninde [AD], A açısının açıortayı olmak üzere, $\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{c}{b}$ dir.

İç Açıortay Özellikleri

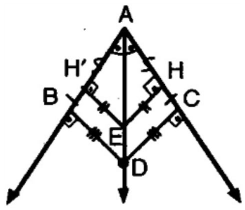
1. Şekildeki ABC üçgeninde [AN] açıortay ise



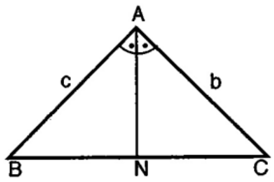
$m = \frac{c.a}{b+c}$ ve $n = \frac{b.a}{b+c}$ olur.

2. Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir noktadan, açının kollarına inilen dikmeler birbirine eşittir. Ayrıca dikmelerin köşeden ayırdığı kenar uzunlukları da birbirine eşittir.

$|AH'| = |AH|$
$|EH'| = |EH|$
$|AB| = |AC|$
$|DB| = |DC|$



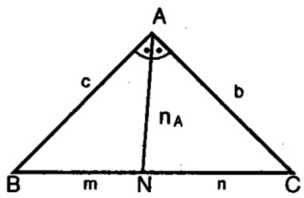
3. Bir üçgenin bir açıortay uzunluğu üçgenin alanını komşu kenar oranında böler.



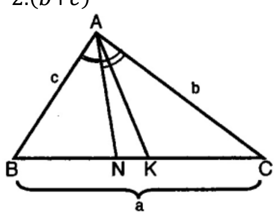
$\frac{A(ABC)}{A(ABN)} = \frac{b+c}{c}, \frac{A(ABC)}{A(ANC)} = \frac{b+c}{b}, \frac{A(ABN)}{A(ANC)} = \frac{b}{c}$ dir.

4. Bir üçgende iç açıortay uzunluğunun karesi, açıortaya göre komşu kenarlar çarpımı ile ayırmış olduğu kenar uzunlukları çarpımı farkına eşittir.

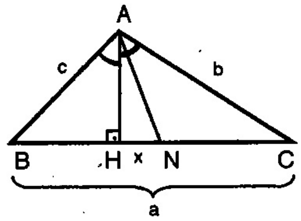
$n_A^2 = b.c - m.n$



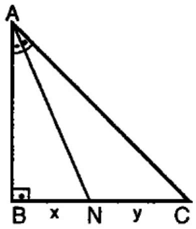
5. Bir ABC üçgeninde $[AN] = n_A$, $[AK] = v_a$ ise; $|KN| = \frac{a.|b-c|}{2.(b+c)}$ dir.



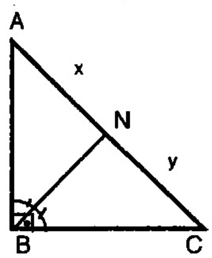
6. Bir ABC üçgeninde $[AN] = n_A$, $[AH] = h_a$ ise; $|HN| = \frac{|b-c|}{2}.\left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c}\right)$ dir.



7. Şekildeki ABC üçgeninde; $|AN|^2 = \frac{2x^2y}{y-x}$ dir.

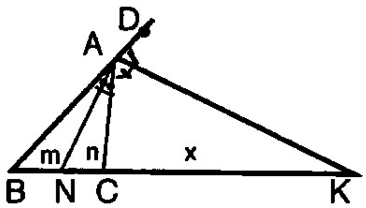


8. Şekildeki ABC üçgeninde; $|BN|^2 = \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ dir.

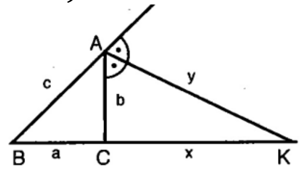


Dış Açıortay Özellikleri

1. Bir üçgende aynı köşeye ait iç açıortay ile dış açıortay arasındaki açı 90° olup, iç açıortayın kenar ile üzerinde ayırmış olduğu parçaların oranı ile dış açıortayın diğer köşelere olan uzaklıkları oranı birbirine eşittir.
$m(\widehat{KAN}) = 90^0$ ve $\frac{x}{n} = \frac{x+n+m}{m}$ dir.



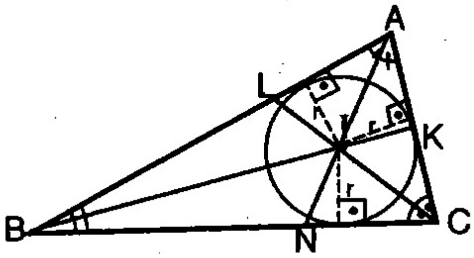
2. Şekildeki ABC üçgeninde;
$y^2 = x.(x+a) - b.c$ dir.



ÜÇGENLERDE KENARORTAY VE AÇIORTAYLARIN KESİŞİM NOKTALARI

Üçgenin İç Açıortaylarının Kesişim Noktası

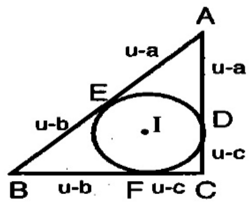
Bir üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasına bu üçgenin **iç merkezi** denir. Genellikle I ile gösterilir. İçten teğet olan iç merkezli çembere **iç teğet çemberi** denir. İç teğet çemberin yarıçapı r ile gösterilir.



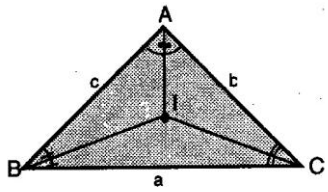
Özellikler:

1. Şekilde K, L, N noktaları değme noktaları değildir. Bu noktaların üçü de değme noktası ise üçgen eşkenardır, ikisi değme noktası ise üçgen ikizkenardır.
2. Bir üçgenin iç teğet çemberinin açıortayı bölme oranı $\frac{|AI|}{|IN|}=\frac{b+c}{a}$, $\frac{|BI|}{|IK|}=\frac{a+c}{b}$, $\frac{|CI|}{|IB|}=\frac{a+b}{c}$ dir.
3. Şekildeki ABC üçgeninde I iç teğet çemberinin merkezi; D, E ve F değme noktaları; $|AB|=b, |AC|=c, |BC|=a$ ve $u=\frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere;

$$|AE|=|AD|=u-a$$
$$|BF|=|BE|=u-b$$
$$|CF|=|CD|=u-c$$



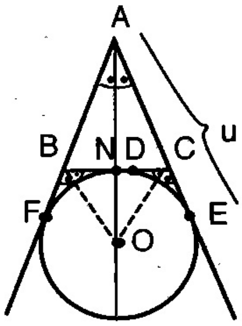
4. Bir üçgende iç merkezi köşeleri ile birleştirerek elde ettiğimiz üçgenlerin alanları kenar uzunlukları ile orantılı olur.



$$\frac{A(BIC)}{a}=\frac{A(AIC)}{b}=\frac{A(AIB)}{c}$$

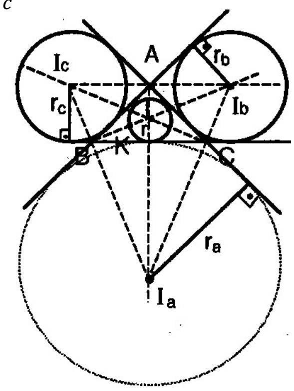
Üçgenin Dış Açıortaylarının Kesişim Noktası

Bir üçgenin bir iç açıortayı ve diğer iki köşeye ait dış açıortaylarının kesim noktasına bu üçgenin **dış merkezi** denir ve bu merkezler üç tanedir.



Özellik:

Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberinin yarıçapı r, dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c ise; $u=\frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere; $r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c=u^2$ ve $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ dir.

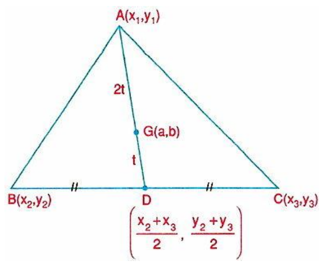


Üçgenin Kenarortayların Kesişim Noktası

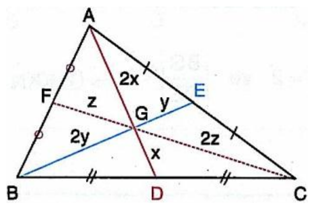
Bir üçgenin, üç kenarortayı tek bir noktada kesişir. Bu noktaya **üçgensel bölgenin ağırlık merkezi** denir ve G ile gösterilir.

Özellikler:

1. Köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin kenarortaylarının kesişim noktasının koordinatları, $G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ bağıntısı ile verilir.

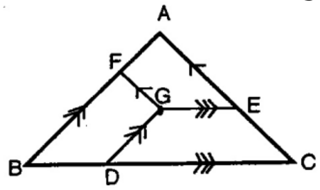


2. Bir üçgende ağırlık merkezi kenara bir, köşeye iki birim uzaklıktadır.

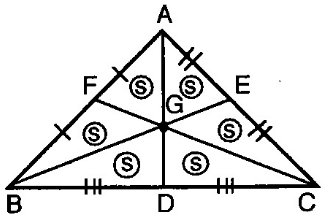


3. Bir üçgende ağırlık merkezinden kenarlara çizilen paralellerin toplam uzunluğu üçgenin çevresinin üçte biri kadardır.

$$|GF| + |GE| + |GD| = \frac{Ç(ABC)}{3}$$

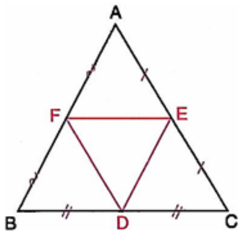


4. Bir üçgende kenarortaylar üçgeni altı eşit alana böler.



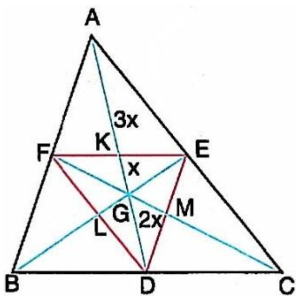
Bir üçgende iki kenarın orta noktalarının birleşimi ile oluşan doğru parçasına üçgenin **orta tabanı** denir. Bir üçgende üç tane orta taban vardır.
Bir üçgende kenar orta noktalarının birleşimi ile oluşan üçgene **orta taban üçgeni** denir.

$[FE], [ED], [FD]$: $orta\ taban$
FED üçgeni: orta taban üçgeni

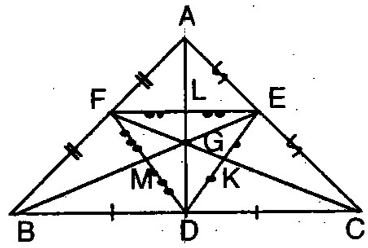


Sonuçlar:

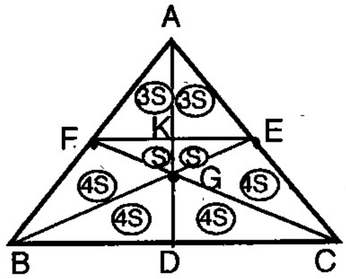
1. **(312 Kuralı):** Bir üçgende ağırlık merkezi ve orta taban kenarortayı 3:1:2 birimle orantı böler.



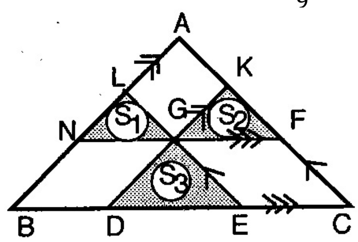
2. Bir üçgenin ağırlık merkezi orta taban üçgeninin de ağırlık merkezidir.



3. Bir ABC üçgeninde G ağırlık merkezi ise aşağı şekildeki durum geçerlidir.



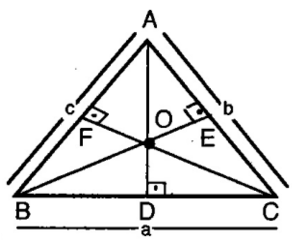
4. Aşağıdaki ABC üçgeninde G ağırlık merkezi ise $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{A(ABC)}{9}$ dir.



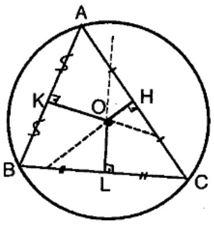
Üçgenin Yüksekliklerinin Kesişim Noktası
Bir üçgende bir köşeden karşı kenara indirilen dikme ayağının koordinatları;

i. Dik izdüşüm,
ii. Bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını,
iii. Bir kenar ve buna dik olan yüksekliğin arakesitini bulma yöntemlerinden birisiyle bulunabilir.

Yüksekliklerin kesim noktasına üçgenin **diklik merkezi** denir.

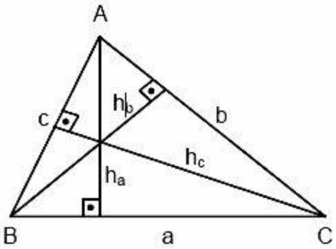


Üçgenin Kenar Orta Dikmelerinin Kesişim Noktası
Bir üçgenin kenar orta dikmeleri tek bir noktada kesişir, bu nokta üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

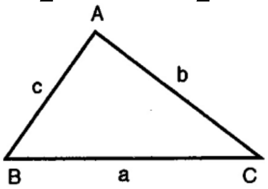


BİR ÜÇGENSEL BÖLGENİN ALANI

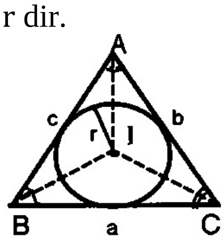
1. Üçgenin alanı yükseklik ile yüksekliğin indiği kenarı uzunluğunun (taban) çarpımının yarısına eşittir.
$$A(ABC) = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$$



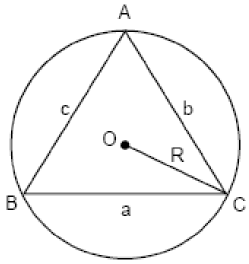
2. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere
$A(ABC) = \sqrt{u.(u-a).(u-b).(u-c)}$ dir.
3. Bir üçgende iki kenar uzunluğu ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı üçgenin alanını verir.
$$A(ABC) = \frac{a.b.\sin\widehat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin\widehat{B}}{2} = \frac{b.c.\sin\widehat{A}}{2}$$



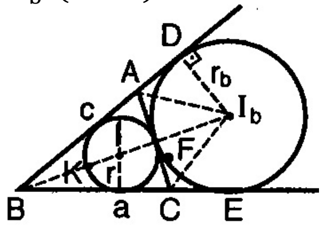
4. Bir üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r, kenar uzunlukları a, b, c ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ ise
$A(ABC) = u.r$ dir.



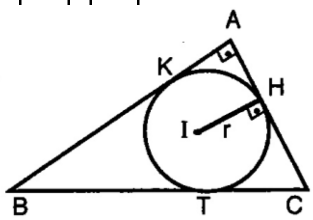
5. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ise
$A(ABC) = \frac{a.b.c}{4R}$ dir.



6. Şekildeki ABC üçgeninde I_b noktası ABC üçgeninin dış merkezidir. D, E ve F değme noktalarıdır, $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere;
$A(ABC) = r_b.(u-b)$ dir.

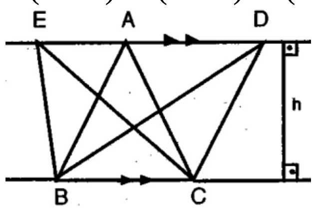


7. Bir ABC dik üçgeninde T, H, K iç teğet çemberin değme noktaları ve I iç merkez ise
$A(ABC) = |BT|.|TC|$ dir.

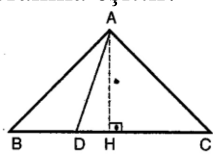


Sonuçlar:

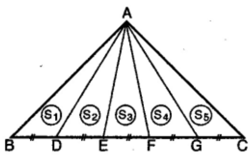
1. Yükseklikleri ve taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.
A(ABC)=A(DBC)=A(EBC)



2. Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanlarının oranı, taban uzunluklarının oranına eşittir.

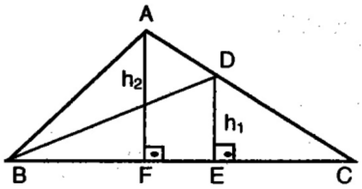


$$\frac{A(ABD)}{A(ADC)} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

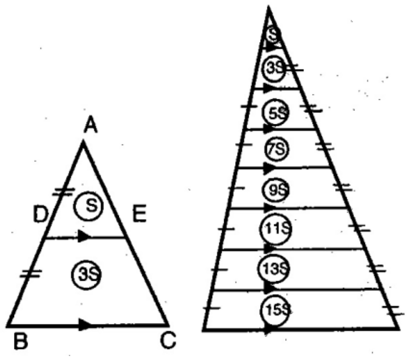


$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$

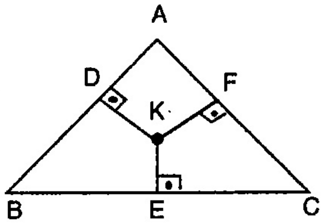
3. Taban uzunlukları aynı olan üçgenlerin alanları oranı, yükseklikleri oranına eşittir.
$$\frac{A(ABC)}{A(BDC)} = \frac{h_2}{h_1}$$



4. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir.



Carnot (Karnot) Teoremi:



Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde seçilen bir K noktasından üçgenin kenarlarına çizilen dikme ayakları D, E, F olsun.
$|BE|^2 + |CF|^2 + |AD|^2 = |EC|^2 + |FA|^2 + |DB|^2$
bağıntısına **Carnot (Karnot) Teoremi** denir.

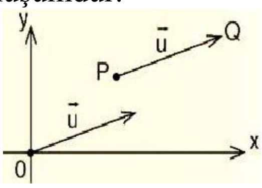
6.ÜNİTE: DÖNÜŞÜMLERLE GEOMETRİ

DÜZLEMDE ÖTELEME, DÖNME VE BUNLARIN BİLEŞKE DÖNÜŞÜMLERİ

Düzlemin noktalarını düzlemin noktalarına eşleyen bire bir ve örten fonksiyona düzlemin bir **dönüşümü** denir.

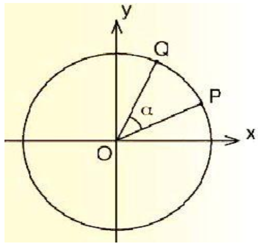
Öteleme Dönüşümü

Düzlemde $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekildeki tanımlanan Q noktasına, P noktasının $\vec{u}$ doğrultusunda $\|\vec{u}\|$ kadar **ötelenmişi** denir ve $Q = T_{\vec{u}}(P)$ şeklinde gösterilir.
Düzlemin her P noktası için, $T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$ ötelemesi yapılabilir, dolayısıyla $T_{\vec{u}}(P): R^2 \to R^2$ şeklinde bir dönüşümdür.



Dönme Dönüşümü

Düzlemde bir P(x,y) noktasının, O noktası etrafında α açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta,
$Q = R_\alpha(P) = (x.\cos\alpha - y.\sin\alpha\ ,\ x.\sin\alpha + y.\cos\alpha)$ dır.
Burada R_α ya **dönme dönüşümü** denir.
Düzlemin her P noktası için $R_\alpha(P)$ dönmesi yapılabileceğinden $R_\alpha: R^2 \to R^2$ şeklinde bir dönüşümdür.



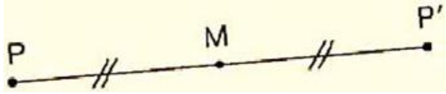
Dönme yalnızca bir noktayı değiştirmez diğer bütün noktaları da değiştirir. Değişmeyen noktaya **dönme merkezi** denir.

- Düzlemde öteleme, dönme ve bunların bileşke dönüşümleri, uzaklık ile açıların yönlerini koruyan dönüşümlerdir.

DÜZLEMDE YANSIMA VE ÖTELEMELİ YANSIMA DÖNÜŞÜMLERİ

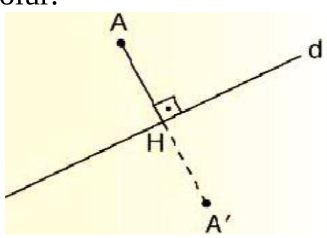
Noktaya Göre Yansıma Dönüşümü

Düzlemde bir P noktasının M noktasına göre simetriği olan P′ noktasının koordinatları,
P′ = 2M − P bağıntısı ile verilir.



Burada M noktasına **yansıma merkezi** denir.
$S_M: R^2 \to R^2$, $S_M(P) = 2M - P$ dönüşümüne M noktasına göre **yansıma dönüşümü** denir.

Düzlemde bir d doğrusu ve dışında bir A noktası olsun. A noktasından d doğrusuna inilen AH dikmesini kendisi kadar uzatarak A nın simetriği olan A′ noktası alındığında, [AA′] d doğrusuna dik ve $|AH| = |HA'|$ olduğundan d doğrusu [AA′] nın orta dikmesi olur.



Doğruya Göre Yansıma Dönüşümü
ℓ:$X = A + k\vec{u}$ doğrusu için, S_ℓ : $R^2 \to R^2$,
$S_\ell(P) = 2A - P + 2\vec{u}\frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ dönüşümüne P noktasının ℓ doğrusuna göre yansıması denir. ℓ doğrusuna **yansıma ekseni** denir.

- Yansıma altında değişmez kalan noktaların geometrik yeri bu ℓ doğrusudur.

Düzlemde alınan herhangi bir P(x,y) noktasının;
x eksenine göre simetriği P′(x,−y),
y eksenine göre simetriği P′(−x,y),
y=x doğrusuna göre simetriği P′(y,x),
y=−x doğrusuna göre simetriği P′(−y,−x),
x=a doğrusuna göre simetriği P′(2 −x,y),
y=b doğrusuna göre simetriği P′(x,2b −y) dir.

- Bir yansıma dönüşümünün tersi kendisine eşittir.
- Düzlemde yansıma ve ötelemeli yansıma dönüşümleri, uzaklığı koruyup açıların yönlerini değiştirir.
- Paralel iki doğruya göre yansımanın bileşkesi bu iki doğru arasındaki uzaklığın iki katı kadar bir ötelemedir.
- Kesişen iki doğruya göre yansımanın bileşkesi, bu iki doğru arasındaki açının iki katı kadar bir dönmedir.

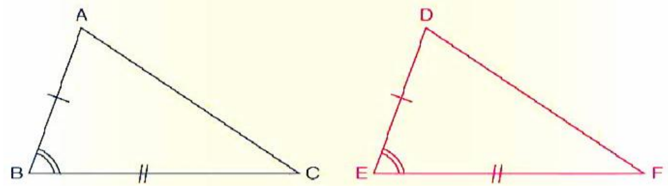
ŞERİT SÜSLEMELERİ
Bir düzlemsel bölgenin, bir motif kullanılarak boşluk kalmayacak ve motifler çakışmayacak şekilde dönüşümler (yansıma, dönme, öteleme ve ötelemeli yansıma) yardımıyla örtülmesine **düzgün kaplama** denir. Kaplama farklı motifler kullanılarak yapıldığında buna **yarı düzgün kaplama** adı verilir.

DÜZLEMSEL ŞEKİLLERİN EŞLERİ VE UYGULAMALARI

Düzlemde dönme, öteleme, yansıma ya da bunların bileşke dönüşümlerine **izometri dönüşümleri**, bu dönüşümler altında bir şeklin görüntüsüne bu şeklin **simetriği (eşi)** denir.

İKİ ÜÇGEN İÇİN EŞLİK TEOREMLERİNİN İSPATI

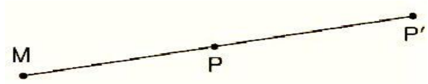
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı kenarlar ve açılar eş ise bu iki üçgene **eş üçgenler** denir.
Karşılıklı ikişer kenarları ve bunların belirttiği açıları eş olan üçgenler eştir. Bu önerme **kenar açı kenar postulatı** olarak adlandırılır.



ABC ve DEF üçgenleri için;
$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \\ |BC| = |EF| \end{array}\right\}$$ olduğundan bu üçgenler eştir.
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$

HOMOTETİ DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI

Düzlemde M bir sabit nokta, k ∈ R olmak üzere, P′=M+k.(P−M) eşitliğini sağlayan P′ noktasına P nin M merkezli k oranlı **homotetiği** denir.
H: $R^2 \to R^2$, H(P)=P′=M+k.(P−M) dönüşümüne M merkezli, k oranlı **homoteti dönüşümü** denir.

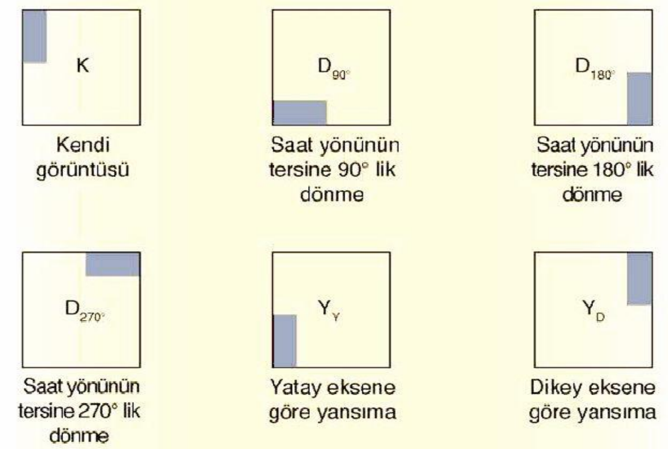


Bir düzlemsel şekle, homoteti dönüşümü uygulanarak elde edilen yeni şekle, bu şeklin **homotetiği** denir.
Burada;
k=1 iken şeklin kendisi,
0<k<1 iken şeklin k oranında küçültülmüşü,
k>1 iken şeklin k oranında büyütülmüşü elde edilir.

Homoteti dönüşümü uzunlukları aynı oranda değiştirir, açıların ölçülerini korur.
Oranları k_1, k_2 ve merkezi M olan iki homotetinin bileşkesi, M merkezli ve $k_1.k_2$ oranlı homoteti dönüşümüdür.
Bir düzlemsel şekle; öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerinin yeteri kadar bileşkesi uygulanarak elde edilen düzlemsel şekle bu şeklin **benzeri** denir.
Benzerlik oranı, kullanılan homotetilerin oranları çarpımıdır.

DOĞRU PARÇALARI İLE FRAKTAL OLUŞTURMA VE BELİRLİ ADIMDAKİ FRAKTALIN UZUNLUĞUNU HESAPLAMA

Fraktalın görüntüsü oluşturulduktan sonra $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyaları alınarak yine fraktalın kendisini oluşturacak biçimde aşağıdaki dönüşümlerden uygun olanlarla görüntüler üretilir.

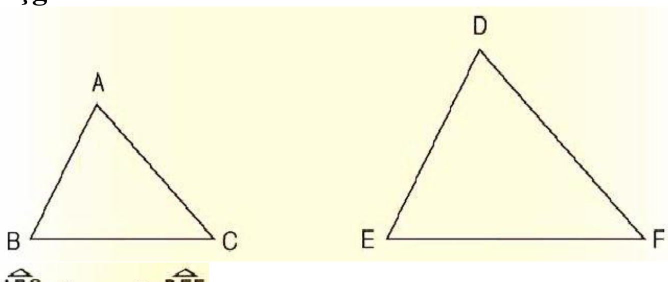


Hücrelerde kullanılan dönüşümler sağ üst kutu daima boş kalacak şekilde aşağıdaki sırada (1, 2, 3) olarak kodlanır.

1	
2	3

ÜÇGEN VE ÜÇGENSEL BÖLGELERLE FRAKTAL OLUŞTURMA

İki üçgen arasında bire bir eşleme verildiğinde, bu üçgenlerin karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere **benzer üçgenler** denir.



$\widehat{ABC} \longleftrightarrow \widehat{DEF}$ eşlemeleri verilsin.

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{array}\right\} \text{ ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k \Leftrightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ dir.}$$

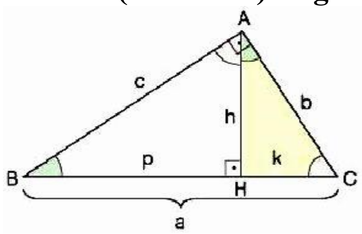
"İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir." önermesine **açı açı benzerlik postülatı** denir.

Benzer iki üçgenin;

1. Karşılıklı kenarortaylarının uzunluklarının oranı eşittir.
2. Karşılıklı açıortaylarının uzunluklarının oranı eşittir.
3. Karşılıklı yüksekliklerinin uzunluklarının oranı benzerlik oranına eşittir.
4. Çevre uzunluklarının oranı benzerlik oranına eşittir.
5. Alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

DİK ÜÇGENDE METRİK BAĞINTILARIN İSPATI VE UYGULAMALARI

Dik Üçgende Öklid (Eucleides) Bağıntıları



Genel olarak a, b, c, h, p ve k gerçek sayılar, $m(\hat{A}) = 90^0$ olmak üzere kenar uzunlukları yukarıdaki şekilde verilen dik üçgende,

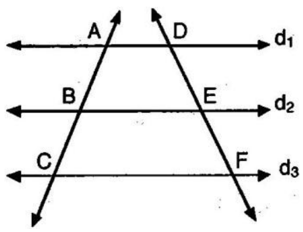
1. $c^2 = p.a$
2. $b^2 = k.a$
3. $h^2 = p.k$
4. $b.c = a.h$
5. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ dir.

Bu bağıntıları bulan kişi Euclides (Öklid) olduğu için Öklid Bağıntıları olarak isimlendirilir.

TALES, MENELAUS VE SEVA TEOREMLERİ

I. Tales Teoremi

Bir paralel doğru demetinin, bunları kesen iki doğru üzerinde ayırdığı karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.



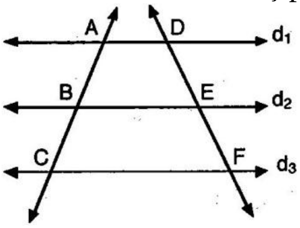
$$d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \mathbin{/\!/} d_3 \; ise \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \; dir.$$

II. Tales Teoremi

Kesişen iki doğru; paralel iki doğru ile kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılıdır.

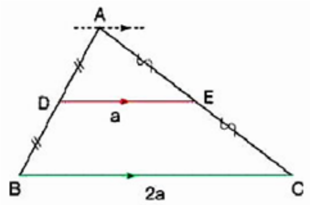
Sonuçlar:

1. Bir takım paralel doğrular bir kesen üzerinde eş parçalar ayırırsa her kesen üzerinde de eş parçalar ayırır.



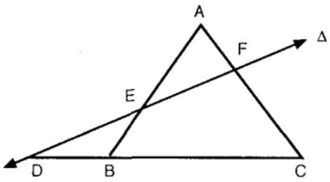
$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ *ise* $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|DE|}{|EF|}$ *dir.*

2. Bir üçgende, iki kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçası, üçüncü kenara paralel ve onun yarısı uzunluğundadır.



MENELAUS TEOREMİ:

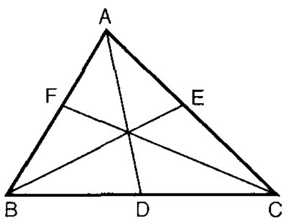
Bir üçgenin kenarları bir A doğrusu tarafından D, E ve F gibi üç noktada kesildiğinde,



$\dfrac{|DB|}{|DC|} \cdot \dfrac{|CF|}{|FA|} \cdot \dfrac{|AE|}{|EB|} = 1$ dir.

SEVA TEOREMİ:

Bir üçgenin iç bölgesinde alınacak olan herhangi bir noktayı üçgenin köşe noktalarına birleştiren doğru parçalarının uzantıları, kenarlar sırasıyla D, E, F noktalarında kesiyorsa;



$\dfrac{|BD|}{|DC|} \cdot \dfrac{|CE|}{|EA|} \cdot \dfrac{|AF|}{|FB|} = 1$ dir.