BASİT LİNEER FONKSİYONLAR VE DOĞRU DENKLEMLERİ

1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

2. Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

3. Verilen İki Noktadan Geçen Doğrunun Eğimi

4. Denklemi Verilen Doğrunun Eğimini Bulma

5. İki Doğrunun Diklik Şartı

6. İki Doğrunun Paralellik Şartı

7. İki Doğru Arasındaki Açı

8. Denklemi Verilen Doğrunun Çizilmesi

9. Bir Noktası Ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

10. İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

11. İki Doğrunun Kesişme Noktası

12. Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı

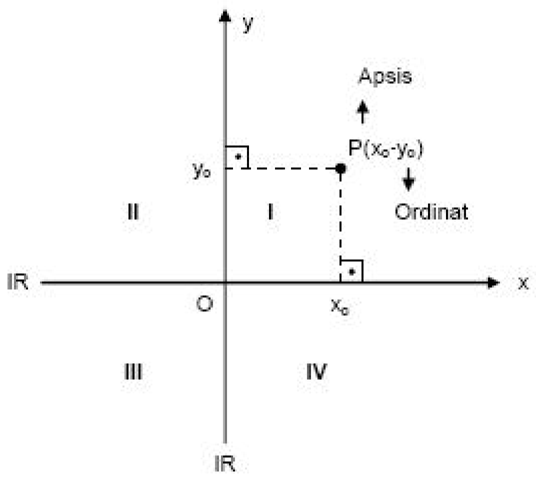
13. Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

14. I. Dereceden eşitsizliklerin grafikleri

KONU ÖZETİ

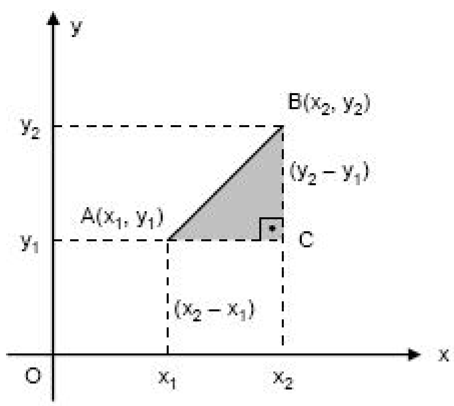
▶ Analitik düzlem:

$IR^2 = IR \times IR = \{(x, y) | x \in IR \text{ ve } y \in IR\}$



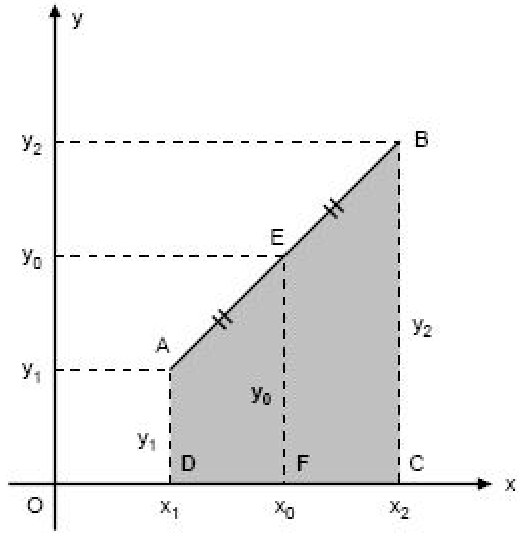
	I	II	III	IV
Apsis	+	–	–	+
Ordinat	+	+	–	–

▶ İki nokta arasındaki uzaklık ve orta nokta



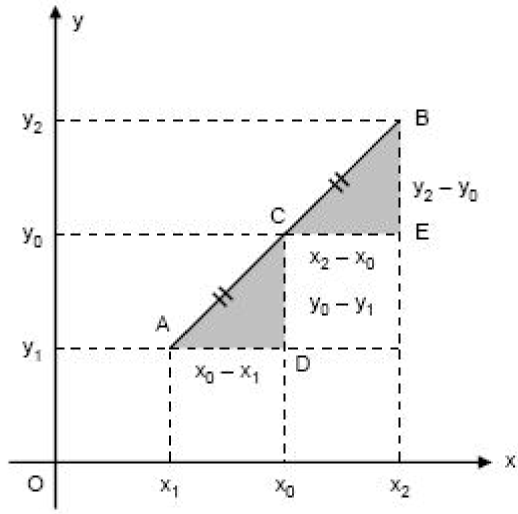
ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısına göre

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ABCD dik yamukta EF orta taban

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

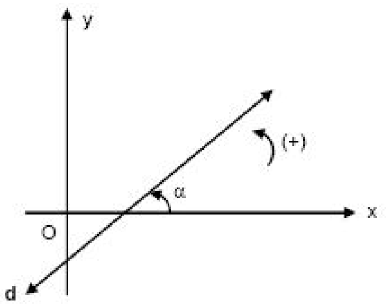


$\widehat{BCE} \sim \widehat{CAD}$ olduğundan

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_0}{y_0 - y_1} \qquad \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}$$

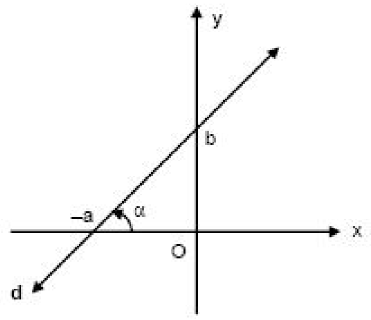
Doğrunun Eğimi

1.



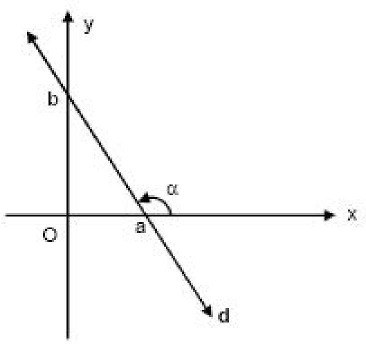
$$\boxed{\text{Eğim} = m = \operatorname{Tan}\alpha}$$

2.



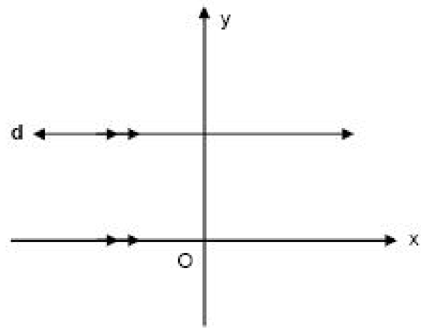
$$\boxed{0 < \alpha < 90° \qquad m = \frac{b}{a} > 0}$$

3.



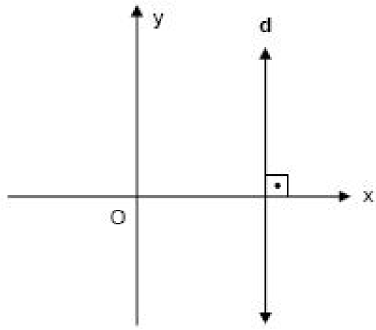
$$\boxed{90° < \alpha < 180° \qquad m = -\frac{b}{a} < 0}$$

4.



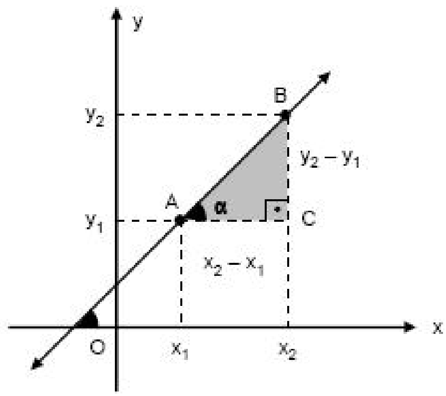
$$\boxed{\alpha = 0° \qquad m = 0}$$

5.

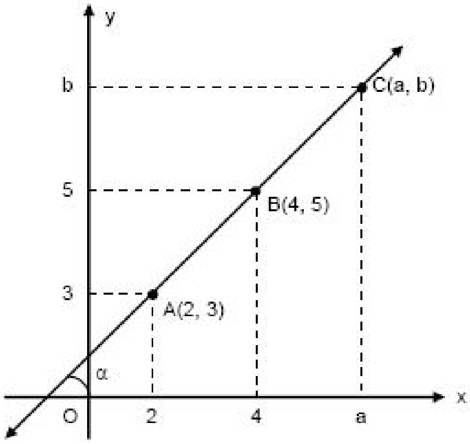


$\boxed{\alpha = 90° \qquad \text{eğim yok}}$

► İki noktası bilinen doğrunun eğimi



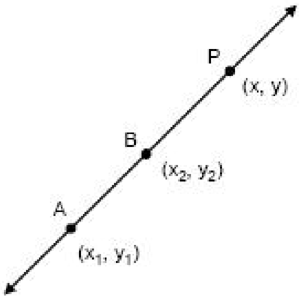
$$\boxed{m = \operatorname{Tan}\alpha = \frac{y_2 - y1}{x_2 - x_1}}$$



A, B ve C doğrusal ise $m_{AB} = m_{AC} = \tan\alpha$

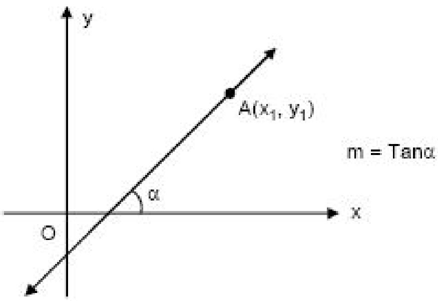
$$\frac{5-3}{4-2} = \frac{b-3}{a-2}$$

▶ İki noktası bilinen doğrunun denklemi



A, B ve P doğrusal $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

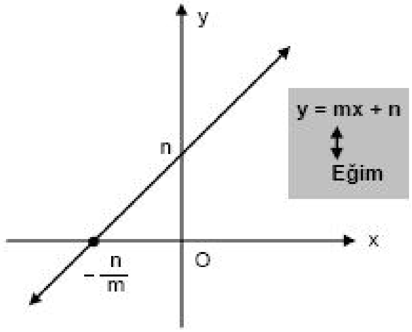
▶ Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi



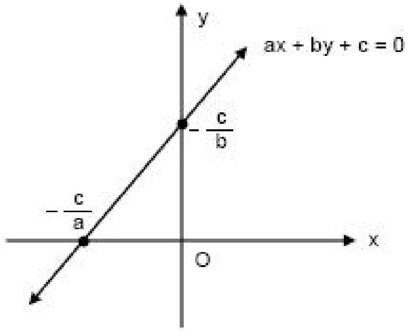
$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

▶ Doğrunun genel denklemi

1.

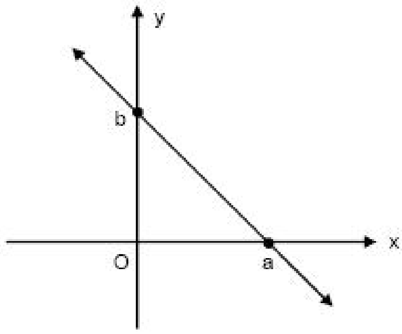


2.



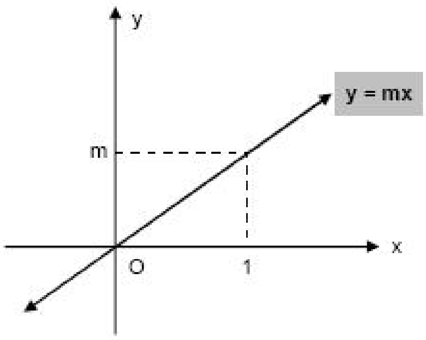
Eğim = $-\frac{a}{b}$

3. Eksenleri kestiği noktaları bilinen doğrunun denklemi

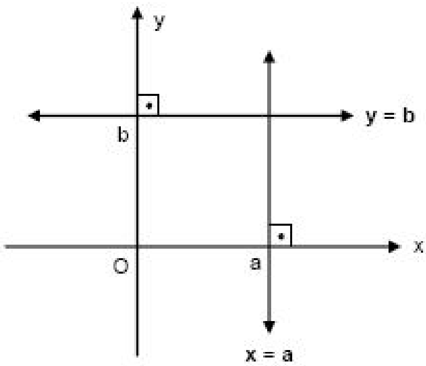


$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4. Orijinden geçen doğrunun denklemi



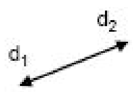
5. Eksenlere paralel doğruların denklemi



► Analitik düzlemde iki doğrunun durumu

d_1 ...... $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
d_2 ...... $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\Rightarrow$

1. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

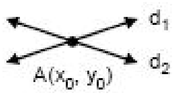


doğrular çakışıktır.

2. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

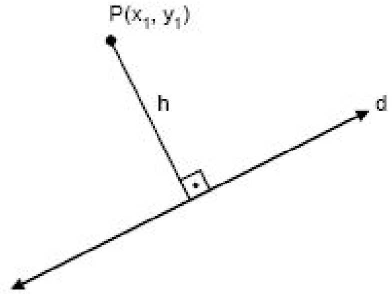
$d_1 // d_2$

3. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$



$d_1 \cap d_2 = \{(x_0, y_0)\}$

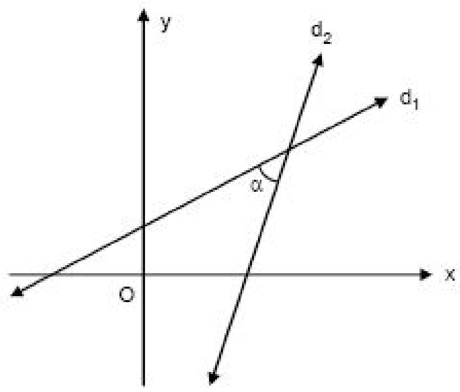
► Noktanın doğruya olan uzaklığı



... $ax + by + c = 0$

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

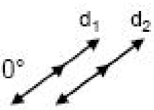
► İki doğru arasındaki açı



d_1 ile d_2 arasındaki açı α olsun.

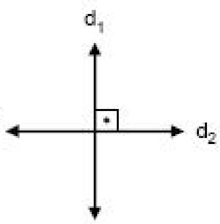
$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow$$

$\alpha = 0°$



$\Leftrightarrow m_1 = m_2$

$\alpha = 90°$

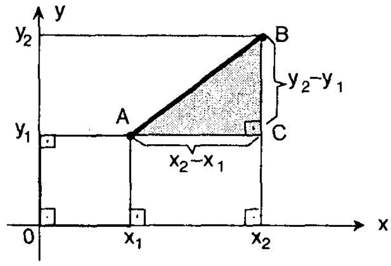


$\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

Analitik düzlemin birinci bölgesinde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını alalım.

$A(x_1, y_1)$ noktası ile $B(x_2, y_2)$ noktası arasındaki uzaklık $|AB|$ dir.



Şekilde görüldüğü gibi ABC dik üçgeni oluşturulduğunda

$|AC| = x_2 - x_1$ ve $|BC| = y_2 - y_1$ olur. Pisagor bağıntısı uygulanırsa;

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$$

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$ elde edilir.

UYARI :

$(a-b)^2 = (b-a)^2$ olduğundan iki nokta arasındaki uzaklık; $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ yada

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ formüllerinden birisi ile hesaplanabilir.

ÖRNEK **A(1, 7) ve B(13, 2) noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.**

ÇÖZÜM $|AB| = \sqrt{(13-1)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169}$

$|AB| = 13$ birimdir.

ÖRNEK **A(−1, 1) ve B(2, k) noktaları arasındaki uzaklık 5 br ise k ne olabilir?**

ÇÖZÜM $A(-1, 1)$, $B(2, k)$ ve $|AB| = 5$ br ise

$$|AB| = 5$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = 5$$

$\sqrt{(2+1)^2 + (k-1)^2} = 5$ eşitliğinde her iki yanın karesi alınırsa ;

$$3^2 + (k-1)^2 = 25$$

$$(k-1)^2 = 25 - 9$$

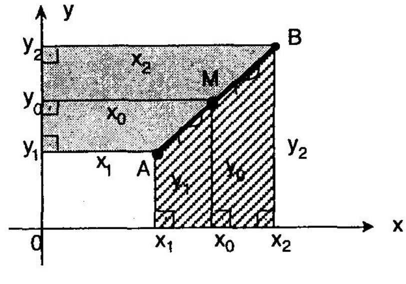
$(k-1)^2 = 16$ dan

$k-1 = -4 \ \vee \ k-1 = 4$ olur ki buradan,

$k = -3 \ \vee \ k = 5$ elde edilir.

BİR DOĞRU PARÇASININ ORTA NOKTASI

Analitik düzlemin birinci bölgesinde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını gözönüne alalım.



[AB] nin orta noktası $M(x_0, y_0)$ noktası olsun.

Yandaki koordinat düzleminde taranmış geometrik şekiller, tabanları x_1 ve x_2, y_1 ve y_2 olan iki dik yamuktur.

x_0 ile y_0 da bu dik yamukların orta tabanlarıdır. Yamukta orta taban özelliğinden

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \wedge y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ bulunur.

Yani uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan [AB]'nın orta noktası $M(x_0, y_0) = M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ dir.

ÖRNEK **Uç noktaları A(–3, 1) ve B(5, 5) olan AB doğru parçasının orta noktasının koordinatları toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM Orta nokta $C(x_0, y_0)$ ise ;

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{ve} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_0 = \frac{-3 + 5}{2} \quad \text{ve} \quad y_0 = \frac{1 + 5}{2}$$

$$x_0 = 1 \quad \text{ve} \quad y_0 = 3 \text{ tür.}$$

C(1,3) olduğuna göre koordinatları toplamı $1 + 3 = 4$ tür.

BİR DOĞRUNUN EĞİM AÇISI VE EĞİMİ

Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yapmış olduğu açıya eğim açısı, eğim açısının tanjant değerine ise doğrunun eğimi denir. Eğim m ile gösterilir.

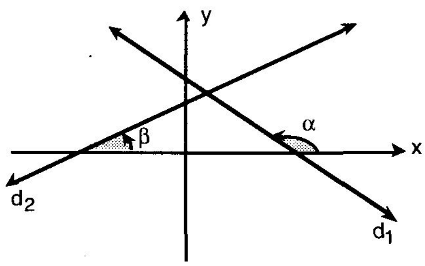
α ile β sırasıyla, d_1 ve d_2 doğrularının eğim açılarıdır.

d_1 doğrusunun eğimi :

$m_1 = \tan\alpha$ ve

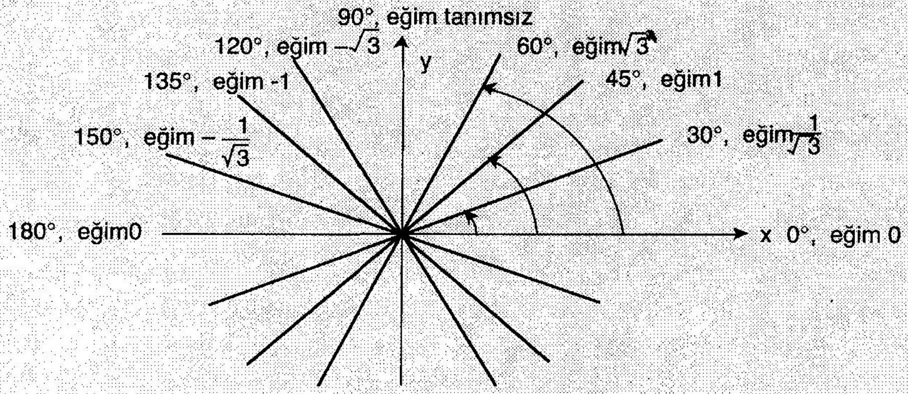
d_2 doğrusunun eğimi :

$m_2 = \tan\beta$ dır.



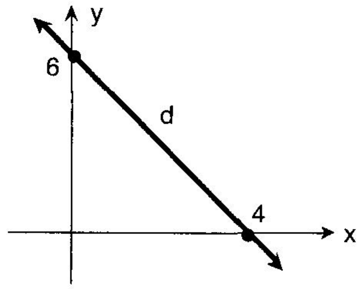
UYARI :

1. Bütünler iki açının tanjantı ters işaretlidir. Yani $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$ dır.
2. $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60° = \sqrt{3}$

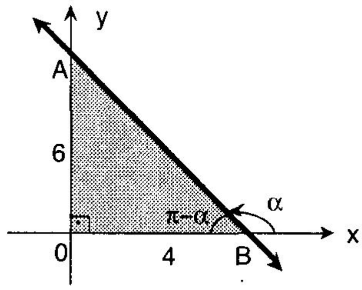
   $\tan 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 135° = -1$, $\tan 120° = -\sqrt{3}$ dür.
3. $\tan 0° = 0$ ve $\tan 90° = +\infty$ (Tanımsız) dır.
4. 

- Eğim açılarının ve eğimlerin karşılaştırılması.

ÖRNEK **Şekildeki d doğrusunun eğimi kaçtır?**



ÇÖZÜM

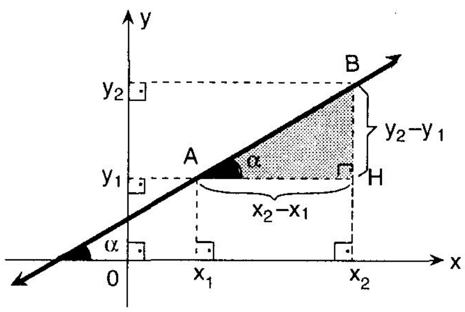


$m = \tan\alpha = ?$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha = \frac{|AO|}{|OB|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ise

$\tan\alpha = m = -\frac{3}{2}$ dir.

İKİ NOKTASI BİLİNEN DOĞRUNUN EĞİMİ



$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi ; $m = m_{AB} = \tan\alpha = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dir.

UYARI :

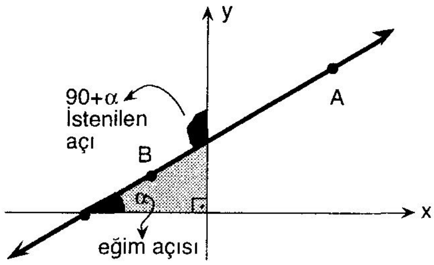
i) $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ veya $m_{AB} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ dir.

ii) $Ax + By + C = 0$ doğrusunun eğimi : $m = -\dfrac{A}{B}$ dir.

iii) $y = mx+n$ doğrusunda ise eğim m dir. (y değişkeni yalnız bırakıldığında x'in katsayısı eğimdir.)

ÖRNEK **$A(4, 2+2\sqrt{3})$, $B(-2, 2)$ noktalarından geçen doğrunun y ekseni ile yaptığı geniş açının ölçüsü kaç derecedir?**

ÇÖZÜM



Şekilden de görüldüğü gibi y ekseni ile yapılan geniş açıyı bulmak için doğrunun eğim açısını bulmak zorundayız. Eğim açısının ölçüsü α olsun.

Eğimi ; $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3} - 2}{4 - (-2)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

olduğundan $m = \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$ bulunur.

Yani y ekseni ile yapılan geniş açısının ölçüsü $90 + \alpha = 90 + 30 = 120°$ dir.

ÖRNEK **$A(2, 6)$ ve $B(-1, t)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $\frac{1}{3}$ ise t kaçtır?**

ÇÖZÜM

$m_{AB} = m = \dfrac{t-6}{-1-2} = \dfrac{t-6}{-3}$ dür. $\dfrac{t-6}{-3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow -t + 6 = 1$

$\Rightarrow t = 5$ bulunur.

ÖRNEK **$2x - 4y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi nedir?**

ÇÖZÜM

$Ax + By + C = 0$ doğrusunun eğimi : $m = -\dfrac{A}{B}$ idi.

$2x - 4y + 1 = 0$ doğrusunda $A = 2$ ve $B = -4$ olup $m = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{2}{-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ dir.

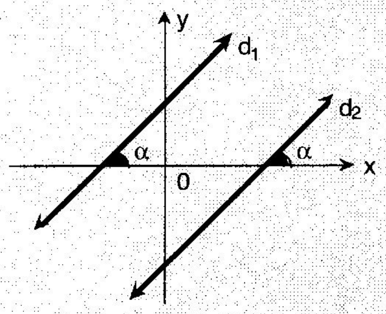
UYARI :

i) x eksenine paralel olan doğruların eğim açısı 0° olduğu için eğimleri $m = \tan 0° = 0$ dır.

ii) y eksenine paralel olan doğruların eğim açısı 90° olduğu için eğimleri

$m = \tan 90° = \infty$ (tanımsız) dır.

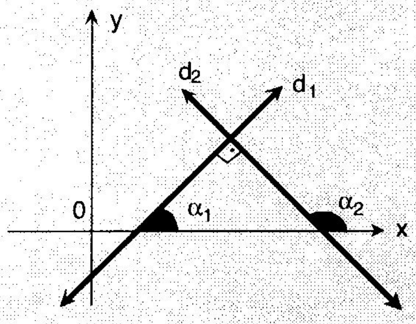
iii) İki doğru paralel ise eğimleri eşittir.



Paralel doğruların 0x ekseni ile pozitif yönde yaptıkları açılar eşit ve açıların tanjantları da eşittir. Yani

$\boxed{d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$ dir.

iv) İki doğru dikse, eğimleri çarpımı (−1) 'e eşittir.



Şekilde

$\alpha_2 = 90° + \alpha_1$ veya $\alpha_1 = \alpha_2 - 90°$ dir.

d_1 doğrusunun eğimi $\tan\alpha_1 = m_1$,

d_2 doğrusunun eğimi de $\tan\alpha_2 = m_2$ ile gösterilirse;

$m_1 = \tan\alpha_1 = \tan(\alpha_2 - 90°) = \tan[-(90°-\alpha_2)] = -\tan(90°-\alpha_2)$ den

$m_1 = -\tan(90°-\alpha_2) = -\cot\alpha_2 = -\dfrac{1}{tg\alpha_2} = -\dfrac{1}{m_2}$ bulunur.

Buradan $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ yada $m_1.m_2 = -1$ elde edilir.

Yani $\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \,.\, m_2 = -1}$ dir.

ÖRNEK **A(a–1, 2) ve B(5, a) noktalarından geçen doğrunun y = 3x+2 doğrusuna paralel olması için a ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM A(a–1, 2) ve B(5, a) noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a-2}{5-a+1} = \frac{a-2}{6-a}$ dır.

y = 3x + 2 doğrusunun eğimi ise $m_2 = 3$ dür. Doğruların paralel olma koşulu, eğimlerinin eşit olması ise $m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{a-2}{6-a} = 3$ den

$a-2 = 18-3a$

$4a = 20$

$a = 5$ bulunur.

ÖRNEK Bir d doğrusu, denklemi 2x – 3y + 17 = 0 olan doğruya paralel ve denklemi 9x + (a–1)y – 13 = 0 olan doğruya diktir. **Buna göre a kaçtır?**

ÇÖZÜM d doğrusunun eğimi m olsun. d doğrusu ile 2x – 3y + 17 = 0 doğrusu paralel ise eğimler eşit olmalıdır. Yani $m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{(-3)} = \frac{2}{3}$ dür. ①

d doğrusu 9x + (a–1)y – 13 = 0 doğrusuna dik ise eğimleri çarpımı (–1)'e eşittir.

Yani $m.\left(-\frac{A}{B}\right) = (-1) \Rightarrow m.\frac{A}{B} = 1 \Rightarrow A.m = B \Rightarrow 9m = (a-1) \Rightarrow m = \frac{a-1}{9}$ dur. ②

Öyleyse ① ve ② den $\frac{a-1}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow a-1 = 6 \Rightarrow a = 7$ bulunur.

DOĞRU DENKLEMLERİ

Bir doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları (x, y) ise, x ile y arasındaki bağıntıya bu doğrunun denklemi denir.

A, B, C ∈ R ve A ile B aynı anda sıfır olmamak üzere bir doğrunun genel denklemi Ax + By + C = 0 ya da y = mx + n biçiminde gösterilir.

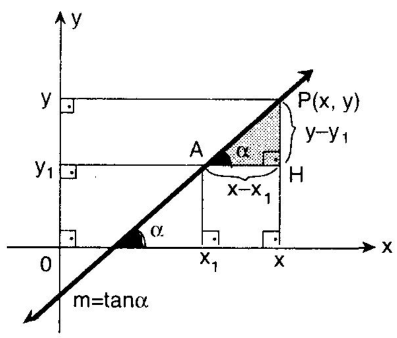
A) EĞİMİ VE BİR NOKTASI BİLİNEN DOĞRU DENLEMİ :

Eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazalım.

PAH dik üçgeninde ;

$\tan\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ olduğundan

$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ dir.



Yani eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ bulunur.

ÖRNEK **P(3, –2) noktasından geçen ve eğimi $-\frac{1}{4}$ olan doğrunun denklemini bulunuz.**

ÇÖZÜM

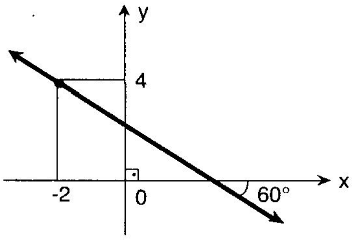
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3)$

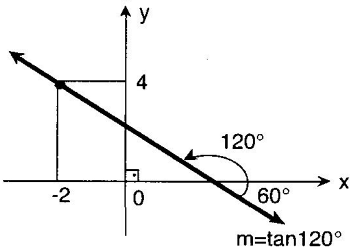
$4y + 8 = -x + 3$

$x + 4y + 5 = 0$ bulunur.

ÖRNEK **Grafiği şekilde görülen doğrunun denklemini yazınız.**



ÇÖZÜM



Doğrunun eğim açısı 120° olduğundan eğimi $m = \tan 120° = -\sqrt{3}$ dür. Bizden eğimi $m = -\sqrt{3}$ olan ve (–2, 4) noktasından geçen doğrunun denklemi istenmektedir.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = -\sqrt{3}(x + 2)$

$y - 4 = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} - 4 = 0$ bulunur.

B) İKİ NOKTASI BİLİNEN DOĞRUNUN DENKLEMİ :

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulmak için önce eğimini bulmak gerekir.

$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ dir.

Şimdi $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi $m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ olan doğrunun denklemini yazalım.

$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

$(y - y_1)(x_1 - x_2) = (x - x_1)(y_1 - y_2)$ eşitliğinde

her iki yanı $(y_1 - y_2) . (x_1 - x_2)$ çarpımı ile bölelim.

$\boxed{\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$ elde edilir.

ÖRNEK **A(3, 1) ve B(−2, −4) noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y-1}{1+4}=\frac{x-3}{3+2}$$

$$\frac{y-1}{5}=\frac{x-3}{5} \Rightarrow x-3=y-1$$

$$x-y-2=0$$ bulunur.

UYARI :

Bir noktanın bir doğru üzerinde olması yada doğrunun verilen noktadan geçmesi sözkonusu ise, nokta koordinatları doğru denklemini sağlamalıdır.

ÖRNEK **P(t, −2t) noktası, A(1, −2) ve B(3, 2) noktalarından geçen doğru üzerinde ise t kaçtır?**

ÇÖZÜM Önce A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemini yazalım.

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y+2}{-2-2}=\frac{x-1}{1-3}$$

$$\frac{y+2}{-4}=\frac{x-1}{-2}$$

$$\frac{y+2}{2}=x-1$$

$2x-2=y+2$

$2x-y-4=0$ bulunur. P noktası doğru üzerinde olduğuna göre koordinatları doğru denklemini sağlamalıdır.

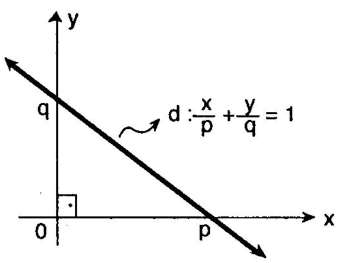
$$2t+2t-4=0$$
$$4t=4$$
$$t=1$$ elde edilir.

C) EKSEN PARÇALARI CİNSİNDEN DOĞRU DENKLEMİ :

d : $Ax+By+C=0$ denkleminde C'yi ikinci tarafa geçirerek; $Ax+By=-C$ bulunur. İki taraf $-C$ ile bölünerek

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \text{ veya } \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$ bulunur.

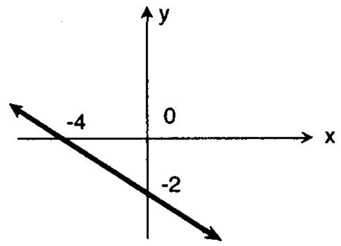
$-\frac{C}{A}=p$ ve $-\frac{C}{B}=q$ alınırsa $\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1}$ elde edilir.



Yani herhangi bir d doğrusu, x eksenini p de, y eksenini q da kesiyorsa d doğrusunun denklemi $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ dir.

Burada p ve q ya eksen parçaları veya başlangıç apsis ve ordinatları denir.

ÖRNEK **Şekildeki doğrunun denklemini yazınız.**



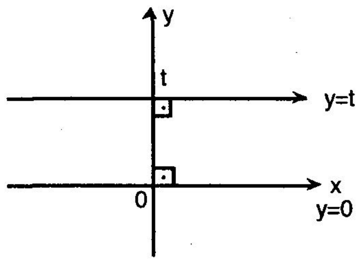
ÇÖZÜM $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$ den $\frac{x+2y}{-4}=1 \Rightarrow x+2y=-4$

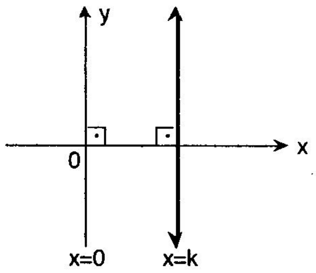
$x+2y+4=0$

elde edilir.

D) ÖZEL DOĞRULAR

i) Eksenlere Paralel Doğrular :

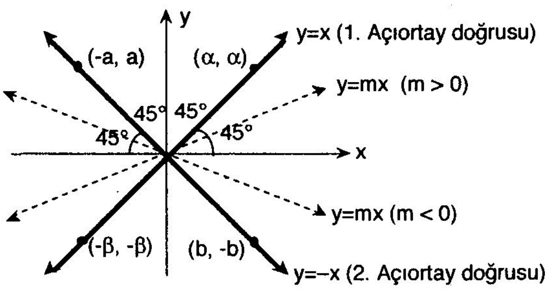




x eksenine paralel doğruların denklemi $t \in R$ olmak üzere $y = t$ biçimindedir. Eğimleri sıfırdır. $y = 0$ doğrusu ise x eksenini belirtir.

y eksenine paralel doğruların denklemi $k \in R$ olmak üzere $x = k$ biçimindedir. Eğimleri tanımsızdır. $x = 0$ doğrusu, y eksenini belirtir.

ii) Başlangıç Noktasından Geçen Doğrular :



Denklemleri $y = mx$ biçimindedir. $y = x$ doğrusu birinci açıortay, $y = -x$ doğrusu ikinci açıortay doğrusu olarak bilinir.

İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇI

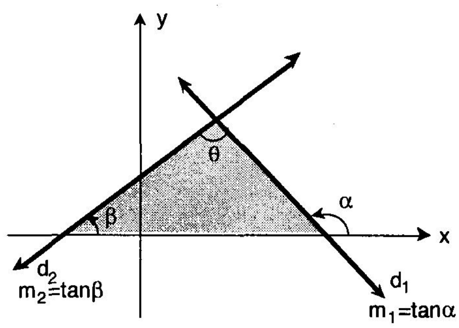
Eğimleri m_1 ve m_2 olan d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açı θ olsun. Şekildeki taralı üçgenden $\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \theta = \alpha - \beta$ dır.

$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}}$ olduğunu hatırlayalım.

$\theta = \alpha - \beta$ eşitliğinde her iki yanın tanjantı alınırsa;

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$\boxed{\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}}$ bulunur.

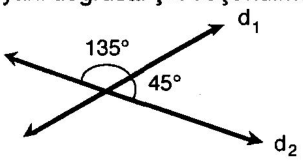


İRDELEME

i) $\tan\theta > 0$ ise doğrular arasındaki açı dar açıdır.

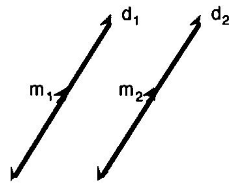
ii) $\tan\theta < 0$ ise doğrular arasındaki açı geniş açıdır.

iii) θ, iki doğru arasındaki açı ise $0° < \theta < 180°$ dir. İki doğru arasındaki açı denildiğinde bütünler iki açı, yani doğrusal çift düşünülmelidir. Örneğin



gibi

iv) Eğimleri m_1 ve m_2 olan d_1 ve d_2 doğruları paralel ise aralarındaki açı $\theta = 0°$ dir.



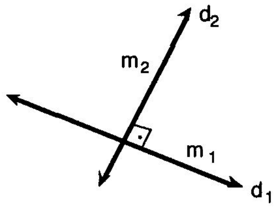
Buradan $\tan 0° = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0$

$\Rightarrow m_1 = m_2$ olur.

Yani iki doğru paralel ise eğimleri eşittir.

$\boxed{d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$

v) Eğimleri m_1 ve m_2 olan ($m_1 \neq 0$ ve $m_2 \neq 0$) d_1 ve d_2 doğruları dik ise aralarındaki açı 90° dir. Buradan $\tan 90° = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \infty$ (tanımsızdır.)



Bir kesrin tanımsız olması paydasının sıfır olması demektir. Yani

$1 + m_1 . m_2 = 0 \Rightarrow m_1 . m_2 = -1$ dir. İki doğru dik ise eğimleri çarpımı -1 dir.

$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1}$

ÖRNEK **$2x - y - 3 = 0$ ve $3x + y + 7 = 0$ doğruları arasındaki dar açının ölçüsü nedir?**

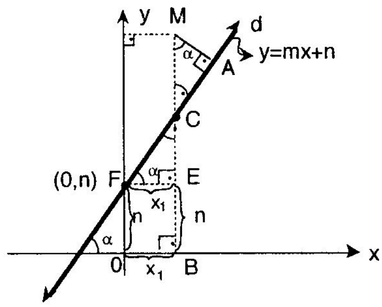
ÇÖZÜM $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow m_1 = 2$

$3x + y + 7 = 0 \Rightarrow y = -3x - 7 \Rightarrow m_2 = -3$ dür.

$\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \dfrac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} = \dfrac{2 + 3}{1 - 6} = \dfrac{5}{-5} = -1$ dir.

$\tan\theta = -1$ ve $0° < \theta < 180° \Rightarrow \theta = 135°$ dir. Bulunan açı doğrular arasındaki geniş açıdır. Dar açı ise 45° olur.

BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA OLAN UZAKLIĞI



$M(x_1, y_1)$ noktasının, denklemi $y = mx+n$ olan d doğrusuna olan uzaklığı, M den d doğrusuna inilen MA dikme uzunluğudur.

$|BE| = |OF| = n$ ve $|FE| = |OB| = x_1$ dir.

CFE dik üçgeninde

$$tg\alpha = \frac{|CE|}{|EF|} \Rightarrow |CE| = |EF| \,.\, tg\alpha \Rightarrow |CE| = x_1 \,.\, tg\alpha$$

olur. $tg\alpha$ doğrunun eğimi olup m dir. Öyleyse $|CE| = m.x_1$ elde edilir.

$|MC| = |MB| - (|BE| + |EC|) = y_1 - (n + mx_1)$ olur.

MAC dik üçgeninden de

$|Cos\alpha| = \frac{|MA|}{|MC|}$ veya $|MA| = |MC| \,.\, |Cos\alpha|$ yazılır.

$|MC|$ nin bulunan değeri yerine konursa;

$|MA| = |y_1 - mx_1 - n| \,.\, |Cos\alpha|$ bulunur.

$|Cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$ olduğundan $|MA| = \ell$ konarak

$$|MA| = |y_1 - mx_1 - n| \,.\, |cos\alpha|$$

$$\ell = |y_1 - mx_1 - n| \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\ell = \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1 + m^2}}$$ elde edilir.

$Ax + By + C = 0$ doğrusunda $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ olduğundan $m = -\frac{A}{B}$ ve $n = -\frac{C}{B}$ dir. Bu değerleri yerine koyarsak

$$\ell = \frac{\left|y_1 + \frac{A}{B}x_1 + \frac{C}{B}\right|}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}}} = \frac{\left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}\right|}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{B^2}}} = \frac{\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|}}{\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|B|}}$$

$$\ell = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ bulunur.

SONUÇ

$P(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$\boxed{\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

ÖRNEK **A(2, −1) noktasının 3x + 4y + 12 = 0 doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?**

ÇÖZÜM $\ell = \frac{|3 \,.\, 2 + 4 \,.\, (-1) + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|6 - 4 + 12|}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ br dir.

UYARI : $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ doğru denklemlerinde

i) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ise d_1 ve d_2 doğruları çakışıktır.

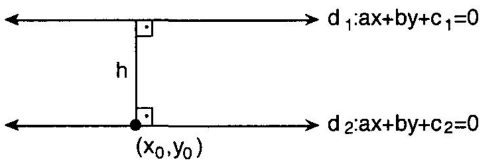
ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ise d_1 ve d_2 doğruları paraleldir.

iii) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ise d_1 ve d_2 doğruları kesişirler..

Kesim noktaları bu denklemlerin ortak çözümüdür.

PARALEL İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK:

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ durumunda doğrular paraleldir demiştik. Yani paralel iki doğru denklemi



biçimindedir.

Doğru denklemleri ilk sunulduğunda, a ve b değerleri eşit olmayabilir.Ancak genişletme veya sadeleştirme yöntemleriyle a ve b nin aynı olması sağlanır. Bu durumda sadece sabitler farklıdır. Böylesi paralel $d_1$ve d_2 doğruları arasındaki h uzaklığını bulalım. $d_2$doğrusu üzerinde alınan bir (x_0, y_0) noktasının d_1 doğrusuna uzaklığı:

$h=\frac{|ax_0+by_0+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ① dir. Öte yandan (x_0,y_0) noktası, d_2 doğrusunun denklemini sağlar.

Yani $ax_0+by_0=-c_2$ dir. Bulduğumuz değeri ① de yerine yazarsak

$\boxed{h=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ elde edilir.

ÖRNEK $3x-4y+21=0$

$2mx+8y+m+1=0$ **paralel doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

ÇÖZÜM

$3x-4y+21 = 0$

$2mx+8y+m+1 = 0$ doğruları paralel ise

$\frac{2m}{3} = \frac{8}{-4}$ olmalıdır. Yani $\frac{2m}{3} = -2$ den

$2m = -6$

$m = -3$ dür

$m = -3$ değeri yerine yazılırsa

$3x-4y+21 = 0$

$-6x+8y-2 = 0$ denklemleri oluşur.

2. denklemde her terim (–2) ye bölünürse;

$3x-4y+21 = 0$

$3x-4y+1 = 0$ bulunur. Bu iki paralel doğru arasındaki uzaklık

$$h = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|21-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ br. dir.}$$

ÖRNEK

Denklemleri $9x+12y+b = 0$ ve $ax+4y+5 = 0$ olan doğrular paralel ve aralarındaki uzaklık 2br. ise **b nin alabileceği değerler toplamı nedir?**

ÇÖZÜM

$9x+12y+b = 0$

$ax+4y+5 = 0$ doğruları paralel ise

$\frac{9}{a} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{9}{a} = 3 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$ olmalıdır $a = 3$ değeri yerine konursa;

$9x+12y+b = 0$

$3x+4y+5 = 0$ olur. İkinci denklemi 3 ile genişletirsek,

$9x+12y+b = 0$

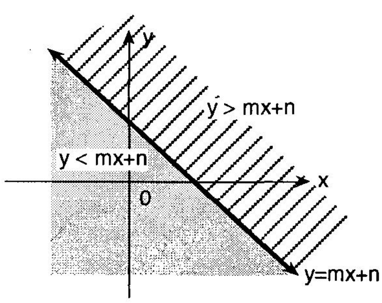
$9x+12y+15 = 0$ bulunur. Bu iki paralel doğru arasındaki uzaklık 2 br. ise

$$\frac{|b-15|}{\sqrt{81+144}} = 2 \Rightarrow \frac{|b-15|}{15} = 2 \Rightarrow |b-15| = 30 \text{ dan}$$

$b-15 = 30 \lor b-15 = -30$ yazılır. Buradan $b = 45$ veya $b = -15$ olur ki b nin alabileceği değerler toplamı $45-15 = 30$ dur.

EŞİTSİZLİKLER

1. YOL : $y = mx+n$ doğrusu analitik düzlemi iki bölgeye ayırır. y ekseninin (+) tarafında $y > mx+n$, y ekseninin (–) tarafında $y < mx+n$ eşitsizliği sağlanır.



2. YOL : Önce verilen doğrunun grafiği çizilir. Doğrunun bir tarafında bulunan ve koordinatları bilinen bir nokta seçilir. Bu noktanın koordinatları verilen eşitsizlikte yerine yazılır. Eşitsizlik sağlanıyorsa noktanın bulunduğu taraf; sağlanmıyorsa noktanın bulunmadığı taraf aranılan bölgedir.

ÖRNEK $A = \{ (x, y) \mid x, y \in R$ ve $y \geq 2-x \}$ olduğuna göre **A nın grafiğini çiziniz.**

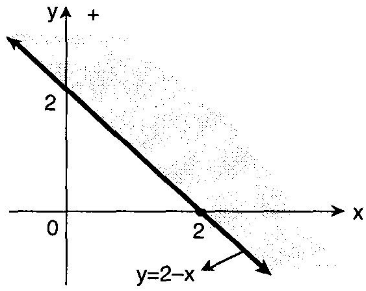
ÇÖZÜM Önce $y = 2-x$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$

$y \geq 2-x$ olduğundan y ekseninin (+) pozitif tarafını tarayalım.

Şekildeki taralı bölge sorunun çözümüdür.



KAYNAK: Derman, M. Zeki ,Analitik Geometri 1-2, Zafer Yayınları