2012

12. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

TOLGA YAVAN

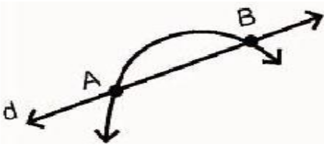
Matematik Öğretmeni

12. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

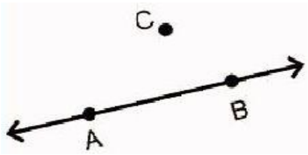
ÜNİTE 1: UZAYDA VEKTÖRLER

Hepsi birden aynı düzlemde olmayan tüm noktaların kümesine **uzay** denir.

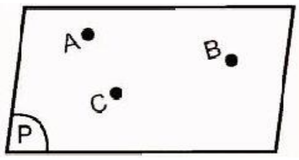
- Uzayda farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.



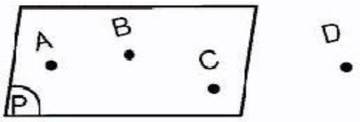
- Uzayda herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta ve doğru dışında en az bir nokta vardır.



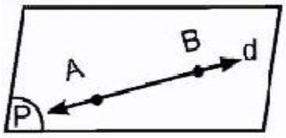
- Uzayda doğrusal olmayan farklı üç nokta bir düzlem belirtir.



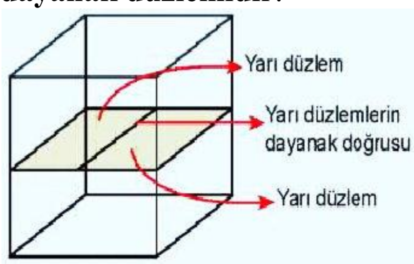
- Uzayda düzlemin dışında en az bir nokta vardır.



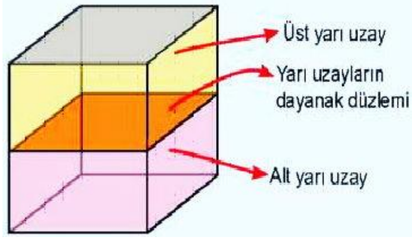
- Uzayda farklı iki nokta bir düzlemde ise bu iki noktadan geçen doğrunun tüm noktaları bu düzlem içindedir.



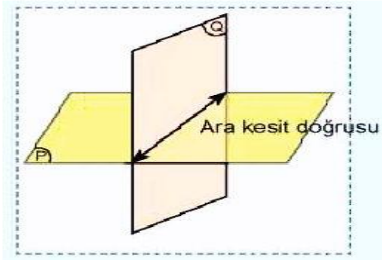
Uzayda bir P düzlemi, kendisi dışındaki uzayın noktalarını iki bölgeye ayırır. Bu bölgelere P nin belirttiği **açık yarı uzaylar**, bu açık yarı uzaylardan biri ile P nin birleşimine ise P nin belirttiği **kapalı yarı uzaylar** denir. Bu durumda P düzlemi bu yarı uzayların **dayanak düzlemidir**.



Uzayda bir ℓ doğrusu bir P düzleminin alt kümesi ise ℓ doğrusu P düzleminin ℓ doğrusu dışındaki noktalarını <u>iki bölgeye (iki yarı düzleme) ayırır.</u>



Uzayda farklı iki düzlemin bir ortak noktası varsa, bu noktadan geçen bir ortak doğru vardır. Bu doğru iki düzlemin **ara kesit doğrusudur.**

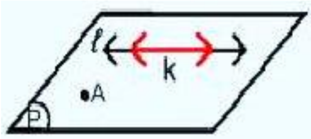


UZAYDA İKİ DOĞRUNUN VE İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

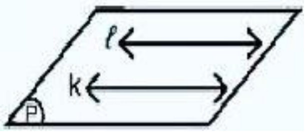
Uzayda verilen iki doğru ℓ ve k olsun;

a) ℓ ile k aynı düzlemde bulunabilir. Bu doğrular:

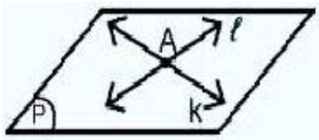
i. Birbiriyle çakışık olabilir.



ii. Birbirine paralel olabilir.

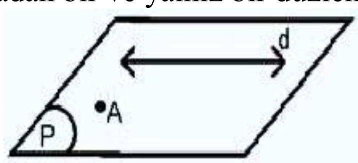


iii. Birbirini kesebilir.

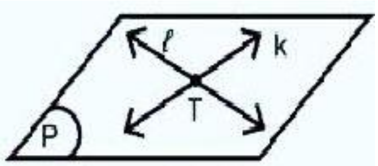


b) ℓ ve k aynı düzlemde bulunmayabilir. Bu durumda böyle doğrulara aykırı doğrular denir. Aykırı doğrular çakışmaz, paralel olamaz ve bu doğrulardan biri diğerini kesemez.

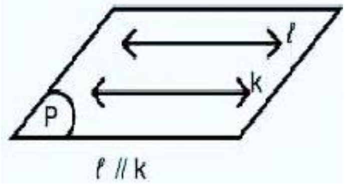
- Bir doğru ile bu doğrunun dışında verilen bir noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçer.



- Uzayda kesişen iki doğru bir ve yalnız bir düzlem belirtir.



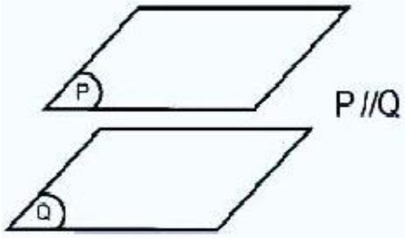
- Uzayda birbirine paralel iki doğru bir ve yalnız bir düzlem belirtir.



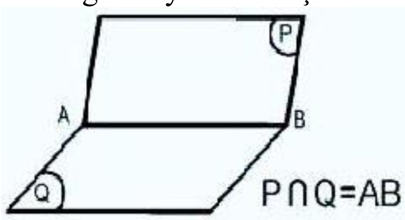
Uzayda iki düzlem,

1) Çakışık olabilir.

2) Paralel olabilir.

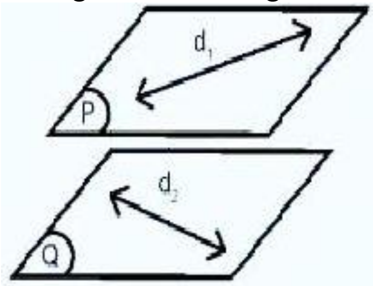


3) Bir doğru boyunca kesişebilir.



UZAYDA DOĞRULTU

Uzayda doğrular kümesi üzerinde tanımlanan paralel olma bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından bir **denklik bağıntısıdır.** Bu bağıntının her bir denklik sınıfı bir doğrultu belirtir.
Uzayda aykırı doğrular farklı doğrultulardadır.



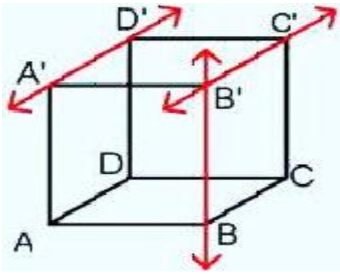
UZAYDA DOĞRU PARÇASI VE İKİ DOĞRU PARÇASI ARASINDAKİ İLİŞKİ

İki nokta ile bunlar arasında bulunan ve doğrudaş olan noktaların kümesine **doğru parçası** denir. Bu iki nokta doğru parçasının uç noktalarıdır.

Bir doğru parçasının doğrultusu, üzerinde bulunduğu doğrunun doğrultusuyla aynıdır.

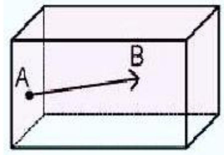
Uç noktaları çakışan doğru parçaları birer nokta belirtir ve bütün noktalar aynı denklik sınıfında yer alır.

İki doğru parçası, aykırı (paralel, kesişen, çakışan) iki doğru üzerinde ise bunlara aykırı (paralel, kesişen, çakışan) doğru parçaları denir. [BB'] ve [A'D'] aykırı doğru parçalarına, [BB'] ve [CC'] paralel doğru parçalarına, [BB'] ve [B'C'] kesişen doğru parçalarına birer örnektir.

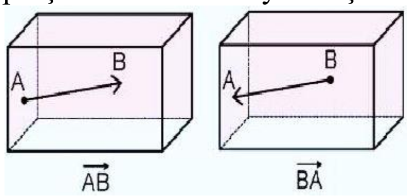


UZAYDA YÖNLÜ DOĞRU PARÇALARI

Uzunluğu, doğrultusu ve yönü olan doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir. Başlangıç noktası A, bitim noktası B olan yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir.



Bir doğru parçası üzerinde iki yön seçilebilir.



Yönlü doğru parçasının başlangıç ve bitim noktaları belli olduğu için uzunluğu ölçülebilir. Işın ise başlangıç noktası ve bu başlangıç noktasının bir tarafında kalan noktalar kümesinden oluştuğu için uzunluğu ölçülemez.
Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan yönlü doğru parçaları nokta belirttiğinden üzerindeki yön ve

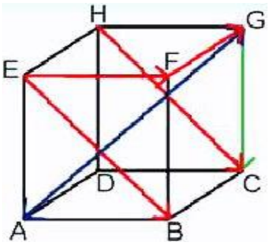
doğrultu keyfî olarak seçilebilir.

UZAYDA VEKTÖR VE NOKTA-VEKTÖR EŞLEMELERİ

Nokta vektör eşleşmelerinde;

Bir A noktası ve bir $\vec{v}$ verildiğinde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktası, A ve B noktası verildiğinde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek $\vec{v}$ vardır.

Uzayda bütün vektörlerin kümesi $\vec{V}$ ile gösterilir. Vektörler ile işlem yapılırken denklik sınıflarının temsilci elemanları kullanılır.



- Uzunluğu 1 birim olan vektöre **birim vektör** denir.

Şekilde ayrıt uzunluğu 1 br olan küpte $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GC}$ vektörleri birim vektördür.

- Başlangıç ve bitimi aynı olan yönlü doğru parçalarının denklik sınıfına **sıfır vektörü** denir. $\vec{0}$ veya $\overrightarrow{AA}$ ile gösterilir.

Şekilde $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$ vektörleri sıfır vektörüdür.

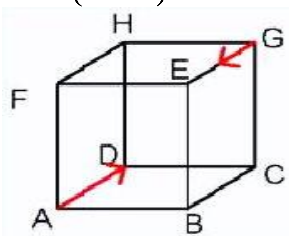
- Doğrultuları ve uzunlukları aynı, yönleri farklı olan $\vec{u}, \vec{v}$ için $\vec{u} = -\vec{v}$ dir.

Şekilde $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{EB}$ ve $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GA}$ dür.

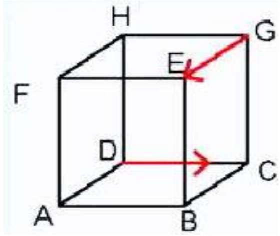
UZAYDA LİNEER BAĞIMLI VE LİNEER BAĞIMSIZ VEKTÖRLER

Uzayda, doğrultuları aynı olan iki vektör lineer bağımlıdır yani biri diğerinin bir reel katı olarak yazılabilir.

Şekilde $\overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{GE}$ $(k \in R)$

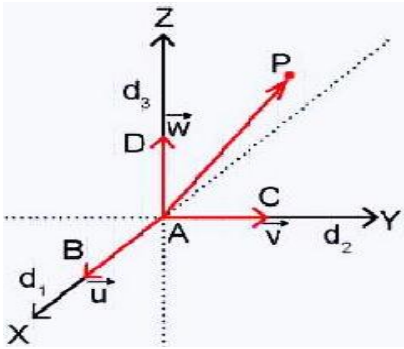


Uzayda, doğrultuları farklı olan iki vektör lineer bağımsızdır yani biri diğerinin bir reel katı olarak yazılamaz.



Uzayda $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektörleri verildiğinde $\vec{w} = a_1\vec{v} + a_2\vec{u}$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in R$ bulunabiliyorsa bu üç vektöre **lineer bağımlı,** bulunamıyorsa **lineer bağımsız** vektörler denir.

UZAYDA DİK KOORDİNAT SİSTEMİ



Uzayda bir A noktası ve birbirine dik olan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ birim vektörleri verilsin. Nokta vektör eşleşmesinden $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ve $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ olacak şekilde tek B, C, D noktaları bulunur. A ve B den geçen d_1, A ve C den geçen d_2, A ve D den geçen d_3 doğrusu vardır. Buradaki değişmeyen $\{A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dörtlüsüne **uzayın dik koordinat sistemi**, A noktasına bu koordinat sisteminin **orijini**; d_1, d_2, d_3 doğrularına ise **koordinat sisteminin eksenleri** denir.

Koordinat sisteminin eksenleri X(apsis), Y(ordinat) ve Z(kod) ile gösterilir. Bu koordinat sistemi XYZ şeklinde belirtilir.

$\{A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ bir dik koordinat sistemi ve uzayın herhangi bir noktası da P olsun.

$\overrightarrow{AP} = x(P).\vec{u} + x(P).\vec{v} + x(P).\vec{z} \Leftrightarrow P(x, y, z)$ olur ve buradaki $\overrightarrow{AP}$ vektörüne **P noktasının yer vektörü** ve x(P), y(P), z(P) değerlerine de **P noktasının koordinatları** denir.

$\{A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dik koordinat sistemine göre A(0,0,0) olduğundan A yerine O kullanılacaktır.

$\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ veya $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ dörtlüleri dik koordinat sistemini ifade eder.

Uzayda bütün yer vektörlerinin kümesi R^3 ile gösterilir.

$\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin lineer bağımsız olması için

gerek ve yeter şart $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ dır.
$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ise $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ lineer bağımlıdır.
Uzayda lineer bağımsız vektörler ikişer ikişer birbirlerine dik ise bu sisteme **dik koordinat sistemi** denir.

UZAYDA İKİ VEKTÖRÜN İÇ ÇARPIMI

XYZ dik koordinat sisteminde
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri için
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ şeklindeki çarpıma uzayda **Öklid iç çarpımı** denir.

Öklid iç çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.
$\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^2$ ve $\forall\, k \in R$ için,

i. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}, \rangle$ (simetri özelliği)

ii. $\langle k\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = k\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ (1. yere göre lineerlik)

$\langle \vec{a}, k\vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + k\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ (2. yere göre lineerlik)

iii. $\vec{a} \neq 0$ için $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$

$\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ (pozitif tanımlılık özelliği)

Uzayda iki vektörün iç çarpımı bir reel (skaler) sayıdır.

Öklid iç çarpımı ile birlikte R^3 e Öklid uzayı denir.

UZAYDA BİR VEKTÖRÜN UZUNLUĞU VE İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

Uzayda $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

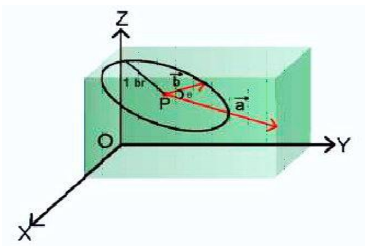
$\|\vec{a}\|$ değerine, **$\vec{a}$ vektörünün uzunluğu (normu)** denir.

Uzayda A ve B noktaları arasındaki uzaklık, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğudur. Buna göre A ve B noktaları arasındaki uzaklık

$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$ ile elde edilir.

Uzayda her $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektörü $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ biçiminde birimleştirilebilir.

İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI



Uzayda iki vektör arasındaki açı, bu vektörlerin başlangıç noktalarının herhangi bir P noktasına taşınması ile oluşan açıdır. Merkezi P noktası olan birim çemberin, bu açının kenarları arasında kalan yayının uzunluğuna **iki vektör arasındaki açının ölçüsü** denir.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq 0$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin iç çarpımı

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\alpha$, $0 \leq \theta \leq \pi$ dir.

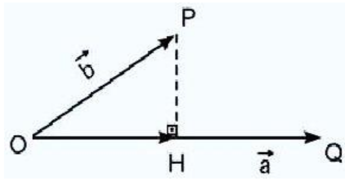
Bu durumda a ve b arasındaki açı:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle > 0$,

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$,

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ olur.

UZAYDA BİR VEKTÖRÜN BAŞKA BİR VEKTÖR ÜZERİNE DİK İZDÜŞÜMÜ

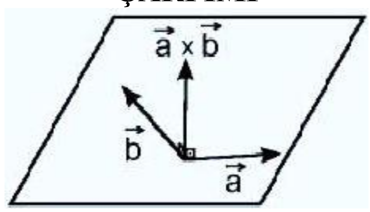


$\overrightarrow{OP} = \vec{b}$ ve $\overrightarrow{OQ} = \vec{a}$ olmak üzere $\overrightarrow{OH}$ **vektörüne $\vec{b}$ vektörünün $\vec{a}$ üzerine dik izdüşüm vektörü** denir.

Bu $\overrightarrow{OH}$ dik izdüşüm vektörü, $\overrightarrow{OH} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.\vec{a}$ bağıntısından bulunur. Bu vektörün uzunluğu

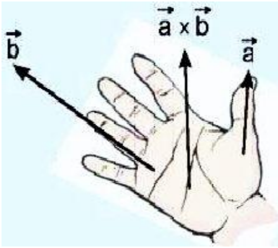
$\|\overrightarrow{OH}\| = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|}$ dür.

UZAYDA İKİ VEKTÖRÜN VEKTÖREL ÇARPIMI



Her $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere
$\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ vektörüne **$\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel (dış) çarpımı denir** ve $\vec{c} = \vec{a}x\vec{b}$ ile gösterilir.

$\vec{a}x\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin her ikisine de diktir.



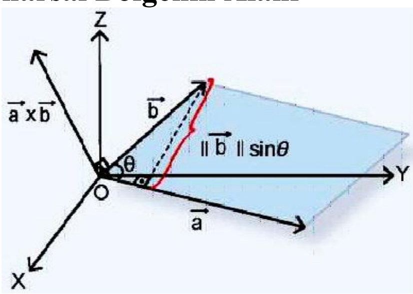
(Sağ El Kuralı): Sağ elin başparmağı $\vec{a}$ vektörü yönünde, parmak uçları $\vec{b}$ yönünde açılırsa avuç içi $\vec{a}x\vec{b}$ vektörü yönündedir.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere $\vec{a}x\vec{b}$ vektörü, birinci satıra göre determinant açılımı yapılırsa,

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3}$$

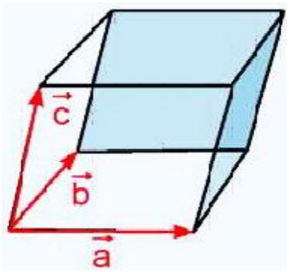
şeklinde hesaplanır.

Paralelkenarsal Bölgenin Alanı



Uzayda lineer bağımsız $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verildiğinde bu vektörler üzerine kurulu paralelkenarsal bölgenin alanı $\|\vec{a}x\vec{b}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin\theta$ eşitliği ile bulunur.

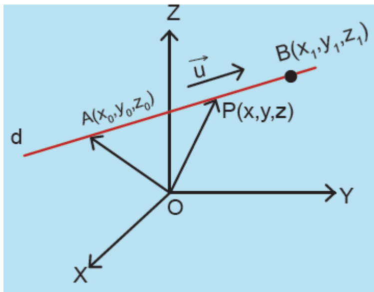
Paralelyüzün Hacmi



Uzayda lineer bağımsız $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ üzerine kurulu paralelyüzün hacmi, $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\langle \vec{a}x\vec{b}, \vec{c} \rangle|$ eşitliği ile hesaplanır.

ÜNİTE 2: UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM

UZAYDA BİR DOĞRUNUN VEKTÖREL VE PARAMETRİK DENKLEMLERİ



Uzayda bir $A(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen, doğrultmanı $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ ve parametresi $\lambda \in R$ olan doğrunun vektörel denklemi

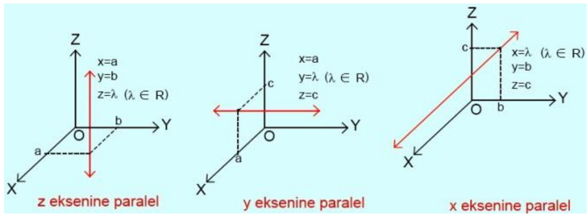
$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3} = \lambda$ biçimindedir.

Uzayda $A(x_0,y_0,z_0)$ ve $B(x_1,y_1,z_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

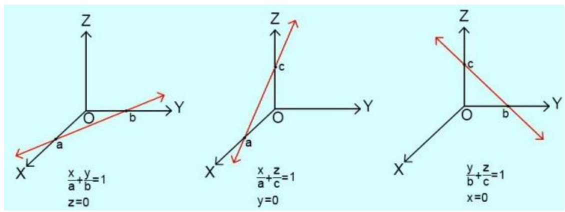
$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} = \lambda$ olur.

BAZI ÖZEL DOĞRULAR VE GRAFİKLERİ

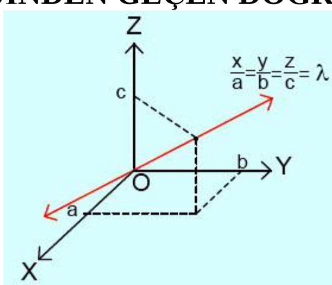
- **EKSENLERE PARALEL DOĞRULAR**



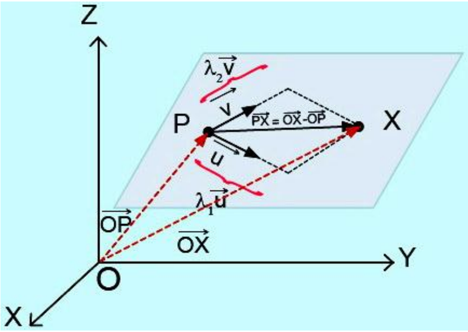
- **EKSENLERİ KESTİĞİ NOKTALARI BELLİ OLAN DOĞRULAR**



- **ORİJİNDEN GEÇEN DOĞRULAR**



UZAYDA BİR DÜZLEMİN PARAMETRİK VE KAPALI DENKLEMLERİ



Uzayda bir P noktasından geçen ve lineer bağımsız $\vec{u}, \vec{v}$ ne paralel olan düzlemin parametrik denklemi, X değişken nokta olmak üzere

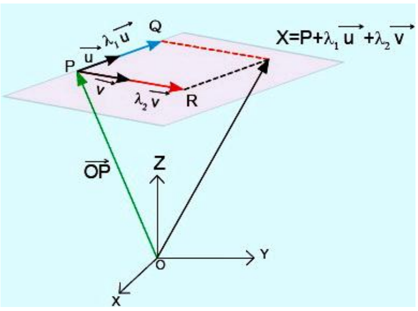
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v}$ biçimindedir.

Burada λ_1, $\lambda_2 \in R$ ye düzlemin parametreleri, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ne de **düzlemin doğrultu vektörleri** denir. Bir düzlemin doğrultu vektörlerine dik olan vektöre **düzlemin normal vektörü** denir. $\vec{N}$ ile gösterilir.

Uzayda P noktasından geçen ve normali $\vec{N}$ olan düzlemin kapalı denklemi $<\overrightarrow{PX}, \vec{N}>= 0$ dır.

Düzlemin $x=P+\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v}$ parametrik denkleminde $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$ alınırsa $<\overrightarrow{PX}, \vec{N}>= 0$ kapalı denklemi elde edilir.

$\vec{N} =(A,B,C)$, $D = -< \overrightarrow{OP}, \vec{N} >$ olmak üzere Ax+By+Cz+D=0 ifadesine **düzlemin koordinatlandırılmış kapalı denklemi** denir.



Uzayda doğrudaş olmayan P, Q, R gibi üç noktadan geçen düzlemin parametrik denklemi,

$X=P+\lambda_1\overrightarrow{PQ} + \lambda_2\overrightarrow{PR}$ biçimindedir.

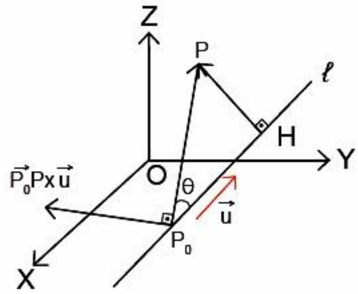
Düzlemin normal vektörü, $\vec{N} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ olarak alınırsa düzlemin kapalı denklemi

$\langle \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \rangle = \det\left(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right)$ şeklinde olur.

Ax+By+Cz+D=0 düzlemine göre aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümeleri sırasıyla açık üst yarı uzay, kapalı üst yarı uzay, açık alt yarı uzay ve kapalı alt yarı uzaydır.

- Ax+By+Cz+D>0
- Ax+By+Cz+D≥0
- Ax+By+Cz+D<0
- Ax+By+Cz+D≤0

UZAYDA BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA OLAN UZAKLIĞI



Uzayda bir P noktasının, doğrultmanı $\vec{u}$ olan bir ℓ doğrusuna uzaklığı, (P_0 doğru üzerinde bir nokta olmak üzere) $\left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ dır.

UZAYDA İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

(H_1) $<\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{N_1}>= 0$ veya $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 =0$

(H_2) $<\overrightarrow{QX}, \overrightarrow{N_2}>= 0$ veya $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 =0$

denklemleriyle verilen iki düzlem:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ise paralel,

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ise çakışıktır.

$\{ \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2} \}$ lineer bağımsız ise H_1 ve H_2 düzlemleri kesişir. Eğer $< \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}>=0$ ise bu iki düzlem dik kesişirler. Bu iki düzlemin denklemini sağlayan herhangi bir nokta A olmak üzere düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemi,

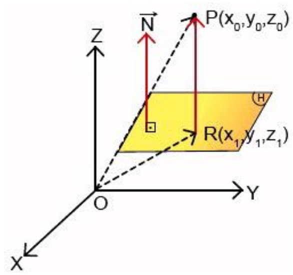
$X=A + \lambda(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2})$ dir. ($\lambda \in R$)

İki düzlemin arakesit doğrusundan geçen sonsuz farklı düzlem çifti vardır.

UZAYDA BİR NOKTANIN BİR DÜZLEME OLAN UZAKLIĞI

Bir P noktasının (H) $<\overrightarrow{RX}, \vec{N}>= 0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşüm vektörü; $\overrightarrow{RQ} = \frac{\langle \overrightarrow{RP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} . \vec{N}$ tir.

Bir P noktasının H düzlemine olan uzaklığını d(P,H) ile gösterirsek $d(P,H) = \left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{RP}, \vec{N} \rangle\right|}{\|\vec{N}\|}$ tir.

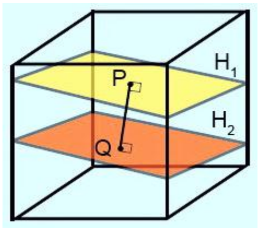


Bir $P(x_0,y_0,z_0)$ noktasının, normali $\vec{N}=(A,B,C)$ olan $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemine uzaklığı $\frac{|Ax_0+Bx_0+Cx_0+Dx_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ dır.

UYARI: Bir düzlemden eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bu düzleme paralel iki farklı düzlemdir.

UZAYDA İKİ DÜZLEM ARASINDAKİ UZAKLIK

(H_1) $<\overrightarrow{PX},\vec{N}>=0$ (H_2) $<\overrightarrow{QX},\vec{N}>=0$ olmak üzere verilen iki paralel düzlem arasındaki uzaklık $d(H_1,H_2)=\frac{\langle\overrightarrow{PQ},\vec{N}\rangle}{\langle\vec{N},\vec{N}\rangle}$ tir.



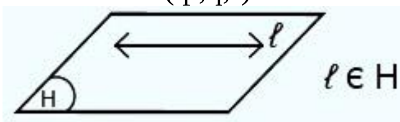
Özel olarak H_1 ve H_2 düzlem denklemleri
(H_1) $Ax+By+Cz+D_1=0$
(H_2) $Ax+By+Cz+D_2=0$ şeklinde yazılabileceğinden paralel düzlemler arasındaki uzaklık $d(H_1,H_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ dir.
Kesişen ya da çakışık iki düzlem arasındaki uzaklık sıfırdır.

UZAYDA İKİ DÜZLEM ARASINDAKİ AÇI

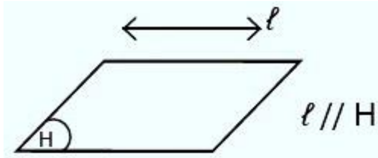
Kesişen iki düzlemin ara kesit doğrusuna dik olan düzlemde oluşan iki açıdan dar olanına bu iki **düzlem arasındaki açı** denir. Geniş olanı ise bu açının bütünleyenidir.
Uzayda
(H_1) $\langle\overrightarrow{PX},\overrightarrow{N_1}\rangle=0$ veya $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$
(H_2) $\langle\overrightarrow{QX},\overrightarrow{N_2}\rangle=0$ veya $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ gibi
iki düzlem arasındaki açı, $\cos\alpha=\frac{|\langle\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{N_1}\|.\|\overrightarrow{N_2}\|}$ eşitliğinden bulunur.

UZAYDA BİR DOĞRU İLE BİR DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMU

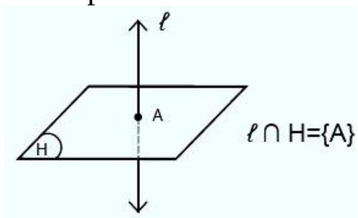
Uzayda $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemi ile $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=\lambda$ doğrusu verilsin. $(\lambda\in R)$
Düzlemin normal vektörü $\vec{N}=(A,B,C)$ ve doğrunun doğrultman vektörü $\vec{u}=(p,q,r)$ olmak üzere;



$<\vec{N},\vec{u}>=Ap+Bq+Cr=0$ ve $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ ise doğru düzlemin üzerindedir.

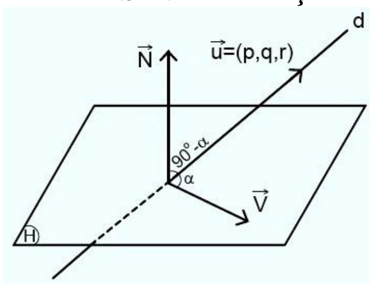


$<\vec{N},\vec{u}>=Ap+Bq+Cr=0$ ve $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ ise doğru düzleme paraleldir.



$<\vec{N},\vec{u}>=Ap+Bq+Cr\neq 0$ ise doğru ile düzlem bir tek noktada kesişir.

UZAYDA DOĞRU İLE DÜZLEM ARASINDAKİ AÇI



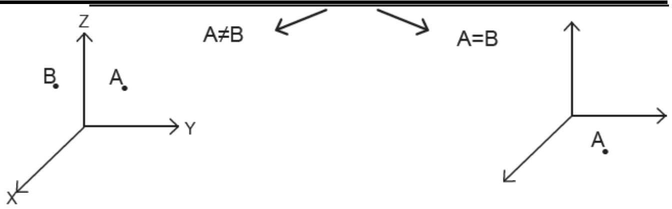
Uzayda (H) $Ax+By+Cz+D$ düzlemi ile (d) $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=\lambda$ doğrusu verilsin. α dar açı olmak üzere;
$\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha=\frac{|Ap+Bq+Cr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ tir.
Uzayda bir doğrunun verilen düzlem içindeki dik izdüşümü olan doğru ile yaptığı α açısına, **doğru ile düzlem arasındaki açı** denir.

UZAYDA İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE KONUMU

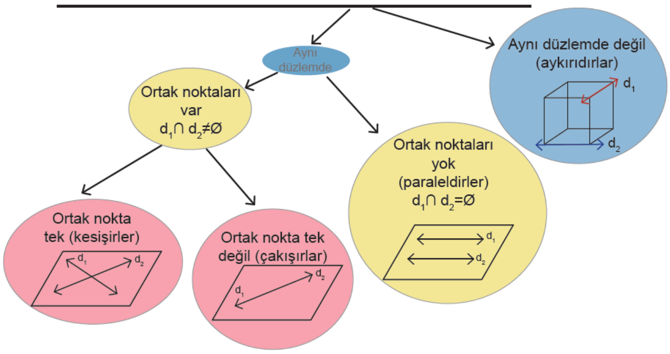
(ℓ_1) $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(p,q,r)=P+\lambda\vec{u}$ $(\lambda\in R)$
(ℓ_2) $(x,y,z)=(x_0',y_0',z_0')+\mu(p',q',r')=Q+\mu\vec{v}$ $(\mu\in R)$
olmak üzere;

1. $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ ise doğrular aynı düzlemdedir.
   - **a.** $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lineer bağımsız ise doğrular kesişir.
   - **b.** $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lineer bağımlı ise doğrular çakışık veya paraleldir.
     - **i.** $\{\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\}$ lineer bağımlı ise doğrular çakışıktır.
     - **ii.** $\{\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\}$ lineer bağımsız ise doğrular paraleldir.
2. $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \neq 0$ ise doğrular farklı düzlemde bulunur. Bu tür doğrulara **aykırı doğrular** denir.
3. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ise doğrular diktir.

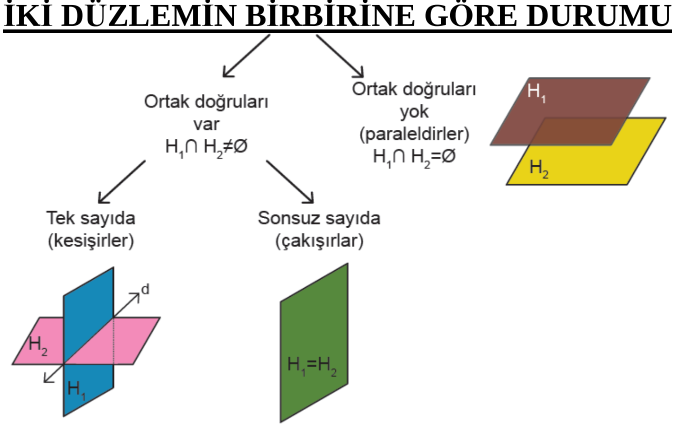
İKİ NOKTANIN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU



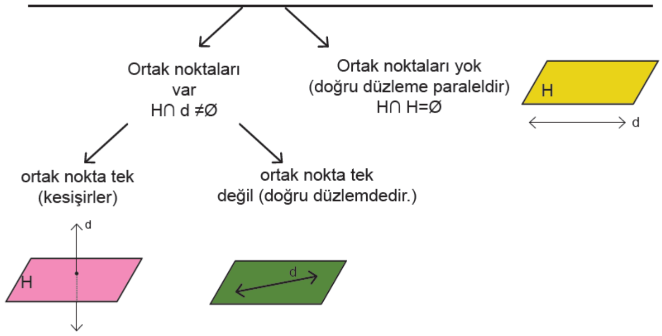
İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU



İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU



DOĞRU İLE DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU



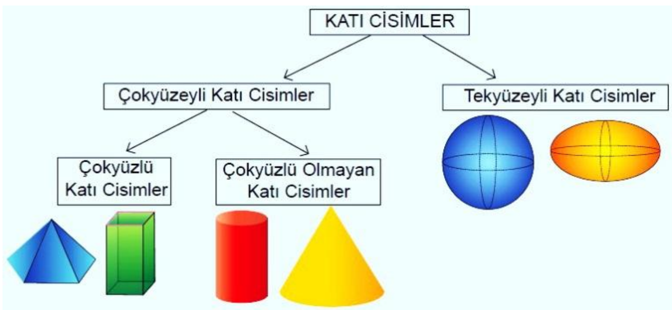
ÜNİTE 3: TEK VE ÇOK YÜZEYLİ KAPALI YÜZEYLER VE KATI CİSİMLER

KATI CİSİMLER VE KAPALI YÜZEYLER

Yüzey parçaları ile sınırlanan kapalı uzay parçasına **çokyüzeyli katı cisim**, tek yüzey parçası ile sınırlanan kapalı uzay parçasına da **tekyüzeyli katı cisim** denir.

Çok yüzeyli katı cisimler ikiye ayrılır:

1. Çok yüzeyli katı cismin bütün yüzey parçaları düzlemsel ve çokgensel bölge ise **çokyüzlü katı cisim**
2. Bütün yüzey parçaları düzlemsel ve çokgensel bölge değilse **çokyüzlü olmayan katı cisim** denir.

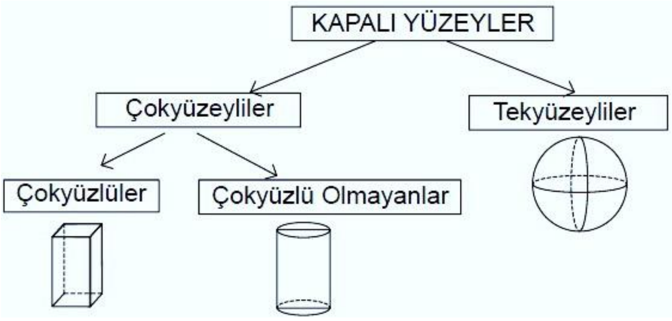


Her çokyüzlü aynı zamanda bir çokyüzeylidir.

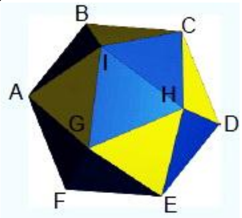
Çokyüzeyli katı cismin sınırına çokyüzeyli, tekyüzeyli katı cismin sınırına da tekyüzeyli denir.

Çokyüzeyliler ikiye ayrılır:

1. Çokyüzeylinin bütün yüzey parçaları düzlemsel ve çokgensel bölge ise **çokyüzlü**
2. Bütün yüzey parçaları düzlemsel ve çokgensel bölge değilse **çokyüzlü olmayan** denir.



Bir çokyüzeyliyi oluşturan her bir yüzey parçasına "**çokyüzeylinin yüzü**" denir.



Yukarıdaki şekilde ABI, CIH, CHD,... çokyüzeylinin yüzleridir.
Herhangi iki yüzün arakesitine bu **çok yüzeylinin ayrıtı** denir. Yukarıdaki şeklin ayrıtları [AB], [CH],[DE]... dir. İkiden fazla yüzün arakesitine bu **çokyüzeylinin tepe noktası** denir. Yukarıdaki şeklin tepe noktaları A, B, C, D, E, ... dir.

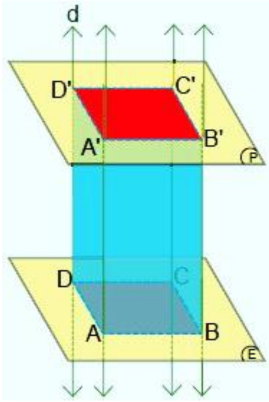
PLATONİK, ARŞİMED, KEPLER ÇOKYÜZLÜLERİ

Eş düzgün çokgenlerden oluşan ve her bir köşesindeki yüzey sayısı aynı olan konveks çokyüzlüye **Platonik Çokyüzlü** denir.

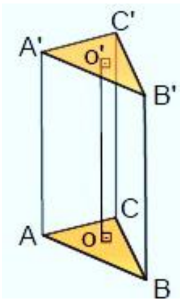
Aynı köşede buluşan; iki veya daha fazla tipte düzgün çokgeni içeren konveks çokyüzlüye **Arşimed çokyüzlü** denir.

Herhangi dört düzgün yıldız çokyüzlünün birleşmesinden oluşan konkav çokyüzlüye **Kepler Çokyüzlü** denir.

TEK VE ÇOKYÜZEYLİ KATI CİSİMLER PRİZMA



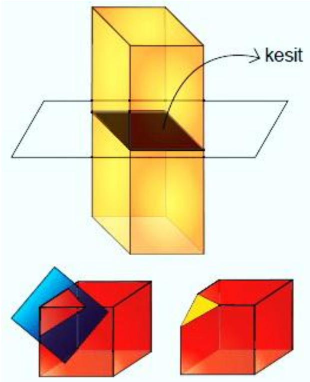
Bir ABCD dörtgeni ve bu dörtgen üzerinde bir d doğrusu verilsin. Verilen dörtgenin üzerindeki noktalardan d doğrusuna paralel doğrular çizilerek oluşan yüzeye **prizmatik yüzey**, bu yüzeyin belirlediği uzay parçasına da **prizmatik bölge** denir.
ABCD dörtgeni ile alttan, A'B'C'D' dörtgeni ile üstten sınırlanan kapalı prizmatik bölgeye **prizma**, prizmayı sınırlayan yüzey parçalarına da **prizma yüzeyi** denir. d doğrusuna da prizmanın **ana doğrusu** denir.
Herhangi bir prizmanın birbirine paralel olan alt ve üst yüzeylerine **prizmanın tabanları**, tabanların kenarlarına da prizmanın **taban ayrıtları** denir. Yukarıdaki prizmada tabanlar ABC ve A'B'C' üçgenleri, taban ayrıtları[AB], [BC], [AC], [A'B'], [B'C'], [A'C'] dır.



Tabanların karşılıklı köşelerini birleştiren doğru parçalarına **yanal ayrıtlar** denir. Yukarıdaki prizmada yanal ayrıtlar [AA'], [BB'], [CC'] dır. ABB'A', BCC'B', ACC'A' dikdörtgenlerine **prizmanın yanal yüzleri,** iki taban arasındaki uzaklığa (|OO'|=h) **prizmanın yüksekliği** denir.

Prizmalar tabanlarındaki çokgenlere göre

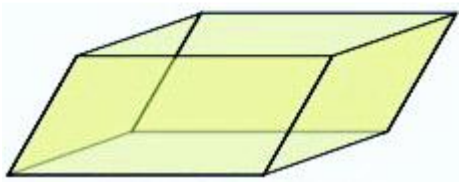
isimlendirilir. Prizmanın taban çokgeni üçgen ise prizmaya **üçgen prizma**, dörtgen ise **dörtgen prizma**, ...;n-gen ise **n-gen prizma** denir.
Yanal ayrıtları tabanlara dik olan prizmaya **dik prizma**, aksi hâlde **eğik prizma** denir.
Tabanı düzgün çokgenler olan bir dik prizmaya **düzgün prizma** denir.



Prizmatik yüzeyin bir düzlemle ara kesitine **yüzeyin bir kesiti** denir. Prizmatik yüzeyi kesen paralel iki kesit eştir. Bir prizmanın yanal ayrıtına dik olan bir düzlemle ara kesitine **prizmanın dik kesiti** denir.
Bir prizmanın alt tabanını kesmeyen bir düzlem ile oluşturduğu kesit ile alt tabanının sınırladığı prizmatik bölgeye **kesik prizma** denir.

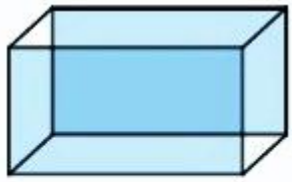
PARALELKENAR PRİZMA VE DİKDÖRTGENLER PRİZMASI

PARALELYÜZ



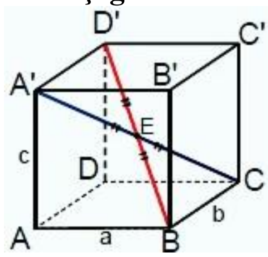
Tabanları paralelkenarsal bölge olan prizmatik yüzeye **paralelyüz**, paralelyüzün sınırladığı bölgeye **paralelkenar prizma** denir. Paralelyüzde herhangi bir yüzü taban olarak kabul edebiliriz.
Bu paralelkenar prizmada, karşılıklı yüzler eş ve paralelkenarsal bölgedir.
Yanal ayrıtlar taban dik ise **dik paralelkenar prizma** olarak isimlendirilir. Dik paralelkenar prizmada yanal yüzler dikdörtgensel bölgedir.

DİKDÖRTGENLER PRİZMASI



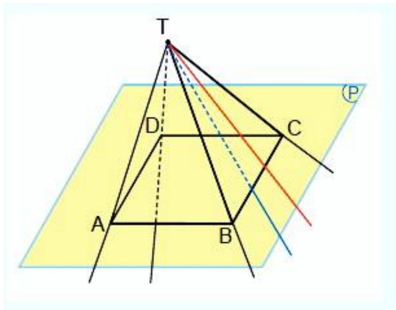
Tabanları dikdörtgensel bölge olan bir dik paralelkenar prizmaya **dikdörtgenler prizması** denir. Dikdörtgenler prizmasında herhangi bir yüz taban kabul edilebilir.
Bir dikdörtgenler prizmasında, bütün yüzler dikdörtgensel bölgedir.
Dikdörtgenler prizması bir paralelyüz olduğundan paralelyüzün bütün özelliklerini taşır.

Prizmanın Cisim Köşegeni

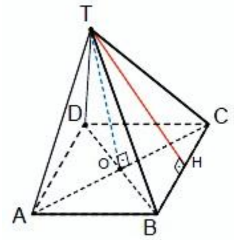


Bir prizmada aynı düzlemde kalmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **cisim köşegeni** denir.
Bir paralelkenar prizmanın ve dikdörtgenler prizmasının cisim köşegenleri birbirini ortalar.
Dikdörtgenler prizmasının cisim köşegenleri birbirine eştir.
$|A'C|=|BD'|=|AC'|=|DB'|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

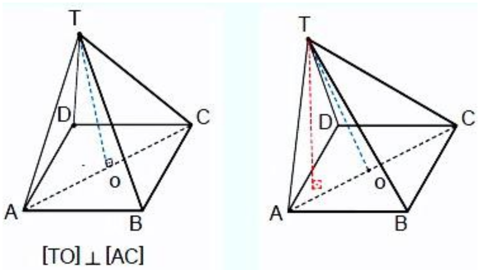
PİRAMİT



Uzayda bir düzlem içerisinde çokgen ve bu düzlem dışında da bir nokta verilsin. T noktası ile çokgenin kenarları üzerindeki her bir noktadan geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **piramidal yüzey**, bu yüzeyin uzayda sınırladığı bölgeye de **piramidal bölge** denir.
Piramidal yüzey ile düzlemdeki çokgensel bölgenin sınırladığı katı cisme **piramit** denir.



Yukarıdaki piramitte ABCD dörtgensel bölgesine piramidin tabanı, T noktasına da piramidin tepe noktası denir. [TA], [TB], [TC], [TD] doğru parçalarına piramidin yan ayrıtları, TAB, TBC, TCD, TDA üçgensel bölgelerine de **piramidin yan yüzleri** denir.
[TO] na piramidin yüksekliği, [TH] na **yan yüze ait yükseklik** denir.

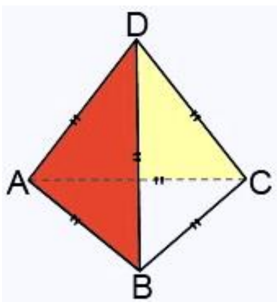


Tepe noktası ve çokgenin ağırlık merkezinden geçen doğru, çokgenin bulunduğu düzleme dik ise **dik piramit**, değilse **eğik piramit** denir.
Tabanı düzgün çokgen olan ve yükseklik ayağı taban merkezinde bulunan piramide **düzgün piramit** denir.
Bir düzgün piramidin:

- Yanal yüzleri, birbirine eş ikizkenar üçgensel bölge,
- Yanal ayrıtları,
- Yanal yüzlerin yükseklikleri ise eştir.

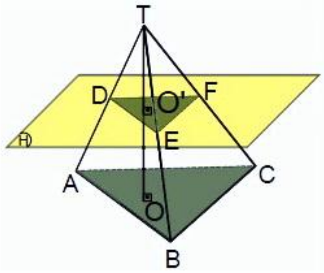
Piramitler tabanlarına ve düzgün olup olmadıklarına göre isimlendirilir. Kare piramit, kare düzgün piramit vb. gibi. Tepe noktası T, tabanı ABCD çokgensel bölgesi olan piramit (T,ABCD) piramidi biçiminde belirtilir.

DÜZGÜN DÖRTYÜZLÜ

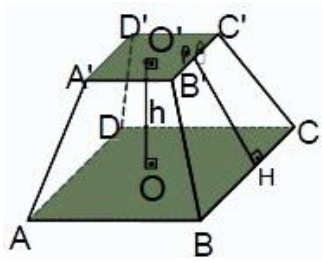


Dört yüzü de birbirine eş ve eşkenar üçgensel bölge olan piramide düzgün dörtyüzlü denir.
Düzgün dörtyüzlünün bütün yüzleri taban olabilir.

KESİK PİRAMİT



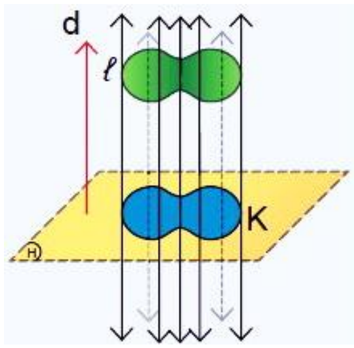
Bir piramit, tabanına paralel bir düzlemle kesildiğinde, taban ile düzlem arasındaki piramidal bölgeye **kesik piramit** denir. Kesilen piramit düzgün ise **düzgün kesik piramit** olarak isimlendirilir.
Bir piramidin tabanına paralel bir düzlemle ara kesiti piramidin tabanına benzerdir.
DEF~ABC dir ve benzerlik oranı $k = \frac{|TO'|}{|TO|}$ dur.
Dolayısıyla piramidin paralel düzlemlerle kesitleri birbirine benzerdir.



Düzgün kesik piramidin;

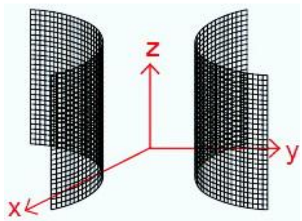
- Tabanları, birbirine benzer düzgün çokgensel bölgedir.
- Yanal yüzleri, birbirine eş ikizkenar yamuksal bölgedir.
- Düzgün kesik piramidin tabanlarının ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçasına da bu cismin yüksekliği denir. |OO'|=h

SİLİNDİR

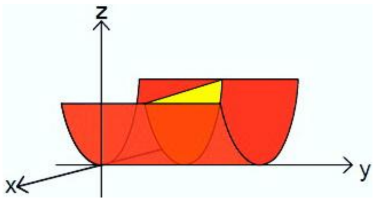


Uzayda bir H düzleminde bulunan K eğrisi ile bu düzlemi kesen bir d doğrusu alalım.
K eğrisine dayanarak ve d doğrusuna paralel konumunda kalarak hareket eden bir doğrunun bu hareketiyle oluşan yüzeye **silindirik yüzey**, K

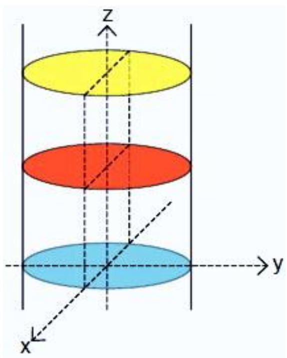
eğrisine **dayanak eğrisi**, silindirik yüzeyin üzerinde ve d doğrusuna paralel olan ℓ doğrusuna da **silindirik yüzeyin ana doğrusu** denir.
Silindirik yüzey dayanak eğrisine göre isimlendirilir. Silindirik yüzey için taban eğrisinin kapalı olması gerekmez.



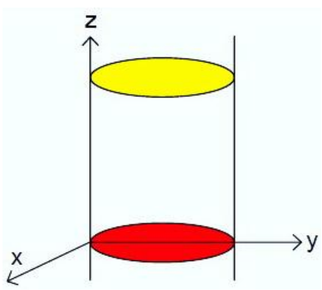
Hiperbolik silindir yüzeyi



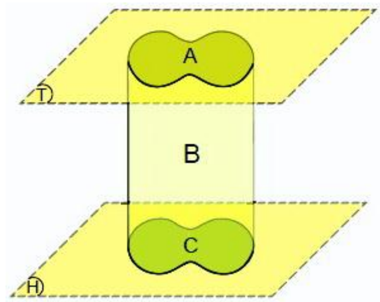
Parabolik silindir yüzeyi



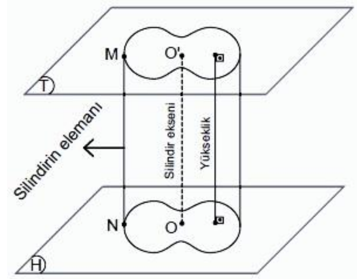
Eliptik silindir yüzeyi



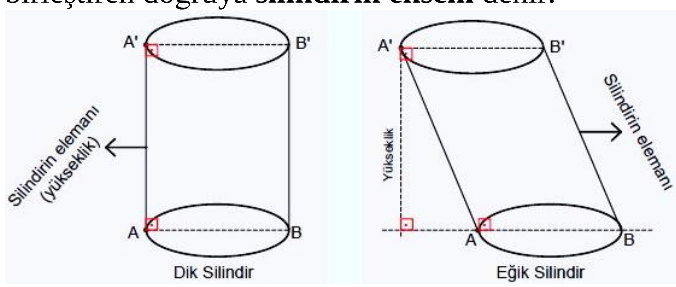
Dairesel silindir yüzeyi



H düzlemine paralel bir T düzlemi ile silindirik yüzeyi kesiştirdiğimizde H ve T düzlemleri ile alttan ve üstten sınırlanan kapalı silindirik yüzey parçasına **silindir yüzeyi** adı verilir.
Kendini kesmeyen kapalı bir dayanak eğrisine sahip olan silindirik yüzeyin sınırladığı bölgeye **silindirik bölge**, silindirik bölgenin H ve T düzlemleri ile sınırlı kesitine **silindir** denir.

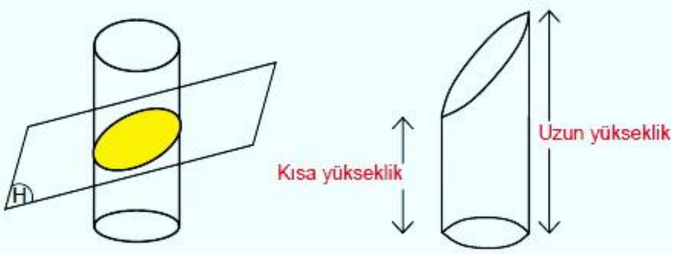


Silindirik yüzeyin ana doğrusunun paralel düzlemler arasında kalan [MN] na **silindirin elemanı**, iki düzlem arasındaki uzaklığa **silindirin yüksekliği,** A ve C kesitlerine alt ve üst taban yüzeyleri, B silindirik yüzey parçasına **silindirin yanal yüzeyi** denir. Taban yüzeylerinin merkezini birleştiren doğruya **silindirin ekseni** denir.

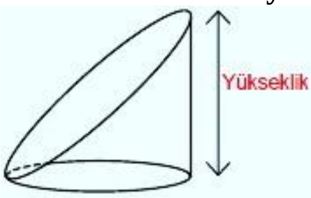


Ana doğrusu dayanak eğrisinin bulunduğu düzleme dik olan silindire **dik silindir**, tabanları daire olan silindire **dairesel silindir**, tabanları daire olan dik silindire de **dik dairesel silindir** denir. Tabanları dik olmayan silindire de **eğik silindir** denir.

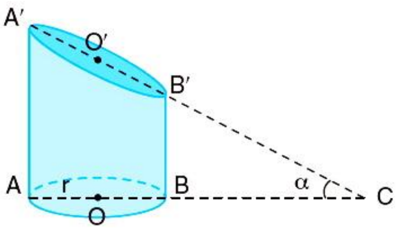
KESİK SİLİNDİR



Bir silindirin; tabana paralel olmayan bir düzlemle ara kesitine kesit, taban ve tabana paralel olmayan düzlemle sınırlandırılmış parçasına **kesik silindir**, kesik silindirin ana doğru parçalarından en büyüğüne **kesik silindirin uzun yüksekliği**, en küçüğüne de **kesik silindirin kısa yüksekliği** denir.



Kısa yüksekliği sıfır olan eğik silindire de **silindirik takoz** denir. Kesik dik dairesel silindirin kesik tabanını oluşturan eğri bir elipstir.
Bir silindirin bütün elemanlarını kesen paralel düzlem parçaları eştir.



Kesik dik dairesel silindirin kesik tabanının merkezinin silindirin en üst noktasına olan uzaklığı, |A'O'|, bu tabanın alt tabanla yaptığı açının sekantı ve taban yarıçapının çarpımına eşittir.

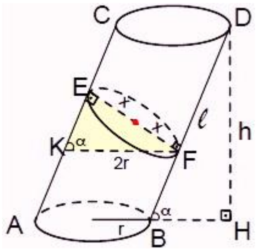
$$|A'O'| = r.\sec\alpha$$

Kesik tabanın yüzey alanı, bu tabanın alt taban ile yaptığı açının sekantı ve alt taban alanının çarpımına eşittir.

$$\text{Kesik tabanın yüzey alanı} = \pi.r^2.\sec\alpha$$

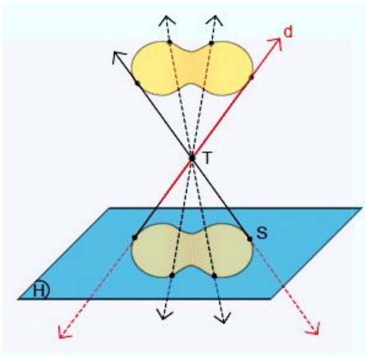
Yanal yüzün alanı, kısa ve uzun yüksekliklerinin toplamı ile alt taban çevresinin çarpımının yarısına eşittir.

$$\text{Yanal yüz alanı} = \frac{(|A'A|+|BB'|).2.\pi.r}{2} \text{ dir.}$$

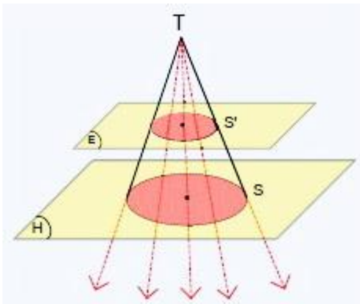


Bir eğik dairesel silindirin **yanal yüzey alanını**, dik kesitinin çevresi ile bir elemanının çarpımına eşittir.
Eğik Dairesel Silindirin Yanal Yüzey Alanı = $2\pi x\ell$

KONİ

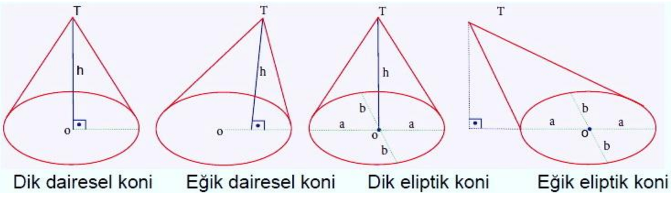


Herhangi bir H düzlemindeki kapalı S eğrisini kesen ve düzlem dışındaki sabit bir T noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konisel yüzey**, S eğrisine bu yüzeyin **dayanak eğrisi**, bu konisel yüzeyi oluştururken çizilen ilk d doğrusuna **konisel yüzeyin üreteci**, her bir doğruya da **konisel yüzeyin elemanı** denir.
Sabit T noktasına **konisel yüzeyin tepe noktası**, tepe noktasının altında ve üstünde oluşan konisel yüzeyin parçalarına da **konisel yüzeyin kanatları** denir.

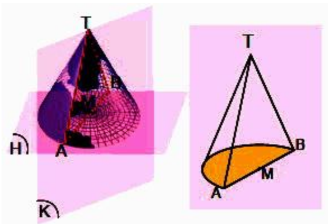


Dayanak eğrisi S olan konisel yüzeyin tepe noktasından ve S nin merkezinden geçen doğruya **konisel yüzeyin ekseni** denir.
Konisel yüzeyin bir kanadının sınırladığı bölgeyi, dayanak eğrisinin düzlemine paralel ve tepe noktasından geçmeyen bir E düzlemi ile kestiğimizde E düzlemi ile sınırlı bu konisel yüzey parçasına **koni yüzeyi**, E düzlemi ile konisel yüzeyin kesişiminden elde edilen kesite **koni yüzeyinin tabanı**, diğer kısmına da **koni yüzeyinin**

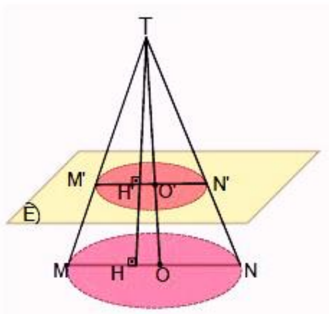
yanal yüzeyi denir.
Koni yüzeyi ile sınırlı bölgeye **koni** denir. Konisel yüzeyin elemanları için yapılan tanımlar, koni içinde geçerlidir. S eğrisine **koninin tabanı**, T noktasına **koninin tepe noktası**, taban çevresinin herhangi bir noktasını tepe noktasına birleştiren doğru parçasına **ana doğru (elemanı)** taban merkezini tepe noktasına birleştiren doğru parçasına **koninin ekseni**, tepe noktasından tabana çizilen dikmeye de **koninin yüksekliği** denir.
Tabanın çevresini tepe noktasına birleştiren eğri yüzeye **koninin yanal yüzeyi** denir.
Koniler tabanlarına göre dairesel koni, eliptik koni ve yüksekliklerinin taban merkezinden geçip geçmediklerine göre de dik koni, eğik koni şeklinde adlandırılır.



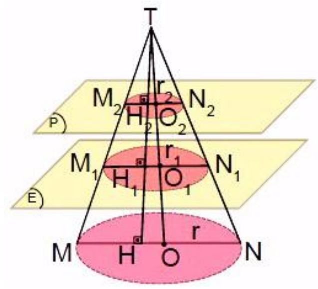
Dik dairesel koni yüzeyinin her bir eleman parçasına **koninin yanal yüksekliği** denir.



Koninin tepe noktası ve eksenini içine alan her düzlem ile ara kesitin bir üçgensel bölgedir.

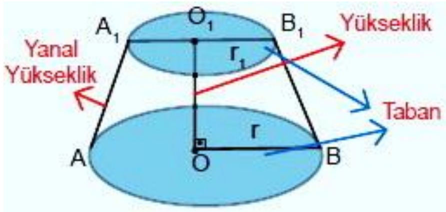


Bir koninin tabanı dairesel ise bu koninin tabana paralel düzlemler ile ara kesiti daire olur ve koninin eksenini paralel kesitlerinin merkezinden geçer.



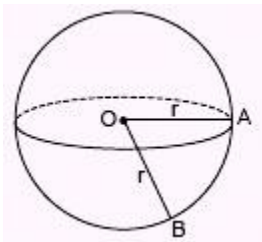
Bir dairesel koninin tabana paralel iki kesitinin alanlarının oranının; bunların tepe noktasına olan uzaklıklarının karelerinin oranına ve bu kesitlerin merkezlerinin tepe noktalarına uzaklıklarının kareleri oranına eşittir.

KESİK KONİ



Dik dairesel koninin tabanı ile tabana paralel düzlem kesiti arasındaki parçasına **dik kesik koni**, taban ve tabana paralel kesitlere **dik kesik koninin tabanları,** tabanlar arasındaki dikme parçasına **dik kesik koninin yüksekliği**, her iki taban arasında kalan herhangi bir eleman parçasına **dik kesik koninin yanal yüksekliği** denir.

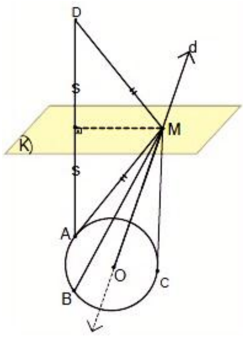
KÜRE



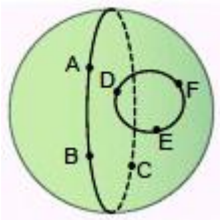
Uzayda sabit bir, O noktasından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **küre yüzeyi**, sabit olan O noktasına **küre yüzeyinin merkezi**, merkezden küre yüzeyine olan uzaklığa **küre yüzeyinin yarıçapı** denir. Küre yüzeyinin sınırladığı bölgeye ise **küre** denir.
Bir küre yüzeyi ile kürenin merkezinden geçen düzlemin arakesitine **küre yüzeyinin doğruları**, kürenin merkezinden geçmeyen ve küre ile birden fazla noktada kesişen düzlem ile arakesitine **küre yüzeyinin çemberleri**, küre yüzeyi üzerine çizilen şekillere **küresel şekiller**, küre yüzeyi üzerindeki bir çemberin merkezinden çıkılan dikmeye **çemberin ekseni**, küre yüzeyi üzerindeki bir çemberin ekseni ile küre yüzeyinin arakesit

noktalarına bu **çemberin kutup noktaları** denir.

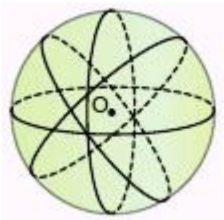
- Uzayda sabit bir M(a,b,c) noktasından sabit r uzaklığında bulunan X(x,y,z) noktalarının geometrik yeri küredir.
- Düzlemsel olmayan dört nokta bir ve yalnız bir küre belirtir.



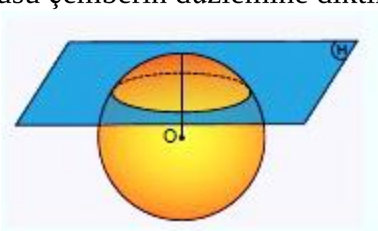
- Bir küre yüzeyi üzerindeki üç farklı noktadan bir ve yalnız bir çember geçer.



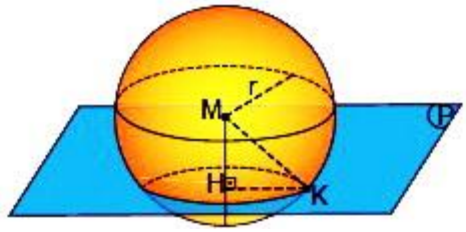
Kürenin merkezini içine alan bir düzlemle ara kesitine **kürenin büyük çemberi** denir. Kürenin büyük çemberlerinin merkezi aynı noktadadır. Bu nokta kürenin de merkezidir.



- Bir küre yüzeyi üzerindeki herhangi bir çemberin merkezinden geçen yarıçap doğrultusu çemberin düzlemine diktir.



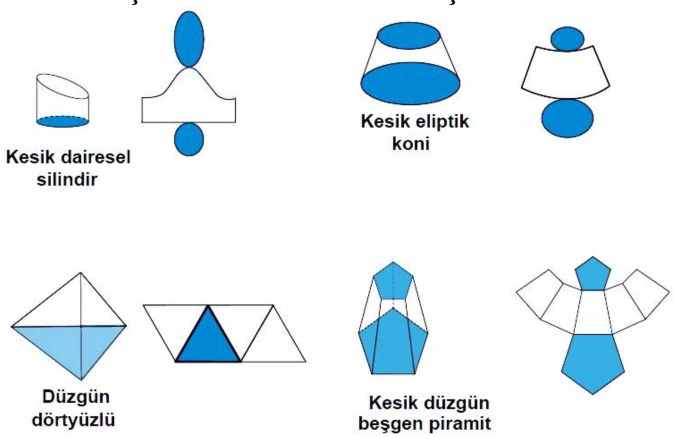
Bir küre yüzeyi ile kesişen düzlemin ara kesitinin çember veya tek noktadır.



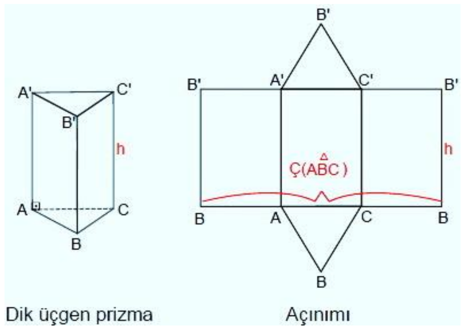
Herhangi bir A noktasının M merkezli r yarıçaplı küreye göre konumu;

1. $|MA| < r$ ise A noktası kürenin içindedir.
2. $|MA| = r$ ise A noktası kürenin üzerindedir.
3. $|MA| > r$ ise A noktası kürenin dışındadır.

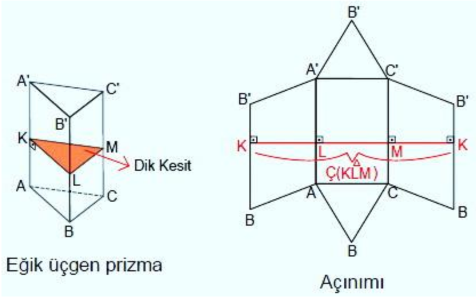
ÇOKYÜZLÜLERİN AÇINIMI



ÇOKYÜZEYLİ KATI CİSİMLERİN YÜZEY ALANI



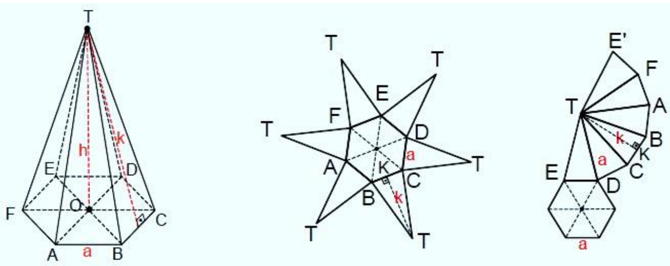
- Bir dik prizmanın yanal alanı, taban çevresi ile yükseklik uzunluğunun çarpımına eşittir. Yanal alan AY olmak üzere;
  $A_Y = Ç(ABC).h$
- Bir eğik prizmanın yanal alanı, dik kesit çevresi ile yanal ayrıt uzunluğunun çarpımına eşittir.
  $A_Y = Ç(KLM).|AA'|$



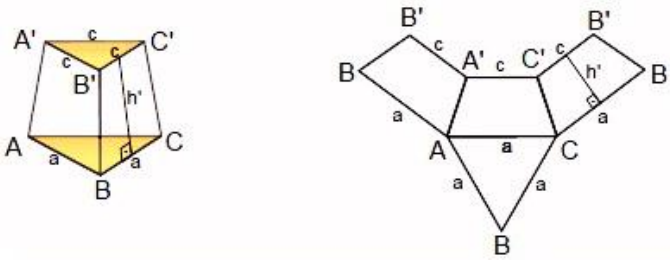
- Bir prizmanın yüzey alanı (A); birbirine eş çokgensel bölgelerden oluşan alt ve üst taban alanları (A_T) ile yanal alanının (A_Y) toplamına eşittir. $A = A_Y + 2.A_T$

PİRAMİDİN YÜZEY ALANI

(T,ABCDEF) düzgün piramidin taban ayrıtı a br, yan yüz yüksekliği de k br olsun.
(T,ABCDEF) düzgün piramidin yanal alanı, açınımında elde edilen her bir üçgensel bölgenin alanlarının toplamına eşittir. Buna göre yüzey alanı, $A = A_Y + A_T$ olur.



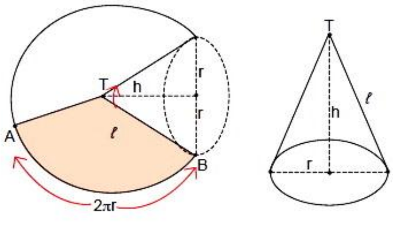
Yukarıda verilen altıgen düzgün piramidin yüzey alanı, $A = \frac{3a\left(a\sqrt{3}+2k\right)}{2}$ olur.



Düzgün kesik piramidin tüm alanı, yanal alanı ile alt ve üst taban alanlarının toplamına eşittir.

$$A_y = \frac{h'.(Ç + Ç')}{2}$$

KONİNİN YÜZEY ALANI

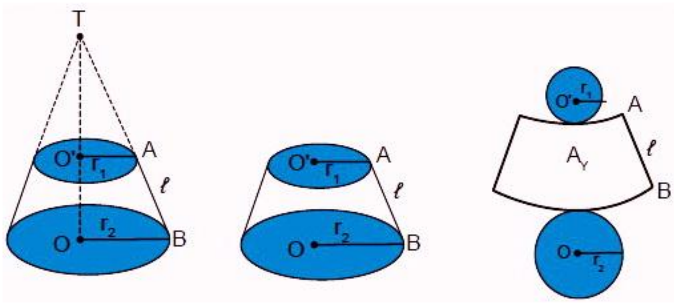


Şekil I Şekil II

Koninin yanal alanı; taban çevresi ile yanal yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

$$A_y = \frac{Ç_t . h_y}{2}$$

Koninin yüzey alanı; $A = A_Y + A_T = \pi r\ell + \pi r^2$ dir.

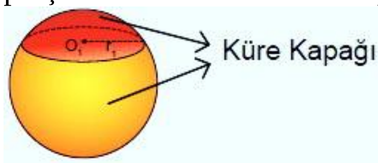


Dik dairesel kesik koninin yüzey alanı, taban alanları ile yanal yüzey alanının toplamına eşittir.

$$A = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi\ell(r_1 + r_2)$$

KÜRE YÜZEYİNİN ALANI

Küre yüzeyinin bir düzlemle kesilmesi sonucunda elde edilen parçaların her birine **küre kapağı** denir.



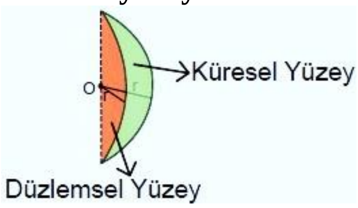
Bir küre kapağı ile bu kapağın taban dairesi tarafından sınırlandırılan cisme **küre parçası** denir.

Bir küre yüzeyinin paralel iki düzlem arasında kalan parçasına **küre kuşağı** denir.

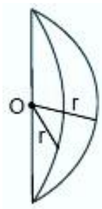
Küre kuşağı ile paralel düzlemler arasında kalan cisme **küre tabakası** denir.

Kürenin bir çapında kesişen iki yarı düzlemle küre yüzeyi arasında kalan cisme **küre dilimi** denir.

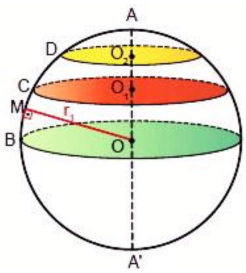
Küre dilimi üzerindeki küresel yüzey parçasına **küre diliminin küresel yüzeyi**, küre dilimi üzerindeki düzlemsel yüzey parçalarına ise **küre diliminin düzlemsel yüzeyleri** denir.



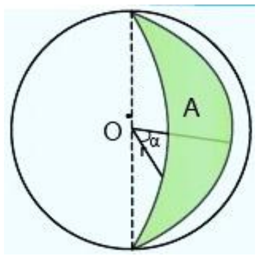
Küre dilimini oluşturan iki yarı düzlem arasındaki α açısına **küre diliminin küresel yüzey açısı** denir.



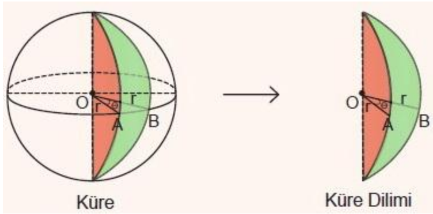
Kürenin alanı, $A=4\pi.r^2$ dir.



- Bir kürenin bir düzlemle kesilmesinden elde edilen **küre kapağının yüzey alanı**, küre kapağının yüksekliği $|OA| = h$ olarak alınırsa küre kapağının yanal alanı $A_Y = 2\pi rh$ br^2 dir.
- r yarıçaplı bir küreden kesilen h yüksekliğindeki **küre kuşağının alanı**, $|OO_1| = h$ alınırsa küre kuşağının yüzey alanı $A_Y = 2\pi rh$ br^2 dir.



r yarıçaplı kürede küresel yüzey açısı α olan **küre diliminin küresel yüzeyinin alanı** $A=2r^2.\alpha$ ile bulunur.

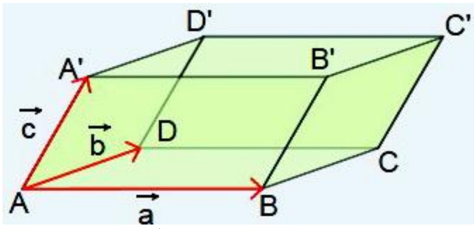


r yarıçaplı kürede küresel yüzey açısı derece cinsinden θ olan bir küre diliminin alanı

$$A = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{90^0} + 1\right)$$

ÇOKYÜZEYLİ KATI CİSİMLERİN HACİMLERİ

PRİZMANIN HACMİ

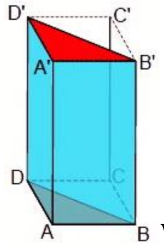


Lineer bağımsız $\vec{a}, \vec{b}$ ve $\vec{c}$ üzerine kurulu paralelyüzün hacmi; $V = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\langle \vec{a} x \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ eşitliği ile hesaplanır (Küp ve dikdörtgenler prizması içinde bu hacim formülü geçerlidir.).

Dikdörtgenler prizmasının **hacmi** taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. Bir köşesinden geçen üç ayrıtın uzunluğu a, b, c olan dikdörtgenler prizmasının hacmi $V=a.b.c$ br^3 tür.
Bir ayrıtın uzunluğu a br olan kübün hacmi ise $V=a^3$ br^3 tür.

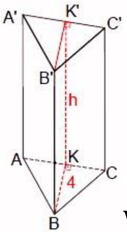
Dik prizmanın hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. $V=A_T.h$

a. Dik prizmanın tabanı dik üçgen ise;



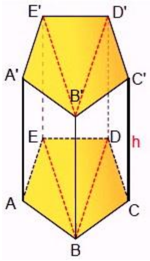
$V = \frac{|AB|.|AD|.|AA'|}{2}$

b. Dik prizmanın tabanı herhangi bir üçgen ise;

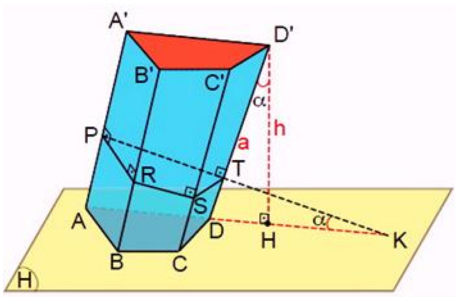


$V = \frac{|AC|.|BK|.h}{2}$

c. Dik prizmanın tabanı bir çokgen ise;



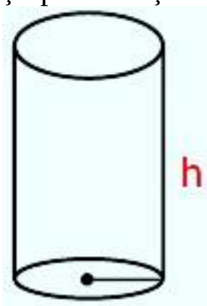
$V = \frac{3\sqrt{3}.a^2.h}{2}$



Eğik prizmanın hacmi dik kesit alanı ile yan ayrıt uzunluğunun çarpımına eşittir. V=A(PRST).a
Eğik prizmanın hacmi aynı zamanda taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına da eşittir. $V=A_T.h$

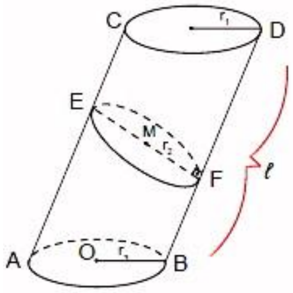
SİLİNDİRİN HACMİ

Dik dairesel silindirin hacmi; taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. $V=A_T.h$



V=πr2h

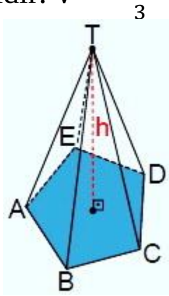
Eğik silindirin hacmi, dik kesit alanı ile bir elemanının uzunluğunun çarpımına eşittir.

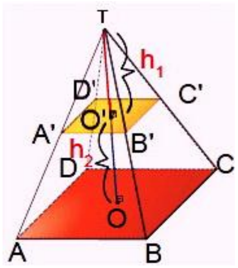


$V = \pi r_2^2.\ell$

PİRAMİDİN HACMİ

Bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte biridir. $V = \frac{A_T.h}{3}$



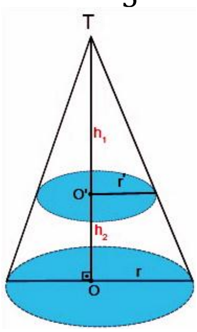


Kesik piramidin alt taban alanı A, üst taban alanı A' ve yüksekliği h_2 olmak üzere **kesik piramidin hacmi**, $V = \frac{h_2.(A+A'+\sqrt{A.A'})}{3}$ dür.

KONİNİN HACMİ

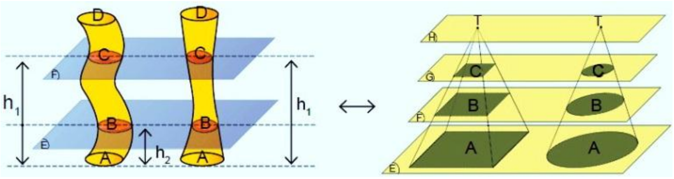
Bir dik dairesel koninin hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

$$V = \frac{A_T.h}{3}$$



Kesik koninin alt taban alanı A, üst taban alanı A' ve yüksekliği h_2 olmak üzere dik dairesel kesik koninin hacmi, $V = \frac{h_2.(A+A'+\sqrt{A.A'})}{3}$ dür.

CAVALİERİ PRENSİBİ

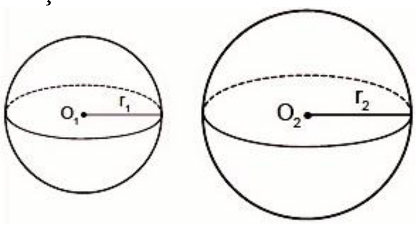


Taban alanları ve yükseklikleri eş olan iki cismin, tabandan aynı uzaklıktaki tabana paralel kesitlerinin alanları eşit ise bu iki cismin hacimleri de birbirine eşittir.

KÜRENİN HACMİ

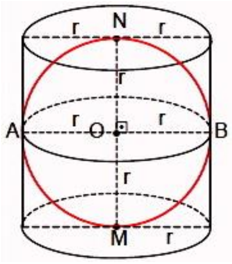
Kürenin hacmi küre yüzeyinin alanı ile yarıçapının üçte birinin çarpımıdır. Yarıçapı r olan kürenin hacmi $V = \frac{A.r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$ olur.

İki kürenin hacimleri oranı yarıçaplarının küpleri oranına eşittir.

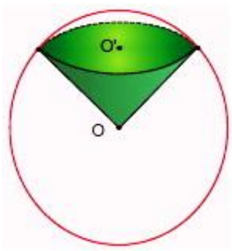


$\frac{V_1}{V_2} = \frac{{r_1}^3}{{r_2}^3}$

Kürenin hacmi küreyi çevreleyen silindirin hacminin üçte ikisine eşittir.

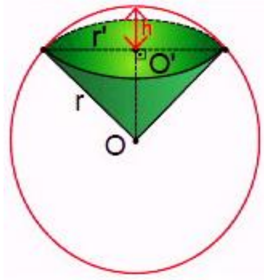


$\frac{V_K}{V_S} = \frac{2}{3}$

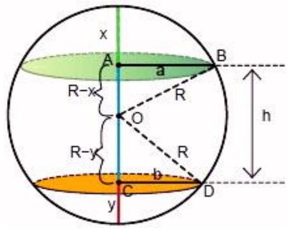


Yukarıdaki taralı bölge: küre parçası ile tepe noktası O, tabanın merkezi O' olan koninin birleşimidir. Bu cisme **küresel koni** denir. Kürenin yarıçapı r, küresel koninin yüksekliği h olmak üzere; küresel koninin hacmi $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ dır.

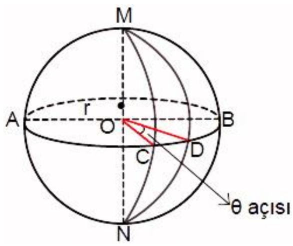
Küre parçasının hacmi, şekildeki küresel koninin hacminden, tepesi O noktası ve tabanın merkezi O' olan koninin çıkarılması ile elde edilir.



$V = \frac{1}{3}.\pi.h^2.(3r-h)$



Taban yarıçapları a, b ve yüksekliği h olan küre tabakasının hacmi; $V = \frac{1}{6}.\pi.h.[3.(a^2+b^2)+h^2$ dir.



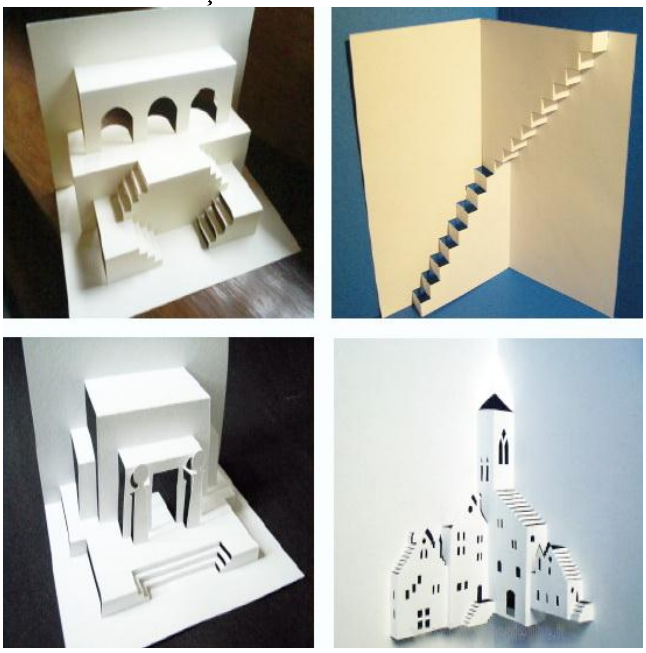
Küre diliminin hacmi; $V = \frac{\pi r^3 \theta}{270}$ dir.

ÜNİTE 4: UZAYDA SÜSLEMELER, DÖNME VE PERSPEKTİF ÇİZİMLER

KATI CİSİMLERLE TEK VE ÇOKYÜZEYLİ YAPILARIN OLUŞTURULMASI

KİRİGAMİ

Kirigami, origami diye isimlendirilen kâğıt katlama sanatından türetilen sanattır. Kâğıt katlamanın yanında kesme işlemi de yapılır. Japonca bir kelime olan kirigami, kiru (kesmek) ve kami (kağıt) kelimelerinden oluşmuştur. Aşağıda çeşitli krigami örnekleri verilmiştir.



ÇOKYÜZLÜLERDE SÜSLEME

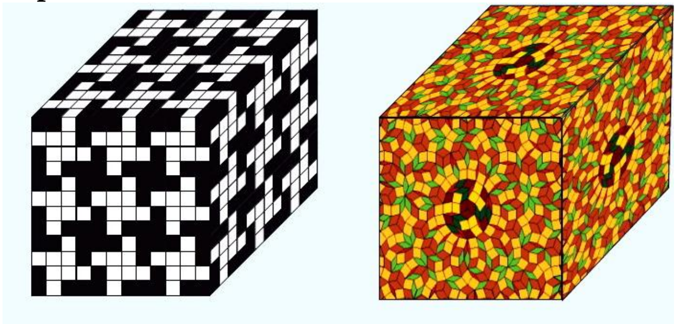
Düzlemsel Kaplama Teknikleri

Düzgün kaplama: bir düzlemsel bölgenin, bir motif kullanılarak boşluk kalmayacak ve motifler çakışmayacak şekilde dönüşümler (yansıma, dönme, öteleme, ötelemeli yansıma) kullanılarak örtülmesidir.

Yarı düzgün kaplama: Bir düzlemsel bölgenin, birden fazla motif kullanılarak boşluk kalmayacak ve motifler çakışmayacak şekilde dönüşümler (yansıma, dönme, öteleme ve ötelemeli yansıma) kullanılarak örtülmesidir.

Periyodik ve Periyodik Olmayan Kaplamalar

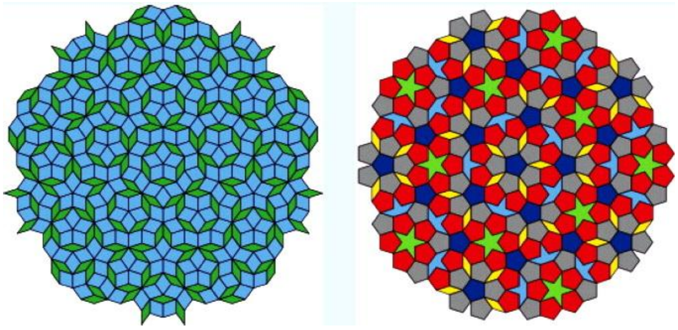
Sadece çokgensel bölgelerden (paralelkenar, dikdörtgensel, eşkenar dörtgensel, karesel ve düzgün altıgensel bölgelerden) biriyle yalnız öteleme dönüşümü kullanılarak düzlemde boşluk kalmayacak ve çakışmayacak biçimde düzlemin örtülmesine **periyodik kaplama**, öteleme dönüşümü kullanılmadan düzlemde boşluk kalmayacak ve çakışmayacak biçimde yüzeyin çokgensel bölgeyle örtülmesine **periyodik olmayan kaplama** denir.



Periyodik kaplama örneği — Periyodik olmayan kaplama örneği

Beşli Dönme Simetrili (Pentapleks) Kaplama

Beşli dönme simetrisine sahip periyodik olmayan kaplamalara **beşli dönme simetrili kaplama (pentapleks kaplama)** denir. Aşağıda verilen Penrose (Penroz) karoları, pentapleks kaplama örnekleridir.

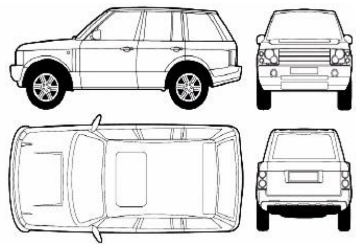


YAPILARIN DÖNDÜRÜLMESİ

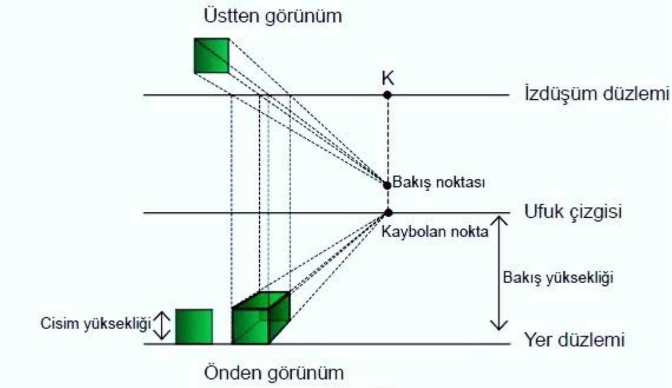
Üretimi yapılacak herhangi bir parçanın ya da aletin bir yüzeyinin görüntüsü parçayı ya da aleti tanımlamaya yetmez. Verilen cismin tek yönden görünüşü o cisim hakkında yeterli bilgiyi vermez. Bu nedenle bir parçayı ya da aleti üretebilmek için farklı yönlerden görüntülerinin çizilmesi gerekir.

Önden görünümü verilen bir parçanın üstten görünümünü bulmak için parça y eksenine göre saat yönünün tersinde 90^0 döndürülür.

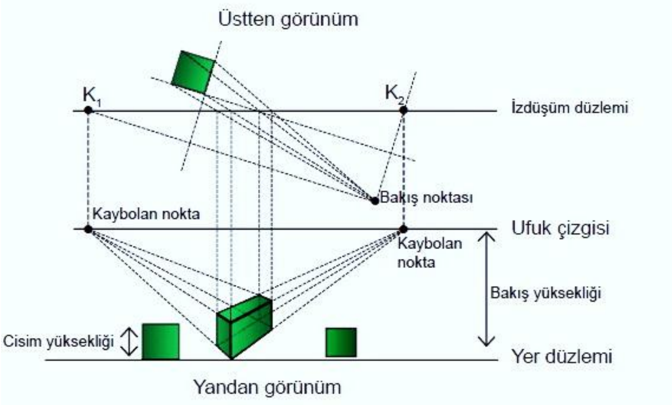
Sağdan görünümü bulmak için parça z eksenine göre saat yönünde 90^0 döndürülür.



BİR VE İKİ NOKTALI PERSPEKTİF ÇİZİMLER

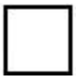
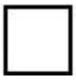


1.şekil

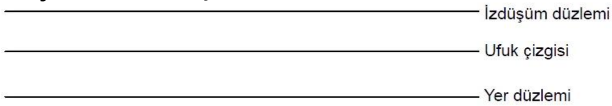


2.şekil

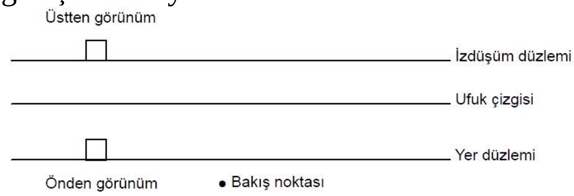
Bir nesnenin bir düzlem üzerine düşürülen görüntüsüne **izdüşüm** denir.
Cisimlerin görünüşünü iki boyutlu düzlem üzerinde, insan gözünün gördüğü gibi üç boyutlu olarak çizebilme olanağını sağlayan izdüşüm yöntemlerine **perspektif izdüşümü** denir.
Perspektif çizilerek nesneye gönderilecek bakış ışınlarının kaynaklandığı sabit noktaya (gözlemcinin gözünün bulunduğu noktaya) **bakış noktası**, bakış noktasının perspektifi çizilecek nesneye olan uzaklığına **bakış uzaklığı** denir.
Bakış noktasının yer düzleminden olan yüksekliğine **bakış yüksekliği** denir. Bakış yüksekliği aynı zamanda ufuk yüksekliğidir ve gözlemcinin boyuna bağlı olarak yukarı aşağı hareket ettirilebilir.
Üzerinde perspektif izdüşüm görüntüsünün resmedileceği düşey düzleme **izdüşüm düzlemi** denir.
İzdüşüm düzleminin yer ile meydana getirdiği arakesite **yer düzlemi** denir.

ÖRNEK: Üstten görünümü  ve önden görünümü  olan küpün bir nokta perspektif çiziminin aşamalarını görelim.

1. Kağıt üzerine ufuk çizgisi, izdüşüm düzlemi ve yer düzlemi çizilir.

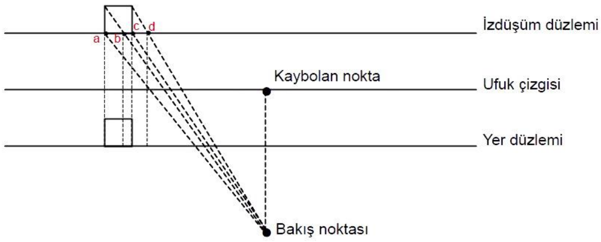


2. Cismin önden görünümü yer düzlemi üzerine, üstten görünümünü izdüşüm düzlemi üzerine aynı hizada çizip bakış noktasının yerini belirleyelim. Bakış noktası genelde cismin genişliğinin iki katı kadar uzağına yerleştirilir. Üstten ve önden genişlikleri aynı olmalıdır.



3. Bakış noktasından ufuk çizgisine dikme çizdiğimizde ufuk çizgisini kesen nokta kaybolan noktadır.

4. Cismin üstten görünümünün köşelerini bakış noktası ile birleştirelim. Bu çizgilerin izdüşüm düzlemini kestiği a, b, c ve d noktalarından yer düzlemine dikmeler çizelim.



5. Cismin önden görünümünün köşelerini kaybolan nokta ile birleştirelim. Bu çizgilerle a, b, c, d noktalarından çizdiğimiz dikmenin kesişme noktalarını belirleyip cismi tamamlayalım.