2012

11. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

TOLGA YAVAN

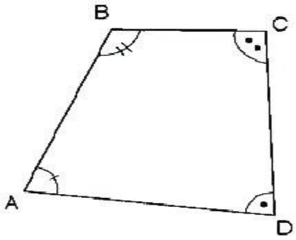
Matematik Öğretmeni

11. SINIF GEOMETRİ KONU ÖZETİ

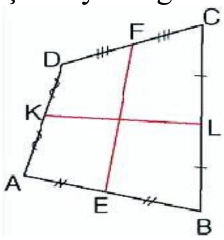
1. ÜNİTE: DÖRTGENLER

DÖRTGEN VE TEMEL ELEMANLARI

Herhangi üçü doğrusal olmayan A, B, C ve D noktaları verilsin. [AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçalarının birleşim kümesinin oluşturduğu kapalı şekle **ABCD dörtgeni** denir.



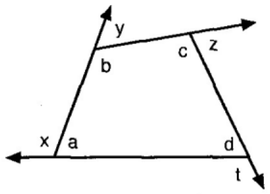
Yukarıda verilen ABCD dörtgeninde; [AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçalarına dörtgenin **kenarları**, A, B, C ve D ye dörtgenin **köşeleri**, $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ açılarına dörtgenin **iç açıları** denir.
Açı, köşe ve kenar, dörtgenin temel elemanlarıdır.
Her bir iç açısının ölçüsü 180^0 den küçük olan dörtgene **dışbükey (konveks) dörtgen**; herhangi bir iç açısının ölçüsü 180^0 den büyük olan dörtgene de **içbükey (konkav) dörtgen** denir.
Ders kitabımızda dörtgen kavramı, aksi belirtilmedikçe dışbükey dörtgen olarak anlaşılır.



Bir dörtgende komşu olmayan iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir. Yukarıdaki şekilde [KL] ve [EF], ABCD dörtgeninin orta tabanlarıdır.

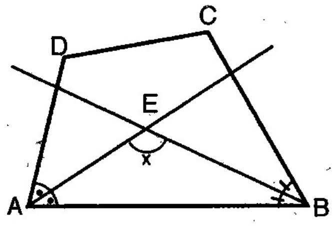
DÖRTGENLERDE AÇILARIN ÖZELLİKLERİ

1. Bir dörtgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



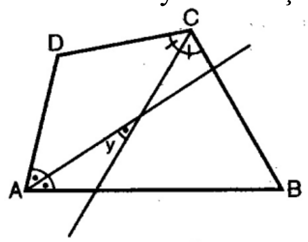
$$a + b + c + d = 360°$$
$$x + y + z + t = 360°$$

2. Bir dörtgende ardışık iki açının açıortayları arasında oluşan açı, diğer iki açının toplamlarının yarısına eşittir.



$$x = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$

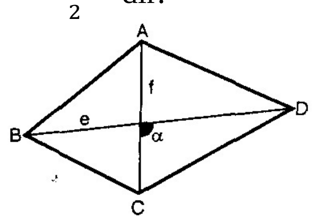
3. Bir dörtgende karşılıklı iki açının açıortayları arasında oluşan dar açı, diğer iki açının mutlak farkının yarısına eşittir.



$$y = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})|}{2}$$

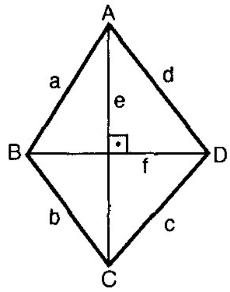
DÖRTGENLERDE ÇEVRE VE ALAN ÖZELLİKLERİ

1. Dörtgenin çevresi dört kenar uzunluğunun toplamıdır.
2. Köşegen uzunlukları e, f, köşegenleri arasındaki açısı α olan bir dörtgenin alanı; $A(ABCD) = \frac{e.f.\sin\alpha}{2}$ dir.

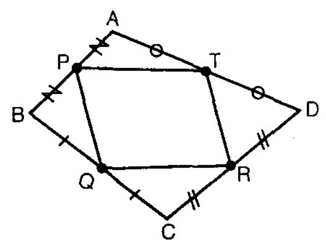


$\alpha=90^0$ ise;

i. $A(ABCD) = \frac{e.f}{2}$
ii. $a^2+c^2=b^2+d^2$ dir.



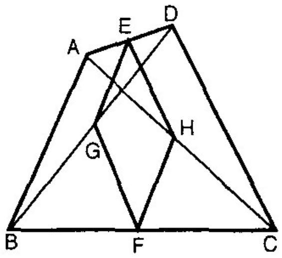
3.



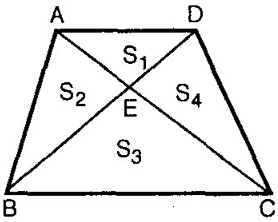
Bir dörtgende kenarların orta noktaları P, Q, R, T ise;

- **i.** PQRT dörtgeni paralelkenardır.
- **ii.** $A(PQRT) = \frac{A(ABCD)}{2}$ dir.
- **iii.** ABCD dörtgeninde köşegenler eşit ise PQRT **eşkenar dörtgendir.**
- **iv.** ABCD dörtgeninde köşegenler dik ise PQRT **dikdörtgendir.**
- **v.** ABCD dörtgeninde köşegenler hem eşit ve hem de dik ise PQRT **karedir.**

4. Köşegenleri birbirini ortalamayan dörtgenlerde köşegenlerin orta noktaları ile karşı kenarların orta noktalarını birleştiren dörtgen **paralelkenardır.** E, F, G, H üzerinde bulundukları doğru parçalarının orta noktaları ise EGFH bir **paralelkenardır.**

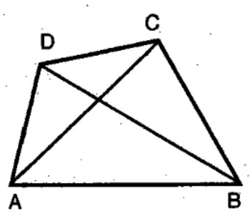


5. Köşegenlerin meydana getirdiği alanların karşılıklı çarpımları eşittir.



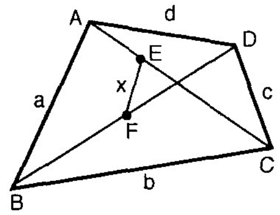
$S_1.S_3=S_2.S_4$

6. Bir konveks dörtgende köşegen uzunluklarının toplamı dörtgenin çevresinden küçük yarı çevresinden büyüktür.



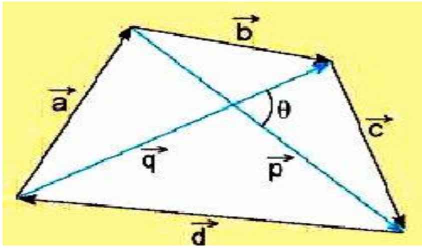
$$\frac{Ç(ABCD)}{2} < |AC| + |BD| < Ç(ABCD)$$

7. Bir konveks dörtgende kenar uzunlukları a, b, c, d köşegen uzunlukları e, f, köşegenlerin orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu x olmak üzere;



$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4x^2$

Dörtgenlerde Vektörel Alan

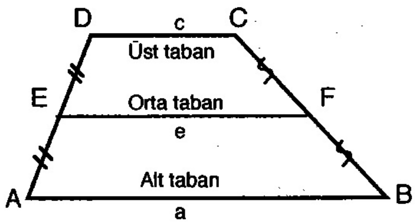


1. $A(ABCD) = \frac{\|\vec{p}\|.\|\vec{q}\|.\sin\theta}{2}$

2. $A(ABCD) = \frac{\sqrt{\|\vec{p}\|^2.\|\vec{q}\|^2-\langle\vec{p},\vec{q}\rangle^2}}{2}$ dir.

2. ÜNİTE: ÖZEL DÖRTGENLER

YAMUK



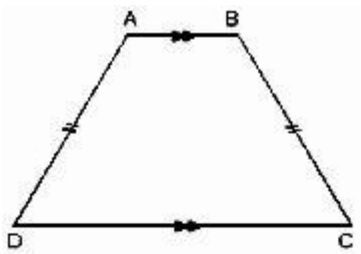
Yalnız iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir.
Paralel olan [AB] ve [DC] yamuğun **tabanlarıdır.**
[BC] ve [AD] yamuğun **ayaklarıdır.**
E ve F yamuğun ayaklarının orta noktaları olmak üzere [EF] na yamuğun **orta tabanı** denir.

$$e = \frac{a+c}{2}$$

$$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CDA}) = 180^0$$

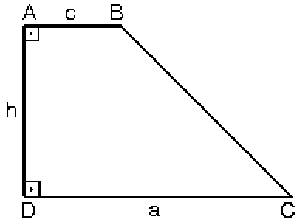
$$m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{DCA}) = 180^0$$

İKİZKENAR YAMUK



Paralel olmayan kenarları eşit uzunlukta olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.
ABCD ikizkenar yamuğunda, $|AD|=|BC|$, $|AC|=|BD|$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ dir.

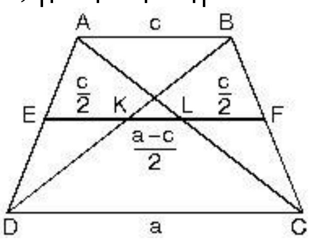
DİK YAMUK



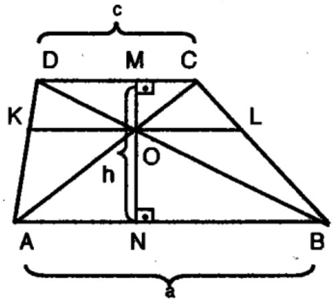
Yan kenarlarından biri tabana dik olan yamuğa **dik yamuk** denir.
Yandaki ABCD dik yamuğunda; $m(\widehat{A})=m(\widehat{D})=90^{o}$ dir.
ABCD dik yamuğunun yüksekliği $h = |AD|$ dir.
$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0$ dır.

YAMUK ÖZELLİKLERİ

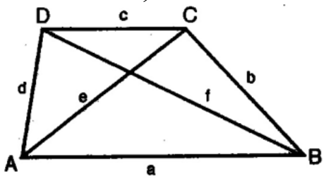
1. Şekildeki ABCD yamuğunda, [EF] orta taban, [AC] ve [BD] köşegenler, $|AB| = a$, $|CD| = c$ olmak üzere;
   $|EK| = |LF| = \frac{c}{2}$, $|EL| = |KF| = \frac{a}{2}$
   $|KL| = \frac{a-c}{2}$, $|EF| = \frac{a+c}{2}$
   $|EF|+|KL|=a$, $\big||EF| - |KL|\big| = c$ dir.



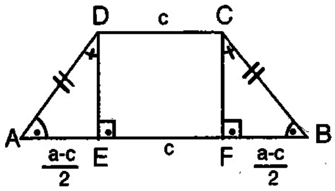
2. Yamukta O, köşegenlerin kesim noktası ve [KL]//[AB] olmak üzere;
   $|OK| = |OL| = \frac{a.c}{a+c}$, $|OM| = \frac{c.h}{a+c}$, $|ON| = \frac{a.h}{a+c}$ dir.



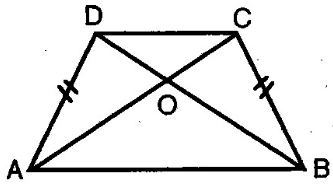
3. ABCD yamuğunda köşegenler $|AC| = e$, $|BD| = f$ olmak üzere; $e^2+f^2=b^2+d^2+2ac$ dir.



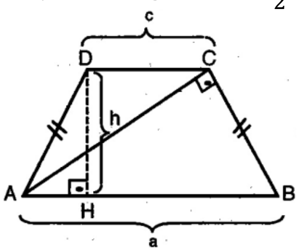
4. İkizkenar yamukta yüksekliklerin köşelerden ayırmış olduğu uzunluklar eşittir.
   $\overset{\triangle}{ADE} \cong \overset{\triangle}{BCF}$ ve $|AE| = |FB| = \frac{a-c}{2}$ dir.



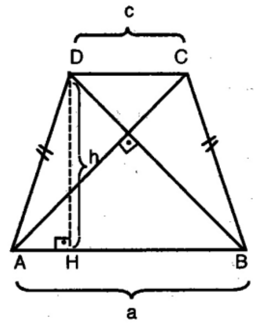
5. İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir.
   $|AO| = |OB|$, $|CO| = |OD|$, $|AC| = |BD|$



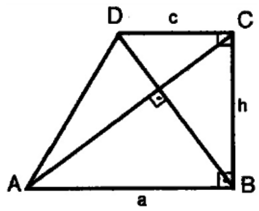
6. İkizkenar yamukta köşegen yan kenara dik ise; yamuğun yüksekliği $h = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2}$ dir.



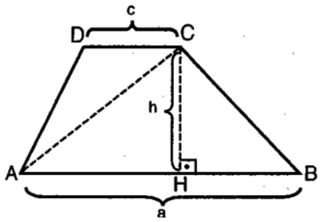
7. İkizkenar yamukta köşegenler birbirine dik ise; yamuğun yüksekliği $h = \frac{a+c}{2}$ dir.



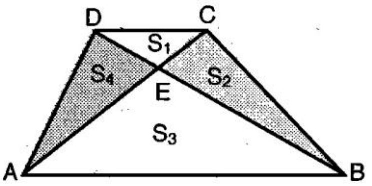
8. Dik yamukta köşegenler birbirine dik ise yükseklik alt ve üst tabanın geometrik ortasıdır. $h = \sqrt{a.c}$



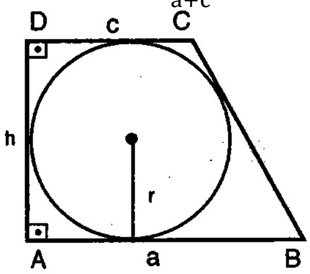
9. Yamuğun alanı; alt ve üst tabanlar toplamının yarısı ile yüksekliğin çarpımına eşittir. $A(ABCD) = \frac{(a+c).h}{2}$



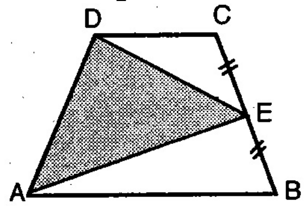
10. Şekilde verilen yamuğa göre;
$S_1 + S_2 = S_1 + S_4$, $S_3 + S_2 = S_3 + S_4$,
$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1.S_3}$
$A(ABCD) = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}\right)^2$ dir.



11. Dik yamukta, iç teğet çemberin yarıçapı r olmak üzere; $h = 2r = \frac{2ac}{a+c}$ dir.

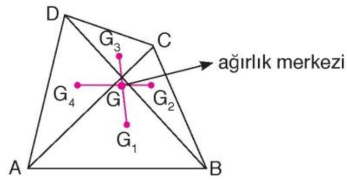


12. Bir yamukta, yan kenarlardan birisinin orta noktası, karşı iki köşe ile birleştirildiğinde elde edilen üçgenin alanı, yamuğun alanının yarısına eşittir. ABCD yamuk ve |BE|=|CE| ise; $A(ADE) = \frac{A(ABCD)}{2}$ dir.



DÖRTGENSEL BÖLGENİN AĞIRLIK MERKEZİ

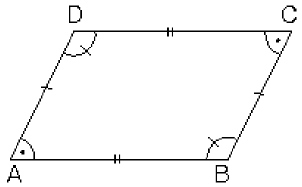
Bir dörtgensel bölge için, bu dörtgenin bir köşegenini çizerek oluşturduğumuz iki üçgenin ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçası ile aynı şekilde diğer köşegenini çizerek oluşturduğumuz iki üçgenin ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçasının kesim noktası, bu dörtgensel bölgenin ağırlık merkezidir.



PARALELKENAR

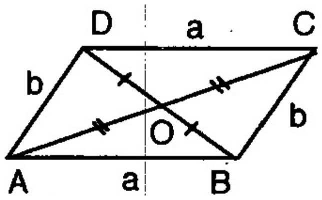
Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.
Yani [AB] // [DC] ve [AD] // [BC] ise ABCD paralelkenardır.

- Paralelkenar da, karşılıklı açılar eşit; ardışık açılar bütünlerdir.
- Paralelkenarda karşılıklı kenarların uzunlukları birbirine eşittir.
- Paralelkenar da, karşılıklı açılar eşit; ardışık açılar bütünlerdir.

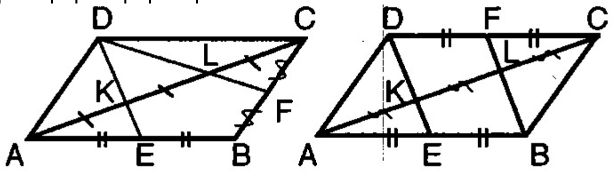


PARALELKENAR ÖZELLİKLERİ

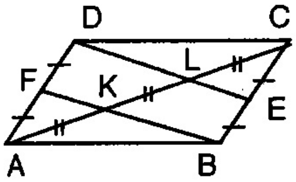
1. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar. |AC| = e, |BD| = f kenar uzunlukları a, b olmak üzere; $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$
   |AO| = |OC|; |DO| = |BO| $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$: $\widehat{ODA} \cong \widehat{OBC}$



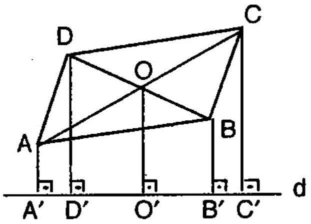
2. Paralelkenarda E ve F, bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere; |AK|=|KL|=|LC| dir.



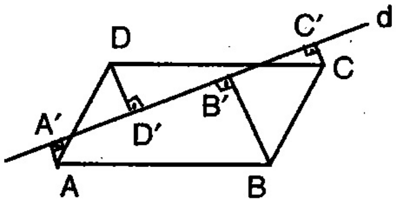
3. Paralelkenarda E ve F, [AD] ve [BC] nin orta noktaları olmak üzere; |AK|=|KL|=|LC|, |FK|=|LE|, |KB|=|DL| dir.



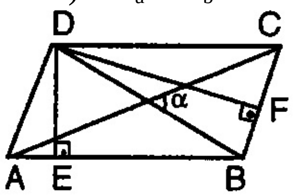
4. ABCD paralelkenar; [AA']//[BB']//[CC'] // [DD'] // [OO'] ve [OO'] $\perp$d olmak üzere; [AA']+ [CC'] =[BB'] +[DD'] =2.[OO']



5. ABCD paralelkenar; [AA']//[BB']//[CC'] // [DD'] ve [DD']$\perp$d olmak üzere; [AA']+ [CC'] =$\left||BB'| - |DD'|\right|$ dür.

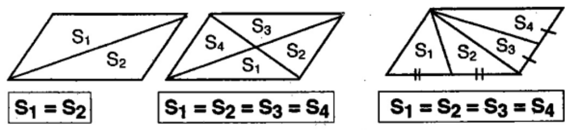


6. Paralelkenarın farklı kenar uzunlukları a ve b, bunlara ait yükseklikler h_a ve h_b olmak üzere; A(ABCD)=a.h_a=b.h_b dir.

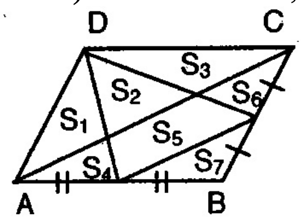


7. Herhangi bir paralelkenarda,

I.



II. Alan(ABCD)=A olmak üzere;



a) $S_1=S_2=S_3=\frac{A}{6}$

b) $S_4=S_6=\frac{A}{12}$

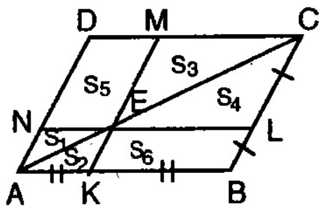
c) $S_1+S_4=S_3+S_6=\frac{A}{4}$

d) $S_2+S_5+S_7=\frac{A}{2}$

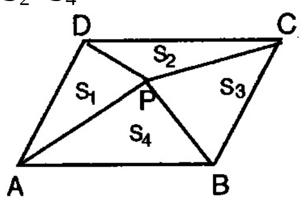
e) $S_2+S_5=\frac{3A}{8}$

f) $S_5+S_7=\frac{A}{3}$

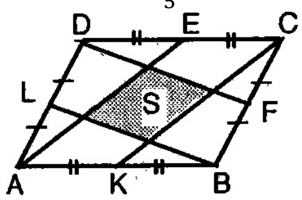
III. E∈[AC], [NL]//[AB] ve [MK]//[BC] olmak üzere; $S_1=S_2$, $S_3=S_4$, $S_5=S_6$ dır.



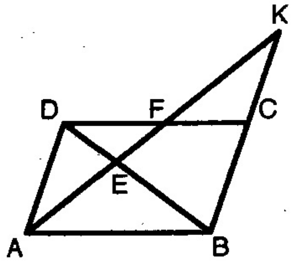
IV. P, paralelkenarın içinden alınan herhangi bir nokta almak üzere; $S_1+S_3=S_2+S_4$



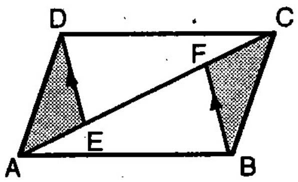
V. ABCD paralel kenar E, F, K ve L bulundukları kenarların orta noktaları ise, $S=\frac{A(ABCD)}{5}$ dir.



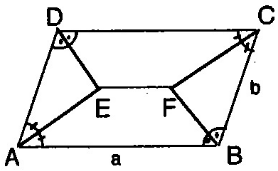
8. Şekilde ABCD paralelkenar ise;
$|AE|^2=|EF|.|EK|$ dır.



9. Şekilde ABCD paralelkenar ve [DE]//[BF] ise; $\widehat{AED} \cong \widehat{CFB}$ ve $\widehat{DEC} \cong \widehat{BFA}$ dır.

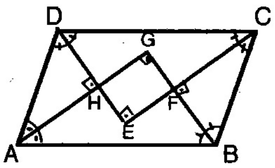


10. Şekilde ABCD paralelkenar [DE], [AE], [BF], [CF] açıortaylar, |AB|=a, |BC|=b ise |EF|=|a-b| dir.

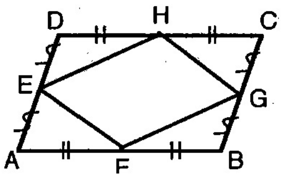


11.

a) ABCD paralelkenar ise; ardışık açıortayların kesişimi ile oluşan EFGH dörtgeni dikdörtgendir.



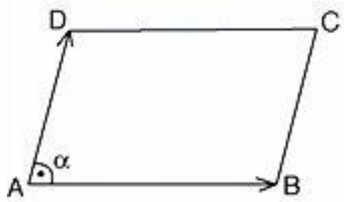
b) ABCD paralelkenar ise; kenarların orta noktalarını birleştirmekle elde edilen EFGH dörtgeni yine bir paralelkenar olur.



PARALELKENARIN VEKTÖREL ALANI

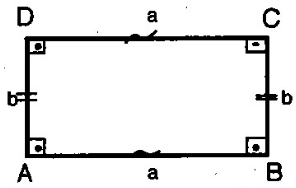
Yandaki ABCD paralelkenarsal bölgenin alanı;

$A(ABCD)=\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AD}\|^2-\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle^2}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\sin\alpha$ dır.



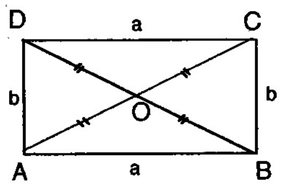
DİKDÖRTGEN

Karşılıklı kenarları eşit ve açıları dik olan paralelkenara **dikdörtgen** denir.
$m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=m(\widehat{D})=90°$, |AB|=|CD|=a ve |BC|=|AD|=b dir.
Dikdörtgen özel bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar.

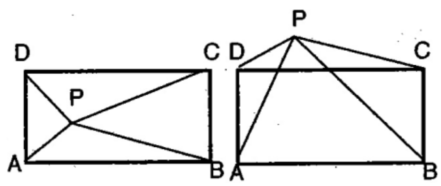


DİKDÖRTGEN ÖZELLİKLERİ

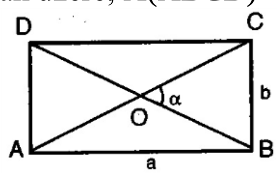
1. Köşegenleri birbirine eşittir. |AC|=|BD|=e
   |AB|=a, |BC|=b olmak üzere; $e=\sqrt{a^2+b^2}$ dir.



2. Dikdörtgensel bölge içinde veya dışında alınan bir nokta dikdörtgenin köşeleriyle birleştirildiğinde; $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$ dir.



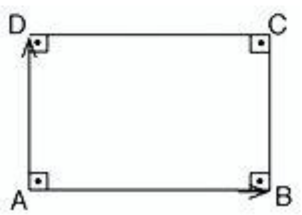
3. Dikdörtgenin alanı; |AC|=|BD|=e |AB|=a, |BC|=b olmak üzere; A(ABCD)=a.b



DİKDÖRTGENİN VEKTÖREL ALANI

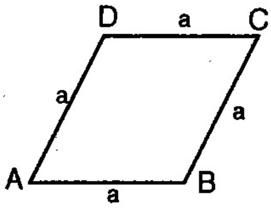
Bir dikdörtgenin alanı birbirine dik olan kenar vektörlerinin normlarının çarpımına eşittir.

$A(ABCD)=\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AD}\|^2-\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle^2}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|$ dir.



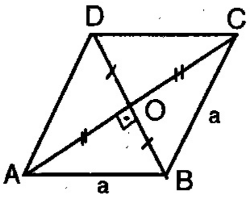
EŞKENAR DÖRTGEN

Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir.
Eşkenar dörtgen özel bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar.

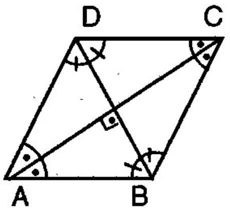


EŞKENAR DÖRTGEN ÖZELLİKLERİ

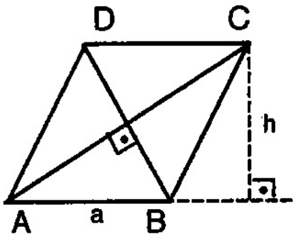
1. Eşkenar dörtgende, köşegenler birbirini dik olarak ortalar. [AC] ⊥ [BD] ve
   $|OA| = |OC| = \frac{|AC|}{2}$, $|OB| = |OD| = \frac{|BD|}{2}$ dir.
   Köşegenler $|AC| = e$, $|BD| = f$ olmak üzere;
   $e^2 + f^2 = 4a^2$ dir.



2. Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaylardır.



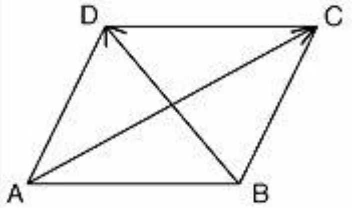
3. ABCD eşkenar dörtgeninde;
   A(ABCD) = a. h, A(ABCD) = $\frac{e.f}{2}$ dir.



EŞKENAR DÖRTGEN VEKTÖREL ALANI

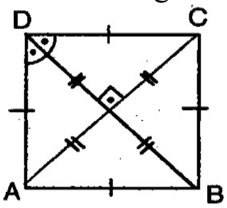
Bir ABCD eşkenar dörtgeninin alanı köşegen vektörlerinin çarpımının yarısına eşittir.

$$A(ABCD) = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BD}\|}{2}$$



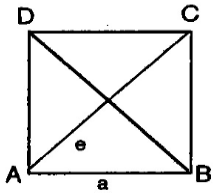
KARE

Kenar uzunlukları eşit olan dikdörtgene **kare** denir. Karenin köşegen uzunlukları birbirine eşit olup köşegenler dik kesişir. Aynı zamanda köşegenler, iç açıların açıortaylarıdır. Tüm kenarları eş olan dikdörtgendir. Dikdörtgen olduğundan dikdörtgenin tüm özelliklerini dolayısıyla paralelkenarın tüm özelliklerini, kenarları eşit olduğundan da eşkenar dörtgenin tüm özelliklerini sağlar.



KARE ÖZELLİKLERİ

1. $|AB| = a$, $|AC| = e$ olmak üzere $e = a\sqrt{2}$ dir.

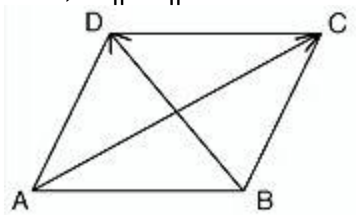


2. Karenin alanı: $|AB| = a$, $|AC| = e$ olmak üzere; $A(ABCD) = a^2 = \frac{e^2}{2}$ dir.

KARENİN VEKTÖREL ALANI

Aşağıdaki ABCD karesinin alanı şöyle hesaplanır:

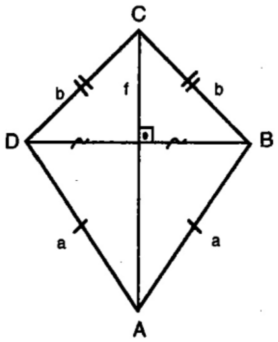
1. $A(ABCD) = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|^2}{2}$
2. $A(ABCD) = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ dir.



DELTOİD

Köşegenlerinden biri iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgene deltoid denir. Aşağıdaki ABCD deltoidinde;

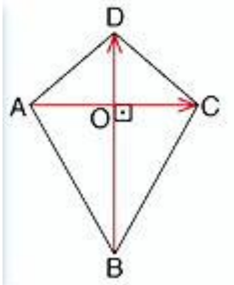
1. [BD] simetri eksendir. Yani, $|AO| = |OC|$, $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$ dir.
2. $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ dir.
3. [DB] ⊥ [AC] dir.
4. Ç(ABCD)=2.(a+b)
5. $A(ABCD) = \frac{e.f}{2}$ dir.



DELTOİDİN VEKTÖREL ALANI

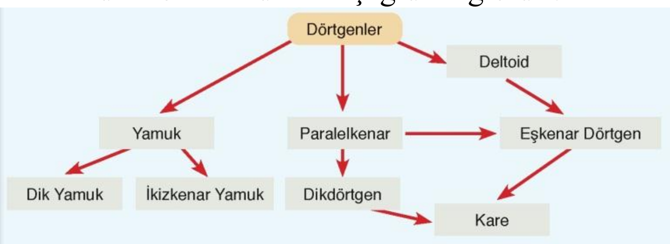
ABCD deltoid, |AD| = |DC|, |AB| = |BC| ve $\overrightarrow{AC}$ ile $\overrightarrow{BD}$ köşegen vektörleri olmak üzere;

$$A(ABCD) = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BD}\|}{2} \text{ dir.}$$



DÖRTGENLERİN SINIFLANDIRILMASI

Dörtgenler temel olarak üç dörtgene ayrılıp aralarındaki sınıflandırma aşağıdaki gibidir.



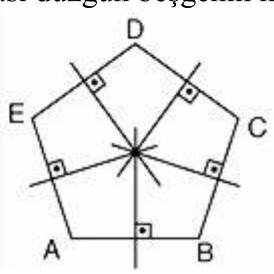
3. ÜNİTE: ÇOKGENLER

DÜZGÜN BEŞGEN

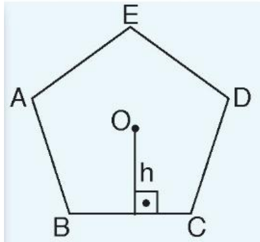
İç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan beşgene **düzgün beşgen** denir.

DÜZGÜN BEŞGEN ÖZELLİKLERİ

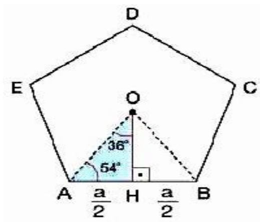
1. Her bir iç açısının ölçüsü 108° dir.
2. Bir düzgün beşgende kenar orta dikmelerin kesim noktası düzgün beşgenin merkezidir.



3. Aşağıdaki şekilde h, merkezin herhangi bir kenara olan dik uzaklığı Ç, düzgün beşgenin çevre uzunluğu olmak üzere düzgün beşgenin alanı A= $\frac{Ç.h}{2}$ dir.



4. Şekildeki düzgün beşgenin çevresinin uzunluğu Çevre (ABC)=5a Alanı;



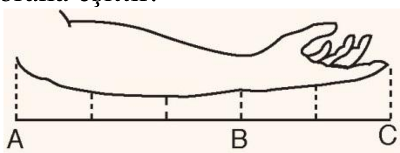
$$A(ABCDE) = \frac{a^2.\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cong 1{,}72.a^2$$

ALTIN ORAN

Bir doğru parçasının uzunluğunun, ayrıldığı iki parçadan büyüğünün uzunluğuna oranı, büyük parçanın uzunluğunun küçük parçanın uzunluğuna oranına eşit ise bu orana altın oran denir.

Altın oran $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olup 1.618... değerindedir.

Aşağıdaki resimde $\frac{|AB|+|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ olduğundan bu oran altın orana eşittir.

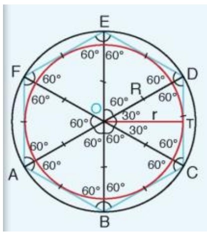


DÜZGÜN ALTIGEN

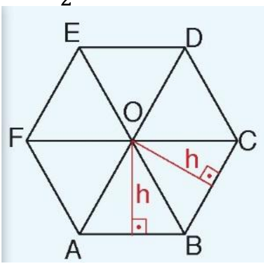
Tüm kenar uzunlukları ve iç açılarının ölçüleri birbirine eşit olan altıgene **düzgün altıgen** denir.

DÜZGÜN ALTIGEN ÖZELLİKLERİ

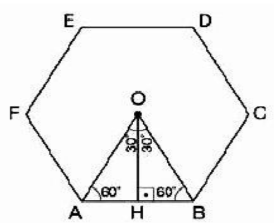
1. Aşağıdaki DOC üçgeninde, |DO| = R çevrel çemberin yarıçapı |OT|, R =$\frac{2r}{\sqrt{3}}$ tür.



2. Aşağıdaki düzgün altıgende h, merkezin herhangi bir kenara olan dik uzaklığı ve Ç düzgün altıgenin çevresi olmak üzere;
A(ABCDEF) = $\frac{Ç.h}{2}$ olarak bulunur.

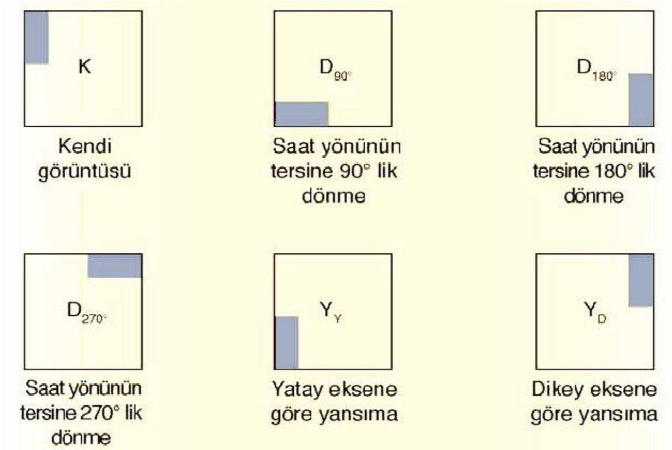


3. Şekildeki düzgün beşgenin çevresinin uzunluğu
Çevre (ABC)=5a
Alanı;
A(ABCDEF)
$$= \frac{a^2.3\sqrt{3}}{2} \cong 2{,}6.a^2$$

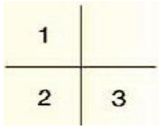


DÜZGÜN ÇOKGENLERLE FRAKTAL OLUŞTURMA

Fraktalın görüntüsü oluşturulduktan sonra $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyaları alınarak yine fraktalın kendisini oluşturacak biçimde aşağıdaki dönüşümlerden uygun olanlarla görüntüler üretilir.

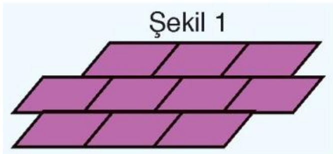


Hücrelerde kullanılan dönüşümler sağ üst kutu daima boş kalacak şekilde aşağıdaki sırada (1, 2, 3) olarak kodlanır.

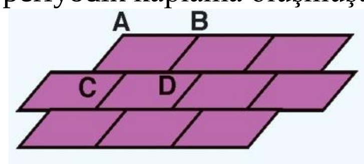


KAPLAMALAR

Sadece öteleme kullanılarak düzlemde boşluk kalmayacak ve çokgensel bölgeler çakışmayacak biçimde düzlemin örtülmesine periyodik kaplama denir.



Şekil 1 deki ABCD paralelkenarına sadece öteleme dönüşümü uygulanarak bir kaplama yapılmıştır. Bu nedenle bir periyodik kaplama oluşmuştur.



Verilen bir kaplama örneğinden yeni kaplama tasarımları elde etme teknikleri; birleştirme, bölme, dual ve dönmedir.

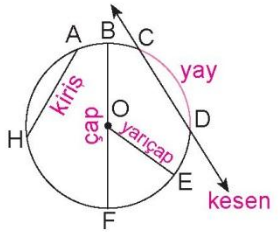
1. **Birleştirme:** Düzgün çokgensel bölgelerin komşu kenarlarının birleştirilmesi,
2. **Bölme:** Düzgün çokgensel bölgelerin merkezinden, kenarortay noktalarından ve köşegenlerinden bölünmesi,
3. **Dual:** Kaplamadaki düzgün çokgensel bölge ile komşu düzgün çokgensel bölgenin merkezinin doğru parçalarıyla birleştirilmesi,
4. **Dönme:** Kaplamadaki düzgün çokgensel bölgenin merkez etrafında $\frac{2\pi}{n}$ (n: düzgün çokgensel bölgenin kenar sayısı) kadar döndürülmesidir.

4. ÜNİTE: ÇEMBER

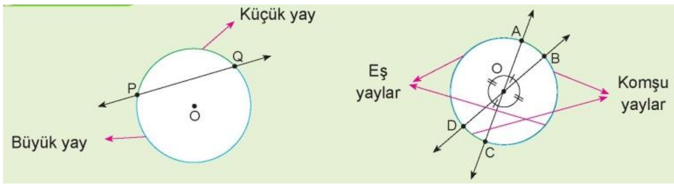
ÇEMBER, ÇEMBERİN TEMEL VE YARDIMCI ELEMANLARI

Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir.
Sabit noktaya çemberin merkezi, sabit uzaklığa da çemberin **yarıçapı** denir.

O merkezli ve r yarıçaplı çember Ç(O, r) biçiminde gösterilir.
Bir düzgün çokgenin kenar sayısı istenildiği kadar artırıldığında yaklaşık bir çember oluşturur.
Çemberin; iki noktasını birleştiren doğru parçasına **kiriş**, iki noktasından geçen doğruya **kesen**, merkezden geçen kirişine **çap**, bir parçasına da **yay** denir.
Çemberin temel elemanları yarıçap ve merkez, yardımcı elemanları kiriş, kesen ve yaydır.



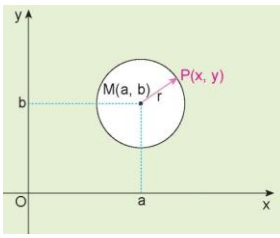
Bir çemberin üzerinde alınan farklı iki nokta çemberi iki yaya ayırır. Bu yaylardan ölçüsü 180° den (π radyandan) küçük olanına **küçük yay**, diğerine ise **büyük yay** denir.
Bir büyük yayın ölçüsü α ise küçük yayın ölçüsü 360° – α dır.
Bir çemberde ölçüleri aynı olan iki yaya **eş yaylar**, bir noktaları ortak olan iki yaya da **komşu yaylar** denir.



Yarıçap uzunlukları eşit olan çemberler eş çember, farklı olanlar benzer çemberlerdir.

ÇEMBERİN VEKTÖREL, STANDART VE GENEL DENKLEMİ

$\|\overrightarrow{MP}\| = r$ denklemine, merkezi M noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan bir çemberin **vektörel denklemi** denir.
$\|\overrightarrow{MP}\| = r$ vektörel denkleminde M(a, b) ve P(x, y) alınarak elde edilen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemine, merkezi M(a, b) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan çemberin **standart denklemi** denir.



Merkezi M(a, b) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan çember ailelerinin;
Merkezi x ekseni üzerinde ise b = 0 olacağından standart denklemleri $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ dir.
Merkezi y ekseni üzerinde ise a = 0 olacağından standart denklemleri $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir.
Standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olan çemberin denkleminde kare alma işlemleri uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemine **çemberin genel denklemi** denir. Burada D, E ve F katsayılarının, x^2 ve y^2 nin katsayıları 1 olduğu andaki katsayılar olduğuna dikkat edilmelidir.
$\Delta = D^2 + E^2 - 4F$ sayısına çember denkleminin diskriminantı denir ve Δ ile gösterilir.

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminde;
$\Delta = D^2 + E^2 - 4F$ olmak üzere;

- **i.** $\Delta > 0$ ise denklemi gerçek yarıçaplı bir çember belirtir. Merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapının uzunluğu $r = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ dir.
- **ii.** $\Delta = 0$ ise denklem bir nokta belirtir. Bu nokta, $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ merkez noktasıdır. (Nokta çemberi)
- **iii.** $\Delta < 0$ ise denklemi gerçek bir çember belirtmez. Bu durumda çember sanal yarıçaplı sanal çemberdir.

A, B, C, D, E, F ∈ R olmak üzere x ve y'ye bağlı, iki değişkenli, ikinci dereceden bir kapalı fonksiyonun genel ifadesi
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ biçimindedir. Bu denklem tüm koniklerin genel denklemidir. Bu denklemin çember belirtebilmesi için
$\Delta = D^2 + E^2 - 4F$ olmak üzere;

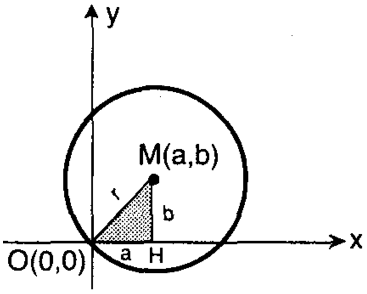
- **i.** x.y li terim olmamalı (C = 0)
- **ii.** x^2 ve y^2 nin katsayıları eşit ve 1 olmalı (A = B =1)
- **iii.** $\Delta > 0$ olmalıdır.

ÇEMBERDE ÖZEL DURUMLAR

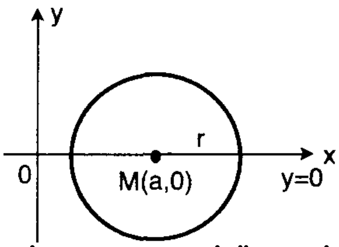
Merkezi M(a, b) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan çember ailelerinin;

1. **MERKEZİL (MERKEZCİL) ÇEMBER:** Merkezi O(0, 0) noktası olan çembere, merkezil çember denir. Merkezil çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir.

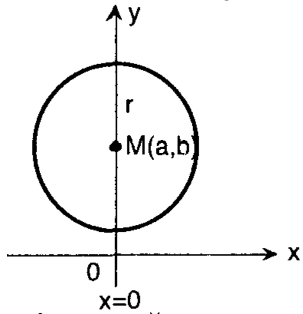
2. **BAŞLANGIÇ NOKTASINDAN GEÇEN ÇEMBER:** $a^2+b^2 = r^2$ elde edilir. Çemberin genel denkleminde F=0 olup denklem $x^2+y^2+Dx+Ey = 0$ konumunu alır. Yani başlangıç noktasından geçen bir çember denkleminde sabit yoktur.



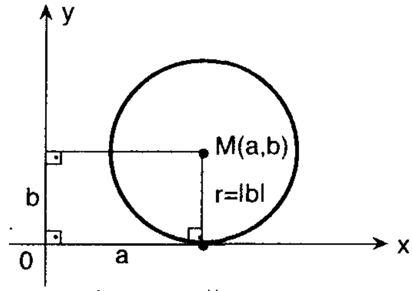
3. **MERKEZİ OX EKSENİ ÜZERİNDE BULUNAN ÇEMBER:** Çemberin standart denklemlerinde b = 0 olup $(x – a)^2 + y^2 = r^2$ şeklindedir. Çemberin genel denkleminde E=0 olup denklem $x^2+y^2+Dx+F = 0$ şeklindedir. Yani y li terim yoktur.



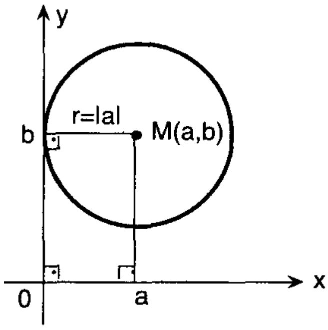
4. **MERKEZİ OY EKSENİ ÜZERİNDE BULUNAN ÇEMBER:** Çemberin standart denklemlerinde a = 0 olup $x^2 + (y – b)^2 = r^2$ şeklindedir. Çemberin genel denkleminde D=0 olup denklem $x^2+y^2+Ey+F = 0$ şeklindedir. Yani x li terim yoktur.



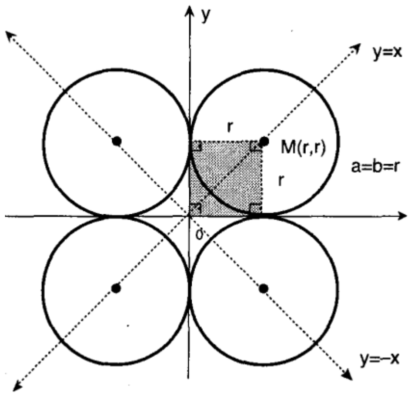
5. **OX EKSENİNE TEĞET OLAN ÇEMBER:** Çemberin standart denklemlerinde r = |b| olup $(x – a)^2 + (y – b)^2 = b^2$ şeklindedir. Çemberin genel denkleminde $F=a^2$ dir.



6. **OY EKSENİNE TEĞET OLAN ÇEMBER:** Çemberin standart denklemlerinde r = |a| olup $(x – a)^2 + (y – b)^2 = a^2$ şeklindedir. Çemberin genel denkleminde $F=b^2$ dir.

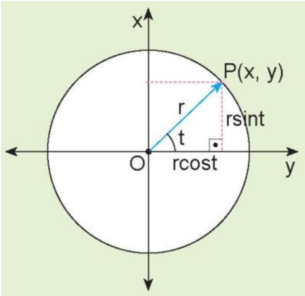


7. **HER İKİ EKSENE DE TEĞET OLAN ÇEMBER:** Çember her iki eksene de teğet ise r = |a| = |b| olup denklemi; $(x \pm r)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$ şeklindedir. Çemberin genel denkleminde $F = r^2$ dir.
Her iki eksene de teğet olan çemberlerin merkezleri 1. da 2. açıortay doğrusu üzerinde bulunur.



Çemberin Parametrik Denklemi

Merkezi O(0, 0) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan çember üzerindeki bir nokta P ve $\overrightarrow{OP}$ nün x ekseni ile yaptığı açı t ($0 \leq t \leq 2\pi$ ve $t \in R$) olmak üzere, x = r.cost, y = r.sint denklemlerine **çemberin parametrik denklemi** denir. Bu denklemdeki x ve y nin bağlı oldukları "t" değişkenine **parametre değeri** denir. Orijin merkezli çemberin parametrik denklemi$\{(r\cos t, r\sin t) : r \in R^{+}, t \in R\}$ şeklinde de gösterilebilir.

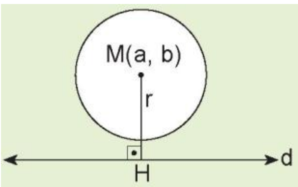


Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r br olan çemberin, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ genel denkleminde $\left.\begin{matrix} x = x' + a \\ y = y' + b \end{matrix}\right\}$ ötelemesi kullanılarak $x'^2 + y'^2 = r^2$ denklemi elde edilir. Bu denklemde $\left.\begin{matrix} x' = r.\cos t \\ y' = r.\sin t \end{matrix}\right\}$ yazılarak M(a, b) merkezli r br yarıçaplı çemberin bir tam turunun parametrik denklemi $\left.\begin{matrix} x' = a + r.\cos t \\ y' = b + r.\sin t \end{matrix}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi$ elde edilir.
$\left.\begin{matrix} x = a + r.\cos t \\ y = b + r.\sin t \end{matrix}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik denklemiyle verilen çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir.

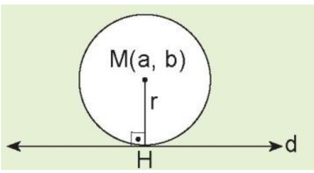
Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Konumu

Aynı düzlemde bulunan bir d doğrusu ile merkezi M(a, b) noktası ve yarıçapının uzunluğu r br olan bir çemberin birbirine göre konumları aşağıdaki gibi üç durumda incelenir.

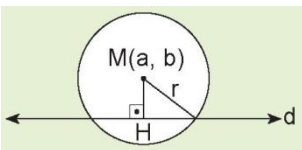
a. $[MH] \perp d$ ve $|MH| > r$ ise d doğrusu çemberi kesmez.



b. $[MH] \perp d$ ve $|MH| = r$ doğrusu çemberi bir noktada keser.



c. $[MH] \perp d$ ve $|MH| < r$ ise d doğrusu çemberi farklı iki noktada keser.



Bir çemberi bir noktada kesen doğruya **teğet doğrusu**, iki noktada kesen doğruya **kesen doğrusu** denir.

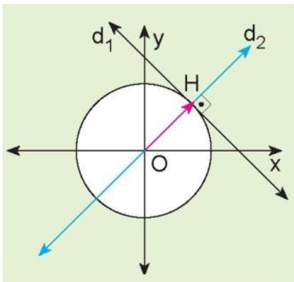
a, b, m, n ∈ R olmak üzere, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberi ile $y = mx + n$ doğrusunun denklemlerinin ortak çözümünden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = r^2(1+m^2) - n^2$ olmak üzere;

i. $\Delta < 0$ ise doğru çemberi kesmez.
ii. $\Delta = 0$ ise doğru çembere teğettir.
iii. $\Delta > 0$ ise doğru çemberi farklı iki noktada keser.

Kesim noktaları doğru ve çember denklemlerinin ortak çözüm kümesinin elemanlarıdır.
Bir çember ile doğrunun birbirine göre konumları vektörel yaklaşım kullanılarak aşağıdaki gibi belirlenir.
$\|\overrightarrow{MX}\|^2 = r^2$ çemberi ile $X = P + k.\vec{\alpha}$ doğrusunun denklemlerin ortak çözümü denklemin diskriminantı
$\Delta = 4\left(\langle \overrightarrow{MP}, \vec{\alpha} \rangle^2 - \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle . \left(\|\overrightarrow{MP}^2 - r^2\|\right)\right)$ olmak üzere;

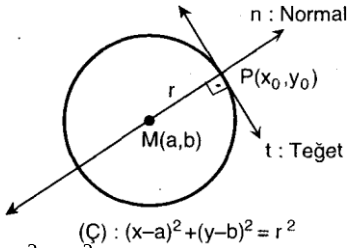
i. $\Delta > 0$ ise doğru çemberin bir kesenidir.
ii. $\Delta = 0$ ise doğru çemberin bir teğetidir.
iii. $\Delta < 0$ ise doğru çemberi kesmez.

Başlangıç noktası çemberin merkezi ve bitiş noktası çemberin herhangi bir noktası olan vektör, o noktanın **yer vektörüdür**. Bu vektöre **yarıçap vektörü** de denir.
Çemberde bir noktanın yer vektörüne dik olan noktasına bu noktadaki **teğet doğrusu**, yer vektörünü doğrultman kabul eden doğruya **normal doğrusu** denir.



Şekildeki O merkezli çemberin H noktasındaki yer vektörü $\overrightarrow{OH}$ olmak üzere, d_1 çemberin **teğet doğrusu**, d_2 ise çemberin **normal doğrusudur.**

ÇEMBER ÜZERİNDEKİ BİR NOKTADAN ÇEMBERE ÇİZİLEN TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen

Teğet Denklemi:

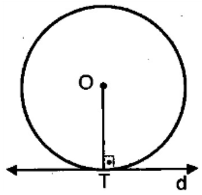
$(x-x_0).(x_0-a) + (y-y_0).(y_0-b) = 0$

Normal Denklemi:

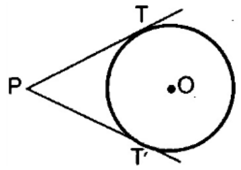
$(x-x_0).(y_0-b) - (y-y_0).(x_0-a) = 0$

ÇEMBERDE TEĞET VE ÖZELLİKLERİ

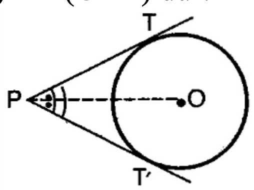
1. Bir çemberde yarıçap, değme noktasında teğete diktir. T teğet değme noktası $[OT]\perp d$ dir.



2. Bir çembere dışındaki bir noktadan en çok iki teğet çizilebilir. Çemberin dışındaki nokta ve teğet değme noktaları arasındaki doğru parçalarının uzunlukları eşittir. [PT ve [PT, O merkezli çembere teğettir. O halde |PT| = |PT'| dür.



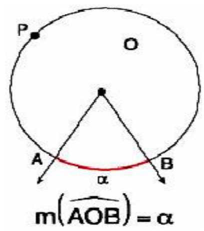
3. [PT ve [PT', o merkezli çemberin teğetleri olmak üzere, TPT' açısının açıortayı [PO dur. m(TPO) = m(OPT') dür.

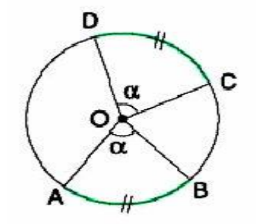


Çemberde Açılar

Merkez Açı

Köşesi çemberin merkezi olan ve çember düzleminde bulunan açıya **merkez açı**; çemberin, merkez açının içinde kalan yayına da bu **merkez açının gördüğü yay** denir.

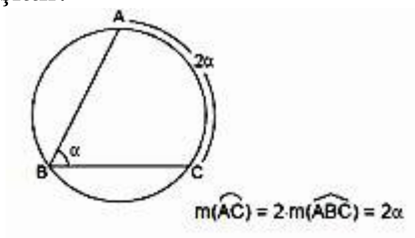




Bir çemberde ya da eş iki çemberde ölçüleri eşit olan yaylara **eş yaylar** denir.

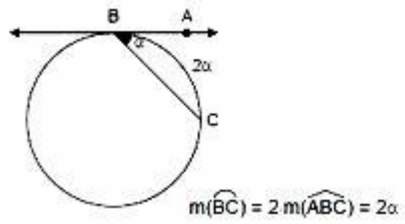
Çevre Açı

Bir çemberin farklı üç noktası A, B ve C ise ABC açısına **çevre açı**; B noktasından geçmeyen AC yayına da bu **çevre açının gördüğü yay** denir. Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



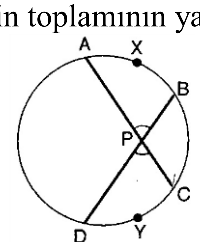
Teğet-Kiriş Açı

Köşesi çemberin üzerinde bir kenarı çemberin teğeti diğer kenarı çemberin kirişi olan açıya teğet - kiriş açı denir. Teğet - kiriş açı gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



İç Açı

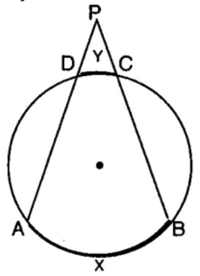
Bir çemberin iç bölgesinde kesişen iki kirişin oluşturduğu açıların her birine, çemberin iç açısı denir. Bir çemberde bir iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçülerinin toplamının yarısına eşittir.



$$m(\widehat{APB}) = \frac{m(AXB) + m(DYC)}{2}$$

Dış Açı

Köşesi çemberin dış bölgesinde ve kenarları çemberin keseni veya teğeti olan açıya, çemberin dış açısı denir. Bir çemberde bir dış açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısına eşittir.

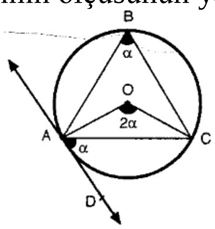


$$m(\widehat{APB}) = \frac{m(AXB) - m(DYC)}{2}$$

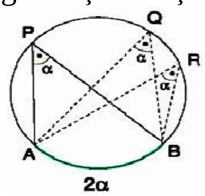
Sonuçlar:

Bir çemberde:

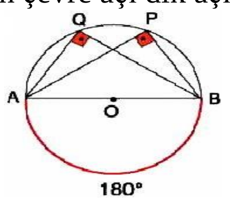
1. Aynı yayı gören teğet-kiriş açı ve çevre açı eştir. Çevre açının veya teğet-kiriş açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısıdır.



2. Aynı yayı gören çevre açılar eştir.



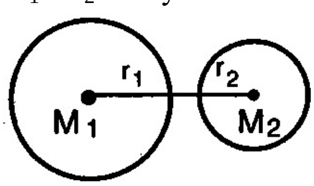
3. Çapı gören çevre açı dik açıdır.



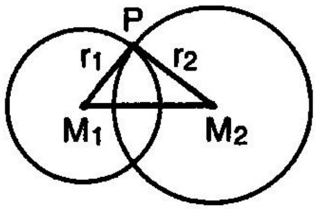
DENKLEMLERİ VERİLEN İKİ ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE KONUMLARI

İki çember,

1. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| > r_1 + r_2$ ise ayrıktır.

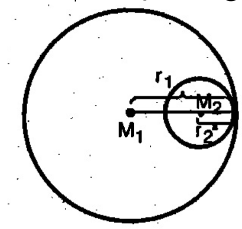


2. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta$ ise θ açısı altında iki noktaları ortaktır.

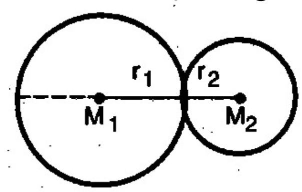


Özel olarak $\theta = 90^0$ ise $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = r_1^2 + r_2^2$ olur.

3. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = |r_1 - r_2|$ ise içten teğettir.



4. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r_1 + r_2$ ise dıştan teğettir.



5. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| < r_1 < r_2$ ise kesişmez.

İki çembere teğet olan doğruya, bu iki çemberin ortak teğeti denir.

BİR NOKTANIN BİR ÇEMBERE GÖRE KUVVETİ

M merkezli r yarıçaplı çember S(M, r) olsun.

$K: R \rightarrow R$, $X_0 = (x_0, y_0)$ bilinen bir nokta

$K(X_0) = \|\overrightarrow{MX_0}\|^2 - r^2$ değerine X_0 noktasının S(M, r) ye göre **kuvveti** denir.

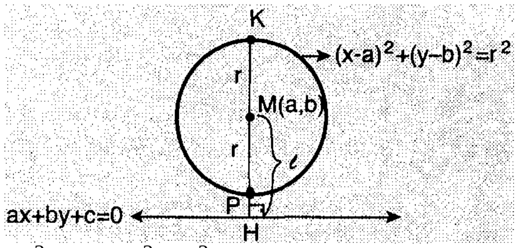
1. $X_0 = (x_0, y_0)$ noktası çemberin dışında ise $K(X_0) > 0$ dır.
2. $X_0 = (x_0, y_0)$ noktası çemberin içinde ise $K(X_0) < 0$ dır.
3. $X_0 = (x_0, y_0)$ noktası çemberin üzerinde ise $K(X_0) = 0$ dır.

1. Denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olan çemberin dışındaki $P(x_0, y_0)$ noktasının bu çembere göre kuvveti,
   $k = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ dir.
   $P(x_0, y_0)$ noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin değme noktası T ise
   $|PT|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ dir.

2. Denklemi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ olan çemberin dışındaki $P(x_0, y_0)$ noktasının bu çembere göre kuvveti,
$k=x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C$ dir.
$P(x_0, y_0)$ noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin değme noktası T ise
$|PT|^2 = x_0^2 + y_0^2 + Ax_o + By_0 + C$ dir.

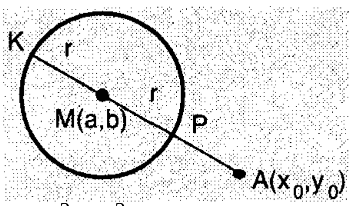
UYARI:

1.



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberi ile dışında bir $ax+by+c=0$ doğrusu verildiğinde, çemberin doğruya en yakın noktası, merkezinden doğruya inilen dikmenin (dik doğrunun) çemberi kestiği noktalardan doğru yanında bulunan P noktası, en uzak noktası ise doğru tarafında bulunmayan çapın diğer uç noktası, yani K noktasıdır.
Öyleyse çember ile doğru arasındaki
En kısa uzaklık : $|PH| = \ell - r$
En büyük uzaklık : $|KH| = \ell + r$ *dir.*
(ℓ, merkez noktanın doğruya olan uzaklığından bulunacaktır)

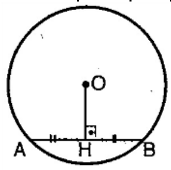
2.



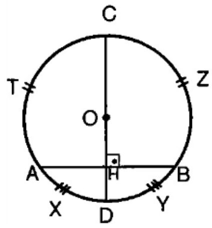
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberi ile dışında bir $A(x_0, y_0)$ noktası verildiğinde, çemberin A noktasına en yakın noktası, A ve merkezden geçen doğrunun çemberi kestiği noktalardan A yanında bulunanı, yani P noktası, en uzak noktası ise A tarafında bulunmayan, çapın diğer uç noktası K noktasıdır.
Öyleyse çemberle $A(x_0, y_0)$ noktası arasındaki
En kısa uzaklık : $|PA| = |MA| - r$
En büyük uzaklık : $|KA| = |MA| + r$ dir.
($|MA|$, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden bulunacaktır.)

ÇEMBERDE KİRİŞ ÖZELLİKLERİ

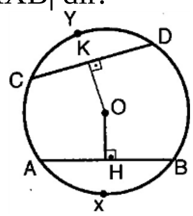
1. Çemberde herhangi bir kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer. Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. Yani merkezden kirişe inilen dikme kirişi iki eşit parçaya böler.
$[OH] \perp [AB] \Leftrightarrow |AH| = |HB|$



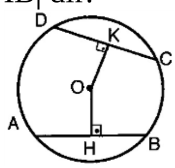
2. Çemberde çapın herhangi bir kirişe dik olması için, gerek ve yeter koşul çapın kirişten ayırdığı yayı ortalamasıdır.
$[CD] \perp [AB] \Leftrightarrow |DXA| = |DYB|$ ve $|CTA| = |CZB|$



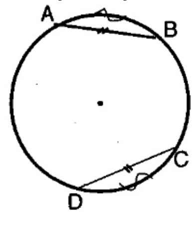
3. Bir çemberde iki kirişin eşit uzunlukta olması için gerek ve yeter koşul, kirişlerin merkezden eşit uzaklıkta olmasıdır. Bir çemberde eşit uzunlukta bulunan kirişlerin çemberden ayırdığı yayların uzunlukları da eşittir.
$|AB| = |CD| \Leftrightarrow |OH| = |OK|$ ve
$|CYD| = |AXB|$ dir.



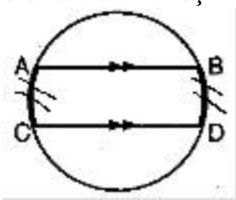
4. Bir çemberde merkeze yakın olan kiriş, merkeze uzak olan kirişten daha büyüktür.
$[OK] \perp [CD]$, $[OH] \perp [AB]$ ve $|OK| < |OH|$ ise $|CD| > |AB|$ dir.



5. Bir çemberde eş kirişleri eş yaylar sınırlar.

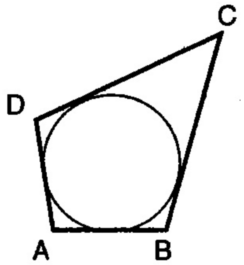


6. Paralel kirişler arasında kalan yayların ölçüleri ve uzunlukları eşittir.



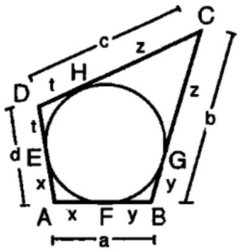
TEĞETLER DÖRTGENİ

Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene teğetler dörtgeni denir.

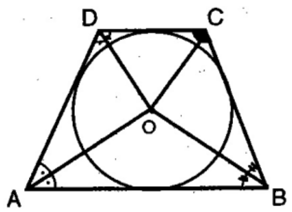


ÖZELLİKLERİ

1. Teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı eşittir.

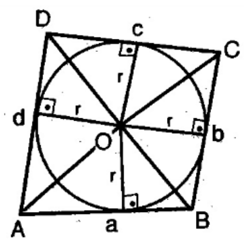


2. ABCD teğetler dörtgeninde; a + c = b + d dir.



3. Teğetler dörtgeninde iç açıortayların kesim noktası iç teğet çemberin merkezidir.

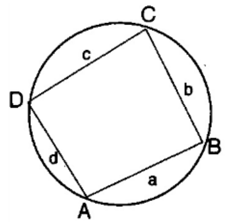
ABCD teğetler dörtgeninde; $u = \frac{a+b+c+d}{2}$ ve r iç teğet çemberin yarıçapı olmak üzere;
A(ABCD) = u.r dir.



4. Kare, eşkenar dörtgen ve deltoit birer teğetler dörtgenidir.

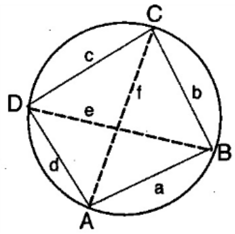
KİRİŞLER DÖRTGENİ

Köşeleri aynı çember üzerinde olan dörtgene **kirişler dörtgeni** denir.



Özellikleri:

1. Kirişler dörtgeninde karşılıklı açıların toplamı 180° dir.
2. ABCD kirişler dörtgeninde a, b, c, d kenar uzunlukları, köşegen uzunlukları e ve f olmak üzere;



a.c+b.d=e.f dir.

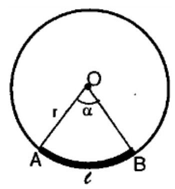
3. Dikdörtgen, ikizkenar yamuk ve kare kirişler dörtgenidir.

DAİRENİN ALANI

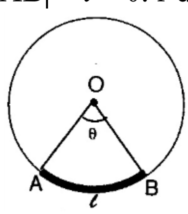
Bir çemberin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine daire denir.
Yarıçapı r olan bir dairenin çevresi Ç=2.π.r , alanı $A=\pi.r^2$ dir.

ÇEMBERDE YAY UZUNLUĞU

1. Yarıçap uzunluğu r birim olan çemberde, α° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu $|AB| = \ell = \frac{2\pi r\alpha}{360}$ dır.



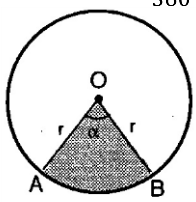
2. Merkez açısının ölçüsü θ radyan olan bir çemberde, bu açının gördüğü yayın uzunluğu; $|AB| = \ell = \theta.\ r$ dır.



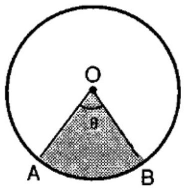
DAİRE DİLİMİNİN (KESMESİNİN) ALANI

Bir dairenin iki yarıçapı ve yarıçapların belirttiği yay arasında kalan bölgeye **daire dilimi (kesmesi)** denir.

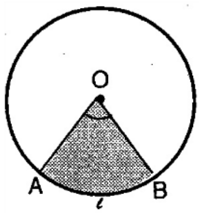
1. Yarıçapı r birim ve merkez açısı α° olan bir daire diliminin alanı; $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$ dir.



2. Yarıçapı r birim ve merkez açısı θ radyan olan bir daire diliminin alanı; $S = \frac{\theta . r^2}{2}$ dir.

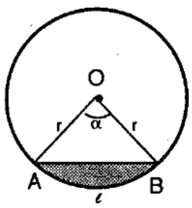


3. Yarıçapı r birim ve merkez açının gördüğü yayın uzunluğu ℓ birim olan daire diliminin alanı;



DAİRE PARÇASININ ALANI

Bir kiriş ile daire yayının sınırladığı bölgeye **daire parçası** denir.

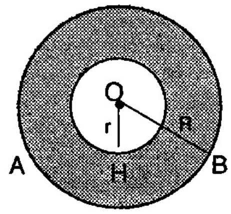


Şekildeki daire parçasının alanı; $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{r^2 \sin\alpha}{2}$

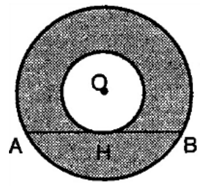
DAİRE HALKASININ ALANI

Merkezleri aynı yarıçap uzunlukları farklı olan iki çemberle sınırlı bölgeye **daire halkası** denir.

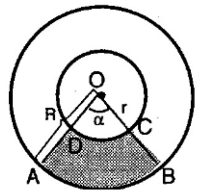
1. Şekildeki taralı daire halkasının alanı; $S = \pi.(R^2 - r^2)$ dir.



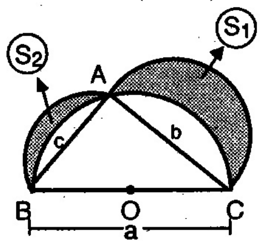
2. Yarıçapları R ve r birim olan çemberlerin sınırladığı halkada, [AB] kirişi H noktasında içteki çembere teğet ise daire halkasının alanı; $S = \frac{|AB|^2 . \pi}{4}$ dir.



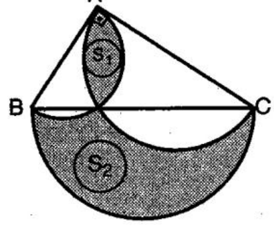
3. merkezli ve α° lik merkez açının gördüğü iki çember arasında kalan taralı halka diliminin alanı;
$S = \frac{(R^2 - r^2).\pi.\alpha}{360}$ veya $S = \frac{(|AB| + |CD|).|CB|}{2}$ dir.



4. Şekilde ABC üçgeni, [AB], [BC] ve [AC] çaplı yarım çemberler çizilmiştir.
Şekildeki yarım çemberler arasında kalan taralı alanların toplamı ABC üçgeninin alanına eşittir. Yani, $A(ABC) = S_1 + S_2$ dir.

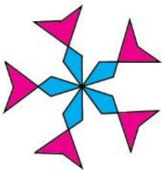


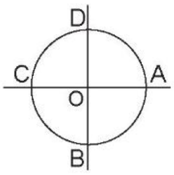
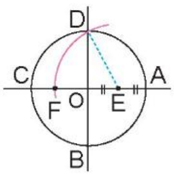
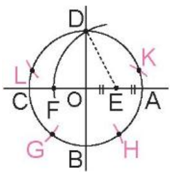
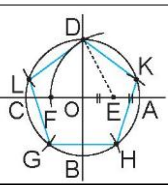
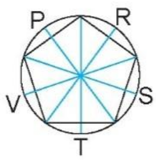
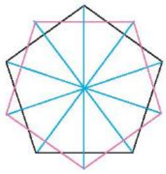
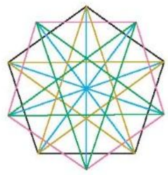
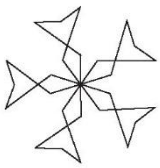
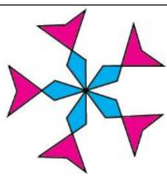
5. Bir ABC üçgeninde; [AB], [BC], [CA] çaplı yarım daireler, S_1 ve S_2 bulundukları taralı bölgelerin alanları olmak üzere;
$A(ABC) = S_2 - S_1$ dir.



DÜZLEMDE ÇEMBER YARDIMIYLA DESEN VE FRAKTAL GÖRÜNTÜSÜ OLUŞTURMA

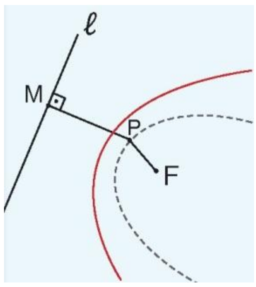
Örnek: Aşağıdaki desenin çizim aşamalarını belirleyelim.



	Çizimler	Açıklama
1. Adım		Dik kesişen iki doğru ile O merkezli bir çember çizilir. Doğruların çemberle kesiştiği noktalar A, B, C ve D olarak adlandırılır.
2. Adım		|OA| yarıçap uzunluğunun orta noktası cetvel yardımıyla bulunup E olarak adlandırılır. Pergel |ED| kadar açılarak E merkezli, [AC] nı kesen bir yay çizilir. Kesim noktası F olarak adlandırılır.
3. Adım		Pergel |DF| kadar açılarak, çemberi kesen D merkezli bir yay çizilir. Yayın çemberi kestiği nokta L olarak adlandırılır. Pergel açıklığı değiştirilmeden L merkezli bir yay çizilerek yayın çemberi kestiği nokta G olarak adlandırılır. Aynı işlemlerle çember yayı D, L, G, H ve K noktaları ile beş eş parçaya ayrılır.
4. Adım		D, L, G, H ve K noktaları birleştirilerek düzgün beşgen elde edilir.
5. Adım		Dik doğrular, yardımcı harfler ve yaylar silinir. Düzgün beşgenin iç açıortayları çizilip açıortayların çemberi kestiği noktalar (düzgün beşgenin köşeleri dışındaki) P, R, S, T ve V olarak adlandırılır.
6. Adım		P, R, S, T ve V noktaları birleştirilerek PRSTV düzgün beşgeni elde edilir ve yardımcı harfler silinir.
7. Adım		Beşgenlerin tüm köşegenleri çizilir.
8. Adım		Şekildeki doğrular kalacak biçimde diğer doğruların tümü silinir.
9. Adım		Elde edilen desen boyanır.

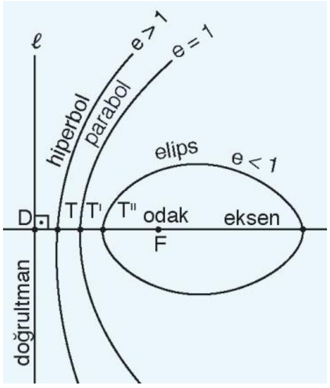
5. ÜNİTE KONİKLER

KONİĞİN TEMEL ELEMANLARI



Düzlemde sabit bir noktaya uzaklığının, sabit bir doğruya uzaklığı oranı sabit olan noktaların geometrik yerine **konik** denir.
Burada sabit doğruya **koniğin doğrultmanı** (ℓ), sabit noktaya **koniğin odağı** (F), sabit orana da **koniğin dış merkezliği** (e) ve bunların hepsine de **koniğin temel elemanları** denir.
Konik üzerindeki herhangi bir nokta P olmak üzere P den geçen ve ℓ doğrultmanını dik kesen doğru ile ℓ nin kesim noktası M olmak üzere koniğin denklemi,

$\frac{|FP|}{|MP|} = e$ ile verilir.



Koniğin odağından geçen ve doğrultmana dik olan doğruya **koniğin ekseni** denir. Şekilde, koniğin ekseni ile doğrultmanının kesiştiği nokta D ile gösterilmiştir.
Koniğin ekseni ile kesiştiği noktalara **tepe noktaları** denir. Bir koniğin tepe noktası ya DF doğru parçasının üzerinde ya da dışındadır.
Koniğin tepe noktası;
[DF] nın üzerinde ise $T = \frac{F+e.D}{1+e}$,
[DF] nın dışında ise $T = \frac{F-e.D}{1-e}$ dir. ($e \neq 1$)
Konikler,

- **i.** e = 1 olması durumunda parabol,
- **ii.** 0 < e < 1 olması durumunda elips,
- **iii.** e > 1 olması durumunda hiperbol olarak adlandırılır.

Her konik kendi eksenine göre simetriktir.

GENEL KONİK DENKLEMİ

A, B, C, D, E, F e R olmak üzere x ve y değişkenlerine göre gerçek katsayılı ikinci dereceden, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi genel konik denklemidir.
Bu denklemde $\Delta = B^2 - 4AC$ olarak tanımlansın.

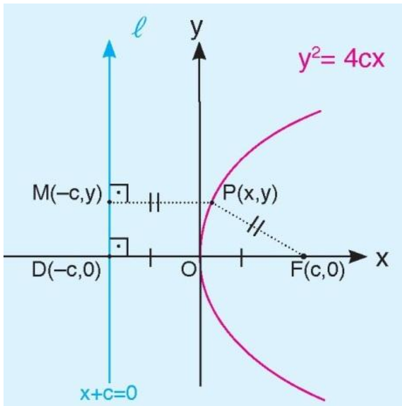
1. Δ<0 ise elips, çember, nokta veya boş küme belirtir.
   - **i.** A = C = B = 0 ise çember, nokta veya boş kümedir.
   - **ii.** A≠C ve B≠0 ise elips, nokta veya boş kümedir.
2. Δ=0 ise parabol, paralel iki doğru veya çakışık iki doğru belirtir.
   - **i.** Denklem çarpanlarına ayrılabiliyor ise, paralel veya çakışık iki doğru belirtir.
   - **ii.** Çarpanlarına ayrılamıyor ise parabol belirtir.
3. Δ>0 ise, hiperbol veya kesişen iki doğru belirtir.
   - **i.** Denklem birinci dereceden asal iki çarpana ayrılamıyorsa hiperbol belirtir.
   - **ii.** Denklem birinci dereceden iki çarpana ayrılabiliyorsa kesişen iki doğru belirtir.

UYARI:

1. B = 0 ise, yani x. y' li terim yok ise denklem standart konik denklemlerine dönüşür.
2. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminde x' li ve y' li terimlerin yok edilmesi için, $a = \frac{2CD-BE}{\Delta}$, $b = \frac{2AE-BD}{\Delta}$ olmak üzere $\vec{u} = (a, b)$ vektörü ile koordinat eksenleri ötelenir. Bu ötelemede x = X + a ve y = Y + b yazılır.
3. Koniğin genel denkleminde x' li ve y' li terimler yok ise konik denklemi

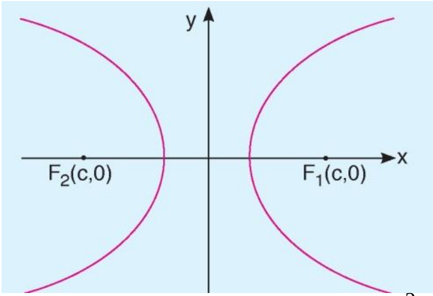
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ biçimindedir. Bu durumda x. y' li terimi yok etmek için, $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$ eşitliğini sağlayan θ reel sayısı bulunarak koordinat eksenlerine D_θ dönme dönüşümü uygulanır. Bu dönmenin matrisi, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ dır.

PARABOL



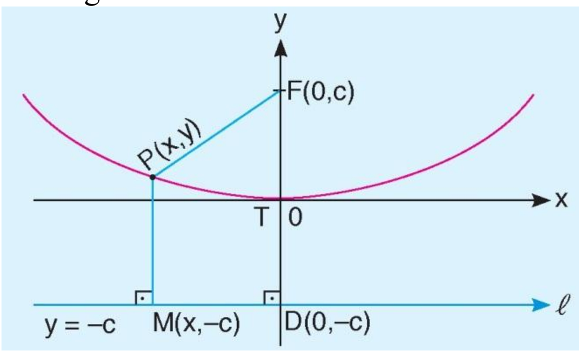
Düzlemde sabit bir F noktası ve sabit bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. F noktasına ve ℓ doğrusuna aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **parabol** denir.
Parabolde e = 1 dir. Bir parabolün tek bir tepe noktası vardır. Tepe noktası doğrultmana en yakın noktadır ve D ile F nin orta noktasıdır. Dolayısıyla $T = \frac{D+F}{2}$ dir. Odağın doğrultmana olan uzaklığına **parabolün parametresi** denir. (|FD| = 2c)
Tepe noktası orijinde ve odak noktası F(c, 0) olan bir parabolde D = –F dir. O hâlde D(–c, 0) dır ve parabolün doğrultmanı da x + c = 0 dır. Bu

parabolün standart denklemi $y^2 = 4cx$ olur. x ekseni parabolün simetri eksenidir.

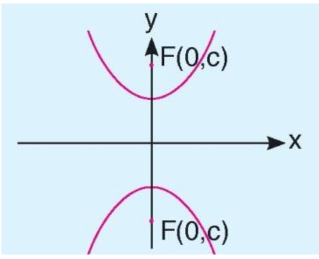


Parabolün ekseni x ekseni ve denklemi $y^2 = 4cx$ ($c\in R$), parabolün denkleminde,

1. $c > 0$ ise parabolün grafiğinin kolları sağa doğru,
2. $c < 0$ ise parabolün grafiğinin kolları sola doğrudur.



Ekseni y, orijinden geçen tepe noktası T olan bir parabolün odak noktası F(0, c) dir. O halde D(0, –c) ve doğrultmanı $y + c = 0$ olur. Bu parabolün standart denklemi $x^2 = 4cy$ dir. y ekseni parabolün simetri eksenidir.

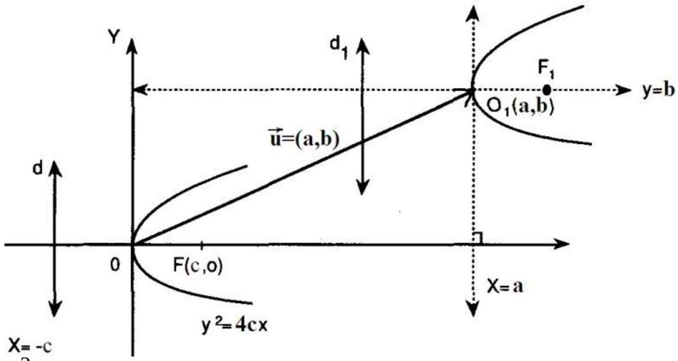


Parabolün ekseni y ekseni ve denklemi $x^2 = 4cy$ ($c\in R$) olmak üzere,

i. $c > 0$ ise parabolün grafiğinin kolları yukarı doğru,

ii. $c < 0$ ise parabolün grafiğinin kolları aşağı doğrudur.

PARABOLÜN ÖTELENMESİ



$y^2 = 4cx$ parabolü $\vec{u} = (a, b)$vektörü ile ötelendiğinde yeni parabolün denklemi $(y-b)^2=4c(x-a)$, odağı $F_1(a+c,b)$, köşesi $O_1(a,b)$, doğrultman denklemi $X=a+c$ olur.

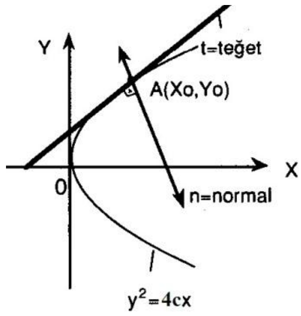
UYARI: $y=ax^2+bx+c$ parabolünde ($\Delta=b^2-4ac$ olmak üzere);

Merkez: $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

Odak: $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta+1}{4a}\right)$

Doğrultman: $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta-1}{4a}\right)$ olur.

PARABOLÜN TEĞET VE NORMAL DENKLEMİ



$y^2 = 4cx$ parabolüne üzerindeki $A(x_0,y_0)$ noktasından çizilen **teğetin eğimi** $m_t = \frac{2c}{y_0}$ dir.

O halde **teğetin denklemi** $y - y_0 = \frac{2c}{y_0}.(x - x_0)$ (veya düzenlenmiş haliyle $y.y_0=2c.(x+x_0)$) ve **normalinin denklemi** $y - y_0 = -\frac{y_0}{2c}.(x - x_0)$ olur.

Bir Parabolün Değme Kirişi

Bir parabole dışındaki bir $M(x_0,y_0)$ noktasından çizilen iki teğetin değme noktalarını birleştiren doğru parçasına **değme kirişi** denir.

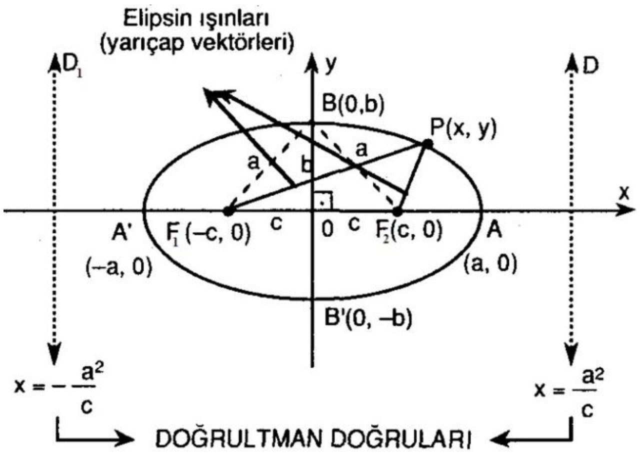
$y^2 = 4cx$ parabolünde değme kirişinin denklemi $y.y_0=2c.(x+x_0)$ dır.

Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumları

$y^2 = 4cx$ parabolüyle $y = mx + n$ doğrusunun birbirine göre durumları için $\Delta=c.(c-mn)$ olmak üzere;

- **i.** $\Delta>0$ ise doğru parabolü iki noktada keser.
- **ii.** $\Delta=0$ ise doğru parabole teğettir.
- **iii.** $\Delta=0$ ise doğru parabolü kesmez.

ELİPS



Düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips** denir. ($0 < e < 1$)

Sabit noktalar olan F_1 ve F_2 ye elipsin odakları, $[F_1F_2]$ nın orta noktasına **elipsin merkezi** denir. Sabit uzaklık 2a olarak seçilir.

Şekildeki elipsin F_1 ve F_2 odakları O(0,0) noktasına göre birbirinin simetriğidir. O(0, 0) noktasına, **elipsin merkezi** denir.

Elipsin x eksenini kestiği noktalar A ve A' , y eksenini kestiği noktalar B ve B' olsun. A, B, A' ve B' noktaları, **elipsin köşeleri**; AA' ve BB' doğruları (x ve y eksenleri), **elipsin simetri eksenleridir.**

AA' doğru parçasına, **elipsin asal ekseni (büyük ekseni)** denir. BB' doğru parçasına da **elipsin yedek ekseni (küçük ekseni)** denir.

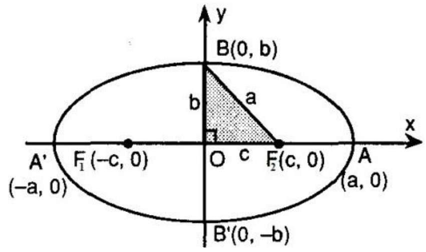
Analitik düzlemde, eksenleri koordinat eksenleri ile çakışık olan elipse, **merkezil elips** denir.

Odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ noktaları olan şekildeki elipsin asal ekseni [AA'], yedek ekseni [BB'] dir.

Elipsin eksenleri kestiği noktalar, A(a, 0), A'(–a, 0) , B(0, b) ve B'(0, –b) noktaları olsun. Elips tanımından $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ olan elipste, $|AA'| = 2a$, $|BB'| = 2b$, $|OF_1| = |OF_2| = c$ ve $|OB| = |OB'| = b$ olduğundan elipsin odakları arasındaki uzaklık $|F_1F_2| = 2c$ dir.

UYARI: Merkezil elipsin parametrik denklemleri, $x = a.\cos\theta$ $y = b.\sin\theta$ dır

Odakları x Ekseninde Olan Merkezil Elipsin Denklemi



Odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan merkezil elips denklemi $a > b$ ve $a^2 = b^2 + c^2$ olmak üzere

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ biçimindedir. Bu elips, yatay elipstir.

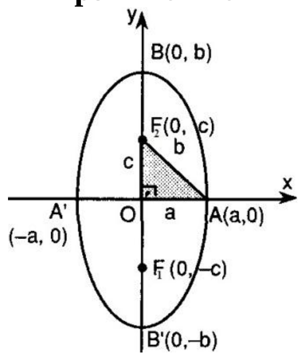
Bu denkleme, **merkezil elipsin kartezyen denklemleri** ya da **standart denklemleri** denir.

Elipsin Çevresi ve Alanı

Elipsin çevresi: $Ç=(a+b)\pi$

Elipsin alanı: $A=\pi ab$ dir.

Odakları y Ekseni Üzerinde Olan Merkezil Elipsin Denklemi



Odakları $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ olan elipsin denklemi $b > a$ ve $b^2 = a^2 + c^2$ olmak üzere $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ biçimindedir. Bu elips düşey elipstir.

Elipsin Dış Merkezliği

Bir elipsin odakları arasındaki uzaklığın, elipsin asal ekseninin uzunluğuna oranına elipsin **dış merkezliği** denir. Elipsin dış merkezliği e ile gösterilir.

- **i.** Odakları x ekseni üzerinde (yatay elips) olan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde $e = \frac{c}{a}$, ($0 < e < 1$) dir.
- **ii.** Odakları y ekseni üzerinde (düşey elips) olan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde, $e = \frac{c}{b}$, ($0 < e < 1$) dir.

UYARI: Bir elipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil denkleminde hangi değişkenin payda değeri daha büyükse, odaklar o değişkenin oluşturduğu eksen üzerindedir.

i. $a^2 > b^2$ ise, odaklar x ekseni üzerinde

ii. $b^2 > a^2$ ise, odaklar y ekseni üzerindedir.

Elipsin Basıklığı

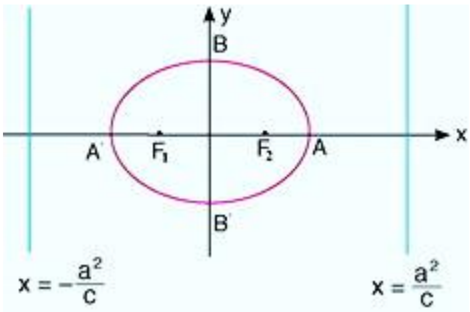
Büyük eksen uzunluğu ile küçük eksen uzunluğu farkının büyük eksen uzunluğuna oranıdır.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin basıklığı $1 - \frac{b}{a}$ dır.

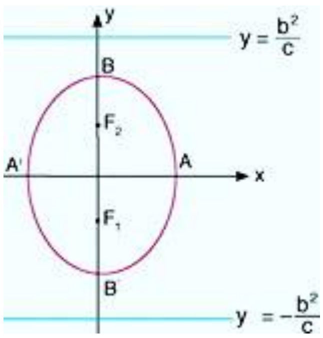
Dış merkezlik büyüdükçe elipsin basıklığı artar.

Elipsin Doğrultmanı

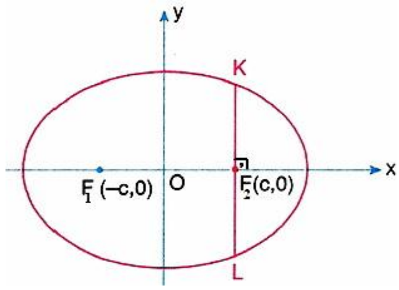
1. Odakları x ekseni üzerinde (yatay elips) olan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde, $x = \mp\frac{a^2}{c}$ doğrularına elipsin doğrultmanları denir. $e = \frac{c}{a}$ olduğundan doğrultman denklemleri $x = \mp\frac{a}{e}$ biçiminde de ifade edilebilir.



2. Odakları y ekseni üzerinde (düşey elips) olan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde, $y = \mp\frac{a^2}{c}$ doğrularına elipsin doğrultmanları denir. $e = \frac{c}{b}$ olduğundan doğrultman denklemleri $y = \mp\frac{b}{e}$ biçiminde de ifade edilebilir.



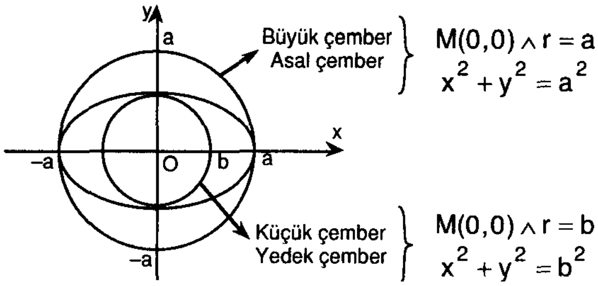
Elipsin Parametresi



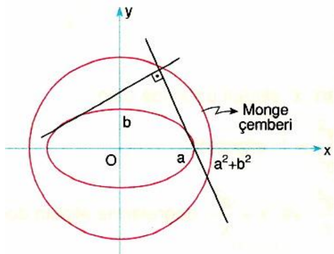
Odaklardan birinden geçen ve asal eksene dik olan kirişin uzunluğuna **elipsin parametresi** denir. Odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan merkezil elipsin parametresi $|KL| = \frac{2b^2}{a}$ dır.

Elipsin Çemberleri

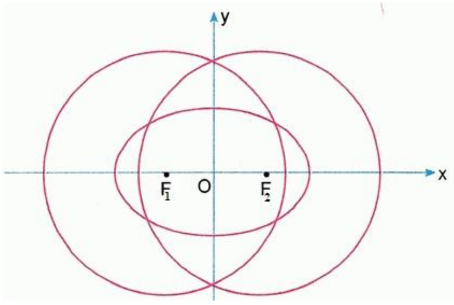
1. Merkezi elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu a olan çembere **elipsin asal çemberi (Büyük çemberi)** denir.
   $M(0, 0)$ ve $r = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$
2. Merkezi elipsin merkezi ve yarıçap uzunluğu b olan çembere **elipsin yedek çemberi (Küçük çemberi)** denir.
   $M(0, 0)$ ve $r = b \Rightarrow x^2 + y^2 = b^2$



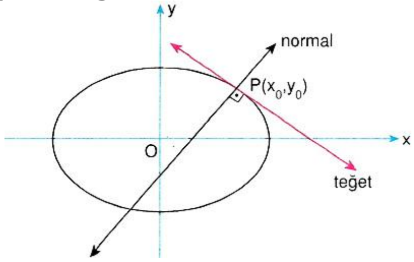
3. Bir elipste dik kesişen teğetlerin kesim noktalarının geometrik yeri bir çemberdir. Bu çembere **Monge (Monj) Çemberi** denir.
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin Monge çemberinin denklemi $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ dir.



4. Merkezi elipsin odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a olan çembere **elipsin doğrultman çemberi** denir.
   i. $F_2(0, c)$ ve $r=2a \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 = 4a^2$
   ii. $F_1(0,-c)$ ve $r=2a \Rightarrow (x + c)^2 + y^2 = 4a^2$ dir.



Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsine üzerindeki $P(x_0,y_0)$ noktasından çizilen **teğetin eğimi** $m_t=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ dir. O halde **teğetin denklemi** $y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.(x-x_0)$ (veya düzenlenmiş haliyle $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$) ve **normalinin denklemi** $y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.(x-x_0)$ olur.

UYARI:

1. Bir elipsin üzerinde alınan bir M noktasındaki teğet, bu noktayı odaklara birleştiren yarıçap vektörlerinin oluşturduğu açıların dış açıortayıdır.
2. Elipsin köşel teğetleri, bu köşelerden geçen eksenlere diktir.
3. Bir elipste dik kesişen teğetlerin kesim noktalarının geometrik yeri Monge çemberidir.
4. Bir elipste odakların teğetler üzerindeki dik izdüşümlerinin geometrik yeri asal çemberdir.

Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumları

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsiyle y = mx + n doğrusunun birbirine göre durumları için $\Delta=(am)^2+b^2-n^2$ olmak üzere;

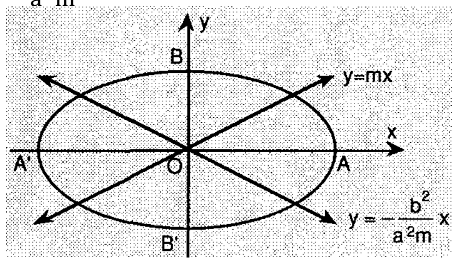
i. Δ>0 ise doğru elipsi iki noktada keser.
ii. Δ=0 ise doğru elipse teğettir.
iii. Δ=0 ise doğru elipsi kesmez.

Değme Noktasının Koordinatları

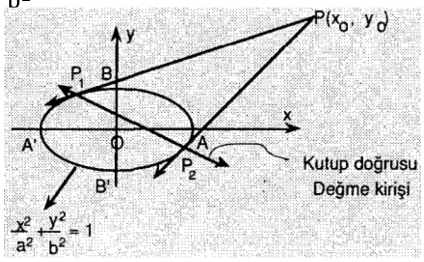
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsiyle y = mx + n doğrusunun değme noktasının koordinatları $\left(-\frac{a^2m}{n},\frac{b^2}{n}\right)$ dır.

UYARI:

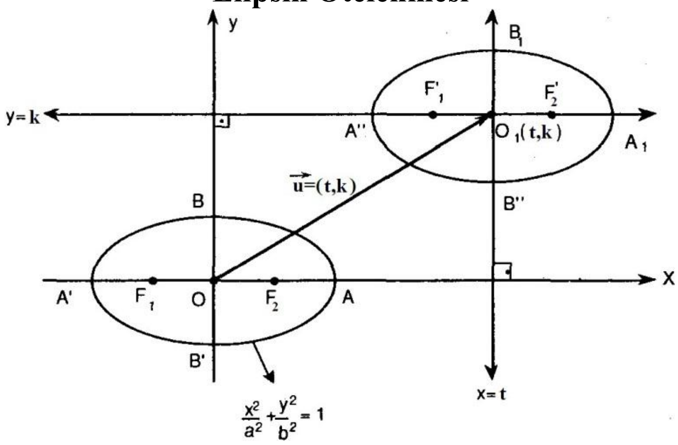
1. Bir elipste y = mx köşegeninin eşleniği $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$ dir.



2. Bir elipse dışındaki bir P noktasından iki teğet çizilebilir. Teğetlerin değme noktaları P_1, P_2 ise P_1P_2 doğrusuna **değme kirişi** ya da **kutup doğrusu** adı verilir. Denklemi, $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ dir.

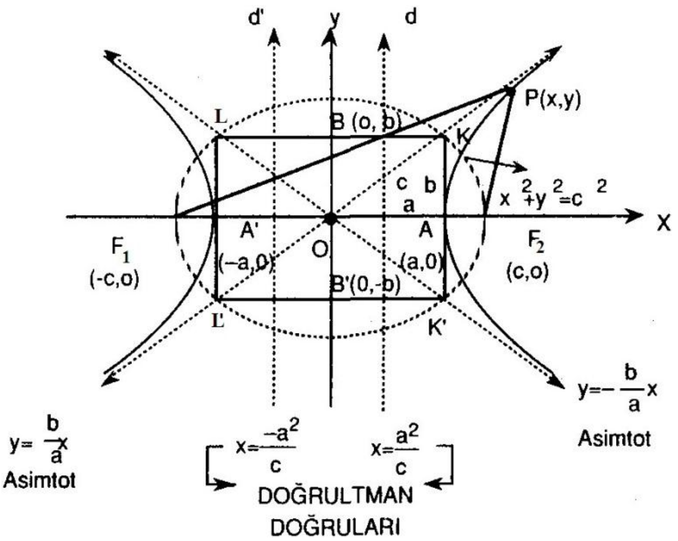


Elipsin Ötelenmesi



Denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ odakları F_1 ve F_2 olan elipsin $\vec{u}=(t,k)$ vektörü ile ötelenerek odakları F_1' ve F_2' ve denklemi $\frac{(x-t)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ olan elipse dönüşmüştür.

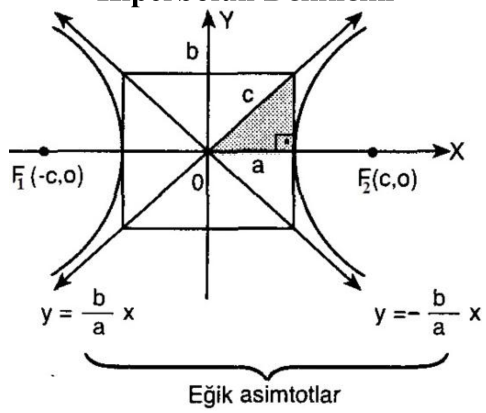
HİPERBOL



Düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları farkının sabit olduğu noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir. (e > 1)
Sabit noktalara hiperbolün odakları (F_1 ve F_2), [F_1F_2] nin orta noktasına **hiperbolün merkezi** denir.
Sabit uzaklık 2a br olarak seçeceğiz.
[AA'] na hiperbolün **asal ekseni** denir.
|AA' | = 2a br
KLK'L' dikdörtgendir.
[BB'] na, hiperbolün **yedek ekseni** denir.
O orijin, |A'O| = |OA|, $|F_2O| = |F_1O|$ dır. O hiperbolün merkezidir. Buradaki hiperbolün merkezi orijin olduğundan hiperbole **merkezil hiperbol** denir.

UYARI: Merkezil elipsin hiperbolün denklemleri, x = a.secθ y = b.tanθ dır

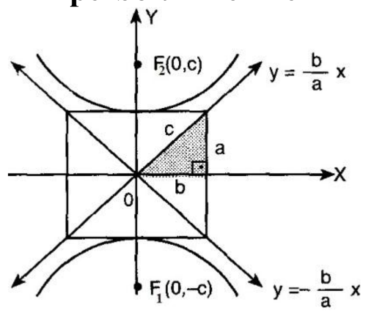
Odakları x Ekseni Üzerinde Olan Merkezil Hiperbolün Denklemi



Odakları $F_1(-c, 0)$ ve $F_2(c, 0)$ noktaları olan hiperbolde $|F_1F_2|=2c$ dir. Hiperbole ait herhangi bir P(x, y) noktası için, $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ olur.

Hiperbolün denklemi $c^2 = a^2 + b^2$, c > 0 olmak üzere
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dir.
Bu denklemler, odakları x ekseninde olan merkezil hiperbolün **kartezyen** ya da **standart denklemleridir.**

Odakları y Ekseni Üzerinde Olan Merkezil Hiperbolün Denklemi



Odakları $F_1(0, -c)$ ve $F_2(0, c)$ noktaları olan hiperbolde $|F_1F_2|=2c$ dir. Hiperbole ait herhangi bir P(x, y) noktası için, $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ olur.
Hiperbolün denklemi $c^2 = a^2 + b^2$, c > 0 olmak üzere
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dir.
UYARI: Bir hiperbolün merkezil denkleminde hangi değişkenin önündeki işaret pozitif ise, odaklar o değişkenin oluşturduğu eksen üzerindedir.

Hiperbolün Asimptotları

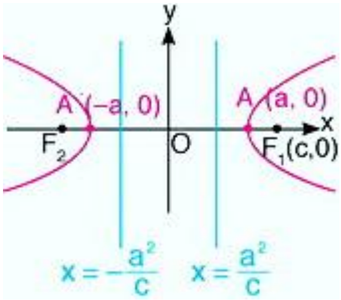
1. Hiperbolün asal ekseni x ekseni ise asimptotlarının denklemi $y = \mp\frac{b}{a}x$ dir.
2. Hiperbolün asal ekseni y ekseni ise asimptotlarının denklemi $y = \mp\frac{a}{b}x$ dir.

Hiperbolün Dış Merkezliği

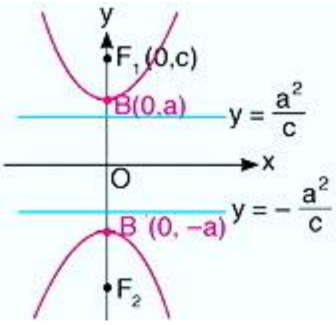
Bir hiperbolün odakları arasındaki uzaklığın, hiperbolün asal ekseninin uzunluğuna oranına elipsin dış merkezliği denir. Hiperbolün dış merkezliği e ile gösterilir.
Odakları arasındaki uzaklık $|F_1F_2| = 2c$ ve asal eksen uzunluğu |AAı| = 2a olan hiperbolün dış merkezliği $e = \frac{c}{a}$ dir. (e >1)

Hiperbolün Doğrultmanları

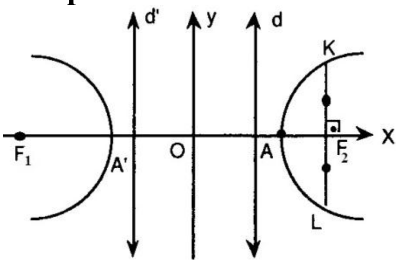
1. Odakları x ekseni üzerinde olan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde, $x = \mp\frac{a^2}{c}$ doğrularına hiperbolün doğrultmanları denir. $e = \frac{c}{a}$ olduğundan doğrultman denklemleri $x = \mp\frac{a}{e}$ biçiminde de ifade edilebilir.



2. Odakları y ekseni üzerinde olan $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ elipsinde, $y=\mp\frac{a^2}{c}$ doğrularına hiperbolün doğrultmanları denir. $e=\frac{c}{a}$ olduğundan doğrultman denklemleri $y=\mp\frac{a}{e}$ biçiminde de ifade edilebilir.



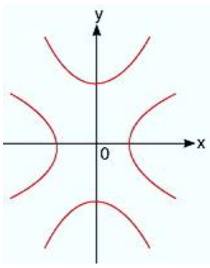
Hiperbolün Parametresi



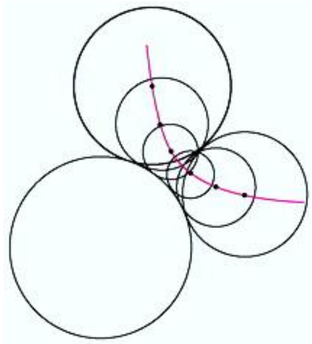
Odaklardan birinden geçen ve asal eksene dik olan kirişin uzunluğuna **hiperbolün parametresi** denir. Odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan merkezil hiperbolün parametresi $|KL|=\frac{2b^2}{a}$ dır.

UYARI:

1. Hiperbolün merkezi orijinde olsun. Hiperbol merkezine göre 180° lik dönme simetrisine sahiptir. Hiperbolün iki simetri ekseni vardır. Bunlardan biri y ekseni, diğeri x eksenidir.



2. Verilen bir çembere teğet olan ve bu çemberin dışındaki bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir hiperboldür.

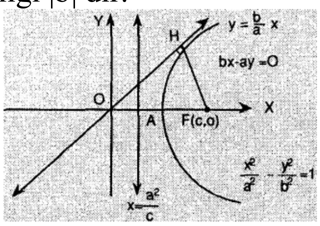


Hiperbolün Çemberleri

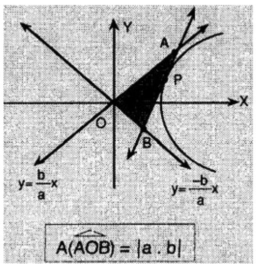
1. Merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu a olan çembere **hiperbolün asal çemberi (Büyük çemberi)** denir.
   M(0, 0) ve r = a $\Rightarrow x^2+y^2=a^2$
2. Merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçap uzunluğu b olan çembere **hiperbolün yedek çemberi (Küçük çemberi)** denir.
   M(0, 0) ve r = b $\Rightarrow x^2+y^2=b^2$
3. Merkezi hiperbolün odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a olan çembere **hiperbolün doğrultman çemberi** denir.
   i. $F_2(0, c)$ ve r=2a$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2$
   ii. $F_1(0,-c)$ ve r=2a$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2$
   dir.

UYARI:

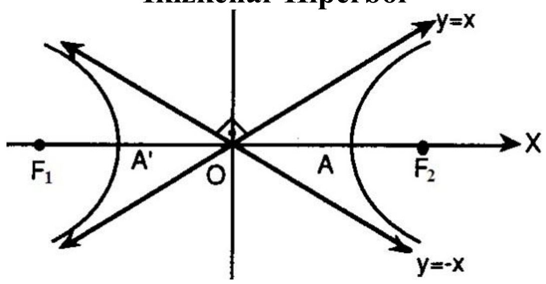
1. Denklemi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ olan hiperbolde, odaklardan birinin asimptotlardan birine olan uzaklığı |b| dir.



2. Bir hiperbolde iki asimptot ile herhangi bir teğetin meydana getirdiği üçgenin alanı |a.b| dir.



İkizkenar Hiperbol



Asimptotları birbirine dik olan hiperbole ikizkenar hiperbol denir. İkizkenar hiperbolün denklemi $x^2 - y^2 = a^2$ dir.

1. **İkizkenar hiperbolün asal ekseni x ekseni ise denklemi $x^2 - y^2 = a^2$ ve asimptotlarının denklemi y = mx dir.**
2. **İkizkenar hiperbolün asal ekseni x ekseni ise denklemi $y^2 - x^2 = a^2$ dir.**

Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolüne üzerindeki $P(x_0,y_0)$ noktasından çizilen **teğetin eğimi** $m_t = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ dir. O halde **teğetin denklemi** $y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}.(x - x_0)$ (veya düzenlenmiş haliyle $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$) ve **normalinin denklemi** $y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.(x - x_0)$ olur.

Bir Doğru ile Bir Hiperbolün Birbirine Göre Durumları

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolüyle y = mx + n doğrusunun birbirine göre durumları için $\Delta = -(am)^2 + b^2 + n^2$ olmak üzere;

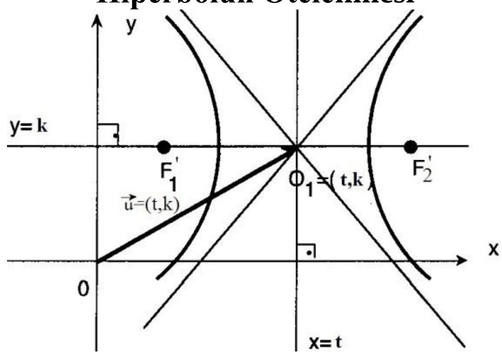
- **i.** $\Delta > 0$ ise doğru hiperbolü iki noktada keser.
- **ii.** $\Delta = 0$ ise doğru hiperbolü teğettir.
- **iii.** $\Delta = 0$ ise doğru hiperbolü kesmez.

Değme Noktasının Koordinatları

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolüyle y = mx + n doğrusunun değme noktasının koordinatları $\left(-\frac{a^2m}{n}, -\frac{b^2}{n}\right)$ dır.

UYARI: Bir hiperbole çizilen iki teğetin değme noktalarını birleştiren kirişe **değme kirişi** ya da **kutup doğrusu** denir.
Bir hiperbole $M(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetlerin meydana getirdiği değme kirişinin denklemi; $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ dir.

Hiperbolün Ötelenmesi



Denklemi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ odakları F_1 ve F_2 olan hiperbolün $\vec{u} = (t,k)$ vektörü ile ötelenerek odakları F_1' ve F_2' ve denklemi $\frac{(x-t)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ olan hiperbole dönüşmüştür.