PERMÜTASYON

1. Eşleme Yoluyla Sayma

Bir kümenin elemanları ile sayma sayılar kümesinin elemanlarını eşleyerek, verilen kümenin eleman sayısını bulmaya eşleme yoluyla sayma denir.

Örneğin, bir sınıftaki öğrencileri 1, 2, 3, ... ile eşleyip sınıf mevcudunu bulmak, eşleme yolu ile saymadır.

2. Toplama Yoluyla Sayma

Ayrık iki kümenin eleman sayılarının toplamını bulmaya toplama yoluyla sayma denir.

A ve B sonlu ve ayrık iki küme olsun.

$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ dir.

Örneğin, bir sınıfta 8 erkek, 12 kız öğrenci varsa sınıf mevcudu $8 + 12 = 20$ dir.

3. Çarpma Yoluyla Sayma

m farklı biçimde gerçekleşen bir işleme bağlı olarak ikinci bir işlem n farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu iki işlemin birlikte gerçekleşme sayısı $m \cdot n$ dir. Bu tür saymaya çarpma yoluyla sayma denir. Örneğin, 3 pantolon ve 2 gömleği olan bir kişinin bunlar arasından 1 pantalon ve 1 gömleği kaç farklı biçimde seçebileceğini bulalım.

Pantolonlara: P_1, P_2, P_3

Gömleklere: G_1, G_2

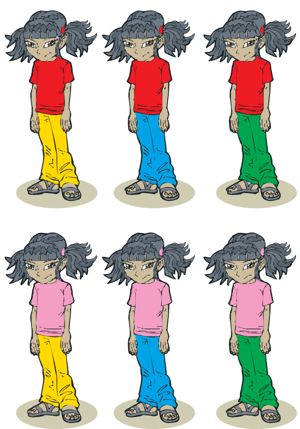
diyelim.

Seçme işlemi P_1G_1, P_1G_2, P_2G_1, P_2G_2 ve P_3G_1, P_3G_2 olmak üzere 6 değişik şekilde yapılabilir.

Bu sonucu

$3 \cdot 2 = 6$

şeklinde buluruz.



Örnek 1

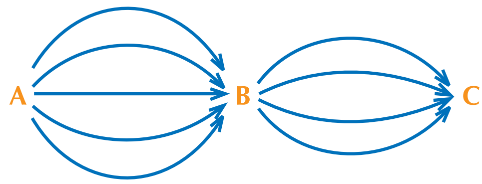
A şehrinden B şehrine 5 farklı yol, B şehrinden C şehrine ise 4 farklı yol vardır. Buna göre, A dan C ye gitmek isteyen biri, B şehrine uğramak koşulu ile,

a. **A dan C ye kaç farklı yolla gidebilir?**

b. **A dan C ye kaç farklı yolla gidip dönebilir?**

c. **Giderken kullandığı yolları dönerken kullanmamak üzere, A dan C ye kaç farklı şekilde gidip dönebilir?**

Çözüm



a. A dan B ye 5 farklı yol, B den C ye 4 farklı yol vardır. O halde, B ye uğramak koşuluyla $5 \cdot 4 = 20$ farklı yolla A dan C ye gidilebilir.

b. A dan C ye 20 değişik yolla gidilebildiğini bulduk. C den A ya dönerken, C den B ye 4 farklı yol, B den A ya 5 farklı yolla gidilebilir. Yani dönüşte de $5 \cdot 4 = 20$ farklı yol izlenebilir. O halde gidiş dönüş $20 \cdot 20 = 400$ farklı yolla yapılabilir.

c. A dan C ye 20 değişik yol vardır. Gittiği yolu dönerken kullanmayacağı için C den B ye 4 değil 3, B den A ya da 5 değil 4 yol kalmıştır. Yani dönüşte $3 \cdot 4 = 12$ farklı yol vardır.

O halde, gidiş dönüş $20 \cdot 12 = 240$ farklı yolla yapılabilir.

Örnek 2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak üç basamaklı

a. **Kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

b. **Kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?**

c. **Rakamları tekrarsız kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

d. **Rakamları tekrarsız kaç farklı tek doğal sayı yazılabilir?**

Çözüm

a. 3 basamaklı sayının basamaklarının her birini bir kutuyla gösterelim. Kümede 5 tane rakam olduğundan her basamak için 5 seçenek vardır.

$\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{5}$

Çarpma kuralına göre, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ farklı sayı yazılabilir.

b. Sayının çift olması istendiğine göre birler basamağına çift rakamları yazabiliriz. Kümede 2 tane çift rakam var, yani birler basamağı için 2 seçeneğimiz var.

$\boxed{5}\ \boxed{5}\ \underbrace{\boxed{2}}_{\{2,\ 4\}}$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ farklı sayı yazılabilir.

c. Yüzler basamağı için verilen 5 rakamı da seçebiliriz. Sayının rakamları tekrarsız olması isteniyor. Bu nedenle onlar basamağı için geriye kalan 4 rakamdan birini, birler basamağı için ise kalan 3 rakamdan birini seçeriz.

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}$ $\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı sayı

yazılabilir.

d. Sayının tek olması için birler basamağındaki rakam tek olmalıdır. Verilen kümede 3 tane {1, 3, 5} tek sayı vardır. Yani birler basamağı için 3 seçenek var. Birler basamağına bir rakam kullandık. Sayının rakamları tekrarsız olması istendiği için yüzler basamağına geriye kalan 4 rakamdan birini, onlar basamağına da geriye kalan 3 rakamdan birini yazabiliriz.

$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \underbrace{\boxed{3}}_{\{1,\ 3,\ 5\}}$ $\Rightarrow$ $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ farklı sayı yazılabilir.

Örnek 3

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarını kullanarak üç basamaklı

a. Kaç doğal sayı yazılabilir?

b. Kaç çift doğal sayı yazılabilir?

c. Rakamları tekrarsız kaç doğal sayı yazılabilir?

d. Rakamları tekrarsız kaç çift doğal sayı yazılabilir?

Çözüm

a. Kümede 6 rakam vardır. Sayı üç basamaklı olacağından yüzler basamağına 0 yazamayız. Bu nedenle yüzler basamağına 6 değil 5 rakamdan birini yazabiliriz. Onlar ve birler basamakları için bir sınırlama olmadığından bu basamaklara 6 rakamdan birini yazabiliriz.

$\boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{6}$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ farklı sayı

yazılabilir.

b. Sayının çift olması istendiği için birler basamağına 0, 2, 4 yani 3 rakamdan biri yazılabilir. Üç basamaklı olacağından yüzler basamağına 0 yazamayız yani kalan 5 rakamdan birini yazabiliriz. Onlar basamağına da 6 rakamdan herhangi birini yazarız.

$\underbrace{\boxed{5}}_{\text{0 ın dışındaki 5 rakamdan biri}}\ \underbrace{\boxed{6}}_{\text{6 rakamdan herhangi biri}}\ \underbrace{\boxed{3}}_{\{0,\ 2,\ 4\}}$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ farklı sayı yazılabilir.

c. Sayı üç basamaklı olacağından yüzler basamağına 0 yazamayız yani kalan 5 rakamdan birini yazabiliriz. 6 rakamdan birini kullandığımız için onlar basamağına kalan 5 rakamdan birini, birler basamağına da 4 rakamdan birini yazabiliriz.

$\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$ $\Rightarrow$ $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ farklı sayı

yazılabilir.

d. Sayının üç basamaklı olması için yüzler basamağına 0 yazamıyoruz. Sayının çift olması için birler basamağına 0, 2, 4 yazabiliriz. 0 her iki durumla da ilgili olduğu için bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. Birler basamağı sıfır olsun.

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1} \Rightarrow 5 \cdot 4 = 20$

{1, 2, 3, 4, 5} ← 5; 4 → Kalan 4 rakamdan biri; 1 → {0}

2. Birler basamağı sıfır olmasın.

Birler basamağına yazabileceğimiz 2 rakam (2, 4) var. Yüzler basamağına 0 ve birler basamağına kullandığımız rakam dışında 4 rakam kalır. Toplam 5 rakamdan birini birler, birini yüzler basamağına yazdığımız için onlar basamağına kalan 4 rakamdan birini yazabiliriz.

$\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{2} \Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$

2 → {2, 4}

1. durum ile 2. durumu toplarsak

$20 + 32 = 52$ farklı çift sayı yazılabilir.

Örnek 4

3, 4, 5, 6, 7 rakamları kullanılarak rakamları birbirinden farklı olan, üç basamaklı ve 560 tan küçük kaç değişik doğal sayı yazılabilir?

Çözüm

Sayının 560 tan küçük olması için yüzler basamağına 3, 4, 5 gelebilir. Yüzler basamağına 3 ve 4 gelmesi ile 5 gelmesi durumunu ayrı ayrı inceleyelim.

$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3} \Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

{3, 4} ← 2; 4 → Kalan 4 rakamdan biri; 3 → Kalan 3 rakamdan biri

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

{5} ← 1; 2 → 560 tan küçük olabilmesi için 3 veya 4 yazılabilir.; 3 → Kalan 3 rakamdan biri

24 sayı ilk durumdan, 6 sayı ikinci durumdan olmak üzere toplam $24 + 6 = 30$ sayı yazılabilir.

Etkinlik 1

Aşağıda verilen bilgilerden doğru olanların yanına D, yanlış olanların yanına Y yazalım.

a. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarını kullanarak

1. ☐ ▸ İki basamaklı 25 sayı yazılabilir.

2. ☐ ▸ Rakamları birbirinden farklı iki basamaklı 13 çift sayı yazılabilir.

3. ☐ ▸ Rakamları birbirinden farklı iki basamaklı üç basamaklı 5 ile tam bölünebilen 9 farklı sayı yazılabilir.

b. ☐ ▸ İSTANBUL kelimesinin harflerini birer kez kullanarak 4 harfli anlamlı ya da anlamsız 1680 farklı kelime yazılabilir.

c. ☐ ▸ SEVGİ kelimesinin harflerini birer kez kullanarak S harfi ile başlayan 5 harfli anlamlı ya da anlamsız 120 kelime yazılabilir.

Örnek 5

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarıyla en az iki basamağındaki rakamı aynı olan üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm

En az iki basamağındaki rakamı aynı olan üç basamaklı sayıları bulmak için tüm üç basamaklı sayı adedinden, üç basamaklı ve rakamları birbirinden farklı sayı adedini çıkarmalıyız.

5 elemanlı bu kümenin elemanlarıyla üç basamaklı

$\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{5} \Rightarrow 5\cdot5\cdot5 = 125$ sayı,

üç basamaklı ve rakamları birbirinden farklı

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3} \Rightarrow 5\cdot4\cdot3 = 60$ sayı

yazılabilir.

Yani sonuç $125 - 60 = 65$ tir.

Örnek 6

30 kişilik bir sınıfta bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm

Sınıf 30 kişi olduğundan başkan için 30 seçenek vardır. Başkan seçildikten sonra yardımcısı kalan 29 kişi arasından seçilecektir. Bu durumda $30\cdot29 = 870$ farklı şekilde bir başkan ve yardımcısı seçilebilir.

Örnek 7

4 mektup 5 posta kutusuna kaç değişik şekilde atılabilir?

Çözüm

Herhangi bir sınırlama olmadığından birinci mektup 5 kutudan birine, ikinci mektup 5 kutudan birine, üçüncü mektup 5 kutudan birine, dördüncü mektup da 5 kutudan birine atılacağından bu 4 mektup 5 posta kutusuna $5\cdot5\cdot5\cdot5 = 625$ farklı şekilde atılabilir.

Örnek 8

4 mektup 5 posta kutusuna bir kutuya <u>en çok</u> bir mektup atılması koşuluyla kaç değişik şekilde atılabilir?

Çözüm

Birinci mektup 5 kutudan birine atılabilir. Bir kutuya en çok bir mektup atılabileceğinden ikinci mektup için 4 kutu, üçüncü mektup için 3 kutu, dördüncü mektup için 2 kutu kalır. O halde, 4 mektup 5 posta kutusuna bir kutuya en çok bir mektup atılması koşuluyla $5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$ farklı şekilde atılabilir.

FAKTÖRİYEL

n bir doğal sayı olmak üzere, 1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına n faktöriyel denir ve n! ile gösterilir. Yani,

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

dir. Özel olarak $\boxed{0! = 1}$, $\boxed{1! = 1}$ dir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

$2! = 1\cdot2 = 2$ $\qquad$ $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

$3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$ $\qquad$ $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

> Sadece 3 tane 0 (sıfır) kullanarak 6 sayısını bulabilir misiniz?

n pozitif doğal sayı olmak üzere,

$$\boxed{n! = (n-1)!\cdot n}$$

dir. Örneğin,

$4! = 3!.4$

$5! = 4!.5$

$12! = 11!.12$ dir.

Ayrıca,

Aynı kuralı uygularsak

$$n! = (n-1)!\cdot n = (n-2)!\cdot(n-1)\cdot n$$
$$= (n-3)!\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$$

$$15! = 14!\cdot15 = 13!\cdot14\cdot15 = 12!\cdot13\cdot14\cdot15$$

tir.

Örnek 9

Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\frac{8!}{6!}$ b. $\frac{6!\cdot 11!}{12!}$ c. $\frac{7!+6!}{6!-5!}$

Çözüm

a. $\frac{8!}{6!}=\frac{7!\cdot 8}{6!}=\frac{\cancel{6!}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{6!}}=7\cdot 8=56$

b. $\frac{6!\cdot 11!}{12!}=\frac{6!\cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!}\cdot 12}=\frac{6!}{12}=\frac{1\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{12}}=60$

c. $\frac{7!+6!}{6!-5!}=\frac{6!\cdot 7+6!}{5!\cdot 6-5!}=\frac{6!(7+1)}{5!\cdot(6-1)}=\frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 8}{\cancel{5!}\cdot 5}=\frac{48}{5}$

Örnek 10

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştirelim.

a. $\frac{(n+1)!}{n!}$ b. $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$

Çözüm

a. $\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}}=n+1$

b. $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot(n-1)}=\frac{1}{n-1}$

Örnek 11

$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$ olduğuna göre, **n kaçtır?**

Çözüm

$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72 \Rightarrow \frac{\cancel{(n-1)!}\cdot n\cdot(n+1)}{\cancel{(n-1)!}}=72$

$\Rightarrow n(n+1)=72$

$\Rightarrow n^2+n=72 \Rightarrow n^2+n-72=0$

$\Rightarrow (n-8)(n+9)=0$

$\Rightarrow n=8$ ve $n=-9$

Faktöriyel tanımından n doğal sayı olmalıydı. Bu nedenle $n=8$ dir.

Etkinlik 2

Aşağıda verilen işlemler ile sonuçlar arasında doğru eşleştirmeleri yapalım.

İşlem	Sonuç
a) $0!+1!+2!+3!+4!$	5
b) $\frac{11!-10!}{11!+10!}\cdot 3!$	11
c) $\frac{14!+15!}{4\cdot 13!}$	56
d) $\frac{9!+10!+11!}{11\cdot 9!}$	34

PERMÜTASYON (SIRALAMA)

$n \geq r$ olmak üzere, n elemanlı sonlu bir A kümesinin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan sıralı r lilerden her birine n nin r li permütasyonu denir.

n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ şeklinde gösterilir.

$$\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}} \quad \text{dir.}$$

Yani $P(n, r)$ n tane elemandan r tanesininin yan yana farklı diziliş sayısıdır. O halde, n tane nesnenin yan yana farklı dizilişlerinin sayısı $P(n, n)$ dir.

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \quad \text{dir.}$$

$$\boxed{P(n, n) = n!}$$

Örneğin, $P(5, 3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$

$$P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$$

$$P(9, 1) = \frac{9!}{(9-1)!} = \frac{8! \cdot 9}{8!} = 9$$

Örnek 12

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının

a. Sayısı kaçtır?

b. Kaç tanesinde c bulunmaz?

c. Kaç tanesinde c bulunur?

Çözüm

a. A kümesinin eleman sayısı 5 tir.

O halde, $n = 5$ tir. 3 lü permütasyonlarının sayısı istendiği için $r = 3$ tür.

Bu durumda

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1 \cdot 2}} = 60 \quad \text{tır.}$$

b. 3 lü permütasyonlarda c nin bulunmasını istemiyorsak, c harfi kümede yokmuş gibi davranırız. Bu durumda kümede 4 eleman kalır ve bunların 3 lü permütasyon sayısı

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ tür.}$$

c. c nin bulunduğu 3 lü permütasyonların sayısını bulmak istiyorsak 3 lü permütasyonların sayısından c nin bulunmadıklarının sayısını çıkarırız.

$P(5, 3) - P(4, 3) = 60 - 24 = 36$ dır.

Örnek 13

4 farklı kitap bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm

1. yol

4 farklı kitabın yan yana diziliş sayısı $P(4, 4) = 4!$ dir.

Yani $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ tür.

2. yol

Çarpma kuralına göre çözelim.

Rafa önce 4 kitaptan biri, yanına kalan 3 kitaptan biri, yanına kalan 2 kitaptan biri ve en son kalan kitabı rafa koyarız. Bu durumda $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ buluruz.

Örnek 14

6 farklı kitaptan 4 ü bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm

1. yol

6 farklı kitaptan 4 ünün yan yana sıralanma sayısı.

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2}} = 360 \quad \text{tır.}$$

2. yol

Rafa önce 6 kitaptan biri, sonra kalan 5 kitaptan biri, yanına kalan 4 kitaptan biri ve en son kalan 3 kitaptan biri konursa cevabı $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ buluruz.

Örnek 15

10 kişinin katıldığı bir sınavda ilk üç derece kaç farklı biçimde gerçekleşebilir?

Çözüm

1. yol

10 kişiden 3 ünü birinci, ikinci ve üçüncü olarak sıralayacağız. Yani,

$$P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{7!}} = 720 \text{ dir.}$$

2. yol

1. lik için 10 kişi, 2. lik için kalan 9 kişi, 3. lük için ise kalan 8 kişi vardır. Bu durumda $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ buluruz.

Örnek 16

Birbirinden farklı 2 fizik, 3 kimya ve 4 matematik kitabı bir rafa

a. **Kaç farklı biçimde sıralanabilir?**

b. **Aynı türden kitaplar yan yana olmak koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilir?**

c. **Matematik kitapları bir arada olmak koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilir?**

Çözüm

a. Hiçbir koşul olmadığından $2 + 3 + 4 = 9$ kitap yan yana $P(9, 9) = 9!$ şekilde sıralanabilir veya çarpma kuralına göre, $9 \cdot 8 \cdot 7 \ldots \cdot 1 = 9!$ şekilde sıralanabilir.

b. Aynı türden kitaplar yan yana geleceğinden onları tek kitap gibi düşünürsek

1 kitap + 1 kitap + 1 kitap → 3 kitap

$\boxed{F_1F_2}$ $\boxed{K_1K_2K_3}$ $\boxed{M_1M_2M_3M_4}$ → 3!

farklı şekilde sıralanabilir.

2 fizik kitabı kendi arasında 2!, 3 kimya kitabı 3!, 4 matematik kitabı ise 4! farklı şekilde sıralanabilir.

Bu durumda bizden istenen sıralama sayısı

$3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$

dir.

c. Matematik kitapları bir arada olacağından onları tek kitap gibi düşünürüz.

$$\underbrace{F_1F_2}_{2} \quad \underbrace{K_1K_2K_3}_{3} \quad \underbrace{\boxed{M_1M_2M_3M_4}}_{1}$$

$\Rightarrow$ $2 + 3 + 1 = 6$ kitap

Bu durumda tüm kitaplar 6! şekilde sıralabilir. 4 matematik kitabı kendi arasında 4! şekilde sıralanır. Yani sonuç $6! \cdot 4!$ dir.

Örnek 17

4 evli çift, eşler bir arada olmak koşuluyla yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm

$$\underbrace{K_1E_1}_{1} \quad \underbrace{K_2E_2}_{2} \quad \underbrace{K_3E_3}_{3} \quad \underbrace{K_4E_4}_{4}$$

Çiftlerin bir arada olması istendiği için her çifti bir kişi gibi düşünürsek (önceki sorudaki kitaplar gibi) bunlar 4! farklı şekilde oturabilirler. Her çiftin kendi arasında yer değiştirmesi 1. çift için 2!, 2. çift için 2!, 3. çift için 2! ve 4. çift için 2! dir.

Bu durumda cevap $4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ dir.

Örnek 18

4 erkek, 3 kızdan oluşan bir grup herhangi iki erkek arasında bir kız bulunması koşuluyla yan yana kaç farklı biçimde oturabilirler?

Çözüm

$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$K_1 \quad K_2 \quad K_3$

Oturma düzeninin yandaki gibi olması isteniyor. Bu durumda 4 erkek 4! şekilde dizildikten sonra aralarındaki 3 boşluğa 3 kız 3! şekilde dizilir.

Yani 4!·3! farklı şekilde oturabilirler.

Dönel (Dairesel) Permütasyon

n elemanlı bir kümenin elemanlarının bir daire üzerindeki farklı sıralanışlarının her birine bu kümenin bir dönel permütasyonu denir.

n elemanlı bir kümenin dönel permütasyonlarının sayısı

$\boxed{(n-1)!}$ dir.

Örneğin, n kişi yuvarlak masa etrafında (n – 1)! farklı şekilde oturabilir. Kişilerden biri masada sabit tutulur ve kalan (n – 1) kişinin yerleri değiştirilir.

Örnek 19

4 evli çift eşler bir arada olmak koşuluyla yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm

Eşler bir arada olacağından her çifti bir kişi olarak alırız. Bu durumda birey sayısı

$\underbrace{K_1E_1}_{1} \quad \underbrace{K_2E_2}_{1} \quad \underbrace{K_3E_3}_{1} \quad \underbrace{K_4E_4}_{1} \rightarrow$ 4 olur.

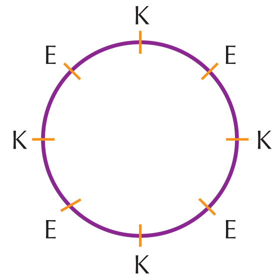
4 kişi yuvarlak masa etrafında 3! farklı şekilde oturabilir. Eşlerin kendi aralarında

yer değiştirmesiyle sonuç, $3!.\underbrace{2!.2!.2!.2!}_{\text{Her bir eş için 2! yazdık.}} = 96$ dır.

Örnek 20

4 kız, 4 erkek yuvarlak masa etrafında her iki erkeğin arasında bir kız oturması koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm



Önce 4 kızı masaya oturtur ve daha sonra 4 erkeğin yerlerini kızlara göre belirleriz.

4 kız yuvarlak masa etrafında 3! şekilde oturabilir. Kızlar oturduktan sonra kalan 4 boş yere 4 erkek 4! farklı şekilde oturabilir. Bu durumda cevap 3!·4! dir.

Aynı sonucu önce erkekleri oturtarak da bulabiliriz.

Örnek 21

Anne, baba ve 3 çocuktan oluşan 5 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında

a. **Kaç farklı şekilde oturabilir?**

b. **Anne ile baba yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilir?**

c. **Anne ile babanın arasına en küçük çocuğun gelmesi koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilir?**

Çözüm

a. 5 kişi yuvarlak masa etrafında
$(5-1)! = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$
farklı şekilde oturabilir.

b. Anne ile babanın yan yana olması istendiği için onları tek kişi olarak alırız. Bu durumda birey sayısı

$\underbrace{A \ B}_{1} \quad \underbrace{C_1}_{1} \quad \underbrace{C_2}_{1} \quad \underbrace{C_3}_{1} \rightarrow$ 4 olur.

4 kişinin yuvarlak masa etrafında farklı oturuş sayısı $(4-1)! = 3!$ dir.

Anne ile babanın kendi aralarında yer değiştirmesi 2! dir. O halde, cevap 3!·2! = 12 dir.

c. Anne ile baba arasına en küçük çocuk oturacaksa bu üç kişiyi tek kişi olarak alırız. Bu durumda birey sayısı

$\underbrace{AC_3B}_{1}\ \underbrace{C_1}_{1}\ \underbrace{C_2}_{1} \rightarrow 3$ olur.

3 kişi yuvarlak masa etrafında $2!$ farklı şekilde oturabilir. Anne ile babanın kendi aralarında yer değiştirmesi de $2!$ dir. Bu durumda cevap $2! \cdot 2! = 4$ tür.

> n tane farklı anahtar halka biçiminde maskotsuz bir anahtarlığa $\dfrac{(n-1)!}{2}$ farklı biçimde takılabilir.
>
> (Anahtarlığa iki taraftan da bakabileceğimizi unutmayalım.)
>
> Örneğin, 5 farklı anahtar maskotsuz bir anahtarlığa
>
> $$\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 12$$
>
> farklı biçimde takılabilir.

Tekrarlı Permütasyon

n tane elemanın, n_1 tanesi bir türden, n_2 tanesi başka bir türden, ..., n_r tanesi farklı bir türden olsun. $(n_1 + n_2 + ... + n_r = n)$

Bu n tane elemanın yerlerinin değiştirilmesi ile oluşan farklı sıralamaların sayısı,

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}}$$ dir.

Örnek 22

Aynı renk olanlar özdeş olmak üzere, 2 sarı, 3 mavi, 3 kırmızı top yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm

$n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$ tür.

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 3 = 8$ dir.

Bu durumda diziliş sayısı $\dfrac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 560$ tır.

Örnek 23

AYAKKABI kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

Çözüm

AYAKKABI → A → 3 tane
Y → 1 tane
K → 2 tane
B → 1 tane
I → 1 tane
} Toplam 8 tane

Bu durumda, yazılabilecek 8 harfli kelime sayısı

$\dfrac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$ tır.

Örnek 24

2323344 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm

2323344 → 2 → 2 tane
3 → 3 tane
4 → 2 tane
} Toplam 7 tane

Bu durumda, $\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$ tane 7 basamaklı sayı yazılabilir.

Örnek 25

3330044 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm

3330044 → 3 → 3 tane
0 → 2 tane
4 → 2 tane
} Toplam 7 tane

$\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$ dur. Bu 210 sayısı içinde 0 ile başlayan sayılar da vardır.

0 ile başlayan sayılar 7 basamaklı olamayacağı için bunların adedini bulup 210 dan çıkarmalıyız. 7 rakamdan 2 tanesi 0 olduğu için 210 sayısının $\frac{2}{7}$ si yani $210 \cdot \frac{2}{7} = 60$ tanesi 0 ile başlar.

Bu durumda $210 - 60 = 150$ tane 7 basamaklı farklı sayı yazılabilir.

Örnek 26

OLASILIK kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 8 harfli, O ile başlayıp K ile biten kaç farklı kelime yazılabilir?

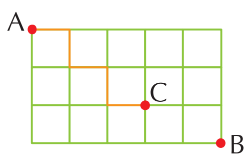
Çözüm

O _ _ _ _ _ _ _ K

O ve K harfleri başa ve sona yerleştirildikten sonra diğer harflerin kendi aralarında yer değiştirme sayısını buluruz.

$$\left.\begin{array}{l} L \longrightarrow 2 \text{ tane} \\ A \longrightarrow 1 \text{ tane} \\ S \longrightarrow 1 \text{ tane} \\ I \longrightarrow 2 \text{ tane} \end{array}\right\} \text{Toplam } 6 \text{ tane } \Rightarrow \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180 \text{ tanedir.}$$

Örnek 27



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir.

A dan hareket edip B ye en kısa yoldan gidecek olan bir kimse,

a. **Kaç farklı yol izleyebilir?**

b. **C ye uğramak koşuluyla kaç farklı yol izleyebilir?**

Çözüm

a. A dan B ye sağa doğru 5 çizgi, aşağı doğru 3 çizgi vardır. Yani A dan B ye en kısa yoldan gidecek bir kimse her durumda 5 çizgi sağa, 3 çizgi aşağı gitmelidir. Yani yol $\underbrace{sssss}_{\text{sağ}}\ \underbrace{aaa}_{\text{aşağı}}$ nın yer değiştirme sayısı kadardır.

Toplam $5 + 3 = 8$ çizgi vardır. Bu durumda

$\frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$ farklı yol izleyebilir.

b. C ye uğraması gerektiği için önce A dan C ye olan farklı yol sayısını sonra da B den C ye yol sayısını bulur ve çarpma kuralını uygularız. A dan C ye gitmesi için 3 sağa, 2 aşağı doğru çizgi gitmelidir, yani toplam $3 + 2 = 5$ çizgi vardır.

O halde, $\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ farklı yol izleyebilir. (sssaa)

C den B ye gitmesi için 2 sağa, 1 aşağı doğru çizgi gitmelidir, yani toplam $2 + 1 = 3$ çizgi vardır.

O halde, $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ farklı yol izleyebilir. (ssa)

Bu durumda, A dan B ye C ye uğramak koşuluyla en kısa yoldan gidecek olan bir kimse $10 \cdot 3 = 30$ farklı yol izleyebilir.

Örnek 28

YEMYEŞİL kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek her Y harfinden sonra E harfi gelecek şekilde (YE) 8 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç kelime yazılabilir?

Çözüm

Her Y harfinden sonra E harfi gelecekse Y ve E yi bir harf gibi düşünürüz.

YEMYEŞİL → X M X Ş İ L

$$\text{X diyelim} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \text{ tane X} \\ 1 \text{ tane M} \\ 1 \text{ tane Ş} \\ 1 \text{ tane İ} \\ 1 \text{ tane L} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Toplam } 6 \text{ harf } \frac{6!}{2!1!1!1!1!} = 360$$

KOMBİNASYON (GRUPLAMA)

$n \geq r$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerine **n nin r li kombinasyonu** denir ve $\binom{n}{r}$ veya $C(n, r)$ şeklinde gösterilir.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Özellikler

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \rightarrow \binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \rightarrow \binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \rightarrow \binom{7}{3} = \binom{7}{4}$
- $\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow a = b$ veya $a + b = n$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \rightarrow \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = \binom{9}{3}$

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 29

$\binom{n}{5} = \binom{n}{7}$ olduğuna göre, **n kaçtır?**

Çözüm

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow a = b$ veya $a + b = n$ idi.

Bu durumda, $\binom{n}{5} = \binom{n}{7} \Rightarrow n = 5 + 7 = 12$ dir.

Örnek 30

$\binom{14}{3n-2} = \binom{14}{n}$ olduğuna göre,

n nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow a = b$ veya $a + b = n$

olduğundan,

$3n - 2 = n$ veya $3n - 2 + n = 14$ tür.

$\Rightarrow 2n = 2$ veya $4n = 16$ tür.

$\boxed{n = 1}$ $\boxed{n = 4}$

Örnek 31

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin

a. **Sayısı kaçtır?**

b. **Kaç tanesinde a bulunmaz?**

c. **Kaç tanesinde b bulunur?**

d. **Kaç tanesinde c bulunur, d bulunmaz?**

Çözüm

a. A kümesi 5 elemanlıdır. 5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$$

dur.

b. 3 elemanlı alt kümelerin içinde a nın bulunmasını istemiyorsak seçimimizi a dışındaki elemanların arasından yapmalıyız. Bu durumda 4 elemandan 3 tane seçmeliyiz.

Yani a nın bulunmadığı 3 elemanlı alt küme sayısı

$$\binom{4}{3} = 4$$

tür.

c. $\{\underline{b}, \_\_, \_\_\} \rightarrow$ seçeceğimiz 3 eleman

Seçeceğimiz 3 elemandan biri b olacağına göre, seçmemiz gereken 2 eleman kalır. 5 elemanlı kümeden b seçildiğinden geriye kalan 4 elemandan 2 sini seçeriz.

Bu durumda, b nin bulunduğu 3 elemanlı alt küme sayısı

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{4!(4-2)!} = \frac{\cancel{3!}\cdot 3\cdot 4}{\cancel{3!}\cdot 2!} = 6$$

dır.

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$$

d. $\{\underline{c}, \_\_, \_\_\} \rightarrow$ seçeceğimiz 3 eleman

Seçeceğimiz 3 elemandan biri c olacağına göre, seçmemiz gereken 2 eleman kalır. c seçildiği, d nin de seçilenler arasında olmaması istendiği için geriye kümede 3 eleman kalır.

Bu durumda c nin bulunup, d nin bulunmadığı alt küme sayısı

$$\binom{3}{2} = 3$$

tür.

Örnek 32

9 kişilik bir gruptan 4 kişilik bir takım kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

Çözüm

9 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı alt kümelerini buluyor gibi düşünürüz. Bu durumda 9 kişi arasından 4 kişi

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek 33

4 erkek, 5 kız öğrencinin bulunduğu bir gruptan

a. **2 erkek, 3 kız öğrenciden oluşan 5 kişilik bir grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

b. **En az bir erkek öğrencinin bulunduğu 5 kişilik bir grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

Çözüm

a. 4 erkek arasından 2 tane, 5 kız arasından da 3 tane öğrenci seçeceğiz. Bu durumda 5 kişilik grup

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3} = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{5!}{3!2!} = 6\cdot 10 = 60$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

b. Oluşturulabilecek tüm 5 kişilik grup sayısından, hiç erkek bulunmayan 5 kişilik grup sayısını çıkarırsak içinde en az bir erkek öğrencinin bulunduğu 5 kişilik grup sayısını buluruz.

Toplam 4 + 5 = 9 öğrenci vardır. Koşulsuz 5 kişi seçtik

$$\underbrace{\binom{9}{4}}_{\text{Tüm grupların sayısı}} - \underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{Erkek öğrenci olmayan grupların sayısı}}$$

5 kız öğrenciden 5 kişilik grup seçtik

$$= \frac{9!}{5!\cdot 4!} - 1 = 125 \text{ tir.}$$

Örnek 34

Aralarında Ömer ile Cemre'nin de bulunduğu 8 kişiden 4 kişilik bir ekip kurulacaktır.

a. **Bu ekip kaç farklı şekilde kurulabilir?**

b. **Ömer ile Cemre'nin bulunmadığı kaç farklı ekip kurulabilir?**

c. **Ömer ile Cemre'nin grupta bulunduğu kaç farklı ekip kurulabilir?**

Çözüm

a. 8 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı alt kümelerini buluyor gibi düşünürüz. Bu durumda 8 kişiden 4 kişi

$$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=70$$

farklı şekilde seçilebilir.

b. Ömer ile Cemre grupta bulunmayacağı için kalan 6 kişiden 4 kişi seçeriz.

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$$

c. $\{\underline{\text{Ömer}}, \text{Cemre}, \text{—}, \text{—}\}$ → seçilecek 4 kişi

Önceki sorudaki gibi düşünebiliriz. Ömer ve Cemre grupta olacağı için seçilecek 2 kişi kalır. Kalan 6 kişiden 2 kişi

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=15$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek 35

Bir öğrenci 11 soruluk bir sınavda 7 soruyu cevaplayacaktır.

İlk 5 sorudan en az 3 ünü cevaplamak şartıyla kaç farklı seçim yapabilir?

Çözüm

İlk 5 sorudan en az 3 ünü cevaplaması demek bu sorulardan 3, 4 veya 5 soru cevaplayacak demektir.

1. Durum :

İlk 5 sorudan 3 ünü cevaplarsa kalan 6 sorudan 4 (11 – 5 = 6) ünü cevaplayacaktır. (Çünkü toplamda 7 soru cevaplaması gerek)
Yani,

İlk 5 soru ← → Kalan 6 soru

$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}=150$$

cevaplanacak 3 + 4 = 7 soru

2. Durum :

İlk 5 sorudan 4 ünü cevaplarsa kalan 6 sorudan 3 ünü cevaplayacaktır. (7 – 4 = 3)

$$\binom{5}{4}\binom{6}{3}=5\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=5\cdot 20=100$$

3. Durum :

İlk 5 sorudan 5 ini cevaplarsa kalan 6 sorudan 2 sini cevaplayacaktır. (7 – 5 = 2)

$$\binom{5}{5}\binom{6}{2}=1\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$$

Bu durumda toplama kuralına göre

150 + 100 + 15 = 265 buluruz.

Örnek 36

9 seçmeli dersten belli 3 ü aynı saatte verilmektedir.

Bu derslerden 4 tane seçmek isteyen bir öğrenci kaç değişik seçim yapabilir?

Çözüm

1. Durum :

Aynı saatte verilen 3 dersten hiçbirini seçmez. Bu durumda seçeceği 4 dersi kalan 6 dersten seçer.

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!2!}=15$$

2. Durum :

Aynı saatte verilen dersleri bir arada seçemeyeceği için bu 3 dersten 1 ini seçer, kalan 6 dersten de 3 ünü seçer ve toplam 4 ders seçmiş olur.

$$\binom{3}{1}\binom{6}{3}=60$$

Bu durumda 15 + 60 = 75 farklı seçim yapabilir.

Örnek 37

Herhangi üçü doğrusal olmayan 8 noktadan kaç farklı doğru geçer?

Çözüm

Düzlemde iki noktadan bir doğru geçer. 8 noktadan seçeceğimiz her iki noktadan bir doğru geçeceğinden 8 noktadan

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=28$$

farklı doğru geçer.

iki noktadan bir doğru geçtiğini görebildin mi?

Örnek 38

Herhangi üçü doğrusal olmayan 10 nokta ile köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

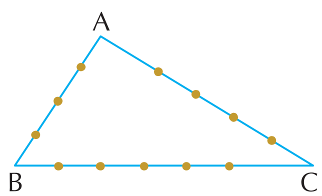
Çözüm

Bu 10 noktadan seçeceğimiz herhangi 3 tanesi ile istenilen üçgenleri oluşturabiliriz. Bu durumda

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=120$$

farklı üçgen çizilebilir.

Örnek 39



Yandaki ABC üçgenin kenarları üzerinde 12 nokta verilmiştir.

Köşeleri bu 12 noktadan üçü olan kaç üçgen oluşturulabilir?

Çözüm

Herhangi üçü doğrusal olmayan 12 nokta ile $\binom{12}{3}$ kadar üçgen oluşturabilir.

Ancak bu soruda doğrusal noktalar var. AB kenarı üzerindeki 3 nokta doğrusaldır. Bu nedenle bu 3 nokta ile üçgen oluşturulamaz. Aynı durum AC üzerindeki 4 nokta ile BC üzerindeki 5 nokta için de geçerlidir. O halde oluşturulabilecek tüm üçgenlerin sayısından bu noktalardan gelecek üçgen sayısını çıkarırız.

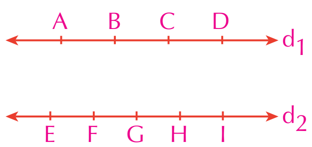
$$\binom{12}{3}-\underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{AB üzerinde}}-\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{AC üzerinde}}-\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{BC üzerinde}}$$

$$=\frac{12!}{3!\cdot 9!}-1-4-\frac{5!}{3!\cdot 2!}$$

$$=205$$

farklı üçgen oluşturabilir.

Örnek 40



$A, B, C \in d_1$

$E, F, G, H, I \in d_2$

Yukarıdaki şekilde $d_1 \parallel d_2$ olduğuna göre, köşeleri bu 9 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen çizilebilir?

Çözüm

Bir önceki sorudakine benzer şekilde çözebiliriz. Herhangi üçü doğrusal olmayan 9 nokta ile $\binom{9}{3}$ kadar üçgen çizilebilir. Bu üçgen sayısından d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki doğrusal noktalarla çizilemeyen üçgenleri çıkarmalıyız.

$$\binom{9}{3} - \underbrace{\binom{4}{3}}_{d_1 \text{ üzerindeki}} - \underbrace{\binom{5}{3}}_{d_2 \text{ üzerindeki}}$$

$$= \frac{9!}{3! \cdot 6!} - 4 - \frac{5!}{3!2!}$$

$= 84 - 4 - 10 = 70$ üçgen çizilebilir.

Örnek 41

Birbirine paralel olmayan 8 doğru en çok kaç farklı noktada kesişir?

Çözüm

Paralel olmayan iki doğru en çok bir noktada kesişebilir. Bu durumda 8 doğrudan herhangi ikisini seçtiğimizde bu iki doğrudan bir kesişim noktası gelir. O halde paralel olmayan 8 doğru

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

farklı noktada kesişir.

Örnek 42

3 ü birbirine paralel 8 doğru en çok kaç farklı nokta-da kesişir?

Çözüm

8 doğrunun en çok $\binom{8}{2} = 28$ farklı noktada kesiştiğini bir önceki soruda bulmuştuk.

Ancak 3 doğru birbirine paralel olduğundan bu doğrular kesişemez. Bu nedenle 3 doğrunun kesişen noktası sayısını 28 den çıkarmalıyız. Bu durumda 3 ü birbirine paralel 8 doğru en çok

$$\binom{8}{2} - \binom{3}{2} = 28 - 3 = 25$$

farklı noktada kesişir.

Örnek 43

A, B, C, D birer rakam olmak üzere,

$$A > B > C > D$$

koşulunu sağlayan kaç tane dört basamaklı ABCD sayısı vardır?

Çözüm

A, B, C, D birer rakam olduğuna göre, 0 ile 9 arasında (10 rakam vardır.) değerler alabilir. Bu 10 rakamdan herhangi 4 ünü seçtiğimizde A > B > C > D koşuluna uyan sadece bir tane dört basamaklı ABCD sayısı yazabileceğimiz için

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

farklı şekilde seçer ve 210 tane dört basamaklı ABCD sayısı yazabiliriz.

Örnek 44

A, B, C, D birer rakam olmak üzere,

$$A < B < C < D$$

koşulunu sağlayan kaç tane dört basamaklı ABCD sayısı vardır?

Çözüm

Bu soru bir önceki soruya çok benziyor fakat bu soruda ABCD dört basamaklı sayısının en küçük rakamı A dır. Rakamlar arasında 4 ünü seçerken seçtiğimiz rakam 0 olursa ABCD nin en küçük rakamı A olduğunda $A = 0$ olur. Bu durumda ABCD dört basamaklı olmaz. Yani 0 ı seçmemeliyiz. Seçimimizi kalan 9 rakamdan yaparsak

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

farklı seçim yapabilir ve bunun sonucunda 126 tane dört basamaklı ABCD sayısı yazabiliriz.

(Bir önceki soruda A en büyük rakam olduğundan 0 olma durumu söz konusu değildir.)

BİNOM AÇILIMI

n doğal sayı olmak üzere,

$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 \cdot y^n$ açılımına binom açılımı denir.

Bu açılımla ilgili olarak şunları söyleyebiliriz.

1. n + 1 tane terim vardır.
2. Her terimde x ile y nin üsleri (dereceleri) toplamı n dir.
3. Açılım x in azalan y nin artan kuvvetlerine göre yapılmıştır.
4. Kat sayılar toplamı x ve y yerine 1 yazılarak bulunur.
5. Baştan (r + 1)·terim $\boxed{\binom{n}{r} x^{n-r} \cdot y^r}$ dir.

Çarpanlara ayırma konusunda gördüğümüz Pascal Üçgenini hatırlayalım. $(x + y)^n$ açılımındaki terimlerin kat sayıları Pascal Üçgeni ile bulunabiliyordu.

$$\binom{0}{0} \leftarrow 1 \rightarrow (x+y)^0 \text{ ın kat sayıları}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \leftarrow 1 \quad 1 \rightarrow (x+y)^1 \text{ ün kat sayıları}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \leftarrow 1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow (x+y)^2 \text{ nin kat sayıları}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \leftarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow (x+y)^3 \text{ ün kat sayıları}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \leftarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \rightarrow (x+y)^4 \text{ ün kat sayıları}$$

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

1. $(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 \cdot y^0 + \binom{2}{1} x^1 \cdot y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2. $(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$

3. $(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$

4. $(2x+3y)^4 = \binom{4}{0} \cdot (2x)^4 \cdot (3y)^0 + \binom{4}{1} (2x)^3 (3y)^1 + \binom{4}{2} (2x)^2 (3y)^2 + \binom{4}{3} (2x)^1 (3y)^3 + \binom{4}{4} (2x)^0 (3y)^4$

$= 16x^4 + 4 \cdot 8x^3 \cdot 3y + 6 \cdot 4x^2 \cdot 9y^2 + 4 \cdot 2x \cdot 27y^3 + 81y^4$

$= 16x^4 + 96x^3 y + 216x^2 y^2 + 216\, xy^3 + 81y^4$

5. $(x-y)^4 = (x + (-y))^4$ şeklinde düşünürüz.

$= \binom{4}{0} x^4 \cdot (-y)^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot (-y)^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot (-y)^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot (-y)^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot (-y)^4$

$= x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4xy^3 + y^4$

(+, –, +, –, + şeklinde sırayla devam ettiğine dikkat edelim.)

Örnek 45

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$$

açılımında baştan 7. terimin kat sayısı kaçtır?

Çözüm

$n = 10$ ve $r + 1 = 7 \Rightarrow r = 6$ dır.

Bu durumda baştan 7. terim

$$\binom{10}{6}(x^2)^{10-6}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^6=\frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot x^8\cdot\frac{1}{x^6}$$

$$=210x^2 \text{ dir.}$$

Bu terimin kat sayısı da 210 dur.

Örnek 46

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$$

açılımında x^6 lı terimin kat sayısı kaçtır?

Çözüm

x^6 lı terim, baştan kaçıncı terim bilmiyoruz. Bu nedenle x^6 lı terim baştan $(r + 1)$. terim olsun diyelim. İfadede $n = 7$ dir. x^6 nın kat sayısına A dersek,

$$\binom{7}{r}(x^3)^{7-r}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=A\cdot x^6 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow\binom{7}{r}\cdot x^{21-3r}\cdot x^{-2r}=A\cdot x^6$$

$$\Rightarrow\binom{7}{r}\cdot x^{21-5r}=A\cdot x^{6}$$

x lerin üsleri eşit olmalıdır.

$21 - 5r = 6 \Rightarrow 5r = 15 \Rightarrow r = 3$ tür.

x^6 nın kat sayısı $A=\binom{7}{r}$ dir. $r=3\Rightarrow A=\binom{7}{3}=35$ tir.

Örnek 47

$(a + 3b)^6$ açılımında ortadaki terimi bulalım.

Çözüm

Burada $2n = 6 \Rightarrow n = 3$ tür. O halde, ortadaki terim

$$\binom{6}{3}a^3\cdot(3b)^3=\frac{6!}{3!3!}\cdot a^3\cdot 27b^3$$

$$=540a^3\cdot b^3 \text{ tür.}$$

> $(x + y)^{2n}$ açılımında ortadaki terim
>
> $$\binom{2n}{n}x^n\cdot y^n$$
>
> dir.

Örnek 48

$$\left(a-\frac{2}{a}\right)^8$$

açılımında sabit terim kaçtır?

Çözüm

Sabit terim, açılımın değişkeni olan a dan bağımsız terimdir. Yani a nın derecesi (üssü) 0 olmalıdır. Sabit terim baştan $(r + 1)$. terim olsun diyelim.

$n = 8$ olduğundan sabit terim

$$\binom{8}{r}a^{8-r}\left(-\frac{2}{a}\right)^r=\binom{8}{r}a^{8-r}\cdot(-2)^r\cdot(a)^{-r}$$

$$=\binom{8}{r}\cdot(-2)^r(a)^{8-2r} \text{ dir.}$$

Burada a nın üssü 0 olacağından $8 - 2r = 0 \Rightarrow r = 4$ tür.

Bu durumda r yi yerine yazarsak sabit terim

$$\binom{8}{4}(-2)^4=\frac{8!}{4!4!}\cdot 16=1120$$

dir.

Ölçme ve değerlendirme

Etkinlik Yapalım

Etkinlik 3

Aşağıda verilen kümelerin elemanları kullanılarak 3 basamaklı rakamları birbirinden farklı tek sayılar yazılacaktır. Küme ile yazılabilecek sayı adedi arasındaki doğru eşleştirmeleri (okla) yapalım.
(Kutular basamak sırasına göre dizilmiştir.)

Küme	Sayı Adedi
{0, 1, 2, 3, 4}	$\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{1}$
{1, 3, 5, 7}	$\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{3}$
{0, 2, 4, 5, 6}	$\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{4}$
{1, 2, 3, 4, 5}	$\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}$

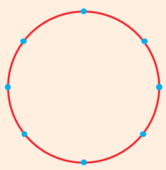
Etkinlik 4

Aşağıda her bir sorudaki şekillerde verilen noktalarla, köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan üçgenler oluşturulacaktır.

Buna göre, üçgen sayılarının altındaki kutulara doğru sorunun numarasını yazalım.

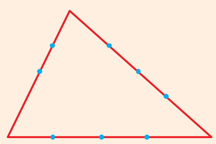
Üçgen sayısı

1.



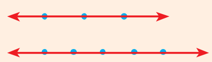
$$\binom{8}{3}-\binom{3}{3}-\binom{3}{3}$$

2.



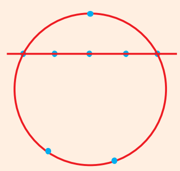
$$\binom{8}{3}-\binom{5}{3}-\binom{3}{3}$$

3.



$$\binom{8}{3}$$

4.



$$\binom{8}{3}-\binom{5}{3}$$

Etkinlik 5

Aşağıdaki boşlukları uygun şekilde dolduralım.

1. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ açılımında baştan 4. terim. $\binom{10}{---}(x^3)^{---}\ (---)^3 = ---$

2. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ açılımında baştan ----. terim $\binom{----}{2}(----)^6\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{---}$

3. $(a - 3b)^9$ açılımında sondan 5. terim $\binom{9}{----}(a)^{---} \cdot (--)^{---}$

4. $(x + 2y)^{20}$ açılımında baştan 6. terimin kat sayısı $\binom{20}{----}(2)^{---}$

5. $(3x - 2y)^{12}$ açılımında baştan 8. terimin kat sayısı $\binom{----}{----}(3)^{---}(---)$

Etkinlik 6

Aşağıdaki boşlukları uygun şekilde dolduralım.

1. $(x + 2y)^{10}$ açılımında

a) kaç terim vardır? ↓ ----------------

b) kat sayılar toplamı kaçtır? ↓ ----------------

c) baştan 4. terim nedir? ↓ ----------------

2. $(4a - b)^8$ açılımında

a) kaç terim vardır? ↓ ----------------

b) kat sayılar toplamı kaçtır? ↓ ----------------

c) baştan 6. terim nedir? ↓ ----------------

Birlikte Çözelim

1. **0, 1, 2, 3, 4 rakamları kullanılarak dört basamaklı, rakamları birbirinden farklı, basamaklarında 2 rakamı bulunmayan kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 15 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

Çözüm

Yazacağımız sayıların basamaklarında 2 rakamının bulunmaması istendiği için 2 rakamını kullanmayız.

$\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ farklı sayı yazabiliriz.

$\{1, 3, 4\}$ 0 yazamayız.

0 veya kalan 2 sayıdan birini yazarız.

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

2. **0, 1, 2, 3, 4 rakamları kullanılarak dört basamaklı, rakamları birbirinden farklı basamaklarından <u>en az</u> biri 2 olan kaç farklı sayı yazılabilir?**

A) 64 B) 78 C) 84 D) 96 E) 100

Çözüm

Bu rakamları kullanarak yazılabilecek dört basamaklı rakamları birbirinden farklı sayı adedinden, basamaklarında 2 rakamı bulunmayan sayı adedini çıkarırsak kalan sayıların en az bir basamağında 2 rakamı bulunur.

$\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (tüm sayılar)

$\{1, 2, 3, 4\}$ 0 yazamayız

0 veya kalan 4 sayıdan birini yazarız.

1. soruda basamaklarında 2 rakamı bulunmayan 18 sayı olduğunu bulmuştuk.

O halde, cevap 96 – 18 = 78 dir.

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

3. **P(n, 2) = P(2n, 1) + 70 olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm

$$P(n, 2) = P(2n, 1) + 70 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(2n)!}{(2n-1)!} + 70$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(n-2)!}(n-1)n}{\cancel{(n-2)!}} = \frac{\cancel{(2n-1)!}\cdot 2n}{\cancel{(2n-1)!}} + 70$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 2n + 70 \Rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 10)(n + 7) = 0$$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ ve } n = -7$$

n doğal sayı olabileceği için n = 10 dur.

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

4. 20 soruluk bir testte her soru için 5 cevap seçeneği vardır.

Ardışık iki sorunun cevap seçeneği aynı olmayacak şekilde kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

A) 100 B) 20! C) 4^{20} D) $5 \cdot 4^{19}$ E) 5^{20}

Çözüm

1. sorunun doğru cevabı için 5 seçeneğimiz var. Ardışık iki sorunun cevap seçeneği aynı olamayacağı için 2. soru için 1. sorudaki seçeneğin dışında 4 seçenek kalır. 3. soru için sadece 2.sorudaki seçeneği seçemeyeceğimiz için gene 4 seçenek vardır. Aynı durum kalan diğer sorular için de aynıdır.

$$5 \cdot \overbrace{4 \cdot 4 \, \ldots \, 4}^{19 \text{ tane}} = 5 \cdot 4^{19} \text{ dur.}$$

1. soru, 2. soru, 3. soru, 20. soru

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

5. 5553306 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabilir?

A) 60 B) 80 C) 100 D) 110 E) 120

Çözüm

Sayının çift olabilmesi için birler basamağı 0 veya 6 olmalıdır.

- Birler basamağı 0 ise, geri kalan basamaklara 5, 5, 5, 3, 3, 6 sayıları gelebilir.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5,\,5,\,5,\,3,\,3,\,6}\ 0$$

Bu rakamların farklı diziliş sayısı $\dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$ tır.

- Birler basamağı 6 ise, geri kalan basamaklara 5, 5, 5, 3, 3, 0 sayıları gelebilir.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5,\,5,\,5,\,3,\,3,\,0}\ 6$$

Bu rakamların farklı diziliş sayısı

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60 \text{ tır.}$$

Fakat bu rakamların içinde 0 da olduğundan sayıların $60\cdot\dfrac{1}{6} = 10$ tanesi 0 ile başlar ve 7 basamaklı olmaz. O halde $60 - 10 = 50$ tanesi 7 basamaklıdır.

Bu durumda $60 + 50 = 110$ tane sayı yazılabilir.

A B C **D** E

6. $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}+\binom{10}{7}+\binom{11}{8}$

toplamı kaçtır?

A) 380 B) 450 C) 495 D) 540 E) 550

Çözüm

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ idi. O halde,

$$\underbrace{\binom{7}{3}+\binom{7}{4}}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}+\binom{10}{7}+\binom{11}{8}$$

$$= \underbrace{\binom{8}{4}+\binom{8}{5}}+\binom{9}{6}+\binom{10}{7}+\binom{11}{8}$$

$$= \underbrace{\binom{9}{5}+\binom{9}{6}}+\binom{10}{7}+\binom{11}{8}$$

$$= \underbrace{\binom{10}{6}+\binom{10}{7}}+\binom{11}{8}$$

$$= \underbrace{\binom{11}{7}+\binom{11}{8}}$$

$$= \binom{12}{8}$$

$$= \frac{12!}{8!\cdot 4!} = 495 \text{ bulunur.}$$

A B **C** D E

7. C(n, 2) = 3C(n, 1) + 22 olduğuna göre, n kaçtır?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 11 E) 14

Çözüm

$$C(n,2) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1)\cdot n}{2(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2}$$

$C(n, 1) = n$

$$\Rightarrow \frac{n^2-n}{2} = 3\cdot n + 22 \Rightarrow n^2 - n = 6n + 44 \Rightarrow$$

$n^2 - 7n - 44 = 0$

$\Rightarrow (n - 11)(n + 4) = 0 \Rightarrow n = 11$ ve $n = -4$ tür.

n doğal sayı olduğundan $n = 11$ dir.

A B C **D** E

8. 12 kişilik bir gruptan 8 kişilik bir takım oluşturulacaktır.

Takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre, bu takım kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) 150 B) 180 C) 200 D) 210 E) 240

Çözüm

Takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre seçim yapılacak 12 kişiden geriye 12 – 2 = 10 kişi, seçilecek 8 kişiden de geriye 8 – 2 = 6 kişi kalır. Bu durumda 10 kişi arasından 6 kişi

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

farklı şekilde seçilebilir.

A B C D E

9. 10 kişilik bir kafileden 4 kişi Antalya'ya, 6 kişi İzmir'e gidecektir.

Bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 180 E) 210

Çözüm

10 kişiden 4 ü seçilip Antalya'ya kalan 6 kişinin 6 sı da İzmire gönderilir. Bu durumda, bu iki grup

$$\binom{10}{4}\binom{6}{6} = \frac{10!}{4!\,6!} \cdot 1 = 210$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

A B C D E

10. 20 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerden oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı, bu sınıftaki erkek öğrenci sayısının $\frac{2}{3}$ ü kadardır.

Buna göre, sınıftaki kız öğrenci sayısı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 18 E) 12

Çözüm

Sınıftaki kız öğrenci sayısı n olsun. Bu durumda erkek öğrenci sayısı 20 – n olur. Kızlardan oluşturulabilecek ikişerli grupların sayısı erkek öğrenci sayısının $\frac{2}{3}$ ise

$$\binom{n}{2} = \frac{2}{3} \cdot (20-n) \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{2}{3}(20-n)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{3}(20-n) \Rightarrow 3n(n-1) = 4(20-n)$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 3n = 80 - 4n \Rightarrow 3n^2 + n - 80 = 0$$

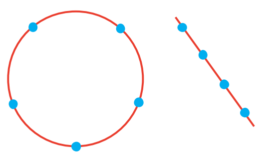
$$\begin{array}{cc} 3n & 16 \\ n & -5 \end{array}$$

$$\Rightarrow (3n + 16).(n - 5) = 0 \Rightarrow n = -\frac{16}{3} \text{ ve } n = 5 \text{ tir.}$$

Bu durumda kız öğrenci sayısı 5 tir.

A B C D E

11.



Yukarıdaki çember üzerinde 5 nokta, doğru üzerinde ise 4 nokta verilmiştir.

Köşeleri bu 9 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen oluşturulabilir?

A) 64 B) 76 C) 80 D) 84 E) 92

Çözüm

9 nokta ile köşeleri bu 9 noktadan üçü olan

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

üçgen çizilebilir. Fakat doğru üzerindeki 4 nokta doğrusal olduğu için bu noktalarla üçgen oluşturamayız.

Bu nedenle 84 ten $\binom{4}{3} = 4$ ü çıkarmalıyız.

Bu durumda 84 – 4 = 80 üçgen oluşturulabilir.

Ⓐ Ⓑ ● Ⓓ Ⓔ

12. Birbirlerine paralel olmayan 10 doğrudan 4 ü bir A noktasından geçmektedir.

Buna göre, bu 10 doğrunun <u>en çok</u> kaç kesişim noktası vardır?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

Çözüm

Paralel olmayan 2 doğru en çok 1 noktadan kesişebilir. Bu durumda 10 doğru $\binom{10}{2} = 45$ farklı noktada kesişir. Fakat bu doğrulardan 4 ü bir A noktasından geçtiği için A dışında başka kesişim noktaları olamaz. Bu nedenle 45 ten $\binom{4}{2} = 6$ çıkarıp kesiştikleri bir nokta olduğu için (A noktası) 1 ekleriz.

$$\underbrace{45}_{\text{10 doğrunun kesiştiği nokta sayısı}} - \underbrace{6}_{\text{4 doğrunun kesişebileceği nokta sayısı}} + \underbrace{1}_{\text{A noktası}} = 40$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ ●

13. A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2} kümesinin elemanları arasından çarpımları pozitif olacak şekilde 2 sayı kaç farklı biçimde seçilebilir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm

2 sayının çarpımının pozitif olabilmesi için ikisi de pozitif veya ikisi de negatif olmalıdır.

(–. – = + veya +.+ = +)

Kümede 3 negatif, 2 pozitif sayı vardır.

Bu durumda seçim

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{3 negatiften 2 tane}} \underbrace{+}_{\text{veya}} \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{2 pozitiften 2 tane}} = 3 + 1 = 4$$

farklı şekilde yapılabilir.

● Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

14. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

kümesinin elemanları arasından toplamları tek sayı olacak şekilde 2 sayı kaç farklı biçimde seçilebilir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

Çözüm

2 sayının toplamının tek olması için sayılardan biri tek diğeri çift olmalıdır. O halde, kümeden 1 tek ve 1 çift sayı seçmeliyiz. A kümesinde 4 tek sayı (1, 3, 5, 7) ve 3 çift sayı (2, 4, 6) sayı vardır. Bu durumda,

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{1 tek sayı}} \underbrace{\cdot}_{\text{ve}} \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{1çift sayı}} = 12$$

farklı seçim yapılabilir.

Ⓐ Ⓑ ● Ⓓ Ⓔ

15. 20 kişinin bulunduğu bir grupta herkes birbiriyle birer kez tokalaşacaktır.

Buna göre, kaç farklı tokalaşma gerçekleşir?

A) 150 B) 160 C) 170 D) 180 E) 190

Çözüm

20 kişiden herhangi 2 kişiyi seçtiğimizde bu iki kişi birbiriyle bir defa tokalaşacaktır. Bu durumda tokalaşma sayısı

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = 190$$

olur.

A B C D **E**

16. $(a + 2b)^9 = a^9 + ... + A\,a^5b^4 + ...$

eşitliğinde A kaçtır?

A) $\binom{9}{3}\cdot 2^3$ B) $\binom{9}{4}\cdot 2^4$ C) $\binom{9}{5}\cdot 2^5$

D) $\binom{9}{6}\cdot 2^4$ E) $\binom{9}{6}\cdot 2^6$

Çözüm

Aa^5b^4 terimi, açılımda baştan (r + 1). terim olsun.

n = 9 dur. O halde,

$$\binom{9}{r} a^{9-r} \cdot (2b)^r = A \cdot a^5 \cdot b^4 \Rightarrow 9 - r = 5 \Rightarrow r = 4 \text{ tür.}$$

$$\Rightarrow \binom{9}{4} a^5 \cdot (2b)^4 = A \cdot a^5 \cdot b^4$$

$$\Rightarrow \binom{9}{4} a^5 \cdot 2^4 \cdot b^4 = A \cdot a^5 \cdot b^4 \Rightarrow A = \binom{9}{4} \cdot 2^4$$

A **B** C D E

17. $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}\right)^7$

açılımında kaç tane rasyonel terim vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

Baştan (r + 1) terim rasyonel olsun. O halde,

$\binom{7}{r} \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^{7-r} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^r$ rasyoneldir.

$$\binom{7}{r} \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^{7-r} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^r = \binom{7}{r} 3^{\frac{7-r}{3}} \cdot 3^{\frac{r}{2}}$$

Bu ifadenin rasyonel olması için

7 – r, 3 ile; r, 2 ile tam bölünmelidir. r ile 2 ile tam bölünebilmesi için r ye 0, 2, 4, 6 değerlerini verebiliriz.

r = 0 ⇒ 7 – r = 7 – 0 = 7 (3 ile tam bölünmez.)

r = 2 ⇒ 7 – r = 7 – 2 = 5 (3 ile tam bölünmez.)

r = 4 ⇒ 7 – r = 7 – 4 = 3 (3 ile tam bölünür.)

r = 6 ⇒ 7 – r = 7 – 6 = 1 (3 ile tam bölünmez.)

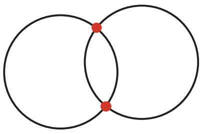
O halde, bu açılımda sadece bir tane rasyonel terim vardır.

A B C D E

18. **5 farklı çember <u>en çok</u> kaç farklı noktada kesişebilir?**

A) 20 B) 18 C) 16 D) 12 E) 10

Çözüm



2 farklı çember en çok

2 farklı noktada kesişebilir.

O halde 5 çemberden oluşacak her ikili için 2 kesim noktası vardır. Bu durumda 5 çember en çok

$$\binom{5}{2}\cdot 2=\frac{5!}{2!\,3!}\cdot 2=20$$

ikili sayısı   Kesişim sayısı

farklı noktada kesişebilir.

A B C D E

19. **1, 2, 3, 4, 5 rakamlarını kullanarak yazılan ve rakamları farklı olan üç basamaklı sayılar küçükten büyüğe sıralandığında baştan 50. sayı kaç olur?**

A) 451 B) 452 C) 512 D) 513 E) 521

Çözüm

Sayılar küçükten büyüğe sıralandığı için önce 1 ile başlayan sayılar gelir. İlk rakamı 1 olan sayılar.

$\underline{1}\ \underline{4}\ \underline{3} \rightarrow 1\cdot 4\cdot 3=12$

$\{1\}$ $\{2, 3, 4, 5\}$

tanedir. Aynı şekilde 2, 3, 4, 5 ile başlayan 12 şer sayı vardır.

1, 2, 3, 4 ile başlayan toplam 12 + 12 + 12 + 12 = 48 sayı vardır.

Sayılar küçükten büyüğe sıralandığı için 50. sayı 5 ile başlar.

49. sayı $\rightarrow$ 512

$\Rightarrow$ 50. sayı $\rightarrow$ 513 tür.

A B C D E

20. **1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak yazılan ve rakamları farklı olan üç basamaklı sayılar küçükten büyüğe sıralandığında 324 sayısı baştan kaçıncı sırada yer alır?**

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Çözüm

Sayılar küçükten büyüğe sıralandığı için önce 1 ile başlayan sayılar gelir. 1 ile başlayan,

$\underline{1}\ \underline{4}\ \underline{3} \rightarrow 1\cdot 4\cdot 3=\boxed{12}$ sayı vardır.

$\{1\}$ $\{2, 3, 4, 5\}$

Aynı şekilde 2 ile başlayan $\boxed{12}$ sayı vardır. Yani 1 ve 2 ile başlayan 12 + 12 = 24 sayı vardır. 3 ile başlayan sayılara bakalım.

25. sayı 312   28 sayı 321

26. sayı 314 $\boxed{\text{29. sayı 324}}$ tür.

27. sayı 315

A B C D E

21. **A ve B birer küme olmak üzere, s(A) = 3, s(B) = 4 olduğuna göre, A olan B ye tanımlanabilecek bire bir fonksiyon sayısı kaçtır?**

A) 6 B) 12 C) 24 D) 64 E) 81

Çözüm

s(A) = a, s(B) = b ise A dan B ye tanımlanabilecek bire bir fonksiyon sayısı P(b, a) dır.

O halde, cevap

$$P(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!}=1.2.3.4$$
$$=24 \text{ tür.}$$

A B C D E

Öğrendiklerimizi Test Edelim

1. $\dfrac{7!+6!}{7!-6!}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{8}{3}$

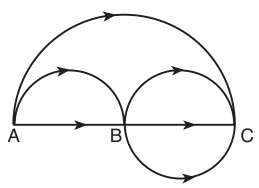
2. **6 bay, 5 bayan arasından 1 bay veya 1 bayan kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 11 B) 15 C) 21 D) 27 E) 30

3. **6 bay, 5 bayan arasından 1 bay ve 1 bayan kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 11 B) 15 C) 21 D) 27 E) 30

4.



A şehrinden B şehrine 2 farklı yol, B şehrinden C şehrine 3 farklı yol vardır. Ayrıca B şehrine uğramadan A şehrinden C şehrine 1 yolla gidilebilmektedir.

Buna göre, bir kimse geçtiği yolu tekrar <u>kullanmamak</u> şartıyla kaç farklı yolla A şehrinden C şehrine gidip dönebilir?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

5. **Birbirinden farklı 5 kırmızı, 4 mavi, 3 yeşil bilye arasından 1 kırmızı, 1 mavi, 1 yeşil bilye kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 54 B) 56 C) 60 D) 64 E) 68

6. **15 kişilik bir hakem komitesi arasından bir hakem ve bir hakem yardımcısı kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 120 B) 160 C) 180 D) 210 E) 240

7. **Ali, Betül, Esin, Esra ve Ahmet beş kişilik bir sıraya yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

8. **Ali, Betül, Esin, Esra ve Ahmet, kızlar yan yana olmak şartıyla beş kişilik bir sıraya yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

9. **Ali, Betül, Esin, Esra ve Ahmet, başa ve sona erkekler oturmak şartıyla beş kişilik bir sıraya yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

10. **Birbirinden farklı 3 mavi, 2 sarı, 4 yeşil balon bir ipe yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?**

A) 9! B) 8! C) 7! D) 6! E) 5!

11. **Birbirinden farklı 3 mavi, 2 sarı, 4 yeşil balon aynı renkteki balonlar yan yana olmak şartıyla bir ipe kaç farklı şekilde dizilebilir?**

A) 9! B) 8!·2! C) 3!·4! D) 2!·3!·4! E) 2!·3!·4!·3!

12. **Birbirinden farklı 3 matematik, 2 fizik, 4 kimya kitabı fizik kitapları yan yana <u>olmamak</u> şartıyla bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?**

A) 9! B) 8! C) 9! – 2!·8! D) 8! – 2! E) 9! – 8!

13. A = {1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanları ile üç basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç değişik doğal sayı yazılabilir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

14. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanları ile üç basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç değişik doğal sayı yazılabilir?

A) 120 B) 100 C) 80 D) 60 E) 40

15. A = {1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanları ile üç basamaklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

16. 1, 2, 3, 4, 5

rakamları kullanılarak 300 den küçük üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

17. **Anne, baba ve dört çocuktan oluşan bir aile yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 88 B) 96 C) 100 D) 110 E) 120

18. **Anne, baba ve dört çocuktan oluşan bir aile, çocuklar yan yana olmak şartıyla yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 44 B) 46 C) 48 D) 50 E) 52

19. **Anne, baba ve dört çocuktan oluşan bir aile anne ve baba yan yana <u>olmamak</u> şartıyla yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 54 B) 56 C) 64 D) 72 E) 76

Öğrendiklerimizi Test Edelim

1. **0, 1, 2, 3, 4 rakamları kullanılarak üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?**

A) 60 B) 75 C) 80 D) 100 E) 125

2. **0, 1, 2, 3, 4 rakamları kullanılarak üç basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç değişik doğal sayı yazılabilir?**

A) 36 B) 42 C) 48 D) 50 E) 52

3. **0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak 4 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?**

A) 540 B) 550 C) 560 D) 570 E) 580

4. **0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı kaç değişik tek sayı yazılabilir?**

A) 42 B) 44 C) 46 D) 48 E) 50

5. **0, 2, 4, 6, 8 rakamları kullanılarak üç basamaklı rakamları farklı 600 den büyük 5 ile tam bölünebilen kaç değişik doğal sayı yazılabilir?**

A) 18 B) 12 C) 9 D) 6 E) 4

6. 5 farklı matematik, 3 farklı Türkçe kitabı kütüphanede bir rafa sıralanacaktır.

Türkçe kitapları yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?

A) 8! B) $7! \cdot 3!$ C) $8! \cdot 3!$ D) $6! \cdot 3!$ E) 6!

7. İçlerinde Ezgi'nin de bulunduğu 12 kişiden 3 kişilik bir ekip kurulacaktır.

Ekipte Ezgi'nin de bulunması koşuluyla kaç değişik ekip kurulabilir?

A) 60 B) 58 C) 57 D) 56 E) 55

8. İçlerinde Akif ile Burhan'ın da bulunduğu 13 kişiden 4 kişilik bir ekip kurulacaktır. Ekipte Akif olmayacak, Burhan olacaktır.

Buna göre, bu ekip kaç değişik biçimde kurulabilir?

A) 165 B) 168 C) 172 D) 176 E) 180

9. İçlerinde Akif ile Burhan'ın da bulunduğu 13 kişiden 4 kişilik bir ekip kurulacaktır.

Ekipte Akif ile Burhan'dan yalnız biri bulunacağına göre, ekip kaç değişik biçimde kurulabilir?

A) 330 B) 244 C) 144 D) 136 E) 126

10. İçlerinde Buket ile Begüm'ün de bulunduğu 15 kişiden 4 kişilik bir ekip kurulacaktır.

Ekipte Buket ve Begüm birlikte bulunacağına göre, ekip kaç türlü kurulabilir?

A) 76 B) 78 C) 80 D) 82 E) 84

11. İçlerinde Ahmet ile Bekir'in de bulunduğu 8 kişi bir sırada yan yana oturtulacaktır.

Ahmet ile Bekir'in arasına diğer 6 kişi oturacağına göre, işlem kaç türlü yapılabilir?

A) 8! B) 2!·7! C) 7! D) 6! E) 2!·6!

12. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{12}$ **açılımındaki terimler x in azalan kuvvetlerine göre sıralanırsa baştan 4. terimin kat sayısı kaç olur?**

A) 1755 B) 1760 C) 1765 D) 1770 E) 1780

13. **MATEMATİK kelimesinin harfleri yer değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?**

A) $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ B) $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$ C) 9! D) $\frac{9!}{2!\cdot 2!}$ E) $\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$

14. **GEOMETRİ kelimesinin harfleri yer değiştirilerek M ile başlayan anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?**

A) $\frac{7!}{2!\cdot 2!}$ B) $\frac{7!}{2!}$ C) 7! D) $\frac{8!}{2!}$ E) 8!

15. **5 elemanlı bir kümenin <u>en çok</u> 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?**

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

16. 10 kişiden 7 tanesi sinemaya diğerleri tiyatroya gidecektir.

Bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

A) 125 B) 120 C) 115 D) 110 E) 105

D - C - A - D I D - D - E - A I A - B - E - B I E - B - D - B

Öğrendiklerimizi Test Edelim

1. **6 doktor, 8 hemşireden 2 doktor, 3 hemşirelik ameliyat ekibi kaç farklı şekilde kurulabilir?**

A) 830 B) 840 C) 850 D) 860 E) 870

2. Aralarında doktor Ahmet Bey ve hemşire Beyza Hanım'ın da bulunduğu 6 doktor ve 8 hemşireden, 2 doktor ve 3 hemşire seçilerek bir ameliyat ekibi kurulacaktır.

Ekipte doktor Ahmet Bey ve hemşire Beyza Hanım bulunacağına göre, bu ekip kaç değişik biçimde kurulabilir?

A) 125 B) 120 C) 115 D) 110 E) 105

3. Aralarında doktor Ahmet Bey ve hemşire Beyza Hanım'ın da bulunduğu 6 doktor ve 8 hemşireden, 2 doktor ve 3 hemşire seçilerek bir ameliyat ekibi kurulacaktır.

Ekipte doktor Ahmet Bey ve hemşire Beyza Hanımdan <u>en az</u> biri bulunacağına göre, bu ekip kaç değişik biçimde kurulabilir?

A) 476 B) 480 C) 490 D) 496 E) 502

4. **Bir düzlemde 7 farklı üçgen <u>en çok</u> kaç farklı noktada kesişebilir?**

A) 21 B) 42 C) 63 D) 105 E) 126

5. **3 tanesi birbirine paralel, 4 tanesi bir A noktasında kesişen 12 farklı doğru bir düzlem üzerinde <u>en çok</u> kaç değişik noktada kesişebilir?**

A) 57 B) 58 C) 59 D) 65 E) 66

6. Her biri 4 er kişiden oluşan 5 aile, bir toplantıda buluşuyor.

Her aile kendi ailesindeki bireylerle <u>tokalaşmamak</u> koşuluyla bu 20 kişi arasında kaç farklı tokalaşma olur?

A) 150 B) 155 C) 160 D) 165 E) 170

7. **Bir çember üzerinde bulunan 11 noktadan herhangi üçünü köşe kabul eden <u>en çok</u> kaç tane üçgen çizilebilir?**

A) 150 B) 155 C) 160 D) 165 E) 170

8. Bir çember üzerinde bulunan 11 noktadan bir tanesi A dır.

Bu 11 noktayı kullanarak bir köşesi A noktası olan <u>en çok</u> kaç tane üçgen çizilebilir?

A) 45 B) 48 C) 52 D) 56 E) 60

9. **9 kişi 3 kişilik 3 farklı gruba kaç değişik şekilde ayrılır?**

A) 240 B) 280 C) 720 D) 1420 E) 1680

10.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=29$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

11. $P(n, 1) + P(n, 2) = 36$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

12. Bir düzlem üzerinde birbirine paralel 5 doğru ile onları dik kesen 6 paralel doğru veriliyor.

Bu 11 doğruyu kenar kabul eden kaç dikdörtgen vardır?

A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

13. **$(2x-\sqrt{3})^{10}$ açılımında kaç tane terimin kat sayısı rasyonel olur?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

14. **Hilesiz bir tavla zarı ile bir madeni para birlikte atıldığında kaç farklı durum meydana gelebilir?**

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

15. Alfabemizdeki 29 harften 4 harfli şifreler oluşturulacaktır. Şifreler sesli bir harfle (8 tane) başlayıp sessiz bir harfle bitecektir.

Kaç farklı şifre oluşturabilir?

A) 29^4 B) 29^2 C) $8 \cdot 29^3$ D) $29^3 \cdot 168$ E) $29^2 \cdot 168$

16.

$$\binom{11}{0}+\binom{11}{2}+\binom{11}{4}+\binom{11}{6}+\binom{11}{8}+\binom{11}{10}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2^{13} B) 2^{12} C) 2^{11} D) 2^{10} E) 2^9

OLASILIK

Öncelikle olasılık konusuyla ilgili bazı kavramları öğrenelim.

Deney ve Çıktı

Bir madeni para atıldığında üst yüze yazı veya tura gelir. Madeni paranın atılması işlemine deney, olabilecek sonuçlara ise deneyin çıktıları denir.

Örneğin bir zarın atılması deney, bunun sonucunda üst yüze 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 gelmesi deneyin çıktılarıdır.

Örneklem Uzay ve Örneklem Nokta

Bir deneyde elde edilen çıktıların her birine örneklem nokta, bu noktaların oluşturduğu kümeye de örneklem uzay denir. Örneklem uzay E ile gösterilir.

Örneğin bir zarın atılması deneyinde

- Örneklem noktalar 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Örneklem uzay E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dır.

Olay, Kesin Olay, İmkansız Olay

Örneklem uzayın her bir alt kümesine olay denir. Bu alt kümelerden boş kümeye imkansız olay, örneklem uzayına da kesin olay denir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1

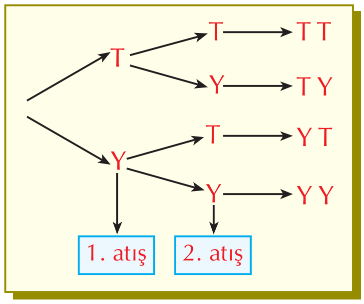
Bir madeni para atıldığında üst yüze yazı gelmesini Y, tura gelmesini T ile gösterelim.

Bu durumda bir madeni paranın atılması deneyinde

- örneklem noktalar T, Y
- örneklem uzay E = {T, Y} (kesin olay)
- tura gelmesi olayı {T}
- yazı gelmesi olayı {Y} dir.

Örnek 2

Bir madeni paranın art arda iki kez atılması deneyinde üst yüze iki atışta da T, iki atışta da Y, ilk atışta T ikinci de Y, ilk atışta Y ikinci de T gelebilir.



Yani,

- örneklem noktalar TT, TY, YT, YY
- örneklem uzay E = {TT, TY, YT, YY} (kesin olay)
- İki atışta da tura gelmesi olayı {TT}
- en az bir kez yazı gelmesi olayı {TY, YT, YY}
- üç kez yazı gelmesi olayı ∅ (imkansız olay) dir.

Örnek 3

Bir zarın atılması deneyinde

- örneklem noktalar 1, 2, 3, 4, 5, 6
- örneklem uzay E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} (kesin olay)
- çift sayı gelmesi olayı {2, 4, 6}
- tek sayı gelmesi olayı {1, 3, 5}
- ikiden büyük gelmesi olayı {3, 4, 5, 6}
- 8 gelmesi olayı ∅ (imkansız olay) dir.

Örnek 4

4 kız, 3 erkek öğrenci arasından seçilen 3 öğrencinin 2 sinin kız, 1 inin erkek öğrenci olması olayının eleman sayısı

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{4 kızdan 2 tane seçtik}} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{3 erkekten 1 tane seçtik}} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ dir.}$$

Örnek 5

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin alt kümeleri arasından seçilen bir kümenin 2 elemanlı olması olayının eleman sayısı

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ dur.}$$

5 elamanlı küme (5)
2 elemanlı alt küme (2)

Ayrık Olaylar

Bir örneklem uzayında iki olayın kesişimi boş küme ise bu olaylara ayrık olaylar denir. A ve B ayrık olaylar ise $A \cap B = \varnothing$ dir.

Örneğin, bir zar atıldığında üst yüze tek sayı gelme olayı

A = {1, 3, 5}, çift sayı gelme olayı B = {2, 4, 6} dır.

$A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık olaylardır.

Etkinlik 1

0 dan 9 a kadar olan 10 rakam birer kağıda yazılıp bir torbaya koyuluyor. Torbadan bir kağıt çekilmesi deneyine göre aşağıdaki tabloyu dolduralım.

OLAY		Eleman sayısı
a) Örneklem uzay	{ .... }	
b) Çift sayı gelmesi olayı	{ .... }	
c) Tek sayı gelmesi olayı	{ .... }	
d) Asal sayı gelmesi olayı	{ .... }	
e) İki basamaklı sayı gelmesi olayı	{ .... }	

- Bir madeni para art arda n kez atıldığında (veya n tane madeni para birlikte atıldığında) elde edilen çıktıların sayısı yani örneklem uzayın eleman sayısı $s(E) = 2^n$ dir.

  Her atışın yazı veya tura olmak üzere iki sonucu olabilir.

  Bu nedenle çarpma kuralına göre,

  $$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots\ldots 2}_{\text{n tane atış}} = 2^n$$

  farklı sonuç elde edilir.

  Para 1 kez atıldığında $2^1 = 2$ {T, Y}
  Para 2 kez atıldığında $2^2 = 4$ {(TT), (TY), (YT), (YY)}
  Para 3 kez atıldığında $2^3 = 8$ {(TTT), (TYT), (TYY), (TTY), (YTY), (YTT), (YYT), (YYY)}
  ⋮

  şeklinde devam eder.

- Aynı durum zar için de geçerlidir. Bir zar art arda n kez atıldığında (veya n tane zar birlikte atıldığında) elde edilen çıktıların sayısı $s(E) = 6^n$ dir. Çünkü her atışın 6 sonucu olabilir.

OLASILIK FONKSİYONU

Örneklem uzayın alt kümelerinin oluşturduğu kümeden [0, 1] aralığına tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan P fonksiyonuna olasılık fonsiyonu denir.

A ve B örneklem uzayında herhangi iki olay olmak üzere,

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (P(A) : A olayının olasılığı)
2. $P(E) = 1$ (Kesin olayın olasılığı 1 dir.)
3. $A \cap B = \varnothing$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Yani, olasılık fonksiyonu örneklem uzaydaki bir olayı [0, 1] aralığında bir değere götüren fonksiyondur. Bu nedenle bir olayın olasılığı 0 dan küçük, 1 den büyük olamaz.

Özellikler :

A ve B, E örneklem uzayında iki olay ve P olasılık fonksiyonu olmak üzere,

1. $P(\varnothing) = 0$ (imkansız olayın olasılığı 0 dır.)
2. $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$
3. $P(A) + P(A') = 1$ (A', A nın tümleyenidir.)
4. $\underbrace{P(A \cup B)}_{\text{A veya B olaylarının meydana gelme olasılığı}} = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{A ve B olaylarının meydana gelme olasılığı}}$ dir.

Örnek 6

A ve B, E örneklem uzayında iki ayrık olaydır.

$$P(A) = \frac{1}{4},\quad P(B) = \frac{2}{5}$$

olduğuna göre, P(A ∪ B) kaçtır?

Çözüm

A ve B ayrık olaylar olduğu için $A \cap B = \varnothing$ dir. Bu durumda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \underset{(5)}{\frac{1}{4}} + \underset{(4)}{\frac{2}{5}} = \frac{5+8}{20} = \frac{13}{20} \text{ dir.}$$

Olasılık çözümlemesi ilk kez şans oyunları üzerine geliştirildi. 1645 yılında Mare şövalyesi tarafından Fransız matematikçi Pascal'a şu soru yöneltilir: "İki zarla kaç atışta ikisinin de altı gelmesi beklenir?" Bu soru Pascal ile matematikçi Fermat arasında altı mektup yazılmasına sebep olur. Bu olaydan sonra matematikçiler belirli oyunları matematiksel yöntemlerle incelemeye başladılar.

Örnek 7

A ve B, E örneklem uzayına ait iki olaydır.

$$P(A) = \frac{1}{10},\quad P(B) = \frac{2}{5},\quad P(A \cap B) = \frac{3}{10} \text{ olduğuna göre,}$$

P(A ∪ B) kaçtır?

Çözüm

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{10} + \underset{(2)}{\frac{2}{5}} - \frac{3}{10} = \frac{1+4-3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ tir.}$$

Örnek 8

A ve B, E örneklem uzayına ait iki ayrık olaydır.

$$P(A') = \frac{2}{3},\quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, P(B) kaçtır?

Çözüm

$P(A) + P(A^{I}) = 1 \Rightarrow P(A) + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$ tür.

A ve B ayrık olaylar olduğu için

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B)$

$\Rightarrow P(B) = \underset{(3)}{\frac{1}{2}} - \underset{(2)}{\frac{1}{3}} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$ dir.

Eş Olumlu (Olasılı) Örneklem Uzay

Her bir örneklem noktasının olasılıkları eşit olan örneklem uzaya eş olumlu (olasılı) örneklem uzay denir.

E eş olumlu örneklem uzayında bir A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\text{A nın eleman sayısı}}{\text{E nin eleman sayısı}} \left(= \frac{\text{istenen durumun sayısı}}{\text{tüm durumların sayısı}} \right)$$

dır.

Örneğin, bir madeni para atılması, bir zar atılması deneylerinin örneklem uzayları eş olumlu örneklem uzaydır.

Örnek 9

Bir madeni para atıldığında

a. **Yazı gelme olasılığını bulalım.**

b. **Tura gelme olasılığını bulalım.**

Çözüm

Madeni para atıldığında yazı veya tura gelir. Bu durumda

E = {T, Y} dir.

s(E) = 2

dir.

a. Yazı gelme olayı A olsun. A = {Y} ⇒ s(A) = 1 dir.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{istenen durumların sayısı} \\ \rightarrow \text{tüm durumların sayısı} \end{matrix}$$

b. Tura gelme olayı B olsun. B = {T} ⇒ s(B) = 1 dir.

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{1}{2}$$

Görüldüğü gibi bir madeni para atılması deneyinde her bir örneklem noktanın olasılıkları eşittir.

> Olasılık hesabı, kuantum fiziği ve dalga mekaniği gibi fiziğin alt alanlarının bir uygulamasıdır. 18. yy dan itibaren astronomik gözlemlerde yapılan gözlem hatalarını hesaplamada ve işletmelerin gelecekleri ile ilgili belirsizlikler karşısında karar vermede de olasılık hesabından yararlanılmaktadır.

Örnek 10

Bir zar atıldığında

a. **2 gelme olasılığı kaçtır?**

b. **4 ten büyük gelme olasılığı kaçtır?**

c. **Çift sayı gelme olasılığı kaçtır?**

d. **Asal sayı gelme olasılığı kaçtır?**

Çözüm

Bir zar atıldığında E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ⇒ s(E) = 6 dır.

a. 2 gelme olayı A olsun. A = {2} ⇒ (A) = 1 dir.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6} \text{ dir.}$$

Aynı şekilde, 1, 3, 4, 5 veya 6 gelme olasılıkları da $\frac{1}{6}$ dır. Ayrıca tüm durumların olasılıkları toplamı 1 dir.

b. 4 ten büyük gelme olayı B olsun.

$$B = \underbrace{\{ 5, 6 \}}_{\text{4 ten büyük sayılar}} \Rightarrow s(B) = 2 \text{ dir.}$$

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

c. Çift sayı gelme olayı C olsun.

$$C = \underbrace{\{2, 4, 6\}}_{\text{çift sayılar}} \Rightarrow s(C) = 3 \text{ tür.}$$

$$P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

d. Asal sayı gelme olayı D olsun.

$D = \{2, 3, 5\} \Rightarrow s(D) = 3$ tür.

$$P(D) = \frac{s(D)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

> Sadece 1 ve kendisine bölünebilen 1 den büyük sayılara asal sayı denir. En küçük asal sayı 2 dir.

Örnek 11

Bir madeni para art arda iki defa atıldığında ikisinde de tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir madeni paranın art arda iki defa atılmasında

$E = \{YY, YT, TY, \underline{TT}\} \Rightarrow s(E) = 4$ tür.

İkisinde de tura gelme olayı A olsun.

$A = \{TT\} \Rightarrow s(A) = 1$ dir.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Örnek 12

Üç madeni para birlikte atılıyor. İkisinin yazı birinin tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Üç madeni para birlikte atıldığında

$E = \{TTT, TTY, \underline{TYY}, TYT, YTT, \underline{YTY}, \underline{YYT}, YYY\} \Rightarrow$ $s(E) = 8$ dir.

($2^3 = 8$ şeklinde bulabildiğimizi de hatırlayalım.)

İkisinin yazı birinin tura gelme olayı

$A = \{TYY, YTY, YYT\} \Rightarrow s(A) = 3$ tür.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

Örnek 13

Bir çift zar atılıyor. Üst yüze gelen sayıların aynı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Hatırlarsak bir çift zar atıldığında $s(E) = 6^2 = 36$ idi.

Üst yüze gelen sayıların aynı olması olayı

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$\Rightarrow s(A) = 6$ dır.

Bu durumda $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ dir.

Örnek 14

Bir torbada 3 mavi, 4 kırmızı top vardır.

a. **Bu torbadan rastgele çekilen bir topun mavi olma olasılığı kaçtır?**
b. **Bu torbadan rastgele çekilen 3 topun birinin mavi, ikisinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?**
c. **Bu torbadan rastgele çekilen 2 topun aynı renkte olma olasılığı kaçtır?**
d. **Bu torbadan rastgele çekilen 3 topun en az birinin mavi olma olasılığı kaçtır?**

Çözüm

a. Toplam $3 + 4 = 7$ top olduğundan $s(E) = 7$ dir.

Seçilen topun mavi olma olayı A olsun. Torbada 3 mavi top olduğund $s(A) = 3$ tür.
Bu durumda $P(A) = \frac{3}{7}$ dir.

b. Torbadaki 7 toptan 3 ünün çekilmesi deneyinde tüm durumların eleman sayısı

$$s(E) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35 \text{ tir.}$$

Birinin mavi, ikisinin kırmızı olması olayına B dersek istenen durumların eleman sayısı

$$s(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 mavi}}}{\binom{3}{1}} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4 kırmızı}}}{\binom{4}{2}} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ dir.}$$

Bu durumda $P(B) = \frac{18}{35}$ tir.

c. Torbadaki 7 toptan 2 sinin çekilmesi deneyinde

$$s(E) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \text{ dir.}$$

2 topunda aynı renk olması olayına A diyelim. 2 topun aynı olması ikisinin de mavi veya ikisinin de kırmızı olması demektir.

O halde,

$$s(C) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{ikiside mavi}} \underbrace{+}_{\text{veya}} \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{ikiside kırmızı}} = 3 + 6 = 9 \text{ dur.}$$

Bu durumda $P(C) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ dir.

d. Torbadaki 7 bilyeden 3 ünün çekilmesi deneyinde

$$s(E) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ tir.}$$

3 toptan en az birinin mavi olması olayı D olsun.

1. yol

3 toptan en az 1 inin mavi olması demek,

1 i mavi, 2 si kırmızı $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}$ veya

2 si mavi, 1 i kırmızı $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1}$ veya

3 ü de mavi $\binom{3}{3}$ demektir.

Bu durumda

$$s(D) = \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}$$

$$= 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 = 18 + 12 + 1 = 31 \text{ dir.}$$

O halde, $P(D) = \frac{31}{35}$ tir.

2. yol

$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$ olduğundan 3 toptan en az 1 inin mavi olma olasılığını bulmak için 1 den hiçbirinin mavi olmama olasılığını çıkarırız. Seçilen topların hiçbirinin mavi olmaması hepsinin kırmızı olması demektir. Bu durumda

$$s(D') = \binom{\overset{\text{4 kırmızı top}}{4}}{3} = 4 \Rightarrow P(A') = \frac{4}{35} \text{ tir.}$$

O halde, $P(D) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$ tir.

Etkinlik 2

Aşağıdaki sorularla, cevapları eşleştirelim. Cevabın yanındaki kutuya doğru sorunun numarasını yazalım.

Bir torbada 4 mavi, 5 beyaz, 6 yeşil boncuk vardır. Torbadan aynı anda çekilen üç toptan

	Cevap	
1. üçünün de aynı renkte olma olasılığı kaçtır?	$\dfrac{\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{15}{3}}$	☐
2. üçünün de farklı renkte olma olasılığı kaçtır?	$\dfrac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{15}{3}}$	☐
3. en az birinin mavi olma olasılığı kaçtır?	$\dfrac{\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}$	☐
4. ikisinin beyaz, birinin yeşil olma olasılığı kaçtır?	$\dfrac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{15}{3}}$	☐

Örnek 15

3 kız, 4 erkek öğrenci arasından 3 kişilik bir grup seçilecektir.

Seçilen grupta 1 kız, 2 erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

3 + 4 = 7 kişiden 3 kişi, $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ farklı şekilde seçilebileceğinden s(E) = 35 tir.

3 kişiden 1 inin kız, 2 sinin erkek olması istendiği için

$$s(A) = \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ dir.}$$

3 kızdan 1 ini — 4 erkekten 2 sini

Bu durumda $P(A) = \frac{18}{35}$ tir.

Örnek 16

Anne, baba ve 3 çocuktan oluşan 5 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında oturuyor.

Anne ile babanın yan yana oturmuş olma olasılığı kaçtır?

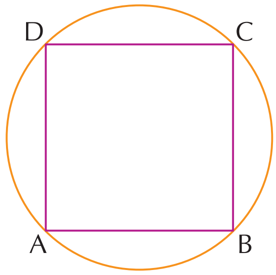
Çözüm

5 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafında 4! farklı şekilde oturabilir. Yani s(E) = 4! dir.

Anne ile babanın yan yana oturması isteniyor. Anne ile babayı 1 kişi gibi düşünürsek 4 kişi yuvarlak masa etrafında 3! farklı şekilde oturur. Anne ile babanın kendi aralarında yer değiştirmesi 2! dir. Bu durumda istenen olayın eleman sayısı s(A) = 3!·2! dir.

O halde, $P(A) = \frac{3! \cdot 2!}{4!} = \frac{1}{2}$ dir.

Örnek 17



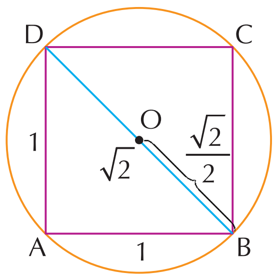
Şekildeki daire içinde alınan bir noktanın karenin içinde olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Şimdiye kadar gördüğümüz örneklerden farklı olarak örneklem uzay; olan, hacim, uzunluk şeklinde veriliyorsa buradaki bir A olayının olasılığı (alan için)

$$P(A) = \frac{\text{A nın alanı}}{\text{E nin alanı}} \text{ dır.}$$

O halde, bu sorada E nin alanı dairenin alanıdır. Seçilen noktanın karenin içinde olması olayına A dersek, A nın alanı karenin alanıdır.



$|AB| = 1$ br diyelim. Bu durumda $|AD| = 1$ br dir.

ABD dik üçgeninde

$|BD|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |BD| = \sqrt{2}$ dir.

$|BD|$ uzunluğu O merkezli dairenin çapı olduğundan yarıçap $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

Bu durumda

$$P(A) = \frac{\text{Karenin alanı}}{\text{Dairenin alanı}} = \frac{1^2}{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2\pi}{4}} = \frac{2}{\pi} \text{ dir.}$$

Örnek 18

Bir madeni para art arda 6 kez atılıyor. 2 kez yazı, 4 kez tura gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir madeni para art arda 6 kez atıldığında

$s(E) = 2^6 = 64$ olur.

2 kez yazı, 4 kez tura gelmesi olayının (A olayı diyelim.) eleman sayısı

$$\underbrace{Y\,Y}_{2\text{ yazı}}\quad \underbrace{T\,T\,T\,T}_{4\text{ yazı}}$$

nın farklı sıralanış sayısı kadardır.

Bu sıralanış sayısı da $\dfrac{\overset{6\text{ atış}}{6!}}{\underset{2\text{ yazı}}{2!}\;\underset{4\text{ tura}}{4!}} = 15$ tir.

Bu durumda $P(A) = \dfrac{15}{64}$ tür.

> A, B ve C olayları E örneklem uzayına ait aralarında ayrık olaylar ve
> $E = A \cup B \cup C$ ise, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ dir.

Örnek 19

Sadece A, B ve C atlarının katıldığı bir yarışta, A nın yarışı kazanma olasılığı B ninkinin 2 katı, B nin kazanma olasılığı C ninkinin 3 katıdır.

Bu durumda A nın yarışı kazanma olasılığı kaçtır?

Çözüm

A, B ve C atlarının yarışı kazanma olasılıkları sırasıyla P(A), P(B) ve P(C) olsun. $P(C) = x$ diyelim.

P(A)	P(B)	P(C)
6x	3x	x

2 katı   3 katı

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$\Rightarrow 6x + 3x + x = 1 \;\Rightarrow\; 10x = 1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{10}$ dur.

Bu durumda $P(A) = 6x = 6\cdot\dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{5}$ tir.

Örnek 20

36 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 12 si kızdır. Kızların 8 i, erkeklerin 6 sı gözlüklüdür. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin

a. Gözlüksüz bir kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

b. Gözlüksüz veya erkek olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Bir tablo yapalım. Kız, erkek, gözlüklü, gözlüksüz öğrenci dağılımını görelim. (Soruda verilenleri yuvarlak içine alalım.)

	Gözlüklü	Gözlüksüz	
Kız	8	4	12
Erkek	6	18	24
	14	22	36

$\overset{\text{Mevcut}}{(36} - \overset{\text{Kız}}{12} = \overset{\text{Erkek}}{24)}$

a. Sınıf mevcudu 36 kişi olduğundan $s(E) = 36$ dır. Gözlüksüz kız öğrenci sayısı 4 olduğundan $s(A) = 4$ tür.

Bu durumda $P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ dur.

b. 9. sınıfta gördüğümüz kümeler konusundan hatırlarsak 'veya' birleşim, 've' kesişim için kullanılmaktaydı.

Gözlüksüz öğrenci seçme olayına A, erkek öğrenci seçme olayına B dersek gözlüksüz veya erkek öğrenci seçme olayı $A \cup B$ olur.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\overset{\text{gözlüksüz öğrenciler}}{22}}{\underset{\text{sınıf mevcudu}}{36}}$$

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{\overset{\text{erkek öğrenciler}}{24}}{\underset{\text{sınıf mevcudu}}{36}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{s(A\cap B)}{s(E)} = \frac{\overset{\text{gözlüksüz erkek öğrenciler}}{18}}{36}$$

$\Rightarrow P(A\cup B) = \dfrac{22}{36} + \dfrac{24}{36} - \dfrac{18}{36} = \dfrac{28}{36} = \dfrac{7}{9}$ dur.

Koşullu Olasılık

A ve B, E eş olumlu örneklem uzayında iki olay ve P(B) > 0 olmak üzere, B olayının gerçekleşmesi halinde A olayının olasılığına A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı denir ve P(A / B) şeklinde gösterilir.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ dir.}$$

$$P(A / B) = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \text{ diyebiliriz.}$$

Örnek 21

Bir zar atıldığında üst yüze gelen sayının 2 den büyük olduğu bilindiğine göre, 6 gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

1. yol

Örneklem uzay E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Gelen sayının 2 den büyük olması olayı B = {3, 4, 5, 6}

Gelen sayının 6 olması olayı A = {6} dır.

A∩B = {6} dır. Bu durumda

$$P(A / B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

2. yol

Koşullu olasılık sorularında B olayını örneklenen uzay olarak kabul ederek soruyu daha kolay çözebiliriz.

O halde, bu soruda üst yüze gelen sayının 2 den büyük olması örneklem uzaydır.

Yani E = {3, 4, 5, 6} ⇒ s(E) = 4 tür.

6 gelme olayı A olsun. A = {6} ⇒ s(A) = 1 dir.

Bu durumda $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{5}$ tür.

Örnek 22

Bir çift zar atılıyor. Üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olduğu bilindiğine göre, bu sayıların ikisinin de tek sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

1. Yol

Üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olması olayı B olsun.

B = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} ⇒ s(B) = 5 tir.

Bu sayıların ikisinin de tek sayı olma olayı A olsun.

A = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)}

⇒ A ∩ B = {(3, 5), (5, 3)} ⇒ s(A ∩ B) = 2 dir.

Bu durumda $P(A / B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{2}{5}$ tir.

2. Yol

Örneklem uzayı üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olmasını alırız.

O halde,

E = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} ⇒ s(E) = 5 tir.

Sayıların ikisinin de tek sayı olma olayı A olsun.

A = {(3, 5), (5, 3)} ⇒ s(A) = 2 dir.

Bu durumda $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{5}$ tir.

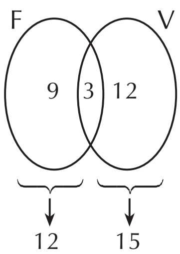
Örnek 23

Futbol veya voleybol oyunlarından en az birini oynayanların bulunduğu 24 kişilik bir sınıfta 12 öğrenci futbol, 15 öğrenci voleybol oynamaktadır.

Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin futbol oynadığı bilindiğine göre, voleybol oynamama olasılığı kaçtır?

Çözüm

Futbol oynayanların kümesini F, voleybol oynayanların kümesini V ile gösterelim.



$$s(F \cup V) = s(F) + s(V) - s(F \cap V)$$
$$\Rightarrow \quad 24 = 12 + 15 - s(F \cap V)$$
$$\Rightarrow \quad 24 = 27 - s(F \cap V)$$
$$\Rightarrow \quad s(F \cap V) = 3 \text{ tür.}$$

Soruyu örnek 21 deki 2. yol gibi çözelim.

Örneklem uzay, futbol oynayan öğrenci seçilmesi olayıdır. (Çünkü seçilen öğrencinin futbol oynadığı biliniyor.) Yani $s(E) = 12$ dir.

Öğrencinin voleybol oynamama olayı A olsun. Yukarıdaki venn şemasına bakarsak futbol oynayan öğrenciler arasında voleybol oynamayan 9 öğrenci vardır. Bu durumda $s(A) = 9$ dur. O halde,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Olasılıkta Çarpma Kuralı

Örnek 24

Bir torbada 3 kırmızı, 4 beyaz top vardır. Torbadan, çekilen top geri konulmamak üzere art arda 2 top çekiliyor.

a. **Birincinin kırmızı, ikincinin beyaz olma olasığı kaçtır?**

b. **Birinin kırmızı, diğerinin beyaz olma olasılığı kaçtır?**

Çözüm

a. Torbada toplam $3 + 4 = 7$ top vardır. Birincinin kırmızı, ikincinin beyaz olması olayının olasılığını P(K ve B) ile gösterirsek

$$P(K \text{ ve } B) = \underbrace{P(K)}_{\text{1. kırmızı}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\text{2. beyaz}}$$

kırmızı top → 3; beyaz top → 4

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7} \text{ dir.}$$

ilk çekilişte 7 top vardır. çekilen top geri konulmadığından 6 top kalır.

b. Burada sıra belirtilmemiş bu nedenle 1. kırmızı, 2. beyaz veya 1. beyaz, 2. kırmızı olabilir.

O halde,

$$P(\text{Biri kırmızı, biri beyaz}) = P(K \text{ ve } B) + P(B \text{ ve } K)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7} \text{ dir.}$$

Daha önce de buna benzer bir soru çözmüştük. Hatırlarsak o soruda toplar aynı anda çekiliyordu. Aynı anda top çekilmesi sorularında kombinasyon, bu şekilde art arda top çekilmesi sorularında yukarıdaki yolu izlersek çözüm yollarını karıştırmayız.

Örnek 25

A torbasında 4 mavi, 5 kırmızı, B torbasında 2 mavi 4 kırmızı bilye vardır. A torbasından rastgele bir bilye seçilip B torbasına atılıyor ve daha sonra B torbasından rastgele bir bilye seçiliyor.

Seçilen bilyenin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

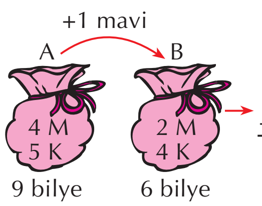
Çözüm

A dan seçilip B ye atılan bilye mavi veya kırmızı olabilir. B den kırmızı seçeceğimiz için istenen durum

$$\underset{A}{M}\;\underset{B}{K} + \underset{A}{K}\;\underset{B}{K} \text{ dır.}$$

1. durum

A torbasından seçilip B ye atılan bilye mavi olsun.



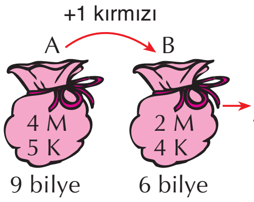
$$\begin{array}{r} 3\,M \\ +\,4\,K \\ \hline 7 \text{ bilye} \end{array}$$

$$\overset{A}{\frac{4}{9}} \cdot \overset{B}{\frac{4}{7}}$$

A dan mavi seçme olasılığı — B den kırmızı seçme olasılığı

2. durum

A torbasından seçilip B ye atılan bilye kırmızı olsun.



$$\begin{array}{l} 2\text{ M} \\ +5\text{ K} \\ \hline 7\text{ bilye} \end{array} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{A dan kırmızı} \\ \text{seçme olasılığı}}}{\overset{A}{\frac{5}{9}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{B den kırmızı} \\ \text{seçme olasılığı}}}{\overset{B}{\frac{5}{7}}}$$

$$\Rightarrow \underset{M\ \ K}{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{7}} + \underset{K\ \ K}{\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{7}} = \frac{16+25}{63} = \frac{41}{63} \text{ tür.}$$

Bağımsız Olaylar

Aynı örneklem uzaydaki iki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi diğerininkini etkilemiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir. İki olay bağımsız değilse, bunlara bağımlı olaylar denir.

A ve B bağımsız olaylar ise $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ dir.

Örnek 26

Bir madeni para ve bir zar birlikte atılıyor.
Paranın yazı, zarın üst yüzüne gelen sayının 3 olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Paranın yazı gelmesi olayı ile zarın 3 gelmesi olayı birbirini etkilemez yani bağımsız olaylardır.

Paranın yazı gelme olasılığı $P(A) = \frac{1}{2}$ dir.

Zarın üst yüzüne 3 gelme olasılığı $P(B) = \frac{1}{6}$ dır.

O halde, paranın yazı ve zarın üst yüzüne 3 gelme olasılığı

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ dir.}$$

Örnek 27

İki madeni para ve bir zar atılıyor.
Paraların ikisinin de yazı veya zarın üst yüzüne gelen sayının çift sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

İki madeni para attığımızda $E = \{TT, TY, YT, YY\}$ dır.

İkisinin de yazı olması olayı $A = \{YY\}$ dir.

O halde $P(A) = \frac{1}{4}$ tür.

Bir zar attığımızda $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır.

Çift sayı gelme olayı $B = \{2, 4, 6\}$ dır.

O halde, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dir.

Bu durumda, paraların yazı veya zarın üst yüzüne çift sayı gelme olasılığı

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A ve B bağımsız} \\ \text{olaylar olduğunda}}}{P(A \cap B)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \underset{(2)}{\frac{1}{4}} + \underset{(4)}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8} \text{ dir.}$$

İSTATİSTİK

Çeşitli alanlarda inceleme ve araştırma yapanların elde ettikleri sonuçları sayılarla ifade etmesine istatistik denir.

Bir ülkedeki fındık üretiminin yıllara göre dağılımının incelenmesi, bir ailenin giderlerinin dağılımının gösterilmesi, bir işyerinde çalışan işçilerin yaşlarına göre sınıflandırılması istatistik uygulamalarıdır.

Yapılan araştırma, elemanların tümünü incelemeye imkân sağlıyorsa bu bilgi toplama işlemine **tam sayım** denir.

Örneğin bir sınıftaki öğrencilerin ağırlıklarının dağılımı ile ilgili yapılan bir araştırmada tüm öğrencilerin ağırlıkları ölçülebilir. Dolayısıyla tam sayım işlemi uygulanır.

Eğer yapılan araştırma, birimlerin tümünün incelenmesine imkan sağlamıyorsa, birimlerden örnekler seçilir. Bu tür bilgi toplama işlemine örnekleme denir.

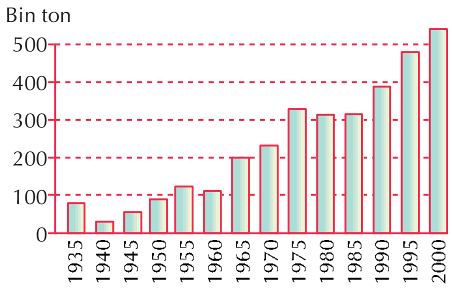
GRAFİK

Araştırmalar sonunda elde edilen verileri özetlemek amacıyla bilgilerin çizgilerle veya şekillerle ifade edilmesine grafik denir.

İstatistik bilgiler genel olarak, daire grafiği, sütun grafiği, çizgi grafiği, serpilme grafiği veya kutu grafiği ile gösterilir.

1. Sütun Grafiği

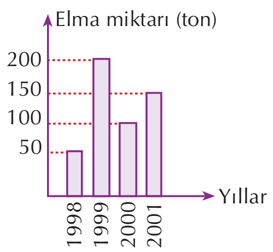
Bu tip grafiklerde gösterilmek istenen değerler sütun veya çubuklarla ifade edilir. Örneğin, aşağıdaki sütun grafikte Türkiye'de yıllara göre fındık üretim miktarı gösterilmiştir.



Türkiye'de yıllara göre fındık üretim miktarı (1935 - 2000)

Bu grafiğe göre, Türkiye'de fındık üretiminin en çok 2000 yılında, en az 1940 yılında olduğunu söyleyebiliriz.

▼ Örnek 28



Yandaki sütun grafik, bir elma bahçesinde 1998 - 2001 yılları arasındaki üretim ile ilgili bilgileri vermektedir.

Bu grafikten yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayalım:

a) 4 yıl boyunca üretilen elma miktarı kaç tondur?

b) En az elma üretimi hangi yılda yapılmıştır?

c) En çok elma üretimi hangi yılda yapılmıştır?

d) 1999 yılında üretilen elma miktarı, belirtilen dört yılda üretilen elma miktarının yüzde kaçıdır?

▼ Çözüm

a) 1998 yılında 50 ton

1999 yılında 200 ton

2000 yılında 100 ton

2001 yılında 150 ton elma üretilmiştir.

O halde, toplam miktar

50 + 200 + 100 + 150 = 500 tondur.

b) En kısa sütun 1998 yılına ait olduğundan en az elma üretimi bu yılda yapılmıştır. (50 ton)

c) En uzun sütun 1999 yılına ait olduğundan en çok elma üretimi bu yılda yapılmıştır. (200 ton)

d) Toplam elma miktarı = 500 ton

1999 yılındaki elma miktarı = 200 ton

Orantı kurarak çözelim:

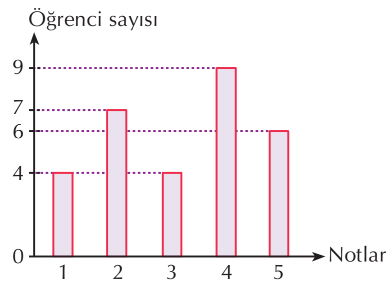
500 tonun 200 tonu 1999 yılında ise
100 tonun x idir.

D.O.

$$x = \frac{200 \cdot 100}{500} = 40$$

% 40 ıdır.

▼ Örnek 29



Yukarıdaki grafik, bir sınıftaki öğrencilerin birinci matematik sınavından aldıkları notları göstermektedir.

Grafiğe göre, sınıftaki öğrencilerin yüzde kaçı 5 almıştır?

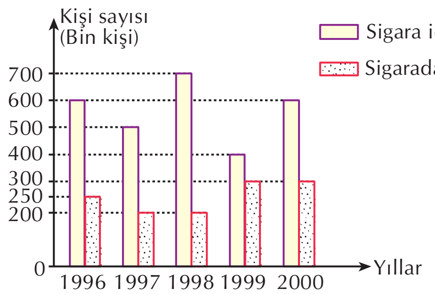
Çözüm

Grafik incelendiğinde, 1 alanların sayısının 4, 2 alanların sayısının 7, 3 alanların sayısının 4, 4 alanların sayısının 9 ve 5 alanların sayısının 6 olduğu görülür.

O halde sınıfta, $4 + 7 + 4 + 9 + 6 = 30$ öğrenci vardır.

6 öğrenci 5 aldığına göre, öğrencilerin $\frac{6}{30}$u yani % 20 si 5 almıştır.

Örnek 30



Grafiğe göre, hangi yıl sigaradan ölen insan sayısının sigara içen insan sayısına oranı en yüksek olmuştur?

A) 1996 B) 1997 C) 1998

D) 1999 E) 2000

Çözüm

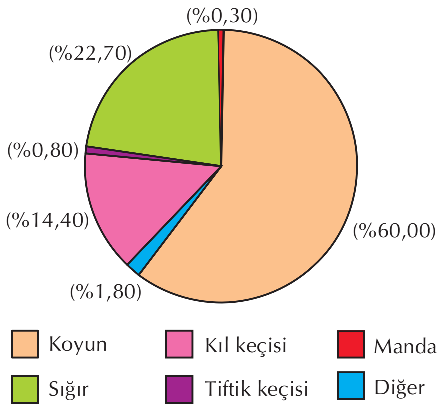
Yıllar	Sigara içen insan sayısı (A)	Sigaradan ölen insan sayısı (B)	$\frac{B}{A}$
1996	600 bin	250 bin	$\frac{5}{12}$
1997	500 bin	200 bin	$\frac{2}{5}$
1998	700 bin	200 bin	$\frac{2}{7}$
1999	400 bin	300 bin	$\frac{3}{4}$
2000	600 bin	300 bin	$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{2}{5} > \frac{2}{7}$ olduğundan sigaradan ölen insan sayısının sigara içen insan sayısına oranı 1999 yılında en yüksek olmuştur.

Cevap D

2. Daire Grafiği

Daire grafiği; elde edilen istatistiksel bilgilerin, dairenin dilimleri biçiminde sunulmasıdır. Bir değişkenin bir bütün içerisindeki oranını belirlemek için kullanılan en uygun grafik türü daire grafiğidir. Örneğin, aşağıdaki daire grafiğinde Türkiye'de yetiştirilen hayvanların cinslerine göre oranlarını gösteren daire grafiği verilmiştir.



Türkiye'de yetiştirilen hayvanların cinslerine göre oranları (DİE 2000)

Örnek 31

Ahmet Amca, bahçesinin % 20 sine domates, % 30 una marul, % 25 ine soğan, % 10 una salatalık ve % 15 ine maydonoz ekiyor.

Bu durumu daire grafiği ile gösterelim:

Çözüm

Dairenin tamamı 360° lik bir alandır.
Buna göre,

% 20 si domates ise, $360° \cdot \frac{20}{100} = 72°$

% 30 u marul ise, $360° \cdot \frac{30}{100} = 108°$

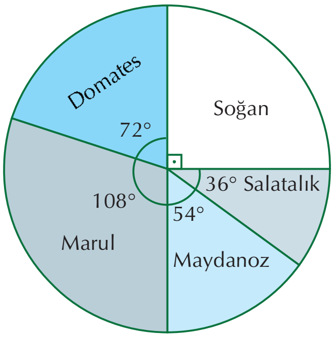
% 25 i soğan ise, $360° \cdot \frac{25}{100} = 90°$

% 10 u salatalık ise, $360° \cdot \frac{10}{100} = 36°$

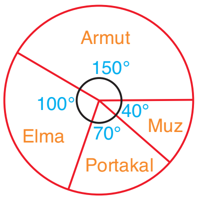
% 15 i maydonoz ise, $360° \cdot \frac{15}{100} = 54°$ lik

daire dilimi ile gösterilir.

Şimdi daire grafiğini çizelim:



▼ Örnek 32



Bir çiftçinin bahçesindeki meyve ağaçlarının dağılımı aşağıdaki dairesel grafikte gösterilmiştir.

Bahçedeki armut ağaçlarının sayısı portakal ağaçlarının sayısından 24 fazla olduğuna göre, muz ağaçlarının sayısı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

▼ *Çözüm*

Armut ağacına ait daire diliminin açısı 150°, portakal ağacına ait daire diliminin açısı 70° dir. Armut, portakaldan 24 tane fazla ⇒ 150° – 70° = 80° ye 24 ağaç karşılık geliyor.

O halde, muz ağacı 40° olduğunda 12 ağaç olur.

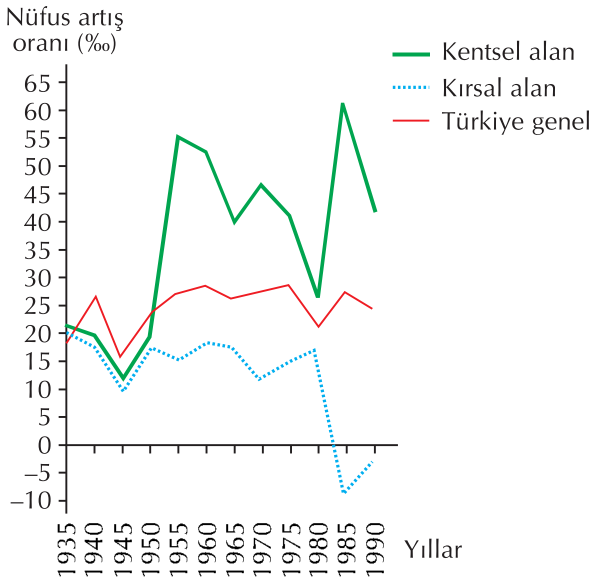
Cevap E

3. Çizgi Grafiği

Verilerin yatay ve dikey eksenlerdeki karşılıklarını gösteren noktalar işaretlendikten sonra bu noktaların çizgilerle birleştirilmesi ile elde edilen grafiktir.

Bir değişkenin zaman içeresindeki değişimini incelemek için kullanılan en uygun grafik türü çizgi grafiğidir.

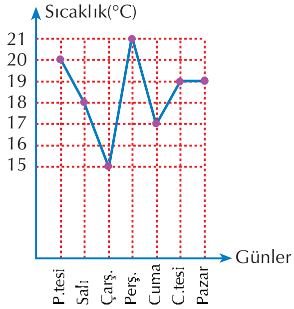
Örneğin, aşağıdaki grafik, Türkiye genelinde ve ülkenin kentsel ve kırsal alanlarında yıllara göre nüfus artış oranlarını göstermektedir.



▼ Örnek 33

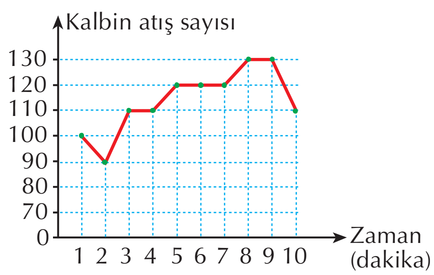
Tabloyu ve grafiği inceleyelim:

Günler	Sıcaklık(°C)
Pazartesi	20°
Salı	18°
Çarşamba	15°
Perşembe	21°
Cuma	17°
Cumartesi	19°
Pazar	19°



Bu grafiğe göre, haftanın en yüksek sıcaklığı perşembe günü (21 °C), en düşük sıcaklığı ise çarşamba günü (15 °C) dir.

▼ Örnek 34



Yukarıdaki grafik bir hastanın, 10 dakika süresince kalbinin dakikadaki atış sayısını göstermektedir.

Buna göre, hastanın kalbi bu 10 dakika süresince dakikada ortalama kaç kez atmıştır?

Çözüm

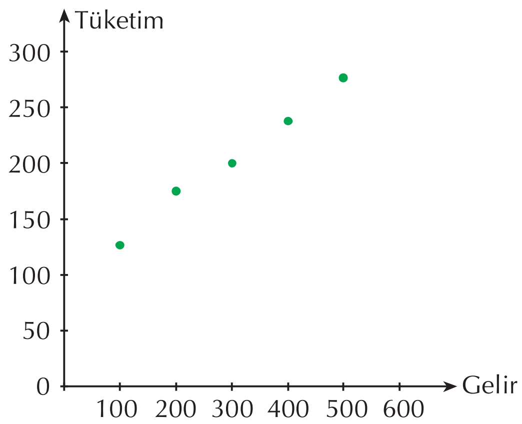
Grafik incelendiğinde hastanın kalbi

1. dakikada 100 kez	2. dakikada 90 kez
3. dakikada 110 kez	4. dakikada 110 kez
5. dakikada 120 kez	6. dakikada 120 kez
7. dakikada 120 kez	8. dakikada 130 kez
9. dakikada 130 kez	10. dakikada 110 kez

toplam olarak 1140 kez attığı görülür. 10 dakikada toplam 1140 kez attığına göre, dakikada ortalama $\frac{1140}{10} = 114$ kez atmıştır.

4. Serpilme Grafiği

Ayrı ayrı sayı noktalarından oluşan serpilme diyagramı, belli bir zaman aralığı için, bir değişkenin değerinin (dikey eksende yer alan) bir başka değişkenin değişme (yatay eksende yer alan) karşı çizilmesinde kullanılır. Serpilme grafiği, bu iki değişken arasında ne tür ilişki olduğunu belirlemekte kullanılır. Yani, iki değişken arasında pozitif veya negatif ilişki olup olmadığını belirlemek için serpilme grafiği kullanılır.



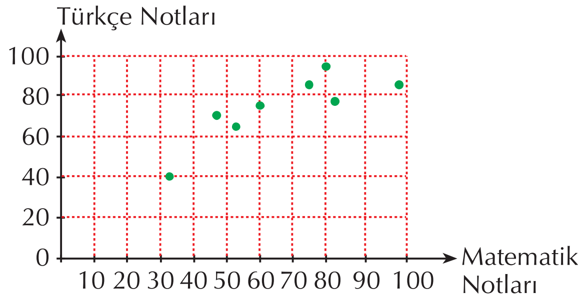
Yukarıdaki şekil, tüketimi harcamaları ile gelir düzeyi arasındaki şekil diyagramını göstermektedir.

Örnek 35

Zeynep öğretmen, öğrencilerinin matematik notları ile Türkçe notları arasında bir ilişki olup olmadığını belirlemek için rastgele seçtiği 8 öğrencisinin matematik ve Türkçe notlarını aşağıdaki gibi not ediyor.

	Matematik notları (x)	Türkçe notları (y)
Nilgün	98	86
Hilal	80	92
Ayşe	60	75
Meltem	33	40
Esra	75	82
Volkan	82	74
Ahmet	52	64
Hasan	48	70

Çözüm



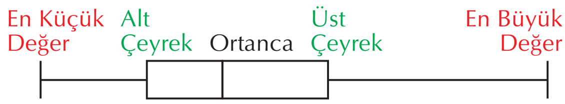
Bu grafiğe bakarak öğrencilerin matematik dersinden aldıkları notlar yükseldikçe Türkçe dersinden aldıkları notlar da yükselmektedir.

5. Kutu grafiği

Kutu grafiği, verilerin ortanca (meydan) etrafında yayılışlarını ve verilerin çoğunlukla hangi değerler arasında yer aldığını, sapan değerler varsa bunların konumlarını belirlemeye yarayan grafiktir.

Yani kutu grafiği, verilerin genişliğini, yığılımını öğrenmek için kullanılan en uygun grafik türüdür.

Kutu grafiği, bir veri setinden elde edilen, en küçük değer, alt çeyrek, üst çeyrek ve ortanca değerlerini içeren bir grafiktir.

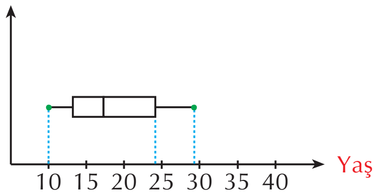


Örnek 36

Bir tüketim malı için yapılan yarışmaya kupon gönderenlerin yaşlarından bir tablo oluşturuluyor. Daha sonra tablodaki veriler kullanılarak en küçük değer, en büyük değer, alt çeyrek, üst çeyrek ve ortanca değerler aşağıdaki gibi elde ediliyor.

En Küçük Değer	Alt Çeyrek	Ortanca	Üst Çeyrek	En Büyük Değer
10	15	18	23	29

Bu verilere göre, kutu grafiğini çizelim.



VERİ ANALİZİ, MERKEZİ EĞİLİM ve YAYILIM ÖLÇÜLERİ

MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

1. Aritmetik Ortalama

İki veya daha fazla sayının aritmetik ortalamasını bulmak için; sayıların toplamı, terim sayısına bölünür.

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{\text{Sayıların Toplamı}}{\text{Terim Sayısı}}$$

Aritmetik ortalama $\overline{x}$ biçiminde de gösterilebilir.

Örnek 37

6, 10, 12 ve 20 **sayılarının aritmetik ortalamasını bulalım.**

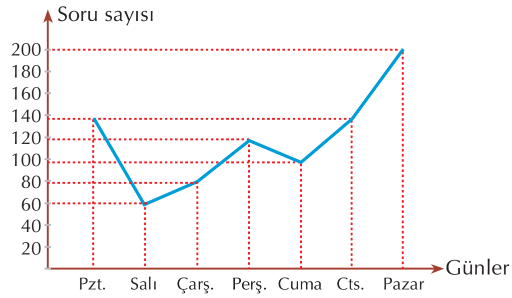
Çözüm

Sayıların toplamı = 6 + 10 + 12 + 20 = 48

Terim sayısı = 4 tür.

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{48}{4} = 12 \text{ olur.}$$

Örnek 38



Yukarıdaki grafik, bir öğrencinin haftalık çözdüğü soru sayısını göstermektedir.

Bu öğrenci günde ortalama kaç soru çözmektedir?

Çözüm

Verilen grafiğe göre, öğrencinin günlük çözdüğü soru sayısı şöyledir:

Pazartesi → 140, Salı → 60,

Çarşamba → 80, Perşembe → 120,

Cuma → 100, Cumartesi → 140

Pazar → 200

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{\text{Toplam Okunan Sayfa}}{\text{Gün Sayısı}}$$

$$= \frac{140+60+80+120+100+140+200}{7} = 120 \text{ olur.}$$

Örnek 39

Beş sayının aritmetik ortalaması 80 dir.

Bu sayılardan 21 ve 25 olan ikisi çıkarılırsa, geriye kalan sayıların aritmetik ortalaması kaç olur?

Çözüm

Beş sayının aritmetik ortalaması 80 ise, bu sayıların toplamı

80 x 5 = 400 dür.

Bu sayılardan 21 ve 25 çıkarılırsa toplam 21 + 25 = 46 azalır ve geriye
5 – 2 = 3 sayı kalır.

Kalan 3 sayının toplamı 400 – 46 = 354 olur.

$$\text{Kalan sayılar için A.O.} = \frac{354}{3} = 118 \text{ olur.}$$

2. Mod (Tepe Değeri)

Bir dizide en çok tekrar eden sayıya o dizinin modu denir. Eğer en çok tekrar eden sayı bir kaç tane ise, bu sayıların her biri dizinin modudur.

▼ Örnek 40

5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1 **sayı dizisinin modu kaçtır?**

▼ Çözüm

5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1 dizisinde;

5, 2 kez; 4, 3 kez; 3, 1 kez; 2, 1 kez; 1, 2 kez tekrarlanmıştır.

En çok tekrarlanan sayı 4 olduğundan dizinin modu 4 tür.

▼ Örnek 41

Notlar	Kişi sayısı
1	3
2	5
3	12
4	12
5	4

Yukarıdaki tabloda, 36 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin Türkçe sınavından aldıkları notların dağılımını göstermektedir.

Bu 36 adet verinin modu kaçtır?

▼ Çözüm

3 ve 4 notları en çok (12 kez) tekrar ettiği için, bu verilerin modu 3 ve 4 sayılarıdır.

> Mod, bir dizideki hangi sayının en çok tekrarlandığını gösterir.

▼ Örnek 42

Öğrencinin Adı	Ali	Mehmet	Hüseyin	Hasan	Ahmet	Hüseyin	Kaya
Öğrencinin Puanları	80	90	85	90	100	90	87

Yukarıdaki çizelgede, bir sınıftaki yedi öğrenci ile bunların Türkçe dersinden aldıkları puanlar gösterilmiştir.

Bu puanlar dizisinin modu aşağıdakilerden hangisidir?

▼ Çözüm

Öğrencilerin puanları 80, 90, 85, 90, 100, 90, 87 dir.

En çok tekrarlanan puan 90 olduğundan puanlar dizisinin modu 90 dır.

3. Medyan (Ortanca Değer)

Bir sayı dizisinin medyanını bulmak için, sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanır.

- Dizinin terim sayısı tek ise, medyan tam ortada bulunan sayıdır.
- Dizinin terim sayısı çift ise, medyan tam ortada bulunan iki sayının aritmetik ortalamasıdır.

▼ Örnek 43

6, 5, 24, 32, 45, 52, 9, 17, 8 **sayı dizisinin medyanı kaçtır?**

▼ Çözüm

Önce verilen sayı dizisini küçükten büyüğe sıralayalım:

$$\underbrace{5,\ 6,\ 8,\ 9,}\ \boxed{17}\ \underbrace{24,\ 32,\ 45,\ 52}$$

$\downarrow$
Medyan

Sıralanan dizinin terim sayısı tek (9 tane) olduğundan tam ortadaki 17 sayısı medyandır.

Örnek 44

Bir okulun 11A ve 11B sınıflarındaki öğrencilerin okudukları hikaye kitaplarının sayısı aşağıdaki gibidir.

11A

12, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 16, 16, 16, 18, 18, 20, 20, 20, 20, 20, 22, 22, 30

11B

9, 9, 10, 10, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 18, 18, 20, 22, 37

a) 11A sınıfına ait veri grubunun aritmetik ortalamasını, tepe değerini (modunu) ortanca değerini (medyanını) bulalım.

b) 11B sınıfına ait veri grubunun aritmetik ortalamasını, tepe değerini (modunu) ortanca değerini (medyanını) bulalım.

Çözüm

a) • 11A grubunun aritmetik ortalaması $= \dfrac{\text{terimler toplamı}}{\text{terim sayısı}}$

$$= \frac{350}{20} = 17{,}5$$

• 11A grubunun tepe değeri (modu) 20 dir, çünkü 20 sayısı en fazla tekrar eden (5 kez) sayıdır.

• 11A veri grubunun terim sayısı çift olduğundan (20) ortanca değeri (medyanı) ortadaki iki değerin ortalamasıdır.

O halde, medyan $= \dfrac{16+18}{2} = 17$ dir.

b) • 11B sınıfının aritmetik ortalaması $= \dfrac{\text{terimler toplamı}}{\text{terim sayısı}}$

$$= \frac{250}{19} = 15$$

• 11B sınıfının tepe değeri (modu) 10 ve 15 tir. Çünkü 10 ve 15 sayıları diğerlerinden daha fazla ve eşit sayıda tekrar etmiştir.

• 11B veri grubunun terim sayısı tek olduğundan (19) ortanca değeri (medyanı) ortadaki terimdir. O halde, medyan 14 tür.

a ve b seçeneklerindeki sonuçlardan da görüleceği gibi medyan değerleri mod değerine göre aritmetik ortalamaya daha yakın çıkmaktadır.

Örnek 45

Bir öğretmen, öğrencilerinden üzerinde sayıların yazmadığı 30 cm lik bir cetvelin boyunun kaç cm olduğunu tahmin etmelerini istiyor.

Öğrencilerin cm olarak tahminleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

25	25	26	27	27
28	30	32	32	32
32	33	35	35	36

Buna göre, hangi merkezi eğilim ölçüsü bu veri grubunu en iyi şekilde temsil eder?

Çözüm

Sayılar küçükten büyüğe sıralandığında ortanca terimi (medyan) 32, modu 32 olduğu görülür.

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{\text{Veriler toplamı}}{\text{Terim sayısı}} = \frac{455}{15} = 30{,}33 \text{ tür.}$$

Cetvelin gerçek boyu 30 cm olduğuna göre, 30 santimetreye en yakın sonuca sahip merkezi eğilim ölçüsünü kullanmak daha uygun olur. Bu durumda bu veri grubunu en iyi temsil eden merkezi eğilim ölçüsü aritmetik ortalamadır.

Aritmetik ortalama, ortanca değer (medyan) ve tepe değeri (mod) merkezi eğilim ölçüleridir.

MERKEZİ YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Aritmetik ortalama, medyan, mod birer merkezi eğilim ölçüsü, standart sapma açıklık ve çeyrek açıklık ise birer merkezi yayılım ölçüsüdür.

1. Standart Sapma

Bir veri grubundaki değerler; veri grubunun aritmetik ortalamasından çok uzak değerler ise standart sapma yüksek, aritmetik ortalamaya yakın değerler ise standart sapma düşüktür. Standart sapmanın yüksek olması, verilerin çok geniş bir aralığa yayıldığını, değişkenliğinin yüksek olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu tür verilere bakarak geleceğe yönelik tahminler yapmak, oldukça riskli olur.

Verilen bir veri grubundaki standart sapmayı bulmak için aşağıdaki işlemler uygulanır.

1. Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.
2. Herbir verinin aritmetik ortalama ile arasındaki farkın kareleri toplanır.
3. Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünür ve elde edilen bölümün karekökü alınır.
4. Bulunan son değer, veri grubunun standart sapmasıdır.

Standart sapma bir veri grubundaki değerlerin, merkez değer olarak kabul edilen aritmetik ortalama değerinden ne ölçüde saptığını göstermektedir. Standart sapma yüksekse verilerin güvenilirliği düşük ve riski yüksek, tersine standart sapma düşükse verilerin güvenilirliği yüksek, riski ise düşüktür.

Merkezi yayılım ölçüleri öğrencilerin başarıları hakkında bilgi vermez. Grupların homojen veya heterojen olup olmadığı hakkında bilgi verir.

Bir sınıfta alınan notların standart sapması yüksekse öğrencilerin seviyelerinin birbirinden çok farklı olduğunu, standart sapma düşükse öğrencilerin seviyelerinin birbirine çok yakın olduğunu anlarız.

Örnek 46

Aşağıdaki tabloda A ve B şehirlerine ait 20 gün boyunca gerçekleşen en yüksek hava sıcaklıkları °C cinsinden verilmiştir.

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	7	4	13	10	4	6	8	6	7	11	15	13	18	14	14	16	12	7	13	22
B	2	8	3	5	1	7	10	12	16	20	14	15	17	12	15	10	9	12	14	18

Bu verilerin aritmetik ortalamasını ve standart sapmasını bularak hangi şehirde hava sıcaklıklarının değişme riskinin daha yüksek olduğunu bulalım.

Çözüm

A şehrindeki sıcaklıkların aritmetik ortalaması:

(7 + 4 + 13 + 10 + 4 + 6 + 8 + 6 + 7 + 11 + 15 + 13 + 18 + 14 + 14 + 16 + 12 + 7 + 13 + 22) : 20 = 11°C

B şehrindeki sıcaklıkların aritmetik ortalaması:

(2 + 8 + 3+ 5 + 1 + 7 + 10 + 12 + 16 + 20 + 14 + 15 + 17 + 12 + 15 + 10 + 9 + 12 + 14 + 18) : 20° = 11°C

- Önce A şehrindeki sıcaklıkların standart sapmasını bulalım. Aritmetik ortalama ile gerçekleşen sıcaklıkların farklarının kareleri toplamı

  $(11-7)^2 + (11-4)^2 + (11-13)^2 + (11-10)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots +$

  $(11-12)^2 + (11-7)^2 + (11-13)^2 + (11-22)^2$

  16 + 19 + 4 + 1 + 49 + 25 + 9 + 25 + 16 + 0 + 16 + 4 + 49 + 9 + 9 + 25 + 1 + 16 + 4 + 121 = 448 olduğuna göre,

  $$\text{Standart sapma} = \sqrt{\frac{448}{20-1}} = \sqrt{23,57} \text{ olur.}$$

- B şehrindeki sıcaklıkların aritmetik ortalama ile farklarının kareleri toplamı

  $(11-2)^2 + (11-8)^2 + (11-3)^2 + (11-5)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots +$

  $(11-9)^2 + (11-12)^2 + (11-14)^2 + (11-18)^2$

  81 + 9 + 64 + 36 + 100 + 16 + 1 + 1 + 25 + 81 + 9 + 16 + 36 + 1 + 16 + 1 + 4 + 1 + 9 + 49 + = 556 olduğuna göre,

  $$\text{Standart sapma} = \sqrt{\frac{556}{20-1}} = \sqrt{29,26}$$

$\sqrt{29{,}26} > \sqrt{23{,}57}$ olduğundan B şehrindeki sıcaklıkların standart sapması A şehrine göre daha yüksektir. Buna göre, B şehrinde hava sıcaklıklarının değişme riski daha yüksektir.

Örnek 47

Aşağıdaki tabloda Ali'nin bir hafta boyunca yapmış olduğu harcamaların miktarları verilmiştir.

	Pzt.	Salı	Çrş.	Prş.	Cum.	Cts.	Paz.
Harcanan Miktar (TL)	15	25	20	10	30	50	60

Bu veri grubunun standart sapmasını bulalım.

Çözüm

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{15 + 25 + 20 + 10 + 30 + 50 + 60}{7} = 30$$

Aritmetik ortalama ile her bir verinin farklarının karelerinin toplamı,

$$= (30-15)^2 + (30-25)^2 + (30-20)^2 + (30-10)^2 + (30-30)^2 + (30-50)^2 + (30-60)^2$$

$= 225 + 25 + 100 + 400 + 0 + 400 + 900 = 2050$ bulunur.

$$\text{Standart sapma} = \sqrt{\frac{2050}{7-1}} = \sqrt{341{,}66} \approx 18{,}47 \text{ dir.}$$

2. Açıklık

Bir veri grubundaki en büyük sayıdan, en küçük sayının çıkarılmasıyla bulunan değere **açıklık** denir.

> Açıklık, bir veri grubunun en büyük değeri ile en küçük değeri arasındaki farktır. Verilerin ne kadar büyük bir aralıkta yayıldığını gösterir.

Örnek 48

3, 5, 8, 10, 15, 21, 26, 35 **şeklinde verilen sayı dizisinin açıklığını bulalım.**

Çözüm

3, 5, 8, 10, 15, 21, 26, 35

$\underline{3}$ ↓ En küçük değer
$\underline{35}$ ↓ En büyük değer

Verilen dizinin açıklığı;

En büyük değer – En küçük değer = 35 – 3 = 32 bulunur.

3. Çeyrekler Açıklığı

Alt Çeyrek ve Üst Çeyrek

Bir veri dizisindeki sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında ilk sayıya alt uç değer, son sayıya üst uç değer denir.

Alt uç değer ile üst uç değerin ortasındaki değere ortanca (medyan) dendiğini öğrenmiştik. Alt uç değer ile ortancanın ortasındaki değere **alt çeyrek** denir. Eğer ortada iki değer varsa alt uç değere yakın olan değer alt çeyrektir. Üst uç değer ile ortancanın ortasındaki değere **üst çeyrek** denir. Eğer ortada iki değer varsa üst uç değere yakın olan değer üst çeyrektir.

Örnek 49

5, 5, 7, 10, 12, 12, 16

sayı dizisinin açıklığını bulalım.

Çözüm

Verilen sayı dizisinde en küçük değer 5; en büyük değer 16 dır.

Açıklık = En büyük değer – En küçük değer

= 16 – 5 = 11 dir.

Örnek 50

11, 13, 6, 17, 9, 3, 9

sayı dizisindeki alt çeyrek ve üst çeyrek değerlerini bulalım.

Çözüm

Sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

3 , 6 , 9 , 9 , 11 , 13 , 17

3: Alt uç değer; 6: Alt çeyrek; 9: Ortanca; 13: Üst çeyrek; 17: Üst uç değer

Çeyrekler Açıklığı

Üst çeyrekten alt çeyrek çıkarıldığında **çeyrekler açıklığı** bulunur.

Çeyrekler Açıklığı = Üst çeyrek – Alt çeyrek

Örnek 51

Aşağıdaki tabloda bir gruptaki 15 kişinin kiloları gösterilmiştir.

Kilo (kg)	30	25	12	20	10	45	50	40	42	48	48	50	48	52	55

Bu veri grubunun çeyrekler açıklığını bulalım.

Çözüm

Tablodaki verileri küçükten büyüğe sıralayalım.

10 12 20 25 30 40 42 45 48 48 48 50 50 52 55

10: Alt uç değer; 25: Alt çeyrek; 45: Ortanca; 50: Üst çeyrek; 55: Üst uç değer

Çeyrekler açıklığı = Üst çeyrek – Alt çeyrek

= 50 – 25 = 25 tir.

STANDART PUANLAR (z ve T puanları)

Standart puan, gözlenen puanların ortalamadan olan farkların standart sapma cinsinden belirtilmesidir.

Standart puanlar aritmetik ortalaması ve standart sapması farklı dağılımların, aynı aritmetik ortalama ve standart sapmaya sahip dağılım haline dönüştürülmesini sağlar.

Çeşitli sınavlardan alınan ham puanların ortak bir puan sistemine, yani standart puanlara dönüştürülmesi puanların birbiriyle karşılaştırılmasına, toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabilmesine olanak sağlar.

1. z Puanı

Yapılan ölçümlerden elde edilen puanların aritmetik ortalamasının sıfır (0) ve standart sapmasının bir (1) kabul edildiği puanlara **z puanı** denir.

z puanı, kişinin puanının sınıf ortalamasından kaç standart sapma uzakta olduğunu gösterir. z puanı aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$z = \frac{\text{Dönüştürülecek puan} - \text{Aritmetik ortalama}}{\text{Standart sapma}} = \frac{x - \overline{x}}{s}$$

z puanı ile öğrencilerin puanlarının standart sapmaya göre ortalamanın ne kadar altında ya da üstünde kaldığı belirlenebilir.

z puanı, öğrencilerin herhangi bir konu ya da dersteki öğrenme düzeylerinin belirlenmesi ve karşılaştırılmasında kullanılır. z puanı büyük olan öğrencinin öğrenme düzeyi diğer öğrencilere göre yüksek; z puanı düşük olan öğrencinin öğrenme düzeyi diğer öğrencilere göre düşüktür.

Örnek 52

	Aritmetik ortalama	Medyan	Mod	Standart sapma
Matematik	60	60	50	8
Türkçe	70	60	50	5
Kimya	90	80	70	5

Bir öğrenci grubuna 3 dersten uygulanan sınavlardan elde edilen istatistikler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Bu derslerin hepsinden 80 alan bir öğrencinin öğrenme düzeyinin en düşük ve en yüksek olduğu dersleri bulalım.

Çözüm

Öğrencinin bu derslerdeki başarısını karşılaştırabilmek için bütün derslere ait z puanı hesaplanır.

Dönüştürülecek puan (x) = 80

Matematik dersi için;

aritmetik ortalama $(\overline{x})$ = 60 ve standart sapma (S) = 8 olduğundan

$$z_{matematik} = \frac{X-\overline{x}}{S} = \frac{80-60}{8} = 2,5 \text{ olur.}$$

Türkçe dersi için;

aritmetik ortalama $(\overline{x})$ = 70 ve standart sapma (S) = 5 olduğundan

$$z_{Türkçe} = \frac{80-70}{5} = 2 \text{ olur.}$$

Kimya dersi için;

aritmetik ortalama $(\overline{x})$ = 90 standart sapma (S) = 5

olduğundan $z_{Kimya} = \frac{80-90}{5} = -2$ bulunur.

$$z_{Matematik} > z_{Türkçe} > z_{Kimya}$$

sıralamasına göre, bu öğrencinin öğrenme düzeyinin en düşük olduğu ders kimya, en yüksek olduğu ders ise matematik dersidir.

2. T Puanı

z puan dağılımının aritmetik ortalaması 50 ve standart sapması 10 olacak şekilde dönüştürülmesi ile elde edilen puanlara T puanı denir. z puanından T puanına geçiş, aşağıdaki formül ile yapılır.

$$\boxed{T = 10z + 50}$$

Örnek 53

Matematik dersindeki z puanı 3 olan Ayşe'nin bu derse ait T puanı bulalım.

Çözüm

T = 10z + 50 olduğundan,

T = 10·3 + 50 = 80 bulunur.

z puanları negatif veya kesirli değerler çıkabilir. Bu değerlerin yorumlanması zor olduğundan z puanı T puanına çevrilerek negatiflik ortadan kaldırılır ve böylece yorumlar daha güvenilir olur.

Örnek 54

Sınıf ortalamasının 60 ve standart sapmanın 10 olduğu bir dersten 55 olan bir kişinin bu dersteki T puanını bulalım.

Çözüm

Önce z puanını hesaplayalım.

$$z = \frac{55-60}{10} = -0,5 \text{ tir.}$$

Buna göre, T = 10z + 50

T = 10(–0,5) + 50

T = 45 bulunur.

Ölçme ve değerlendirme

Etkinlik Yapalım

Etkinlik 9

Aşağıdaki boşlukları dolduralım.

1. Üç madeni paranın atılması deneyinde $s(E) =$ .....
2. Bir madeni paranın art arda dört kez atılması deneyinde $s(E) =$ .....
3. Üç zarın birlikte atılması deneyinde $s(E) =$ .....
4. Bir zar atılıyor. 3 gelmeme olasılığı: .....
5. Aralarında Ayşe'nin de bulunduğu 5 kişi arasından seçilen 1 kişinin Ayşe olmama olasılığı: .....
6. 4 beyaz, 3 mavi, 2 yeşil gömlek arasından seçilen 1 gömleğin beyaz veya mavi olma olasılığı: .....

Etkinlik 10

Aşağıdaki boşlukları dolduralım.

Bir madeni para art arda 3 kez atılıyor.

1. İki kez tura geldiği bilindiğine göre, bir kez yazı gelme olasılığı: .....
2. İlk iki atışta tura geldiği bilindiğine göre, bir kez yazı gelme olasılığı: .....
3. Bir kez yazı geldiği bilindiğine göre, üç atışta da yazı gelme olasılığı: .....
4. İlk atışta yazı geldiği bilindiğine göre, üç atışta da yazı gelme olasılığı: .....

Etkinlik 11

İki zar atıldığında

1. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olması deneyi
2. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 10 dan büyük olması deneyi
3. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 5 ile bölünebilmesi deneyi

Yukarıda verilen deneyler ile aşağıdaki örneklem uzayları eşleştirip kutulara doğru deneyin numarasını yazalım.

a) ☐ E = {(5, 6), (6, 6), (6, 5)}

b) ☐ E = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}

c) ☐ E = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)}

Etkinlik 12

Aşağıdaki veriler bir öğrencinin 7 gün boyunca çözdüğü matematik testi sayılarını göstermektedir.

5, 4, 3, 4, 3, 7, 2

Bu veri grubuna ait ortanca değeri (medyan), tepe değeri (mod), aritmetik ortalaması, açıklık, çeyrek açıklık değerini ve standart sapmasını bulunuz.

Birlikte Çözelim

1. **Bir fabrikada üretilen 40 ampülden 8 i bozuk olduğuna göre, ampüllerden rastgele seçilen birinin sağlam olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm

40 ampülden 8 i bozuk ise geri kalan $40 - 8 = 32$ si sağlamdır.

Bu durumda rastgele seçilen ampülün sağlam olma olasılığı (sağlam ampül seçme olayına A dersek)

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

tir.

A B C D **E**

2. Bir grupta 5 kız, 4 erkek öğrenci vardır.

Gruptan rastgele seçilen 2 öğrencinin ikisinin de kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{7}{18}$ C) $\frac{11}{18}$ D) $\frac{13}{18}$ E) $\frac{17}{18}$

Çözüm

Grupta 5 + 4 = 9 öğrenci vardır. 9 öğrenciden 2 sini seçtiğimiz için $s(E) = \binom{9}{2} = 36$ dır.

Seçilen 2 öğrencinin kız öğrenci olması olayına A dersek $s(A) = \binom{5}{2} = 10$ dur.

5 kız öğrenci var.

Bu durumda $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

A B C D E

3. Bir torbada 3 kırmızı, 4 beyaz, 5 sarı top vardır.

Rastgele alınan bir topun kırmızı veya beyaz olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{12}$

Çözüm

Torbada $3 + 4 + 5 = 12$ top vardır. Yani $s(E) = 12$ dir.

Çekilen topun kırmızı olma olasılığı $P(K) = \frac{3}{12}$

Çekilen topun beyaz olma olasılığı $P(B) = \frac{4}{12}$

Çekilen topun kırmızı veya beyaz olma olasılığı

$$P(K \cup B) = P(K) + P(B) - P(K \cap B)$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$$

$$= \frac{7}{12} \text{ dir.}$$

Çekilen top aynı anda hem kırmızı hem de beyaz olamayacağı için bu olasılık 0 dır.

A B C D **E**

4. 3 pozitif ve 4 negatif sayı arasından rastgele 3 sayı seçiliyor.

Seçilen sayıların çarpımının negatif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{35}$ B) $\frac{13}{35}$ C) $\frac{16}{35}$ D) $\frac{17}{35}$ E) $\frac{23}{35}$

Çözüm

Toplam $3 + 4 = 7$ sayı arasından 3 sayı seçtiğimiz için $s(E) = \binom{7}{3} = 35$ tir.

Üç sayının çarpımının negatif olması için ikisi pozitif biri negatif veya üçü de negatif olmalıdır.

$(+ \cdot + \cdot - = -$ veya $- \cdot - \cdot - = -)$

Üç sayının ikisinin pozitif birinin negatif olduğu durum sayısı

$$\underset{\text{pozitif}}{\binom{3}{2}} \cdot \underset{\text{negatif}}{\binom{4}{1}} = 12,$$

üçünün de negatif olduğu durum sayısı $\binom{4}{3} = 4$ tür.

O halde, seçilen üç sayının çarpımının negatif olması olayına A dersek $s(A) = 12 + 4 = 16$ dır.

Bu durumda, $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{16}{35}$ tir.

A B C D E

5. **$x^2 - 3x - 4 \le 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayıları arasından rastgele seçilen bir tam sayının çift sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm

$x^2 - 3x - 4 \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$

$-4 + 1 \quad -4 \cdot 1$

$x = 4$ ve $x = -1$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$ ün işareti	$+$		$-$		$+$

Ç = [–1, 4] tür.

Çözüm kümesindeki tam sayılar –1, 0, 1, 2, 3, 4 tür.

O halde, $s(E) = 6$ dır.

Seçilen tam sayının çift sayı olma olayına A dersek

$A = \{0, 2, 4\} \Rightarrow s(A) = 3$ tür.

Bu durumda $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ dir.

A B C D E

6. Bir torbada pembe ve mavi toplar vardır. Torbadaki mavi topların sayısı pembe topların sayısının 2 katıdır. Torbadan geri konulmamak üzere art arda çekilen iki toptan ikisinin de pembe olma olasılığı $\frac{1}{11}$ dir.

Buna göre, başlangıçta torbadaki top sayısı kaçtır?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Çözüm

Torbadaki pembe top sayısına x dersek mavi top sayısı onun iki katı olduğu için 2x tir. Bu durumda toplam top sayısı 3x tir.

Torbadan geri konulmamak üzere art arda çekilen iki topun da pembe olma olasılığı $\frac{1}{11}$ ise

topların 1 eksildiğine dikkat edelim

$$\underset{\substack{\text{1. topun}\\\text{pembe}\\\text{olma}\\\text{olasılığı}}}{\frac{x}{3x}} \cdot \underset{\substack{\text{2. topun}\\\text{pembe}\\\text{olma}\\\text{olasılığı}}}{\frac{x-1}{3x-1}} = \frac{1}{11} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{3x-1} = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{9x-3} = \frac{1}{11} \Rightarrow 11x - 11 = 9x - 3$$

$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ tür.

Torbada başlangıçtaki top sayısı $3x = 3 \cdot 4 = 12$ dir.

A B C D E

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları ile yazılabilecek iki basamaklı sayılar arasından rastgele seçilen birinin rakamları birbirinden farklı iki basamaklı bir sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları ile iki basamaklı $\underline{5}\ \underline{5} \to 5 \cdot 5 = 25$ sayı yazılabilir. Yani $s(E) = 25$ tir.

Bu kümenin elemanları ile rakamları birbirinden farklı iki basamaklı

$\underline{5}\ \underline{4} \to 5 \cdot 4 = 20$ sayı yazılabilir.

O halde, seçilen sayının rakamları birbirinden farklı iki basamaklı bir sayı olma olasılığı $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ tir.

A B C D E

8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

kümeleri veriliyor.

A x B kartezyen çarpımından alınan bir elemanın (a, a) biçiminde olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{20}$ B) $\frac{7}{20}$ C) $\frac{9}{20}$ D) $\frac{11}{20}$ E) $\frac{13}{20}$

Çözüm

A x B çarpımının eleman sayısı $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 4 \cdot 5 = 20$ dir. Bu durumda $s(E) = 20$ dir.

Seçilen elemanın (a, a) şeklinde olması A ve B den aynı elemanların alınması demektir. A ve B deki ortak elemanlar 1, 2, 3 olduğundan seçilen eleman $\underbrace{(1, 1), (2, 2), (3, 3)}_{3 \text{ tane}}$ olabilir.

O halde, alınan bir elemanın (a, a) biçiminde olma olasılığı $\frac{3}{20}$ dir.

A B C D E

9. Bir avcının bir hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{4}$ tür.

Buna göre, üç atış yapan avcının hedefi sadece üçüncü atışta vurma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{64}$ B) $\frac{5}{64}$ C) $\frac{9}{64}$ D) $\frac{15}{64}$ E) $\frac{21}{64}$

Çözüm

Avcının hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{4}$ ise vuramama olasılığı $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ tür.

$(P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A))$

1. atış 2. atış 3. atış

$$\underset{\text{vuramadı}}{\frac{3}{4}} \cdot \underset{\text{vuramadı}}{\frac{3}{4}} \cdot \underset{\text{vurdu}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{64}$$

A B C D E

10. Sınıf ortalamasının 75 ve standart sapmanın 8 olduğu bir sınavdan 91 olan bir öğrencinin z standart puanı kaçtır?

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Çözüm

$$z = \frac{\text{Dönüştürülecek puan} - \text{Aritmetik ortalama}}{\text{Standart sapma}}$$

olduğundan,

$z = \frac{91 - 75}{8} = \frac{16}{8} = 2$ bulunur.

A B C D E

11. **Bir dersteki z standart puanı 1,8 olan bir öğrencinin T standart puanı kaçtır?**

A) 75 B) 72 C) 70 D) 68 E) 64

Çözüm

T = 50 + 10·z olduğundan, z = 1,8 için

T = 50 + 10·(1,8)

T = 50 + 18 = 68 bulunur.

A B C D E

12. Bir okulda A sınıfında 30, B sınıfında 25, C sınıfında 17 öğrenci vardır.

Bu öğrencilerin tamamı bir daire grafiğinde gösterilirse C sınıfına ait öğrencilerin dilimine ait merkez açı kaç derece olur?

A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 95

Çözüm

A sınıfı : 30 kişi

B sınıfı : 25 kişi

C sınıfı : 17 kişi

olduğundan öğrencilerin tamamı 30 + 25 + 17 = 72 kişidir.

Daire grafiği 360° olduğundan,

72 kişi 360° ise

17 kişi x° dir.

D.O 72·x = 360·17

x = 85° olur.

A B C D E

13. Aşağıdaki tabloda Nilgün'ün girmiş olduğu sınavlardaki puanları gösteren bir tablo verilmiştir.

Tablo : Nilgün'ün beş farklı dersteki genel durumu

	Puan	Sınıfın aritmetik ortalaması	Sınıfın standart sapması
Türkçe	72	75	10
İngilizce	65	60	10
Tarih	84	75	6
Coğrafya	70	60	5
Felsefe	96	72	8

Bu tabloya göre, Nilgün'ün en çok başarılı olduğu ders aşağıdakilerden hangisidir?

A) Türkçe B) İngilizce C) Tarih

D) Coğrafya E) Felsefe

Çözüm

Nilgün, z standart puanı yüksek olan derste en çok başarılı olacağı için her dersteki z standart puanlarını hesaplayalım.

Türkçe dersi için: $z = \frac{72-75}{10} = \frac{-3}{10} = -0,3$

İngilizce dersi için: $z = \frac{65-60}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$

Tarih dersi için: $z = \frac{84-75}{10} = \frac{9}{10} = 0,9$

Coğrafya dersi için: $z = \frac{70-60}{10} = \frac{10}{10} = 1$

Felsefe dersi için: $z = \frac{96-80}{8} = \frac{16}{8} = 2$

Buna göre, Nilgün'ün en çok başarılı olduğu ders Felsefe'dir.

A B C D E

Öğrendiklerimizi Test Edelim

1. İçinde 4 mavi, 5 yeşil kalem bulunan bir torbadan rastgele iki kalem alınıyor.

Alınan kalemlerin ikisinin de yeşil olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{7}{18}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{3}{16}$

2. **Art arda 3 kere atılan bir madeni paranın 2 kere yazı, 1 kere tura gelmesi olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

3. Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan 6 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafında oturuyor.

En küçük çocuğun, anne ile babanın arasında oturma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{7}{10}$

4. $A = \{ x : |x - 1| < 3, x \in Z \}$ kümesinin alt kümelerinden biri rastgele seçiliyor.

Seçilen alt kümenin 3 elemanlı bir küme olma olasılığı kaçtır?

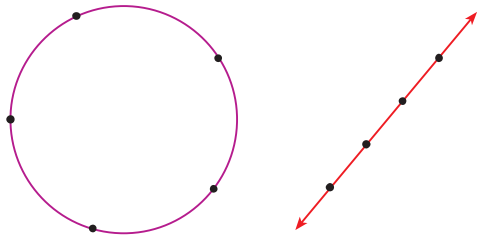
A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{32}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{10}$

5. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların her biri birer kağıda yazılarak bir torbaya konuyor.

Torbadan rastgele çekilen bir kağıdın üzerinde <u>en az</u> iki rakamı aynı olan bir sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{13}{25}$ C) $\frac{12}{25}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

6.



Yukarıdaki şekilde 5 tane çember üzerinde, 4 tane doğru üzerinde toplam 9 nokta verilmiştir. Bu 9 noktadan herhangi üçünü köşe kabul eden üçgenlerden rastgele biri seçiliyor.

Seçilen üçgenin 3 köşesinin de çember üzerinde olan bir üçgen olma olasılığı kaçtır?

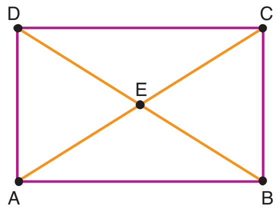
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

7. Bir apartmanda her biri dörder kişilik iki asansör vardır. İçlerinde İlknur ile Eda'nın da bulunduğu 8 kişi dörder dörder bu asansörlere biniyorlar.

İlknur ile Eda'nın aynı asansörde bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

8.



ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktası E dir.

Şekildeki 5 noktadan rastgele seçilen üçünün aynı doğru üzerinde bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

9. 10 tabanında kullanılan 10 rakamdan rastgele iki tanesi seçiliyor.

Seçilen rakamların çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

10. Bir madeni para ile bir tavla zarı birlikte atılıyor.

Madeni paranın yazı veya tavla zarının 6 gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{12}$

11. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... biçiminde 1, 1 ile başlayan ve her sayının kendinden önce gelen iki sayının toplamına eşit olduğu sayı dizisinin ilk 15 terimi yazılıyor. (5, 8, 13 için 13 = 5 + 8 gibi)

Bu 15 sayıdan rastgele seçilen birinin çift sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

12. Aşağıdaki tabloda A, B, C, D, E caddelerinde son dört ayda meydana gelen trafik kazalarının sayıları verilmiştir.

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan
A	4	3	5	4
B	2	3	4	7
C	5	5	3	3
D	4	4	4	4
E	3	5	4	4

Buna göre, hangi caddede trafik kazası olma riski en fazladır?

A) A B) B C) C D) D E) E

13. A torbasında 3 ü sağlam 5 ampül, B torbasında 4 ü sağlam 6 ampül vardır. Önce rastgele bir torba, sonra da rastgele bir ampul seçiliyor.

Seçilen ampülün sağlam olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{19}{30}$ B) $\frac{17}{30}$ C) $\frac{18}{29}$ D) $\frac{19}{25}$ E) $\frac{17}{25}$

Öğrendiklerimizi Test Edelim

1. Bir okulda öğrencilere 80 soruluk bir test uygulanmıştır. Bu uygulamadan elde edilen doğru cevap ortalaması standart sapması ve Rümeysa adlı öğrencinin doğru cevap sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Testin Ortalaması	Testin Standart Sapması	Rümeysa'nın Doğru cevap sayısı
78	10	84

Buna göre, Rümeysa'nın bu testteki T standart puanı kaçtır?

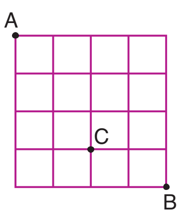
A) 52 B) 54 C) 56 D) 60 E) 64

2. 2 matematik, 3 fizik, 4 kimya kitabı bir rafa diziliyor.

Aynı türden kitapların yan yana gelmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{180}$ C) $\frac{1}{210}$ D) $\frac{1}{240}$ E) $\frac{1}{300}$

3.



A dan B ye <u>en kısa</u> yoldan gidecek olan bir kimsenin C den geçme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3 lü permütasyonlarından biri rastgele seçiliyor.

Seçilen bu 3 lü permütasyonda 2 nin bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

5. 32 kişilik bir sınıfta 12 erkek öğrenci vardır. Kız öğrencilerin 8 i, erkek öğrencilerin 4 ü gözlüklüdür.

Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin gözlüksüz olduğu bilindiğine göre, kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{6}$

6. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{-3, -2, -1\}$

olmak üzere, A x B kartezyen çarpım kümesinden alınan herhangi bir (a, b) elemanı için a·b çarpımının sıfır olma olasılığı kaçtır?

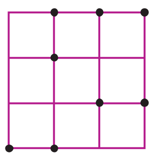
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinden biri rastgele seçiliyor.

Seçilen bu alt kümenin en küçük elemanı 2 olan bir alt küme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

8.



Yukarıdaki sekiz nokta, eş karelerin köşeleri üzerinde bulunmaktadır.

Bu sekiz noktadan rastgele seçilen üç noktanın bir üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{28}$ B) $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{3}{14}$ E) $\frac{27}{28}$

9. $(x + y)^5$

açılımından rastgele seçilen bir terimin kat sayısının 10 dan küçük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{5}$

10. A ve B, E örneklem uzayında iki olay olmak üzere,

$P(A) = \frac{7}{12}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$P(A' \cap B') = \frac{1}{4}$

olduğuna göre, P(B) kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

11. 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarını kullanarak yazılabilecek beş basamaklı ve rakamları birbirinden farklı sayılar arasından rastgele biri seçiliyor.

Seçilen sayıda 2 nin 3 ün sağında, 4 ün solunda olma olasılığı kaçtır?

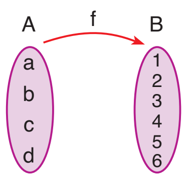
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

12. A torbasında 4 mavi, 5 pembe; B torbasında 3 mavi, 2 pembe top vardır. Aynı anda her iki torbadan birer top alınıyor ve öteki torbaya (A dan alınan B ye, B den alınan A ya) atılıyor.

Bu işlemin sonucunda torbalardaki mavi ve pembe top sayılarının başlangıçtaki ile aynı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{17}{45}$ B) $\frac{19}{45}$ C) $\frac{22}{45}$ D) $\frac{23}{45}$ E) $\frac{26}{45}$

13. Aşağıda A = {a, b, c, d} ve B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümeleri verilmiştir.



A dan B ye tanımlanabilecek fonksiyonlardan rastgele bir f fonksiyonu seçiliyor.

Seçilen fonksiyonun f(c) = 5 olacak şekilde bir f fonksiyonu olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Yazılı soruları

Soru 1

A = {0, 1, 2, 3, 4} kümesinin elemanları kullanılarak dört basamaklı rakamları birbirinden farklı 4 ile tam bölünebilen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

Çözüm

....
....
....
....
....
....

Soru 2

Sınıf ortalamasının 68 ve standart sapmanın 6 olduğu matematik sınavından 80 alan Saliha'nın bu dersteki T standart puanı kaçtır?

Çözüm

....
....
....
....
....
....

Soru 3

2233350 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 7 basamaklı 2 ile başlayan kaç çift sayı yazılabilir?

Çözüm

....
....
....
....
....
....

Soru 4

$$P(n, 1) + C(n, 2) = 6$$

olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm

....
....
....
....
....
....

Soru 5

$(x - 2y)^n$ açılımında terimlerden biri ax^8y^3 olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

....

....

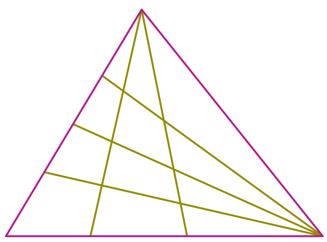
....

....

....

....

Soru 6



Yukarıdaki şekilde kaç üçgen vardır?

Çözüm

....

....

....

....

....

....

Soru 7

İki basamaklı doğal sayılar arasından rastgele seçilen birinin çift olduğu bilindiğine göre, 9 ile bölünebilme olasılığı kaçtır?

Çözüm

....

....

....

....

....

....

Soru 8

İki zar ile iki madeni para atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı ve madeni paraların ikisinin de yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

....

....

....

....

....

....