ASAL ÇARPANLARA AYIRMA

1 den büyük her doğal sayı, tabanları birbirinden farklı **asal sayı** ve üsleri **pozitif tamsayı** olan sayıların çarpımı biçiminde, çarpanların yazılış sırası önemli olmamak üzere, bir tek şekilde yazılabilir. Bu tür yazılışa, verilen doğal sayının **asal çarpanlarına ayrılması** denir.

Örnek 1:

12, 15 ve 30 sayılarını asal çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$12 = 2^2.3 \qquad 15 = 3.5 \qquad 30 = 2.3.5$$

Örnek 2:

360 ve 9! sayılarını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$360 = 2^3.3^2.5$ tir.

360 sayısının asal çarpanları (bölenleri) 2, 3 ve 5 olmak üzere üç tanedir.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1$

$= (3.3).(2.2.2).7.(3.2).5.(2.2).3.2.1$

$= 2^7.3^4.5.7$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \;\; 2^{4+2+1} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \;\; 3^{3+1} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ 1 & \end{array} \;\; 5^1 \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ 1 & \end{array} \;\; 7^1$$

Şeklinde bölme işlemi yapılarak her bir asal çarpanın üssü bulunur.

BİR DOĞAL SAYININ TAMSAYI BÖLENLERİ

$x, y, z, \ldots$ birbirinden farklı asal sayılar ve $a, b, c, \ldots$ pozitif tamsayılar olmak üzere, A doğal sayısı ($A \geq 2$), $A = x^a . y^b . z^c . \ldots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış olsun.

1. A doğal sayısının **pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı (p),**

   $p = (a + 1).(b + 1).(c + 1). \ldots$ şeklinde bulunur.

Örnek 3:

6 nın pozitif tam bölenlerini bulalım.

Çözüm:

$6 \rightarrow 1, 2, 3, 6$ dır.

$6 = 2^1.3^1 \Rightarrow$ poz. tam böl. sayısı $= (1 + 1).(1 + 1) = 4$

Örnek 4:

144 sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

$144 = 2.72 = 2^2.36 = 2^3.18 = 2^4.9 = 2^4.3^2$

poz. tam böl. sayısı $= (4 + 1).(2 + 1) = 15$ dir.

2. A sayısının pozitif tamsayı bölenleri kadar da negatif tamsayı böleni olduğundan, A sayısının bütün tamsayı bölenlerinin sayısı,

   $2p = 2.(a + 1).(b + 1).(c + 1). \ldots$

   şeklinde hesaplanır.

Örnek 5:

30 sayısının bütün tamsayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

$30 = 2^1.3^1.5^1$

poz. tam böl.say $= (1 + 1).(1 + 1).(1 + 1) = 8$

neg. tam böl.say $= 8$

bütün tam böl.say $= 16$ dır.

3. A sayısının tamsayı olan bütün tam bölenlerinin toplamı 0 (sıfır) dır.

Örnek 6:

6 sayısının bütün tamsayı bölenlerinin toplamının 0 olduğunu gösterelim

Çözüm:

6 nın pozitif tamsayı bölenleri 1, 2, 3, 6 dır.

6 nın negatif tamsayı bölenleri $-1, -2, -3, -6$ dır.

Yani $(1 + 2 + 3 + 6) + \big((-1) + (-2) + (-3) + (-6)\big) = 0$ dır.

4. A sayısının asal tam bölenlerinin toplamı,

   $t_a = x + y + z + \ldots$ dır.

11. $x = 6a + 5 = 7b + 6 = 8c + 7$

Her tarafa 1 eklenirse,

$x + 1 = 6a + 6 = 7b + 7 = 8c + 8$

$x + 1 = 6(a + 1) = 7(b + 1) = 8(c + 1)$

$x + 1 = \text{Okek}(6, 7, 8)$

$x + 1 = 168 \Rightarrow x = 167$ bulunur.

Cevap A

12. Okek bulunurken a ve b lerden üsleri büyük olanları, Obeb bulunurken küçük olanları almalıyız.

$$\left.\begin{array}{l} x=a^4.b^3 \\ y=a^3.b^4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Okek}(x,y)=a^4.b^4 \\ \text{Obeb}(x,y)=a^3.b^3 \end{array}$$

$$\frac{\text{Okek}(x, y)}{\text{Obeb}(x, y)} = \frac{a^4.b^4}{a^3.b^3} = ab \text{ olur.}$$

Cevap E

13. Şişelerin hacmi x lt olsun.

Bu sıvılar birbirine karıştırılmadan ve hiç artmayacak şekilde şişelere konacağından x sayısı 72, 126, 180 sayılarını tam bölmelidir. Hacmin en büyük olması istendiğinden x sayısı Obeb(72, 126, 180) olup

$x = 18$ bulunur.

72 litrelik bidon $\frac{72}{18} = 4$ şişeye,

126 litrelik bidon $\frac{126}{18} = 7$ şişeye,

180 litrelik bidon $\frac{180}{18} = 10$ şişeye doldurulur.

Toplam şişe sayısı $= 4 + 7 + 10 = 21$ olur.

Cevap B

14. **I. yol**

Lambalar t saat sonra tekrar aynı anda yansınlar.

1\. lamba $\dfrac{t}{\frac{5}{6}}$ kere

2\. lamba $\dfrac{t}{\frac{3}{2}}$ kere

3\. lamba $\dfrac{t}{\frac{5}{3}}$ kere yanacaktır.

$\frac{6t}{5}, \frac{2t}{3}, \frac{3t}{5}$ ifadeleri tamsayı olacağından t nin en küçük değeri 15 olur.

II. yol

$t = \text{Okek}\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$

$t = \text{Okek}\left(\frac{5}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}\right)$

$t = \frac{1}{6}.\text{Okek}(5, 9, 10)$

$t = \frac{1}{6}.90 = 15$ bulunur.

Cevap A

15. $\text{Obeb}(x, y) = 7$ olsun.

Bu durumda, $x = 7.a$ ve $y = 7.b$ (a ile b aralarında asal) olur.

$x + y = 84$ olarak veriliyor.

$7a + 7b = 84$

$7.(a + b) = 84$

$a + b = 12$ olup $a = 11$ ve $b = 1$ seçilirse,

$x = 77$ ve $y = 7$ olup,

$x - y$ en çok 70 bulunur.

Cevap E

16. Bir bütünün içine küçük parçalar yerleştirileceği için bu sorunun Obeb sorusu olduğu yorumunu yapabiliriz. Yerleştirilecek küplerin bir kenarı x alınırsa, x sayısı 60, 80, 120 yi tam bölmesi gerekir. Ayrıca en az küp kullanmak için x mümkün olduğunca büyük olmalı, yani $x = \text{obeb}(60, 80, 120) \Rightarrow x = 20$ cm olmalıdır.

$$\text{Küp sayısı} = \frac{\text{Büyük kutunun hacmi}}{\text{Bir küpün hacmi}}$$

$$= \frac{60.80.120}{20.20.20} = 3.4.6 = 72 \text{ bulunur.}$$

Cevap D

17. Bu sayı x olsun.

$x = 7.a + 6 = 9.b + 8 = 11.c + 10$

$x + 1 = 7(a + 1) = 9(b + 1) = 11(c + 1)$

$x + 1 = \text{okek}(7, 9, 11)$

$x + 1 = 693 \Rightarrow x = 692$ bulunur.

Cevap E

18. m ile n aralarında asal olduğundan,

$\text{Okek}(m, n) = m.n \Rightarrow m.n = 36$ olur.

$m + \frac{42}{n} = 18$

$\frac{m.n + 42}{n} = 18$ (m.n yerine 336 yazalım.)

$\frac{336 + 42}{n} = 18$ ise $n = 21$ olur.

Cevap C

TEST

MATEMATİK - I

1. **n pozitif tamsayı ve 120.n çarpımı bir tam kare olduğuna göre, n nin <u>en küçük</u> değeri aşağıdaki aralıkların hangisindedir?**

A) [6, 15] B) [16, 25] C) [26, 35] D) [36, 45] E) [46, 55]

2. x ve y <u>pozitif tamsayılardır.</u>

$(24)^3 = x \cdot y$

olduğuna göre, x in alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 35 B) 40 C) 60 D) 64 E) 70

3. $77^2 + 99^2$

toplamını bölen kaç tane <u>asal sayı</u> vardır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4. **Ortak katlarının en küçüğü 30 olan farklı iki sayının toplamı <u>en çok</u> kaçtır?**

A) 55 B) 45 C) 33 D) 31 E) 17

5. x ve y aralarında asal sayılardır.

$\frac{60}{x} + y = 10$ ve OKEK(x, y) = 140

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

A) 27 B) 29 C) 32 D) 38 E) 41

6. **Ortak bölenlerinin en büyüğü 6 olan iki basamaklı, birbirinden farklı iki sayının toplamı <u>en çok</u> kaçtır?**

A) 200 B) 198 C) 192 D) 186 E) 180

7. **Hem 5 e hem de 6 ya bölündüğünde 4 kalanını veren iki basamaklı <u>en büyük</u> tamsayının rakamları toplamı kaçtır?**

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

8. 42 lt zeytinyağı, 63 lt ayçiçek yağı ve 70 lt mısırözü yağı birbirleri ile karıştırılmamak ve kaplar tam dolu olmak şartıyla eşit hacimli kaplara dolduruluyor.

Bu işlem için <u>en az</u> kaç kap kullanılmıştır?

A) 21 B) 25 C) 27 D) 29 E) 31

9. Herkesin futbol oynadığı bir öğrenci grubunda futbol turnuvası düzenlenecektir. Takımlar 9 ar kişi olduğunda 3, 10 ar kişi olduğunda 4 kişi açıkta kalıyor.

Buna göre, gruptaki öğrenci sayısı <u>en az</u> kaçtır?

A) 72 B) 76 C) 82 D) 84 E) 92

10. Boyutları 2 cm, 3 cm ve 5 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutularla bir küp oluşturulacaktır.

Buna göre, bu kutulardan <u>en az</u> kaç tane gereklidir?

A) 720 B) 800 C) 820 D) 860 E) 900

CEVAP ANAHTARI	1-C	2-B	3-D	4-B	5-A	6-D	7-A	8-B	9-D	10-E

TEST

1. $5! + 6!$ toplamının kaç tane asal böleni vardır?

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 5

2. x ve y aralarında asal sayılardır.

$$OKEK(x, y) = 1820 \text{ ve}$$

$$\frac{140}{y} + x = 70$$

olduğuna göre, $x - y$ kaçtır?

A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 39

3. $$(11)^2 + (11)^3 + (11)^4$$

sayısının asal bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. 143, 189 ve 265 sayılarını böldüğünde sırasıyla 3, 9 ve 5 kalanlarını veren en büyük doğal sayı kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 60 E) 70

5. a tamsayıdır.

$$\frac{a^2 - 24}{a}$$

ifadesini doğal sayı yapan a değerleri kaç tanedir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

6. 5 ile bölündüğünde 4, 8 ile bölündüğünde 2 kalanını veren 300 ile 400 arasındaki doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 1052 B) 1062 C) 1086 D) 1116 E) 1202

7. a ve b doğal sayı

$$3a = 4b$$

olduğuna göre, ekok(a, b) + ebob(a, b) toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) 13

8. x, y ve z pozitif tamsayılardır.

$$A = 4x - 3 = 5y + 2 = 7z - 10$$

olduğuna göre, A nın en büyük üç basamaklı değeri kaçtır?

A) 973 B) 977 C) 980 D) 987 E) 987

9. Ayrıtlarının uzunlukları 20 m, 25 m ve 30 m olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir depo en az kaç tane özdeş küp ile tam olarak doldurulabilir?

A) 60 B) 80 C) 100 D) 120 E) 140

10. 355 sayısına en küçük hangi doğal sayı eklenmelidir ki bu sayı 12, 15, 18 sayılarına tam bölünsün?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

11. x ve y pozitif tamsayılardır.

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$$

EBOB(x, y) + EKOK(x, y) = 150 olduğuna göre, 2x + y kaçtır?

A) 60 B) 76 C) 80 D) 84 E) 96

12. a ve b doğal sayılarının en büyük ortak böleni 17 dir.

$$5a = 2b$$

olduğuna göre, b – a kaçtır?

A) 3 B) 48 C) 51 D) 27 E) 54

13. **x pozitif tamsayı olmak üzere, 10.12^x sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı 144 olduğuna göre, x kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14.

$$\begin{array}{ccc|c} A & B & C & 2 \\ D & E & F & 2 \\ D & G & H & 3 \\ K & L & M & 3 \\ 1 & 1 & M & 5 \\ & & 1 & \end{array}$$

olduğuna göre; A, B, C sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

15. x ve y doğal sayılarının OKEK i 120 dir.

$$3x = 5y$$

olduğuna göre, x ile y nin OBEB'i kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

16. **4^5 sayısının bütün tamsayı bölenlerinin çarpımı kaçtır?**

A) -2^{110} B) -2^{55} C) 0 D) 2^{55} E) 2^{110}

17. Kenar uzunlukları (a + 2) ve (2a + 4) birim olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına köşeleri de dahil olmak üzere, eşit aralıklarla ağaç dikilecektir.

En az kaç ağaç gerekir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

18. Boyutları 120 ve 160 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına köşeleri de dahil olmak üzere eşit aralıklarla ağaçlar dikilecektir.

Bu iş için en az kaç ağaç gerekir?

A) 14 B) 11 C) 9 D) 8 E) 10

ÖZEL

1. $$\frac{-2x^8 + 10x^4 + 16}{x^4}$$

ifadesini <u>tam sayı</u> yapan kaç farklı x reel sayı değeri vardır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

2. x ve y, birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere,

OKEK(x, y) = 84
OBEB(x, y) = 7

olduğuna göre, x + y nin <u>en büyük</u> değeri ile <u>en küçük</u> değeri arasındaki fark kaçtır?

A) 35 B) 41 C) 42 D) 45 E) 49

3. a, b ve c sayıları birbirinden farklı tamsayılardır.

a! + b! + c!

sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı <u>en az</u> kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. **$\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{7}{20}$ saat aralıklarla çalan üç zil, ilk kez sabah saat 09:00 da birlikte çaldığına göre, tekrar ikinci kez üçü birlikte saat kaçta çalar?**

A) 14:00 B) 14:36 C) 17:00 D) 18:30 E) 18:45

5. a ve b pozitif tamsayıdır.

okek(a, b) = 24 ve $a \geq b$

olmak üzere, kaç tane (a, b) ikilisi vardır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

6. **36, 20, x, y sayılarının en küçük ortak katı 1620 olduğuna göre, x + y toplamı <u>en az</u> kaçtır?**

A) 27 B) 54 C) 63 D) 82 E) 90

7. Boyutları 4, 6 ve 9 cm olan dikdörtgenler prizması şeklinde kutulardan bir küp yapılmak isteniyor.

Küpün bir kenarının 5 e bölünebilen bir tamsayı olduğu bilindiğine göre, <u>en küçük</u> hacimli bu küp için kaç kutu gerekir?

A) 16000 B) 24000 C) 27000 D) 32000 E) 36000

8. a, b ve c doğal sayılar ve 20 < a < b < c dir.

OBEB(a, b) = 6
OBEB(b, c) = 5

olduğuna göre, a + b + c toplamı <u>en az</u> kaçtır?

A) 78 B) 80 C) 85 D) 89 E) 90

9. Boyutları 240 cm ve 160 cm olan paralelkenar biçimindeki bir tarla eşkenar dörtgen şeklindeki eşit parsellere ayrıldıktan sonra elde edilen parsellerin köşelerine fidan dikilecektir.

Buna göre, <u>en az</u> kaç fidana gerek vardır?

A) 28 B) 24 C) 20 D) 15 E) 12

CEVAP ANAHTARI 1-E 2-C 3-B 4-B 5-B 6-D 7-C 8-D 9-E

Örnek 7:

20 sayısının asal bölenlerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$20 = 2^2.5^1$

Asal çarpanlar 2 ve 5 tir.

Asal bölenleri toplamı $2 + 5 = 7$ dir.

6. A sayısının asal olmayan tamsayı **bölenlerinin** toplamı,

$\overline{t}_a = -(x + y + z + ...)$ dir.

Örnek 8:

6 sayısının asal olmayan tamsayı bölenleri toplamını bulalım.

Çözüm:

$6 \begin{cases} 1, 2, 3, 6 \Rightarrow \text{pozitif bölenler} \\ -1, -2, -3, -6 \Rightarrow \text{negatif bölenler} \end{cases}$

Asal sayılar çıkarılırsa;

1, 6, – 1, – 2, – 3, – 6 kalacaktır.

Toplanırsa : – 5 bulunur.

UYARI

Bir pozitif tamsayının asal olmayan bölenleri toplamı, daima asal çarpanlarının toplamının (– 1) katıdır.

Örnek 9:

100 sayısını inceleyelim.

$100 = 4.25 = 2^2.\ 5^2$

1. 100 sayısının pozitif tamsayı bölenleri,
$p = (2 + 1).(2 + 1) = 9$ tanedir.
(1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 sayıları; 100 ün pozitif tamsayı bölenleridir.)

2. 100 sayısının asal bölenleri, 2 ve 5 olmak üzere iki tane asal ve asal olmayan pozitif bölenleri de 2 ve 5 dışındaki diğer pozitif bölenleri olup, $9 - 2 = 7$ tanedir.

3. 100 sayısının bütün bölenleri $2.9 = 18$ tane ve asal olmayan tamsayı bölenleri, 2 ve 5 dışındaki diğer tamsayı bölenleri $18 - 2 = 16$ tanedir.

4. 100 ün asal bölenlerinin toplamı,
$t_a = 2 + 5 = 7$ ve
bütün tamsayı bölenlerinin toplamı 0 olduğundan, asal olmayan tamsayı bölenlerinin toplamı,
$\overline{t}_a + t_a = 0 \Rightarrow \overline{t}_a = -7$,
asal olmayan pozitif bölenlerinin toplamı,
$217 - 7 = 210$ dur.

Örnek 10:

n bir doğal sayıdır.

$A = 9^n.4$

sayısının 27 tane pozitif tamsayı böleni olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm:

$A = 9^n.4 = 3^{2n}.2^2$ olduğuna göre,

A sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı,

$(2n + 1).(2 + 1) = 27$ tür.

$(2n + 1).3 = 27 \Rightarrow 2n + 1 = 9 \Rightarrow n = 4$ tür.

Örnek 11:

$242\underbrace{000 \ldots 0}_{n \text{ tane}}$

sayısının bütün tamsayı bölenlerinin sayısı 180 olduğuna göre, n sayısını bulalım.

Çözüm:

Bu sayıyı asal çarpanlara ayıralım,

$242\underbrace{000 \ldots 0}_{n \text{ tane}} = 242.10^n = 2.121.10^n = 2.11^2.2^n.5^n$

$= 2^{n+1}.5^n.11^2$

Bütün bölenlerin sayısı $= 2.(n + 2).(n + 1).(2 + 1) = 180$

$\Rightarrow \quad 2.(n + 2).(n + 1).3 = 180$

$\Rightarrow \quad 6.(n + 1).(n + 2) = 180$

$\Rightarrow \quad \underbrace{(n + 1)}_{5}.\underbrace{(n + 2)}_{6} = 30$

$\Rightarrow$ n = 4 bulunur.

Örnek 12:

n pozitif tamsayı olmak üzere,

180.n

çarpımının tam kare olması için n nin alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(1995 - ÖSS)

Çözüm:

$180.n = a^2$ olsun.180 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

$\left.\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow 180 = 2^2.3^2.5^1$ olur.

$\Rightarrow \underbrace{2^2.3^2}_{\text{Tam kare}}.5^1.n = a^2$

Sol taraftaki ifadenin tam kare olabilmesi için n = 5 olmalıdır.

Cevap D

OBEB (ORTAK BÖLENLERİN EN BÜYÜĞÜ)

İki veya daha fazla doğal sayıdan her birini bölebilen en büyük doğal sayıya bu sayıların **ortak bölenlerinin en büyüğü (OBEB'i)** denir. a, b, c sayılarının OBEB'i, OBEB(a, b, c) = $(a, b, c)_{obeb}$ şeklinde gösterilebilir.

OKEK (ORTAK KATLARIN EN KÜÇÜĞÜ)

İki veya daha fazla doğal sayıdan her birine tam bölünebilen (her birinin pozitif tamsayı katı olan) en küçük doğal sayıya bu sayıların **ortak katlarının en küçüğü (OKEK'i)** denir.
a, b, c sayılarının OKEK'i,
OKEK(a, b, c) = $(a, b, c)_{okek}$ şeklinde gösterilebilir.

OBEB ve OKEK'in Bulunması

1. Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.
2. Tabanı aynı olan çarpanlardan üsleri en küçük olanların çarpımı bu sayıların OBEB'i,
3. Bütün (tabanı aynı ya da farklı olan) çarpanlardan her bir tabanın en büyük üslü olanlarının çarpımı bu sayıların OKEK'idir.

Örnek 13:

150, 200, 250 sayılarının OBEB ve OKEK'ini bulalım.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} 150 = 2.3.5^2 \\ 200 = 2^3.5^2 \\ 250 = 2.5^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} OBEB = 2.5^2 = 50 \\ OKEK = 3.2^3.5^3 = 3000 \end{array}$$

İkinci bir yoldan bu sayıların hepsi aynı tabloda asal sayılara bölünür. Bu sayıların hepsini aynı anda bölen asal sayıların çarpımı OBEB, bütün asal sayıların çarpımı da OKEK tir.

150	200	250	2*
75	100	125	2
75	50	125	2
75	25	125	3
25	25	125	5*
5	5	25	5*
1	1	5	5
	1	1	

OBEB(150, 200, 250) = $2.5^2 = 50$ (üsleri "*" ile işaretlenenlerin çarpımı)
OKEK(150, 200, 250) = $3.2^3.5^3 = 3000$ dir.

Sonuç:

✔ OBEB(x, y) = k olmak üzere,

$x = k.m$ ve $y = k.n$

olacak şekilde aralarında asal en az bir (m, n) tamsayı ikilisi ve

OKEK(x, y) = k olmak üzere,

$k = p.x$ ve $k = q.y$

olacak şekilde aralarında asal en az bir (p, q) tamsayı ikilisi vardır.

✔ İki veya daha fazla sayının OBEB'i en çok bu sayıların en küçüğüne, OKEK'i en az bu sayıların en büyüğüne eşit olabilir.

✔ Aralarında asal sayıların OBEB'i 1 dir. Dolayısıyla, OBEB'i 1 olan sayılar aralarında asaldır şeklinde de aralarında asal olmanın tanımı yapılabilir.

Örnek 14:

30 dan ve birbirinden farklı iki doğal sayının OBEB'i 30 olduğuna göre, bu iki sayının toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 75 B) 90 C) 120 D) 150 E) 175

Çözüm:

x ve y aralarında asal iki sayı olmak üzere; bu iki sayı 30.x ve 30.y olsun. Buna göre, bu iki sayının toplamı:
$30.x + 30.y = 30.(x + y)$ olur. O halde,
$x = 2$ ve $y = 3$ için (veya $x = 3$ ve $y = 2$ için)
bu toplamın değeri en az : $30.(2 + 3) = 150$ olur.

Cevap D

Örnek 15:

A, B, C pozitif tamsayılar olmak üzere,

OBEB(A, B) = 4
OBEB(B, C) = 5

olduğuna göre, A + B + C nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

OBEB(A, B) = 4 ⇒ A = 4.x ve B = 4.y
OBEB(B, C) = 5 ⇒ B = 5.t ve C = 5.m
olmalıdır. B sayısı hem 4, hem de 5 in katı olmalıdır,
B = 20 olur. A = 4, B = 20, C = 5 olarak seçilirse,
A + B + C = 29 (en az) bulunur.

Örnek 16:

Toplamları 26 olan a ve b pozitif tam sayılarının en küçük ortak katı 105 tir.

Buna göre, |a – b| kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

(2000 - ÖSS)

Çözüm:

e.k.o.k.(a, b) = 105

olduğuna göre, a ve b sayıları 105 i tam olarak böler. 1, 3, 5,7, 15, 21, 35, 105 sayıları 105 i tam olarak böler. Buna göre $a + b = 26$ olacağına göre $a = 21$ ve $b = 5$ olabilir. Bu durumda $|a - b| = |21 - 5| = 16$ olur.

Cevap E

Sadece İki sayı için:

1. OBEB(a, b).OKEK(a, b) = a.b,
2. a ile b aralarında asal ise,
OKEK(a, b) = a.b ve OBEB(a, b) = 1 dir.
3. a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere,
$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ ise

OKEK(A, B) = A.b = B.a,

OBEB(A, B) = $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ dir.

UYARI

OKEK(6, 8, 9) = $2^3.3^2$ = 72 dir.
OKEK(6, 8, 9) ≠ 6.8.9
(6, 8, 9 aralarında asal fakat ikiden fazla sayı var.)

Örnek 17:

a ve b pozitif tamsayılarının en büyük ortak böleni EBOB(a, b) = 1 dir.

a.b = 900 olduğuna göre, kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi bulunabilir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

(2005 - ÖSS)

Çözüm:

EBOB(a, b) = 1 olduğuna göre,
a ile b aralarında asal sayılardır.
O halde; a.b = 900 çarpımından,
⇒ 1.900 ⇒ (a, b) = (1, 900), (900, 1)
⇒ 4.225 ⇒ (a, b) = (4, 225), (225, 4)
⇒ 9.100 ⇒ (a, b) = (9, 100), (100, 9)
⇒ 36.25 ⇒ (a, b) = (25, 36), (36, 25)
bulunur. Yani 8 tane (a, b) ikilisi vardır.

Cevap A

Örnek 18:

m ve n pozitif tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü OBEB(m, n) = 6 ve ortak katlarının en küçüğü OKEK(m, n) = 60 tır.

m + n = 42 olduğuna göre, |m – n| kaçtır?

A) 26 B) 24 C) 22 D) 20 E) 18

(2007 - ÖSS)

Çözüm:

a ile b birer pozitif tam sayı olmak üzere, a ile b nin çarpımı a ile b nin OKEK i (ortak katların en küçüğü) ile OBEB inin (ortak bölenlerin en büyüğü) çarpımına eşittir. Yani,

a.b = OKEK(a, b).OBEB(a, b) dir.

m ve n pozitif tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü OBEB(m, n) = 6 ve ortak katlarının en küçüğü

OKEK(m, n) = 60 olduğuna göre,

m.n = OKEK(m, n).OBEB(m, n)
m.n = 60.6
m.n = 360 olur. .....(a)

m + n = 42 olacağından,

360 ın çarpanlarından toplamı 42 olanlar 30 ve 12 olduğundan,
|m – n| = |30 – 12| = 18 bulunur.

Cevap E

UYARI

İki veya daha fazla sayıya tam bölünebilen bir pozitif tamsayı bu sayıların OKEK ine de tam bölünür.

Örnek 19:

2, 5, 8 ile tam bölünebiien üç basamaklı en küçük pozitif tamsayıyı bulalım.

Çözüm:

Bu üç sayıya tam bölünebiien bir sayı bu sayıların OKEK'ine de tam bölünür.
O halde bu üç sayının OKEK'ini bulalım.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ & 5 & 2 & 2 \\ & 5 & 1 & 5 \\ & 1 & & \end{array} \Rightarrow \text{OKEK}(2, 5, 8) = 2^3.5 = 40$$

O halde aranan sayı 40 ın katı olmalıdır.
40, 80, 120, 160, ... şeklindeki sayılar 40 ın katıdır.
Buradan; soruda istenen sayı 120 dir.

Örnek 20:

65 kişilik bir gruba x kişi daha katılınca bu grup 6 şarlı veya 9 arlı gruplandırılabiliyor.

Buna göre, en küçük x sayısını bulalım.

Çözüm:

Sorudan; 65 + x sayısı 6 ve 9 ile tam bölünen bir sayıdır.
O halde 65 + x = k.OKEK(6, 9) olmalıdır. ($k \in Z^+$)

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{array} \Rightarrow \text{OKEK}(6, 9) = 18$$

65 + x = 18, 36, 54, 72, 90, ...
şeklinde olmalıdır.
Buradan; 65 + x = 72 ⇒ x = 7 bulunur.

Örnek 21:

7 ve 5 ile bölündüğünde her iki bölümde 2 kalanını veren en küçük pozitif sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

(1981 - ÖSS)

Çözüm:

$A = \underbrace{7.x + 2}_{\substack{\text{7 ile bölün-}\\ \text{düğünde 2}\\ \text{kalıyor.}}} = \underbrace{5.y + 2}_{\substack{\text{5 ile bölün-}\\ \text{düğünde 2}\\ \text{kalıyor.}}}$ yazılır.

$\Rightarrow$ $A - 2 = 7.x = 5.y$

$\Rightarrow$ $(A - 2)$ sayısı hem 5, hem de 7 ile tam bölünen bir sayıdır.

O halde; $A - 2 = OKEK(5, 7) = 35$ olur.

Buradan, $A - 2 = 35 \Rightarrow A = 37$ bulunur.

Rakamları toplamı : $3 + 7 = 10$ dur.

Cevap D

Örnek 22:

x iki basamaklı bir doğal sayı,

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 5$$

olduğuna göre, x in <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 92 B) 109 C) 124 D) 154 E) 169

(2001 - ÖSS)

Çözüm:

Soruda verilen bilgilerden,

x sayısının 3 ile bölümünden kalan 2, 5 ile bölümünden kalan da 2 dir. Buna göre;

$x = 3.a + 2 = 5.b + 2$ yazılır.

$x - 2 = 3.a = 5.b$

$x - 2 = k.OKEK(3, 5)$ $(k \in Z^+)$

$x - 2 = 15, 30, 45, ...$

$x = 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, ...$

en küçük; 17

en büyük; 92 dir.

bu değerlerin toplamı : $92 + 17 = 109$ bulunur.

Cevap B

Örnek 23:

3, 7 ve 8 ile kalansız bölünebilen 4000 den küçük sayıların en büyüğünün onlar basamağındaki rakam kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

(2003 - ÖSS)

Çözüm:

Aranan sayı A olsun,

$A = 3.x = 5.y = 8.z$ yazılır.

Yani A sayısı 3, 5 ve 8 ile tam bölünen bir sayıdır.

O halde,

$A = k.OKEK(3, 5, 8)$ dir. $(k \in Z^+)$

$A = k.OKEK(3, 5, 8) = k.120$ dir.

Yani, A sayısı 120 nin katı olmak zorundadır.

$A < 4000$ için en büyük A sayısı; 3960 ve bu sayının onlar basamağındaki rakam 6 dır.

Cevap C

Örnek 24:

Bir kutudaki kalemlerin sayısının en az 87 en çok 130 olduğu bilinmektedir. Kutudaki kalemler 3 er, 6 şar, 7 şer sayıldığında her seferinde 2 kalem artmaktadır.

Buna göre, kutuda kaç kalem vardır?

A) 108 B) 114 C) 117 D) 120 E) 128

(1996 - ÖSS)

Çözüm:

Kutudaki kalemler 3 er, 6 şar, 7 şer sayıldığında her seferinde 2 kalem arttığına göre, kalem sayısı 3, 6, 7 sayılarının OKEK'inden ya da OKEK'inin tam katlarından 2 fazladır.

3	6	7	2
3	3	7	3
1	1	7	3
		1	

olduğuna göre, $OKEK(3, 6, 7) = 2.3.7 = 42$ dir.

Kalem sayısı 87 den çok 130 dan az olduğuna göre, bu sayı $3.42 + 2 = 128$ dir.

Cevap E

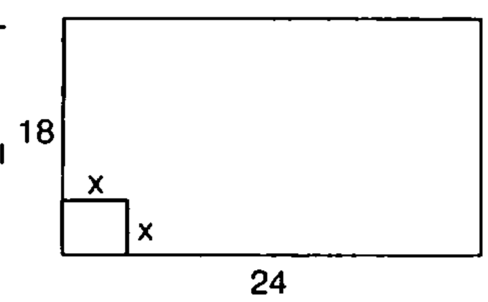
Örnek 25:

Eni 18 m ve boyu 24 m olan dikdörtgen şeklindeki bir yüzey, kare şeklindeki fayanslarla kaplanacaktır.

Buna göre, bu işlem için birbirine eş <u>en az</u> kaç fayans gerektiğini bulalım.

Çözüm:

Fayansın bir kenarının uzunluğu x m olsun. x, hem 18 i hem de 24 ü bölebilen bir sayı olmalıdır.



En az sayıda fayans kullanılması için x en büyük değerini almalıdır.

O halde, $x = \text{OBEB}(18, 24) = 6$ olmalıdır.

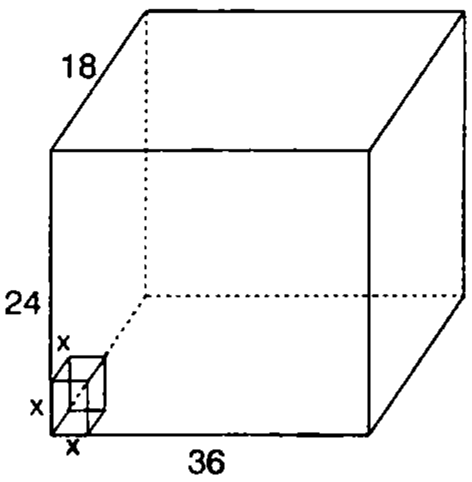
$$\text{Fayans Sayısı} = \frac{\text{Dikdörtgen alanı}}{\text{Bir fayansın alanı}} = \frac{18.24}{6.6} = 12 \text{ olur.}$$

Örnek 26:

Boyutları 18 m, 24 m ve 36 m olan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir depoya küp biçiminde, birbirine eş en az kaç sandık yerleştirilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Küp biçimindeki sandığın bir kenarı x m olsun. Sandığın bir kenarının uzunluğu(x), 18, 24 ve 36 nın bir böleni olmalıdır. Sandıkların sayısının en az olması için x in değerinin en büyük seçilmesi gereklidir.



O halde, $x = \text{OBEB}(18, 24, 36) = 6$ metredir.

$$\text{Sandık Sayısı} = \frac{\text{Deponun hacmi}}{\text{Bir sandığın hacmi}}$$

$$= \frac{18.24.36}{6.6.6} = 72 \text{ olur.}$$

Örnek 27:

Ayrıtları 2, 5 ve 6 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutulardan oluşturulabilecek en küçük hacimli küp için kaç tane kutunun gerekli olduğunu bulalım.

Çözüm:

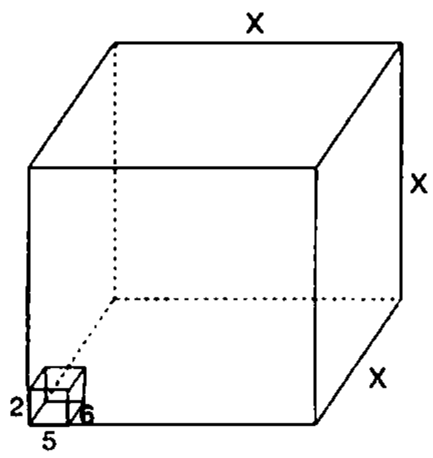
Küçük parçalar birleştirilerek bir bütün oluşturulduğundan bu soru OKEK sorusudur yorumunu yapabiliriz.

Oluşturulacak küpün bir kenarı x olsun.

x sayısı 2, 5 ve 6 nın ortak katı olmalıdır.

Ayrıca küpün hacmi en küçük olacağından,

$x = \text{okek}(2, 5, 6) = 30$ cm bulunur.



O halde,

$$\text{Kutu sayısı} = \frac{\text{Küpün hacmi}}{\text{Bir kutunun hacmi}}$$

$$= \frac{30.30.30}{2.5.6} = 15.6.5 = 450 \text{ bulunur.}$$

Cevap B

Örnek 28:

Boyutları 28 metre ve 60 metre olan dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin çevresine eşit aralıklarla fidan dikilecektir.

Bu bahçenin bütün köşelerine bir fidan dikilmesi şartıyla, en az kaç fidan gerekir?

A) 22 B) 30 C) 35 D) 44 E) 48

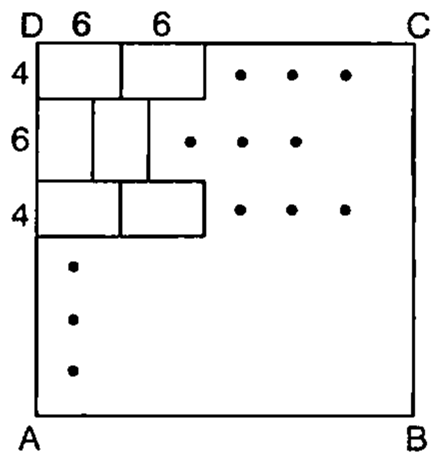
Çözüm:

Bahçenin bütün köşelerine fidan dikileceğine göre, fidanlar arasındaki mesafe en büyük olduğundan fidan sayısı en az olur. Buna göre, iki fidan arasındaki mesafe hem 28 i hem de 60 ı bölen en büyük sayı olmalıdır. O halde, dikilecek olan fidanlar arasındaki mesafe $\text{OBEB}(28, 60) = 4$ metre olmalıdır. Dolayısıyla gerekli fidan sayısı en az :

$$\frac{(60 + 28).2}{4} = 44 \text{ tür.}$$

Cevap D

Örnek 29:



Şekilde verilen ABCD karesi biçimindeki alan, boyutları 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgen mozaiklerle D köşesinden başlanarak kaplanıyor. Mozaikler 1. sırada yatay, 2. sırada da dikey olmak üzere bir yatay, bir dikey sıralar halinde yerleştiriliyor.

Bu işlemin sonunda alan hiç boşluk kalmadan kaplandığına göre, ABCD karesinin alanı en az kaç cm^2 dir?

A) 144 B) 324 C) 400 D) 576 E) 784

(2005 - ÖSS)

Çözüm:

6 ve 4 ün küçük ortak katı 12 olduğundan ABCD karesinin bir kenarının uzunluğu 12 nin katı olmalıdır.

[DC] kenarı boyunca 12 nin katlarında boşluk kalmadan mozaikler yerleştirilebilmektedir.

[DA] kenarı boyunca yerleştirilirken ise;

İki sıra dizilirse $4 + 6 = 10$, üç sıra dizilirse $4 + 6 + 4 = 14$ ve beş sıra dizilirse $14 + 6 + 4 = 24$ (on ikinin katı) olmaktadır.

Buna göre, karenin bir kenarının uzunluğu en az 24 cm, dolayısıyla alanı da en az $24^2 = 576 \text{ cm}^2$ olabilir.

Cevap D

TEST 1

1. $(4!)^3$ **sayısının kaç tane tamsayı böleni vardır?**

A) 32 B) 50 C) 80 D) 108 E) 126

2. 33.9^x

sayısının tamsayı bölenlerinin sayısı 64 olduğuna göre, x kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3. $3^2 + 6^2 + 9^2$

sayısının asal bölenlerinin toplamı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 12 E) 13

4. $2^{10} + 2^7 + 2^5$

sayısını tam bölen <u>en büyük asal sayı</u> kaçtır?

A) 13 B) 19 C) 37 D) 41 E) 43

5. $4^{3n} + 8^{2n+1}$ **sayısının 75 tane pozitif tamsayı böleni olduğuna göre, n kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. x doğal sayıdır.

$$\frac{3x + 28}{x}$$

ifadesi tamsayı olduğuna göre, x in alabileceği değerler kaç tanedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7. x tamsayıdır.

$$\frac{3x - 12}{x}$$

ifadesi pozitif tamsayı olduğuna göre, x in alabileceği değerler kaç tanedir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8. **Ortak katlarının en küçüğü 75 olan farklı iki doğal sayının toplamı <u>en çok</u> kaçtır?**

A) 75 B) 100 C) 125 D) 140 E) 150

9. x ve y pozitif tamsayılardır.

$$\text{okek}(x, y) = 20.\text{obeb}(x, y)$$

olduğuna göre, x + y nin <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

10. Bir sepetteki armutlar, tabaklara 2 şerli, 4 erli ve 5 erli konulduğunda her seferinde 1 armut artıyor.

Sepette en az kaç armut vardır?

A) 51 B) 41 C) 31 D) 21 E) 11

11. a, b ve c birer pozitif tamsayıdır.

$$x = 6a + 5 = 7b + 6 = 8c + 7$$

olduğuna göre, x in alabileceği üç basamaklı en küçük sayı kaçtır?

A) 167 B) 253 C) 317 D) 341 E) 361

12. a ve b, birbirinden farklı asal sayılardır.

$$x = a^4.b^3 \text{ ve } y = a^3.b^4$$

olduğuna göre, $\frac{okek(x, y)}{obeb(x, y)}$ kaçtır?

A) a^2b B) ab^2 C) a D) b E) ab

13. 72, 126 ve 180 litrelik üç bidon sırasıyla su, süt ve meyve suyu ile doludur. Bu üç bidondaki sıvılar, birbirlerine karıştırılmadan ve hiç artmayacak şekilde en büyük ölçekli eşit hacimli şişelere doldurulacaktır.

Bu iş için kaç şişe gerekir?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

14. Bir elektrik devresindeki üç lamba $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$ ve $\frac{5}{3}$ saatlik aralıklarla yanıp sönmektedir.

Üç lamba, aynı anda yandıktan en az kaç saat sonra tekrar üçü birden aynı anda yanar?

A) 15 B) $\frac{15}{2}$ C) 7 D) $\frac{13}{2}$ E) 6

15. OBEB'leri 7 olan iki doğal sayının toplamı 84 tür.

Buna göre, bu sayıların farkı en çok kaç olur?

A) 14 B) 28 C) 42 D) 56 E) 70

16. 60, 80 ve 120 cm ebatlarındaki bir kutuya hiç boşluk kalmayacak şekilde küp biçiminde cisimler yerleştirilecektir.

Bu iş için en az kaç küp gereklidir?

A) 32 B) 48 C) 60 D) 72 E) 80

17. 7 ile bölündüğünde 6,
9 ile bölündüğünde 8,
11 ile bölündüğünde 10

kalanını veren en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 665 B) 672 C) 678 D) 681 E) 692

18. m ile n aralarında asal sayılardır.

$$OKEK(m, n) = 336$$
$$m + \frac{42}{n} = 18$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 6 B) 14 C) 21 D) 24 E) 27

TEST 1

1. $(4!)^3 = (4.3.2.1)^3 = 2^9.3^3$ olup,
P.T.B.S $= (9 + 1).(3 + 1) = 40$ ise,
T.B.S $= 2.$(P.T.B.S) $= 2.40 = 80$ bulunur.

Cevap C

2. $33.9^x = 3^{2x+1}.11^1$ olur.
T.B.S $= 64$ olduğundan,
$2.(2x + 2).2 = 64$ ise $2x + 2 = 16$
$2x = 14$
$x = 7$ olur.

Cevap D

3. $3^2 + 6^2 + 9^2 = 3^2.(1 + 2^2 + 3^2) = 3^2.14 = 3^2.2^1.7^1$
olduğundan, asal bölenler 3, 2 ve 7 dir.
Toplamları $= 3 + 2 + 7 = 12$ bulunur.

Cevap D

4. $2^{10} + 2^7 + 2^5 = 2^5.(2^5 + 2^2 + 1) = 2^5.37$
sayısının en büyük asal böleni 37 dir.

Cevap C

5. $4^{3n} + 8^{2n+1} = 2^{6n} + 2^{6n+3} = 2^{6n}.(1 + 2^3) = 2^{6n}.3^2$
P.T.B.S $= 75$ olduğundan,
$(6n + 1).(2 + 1) = 75$ ise $6n + 1 = 25$
$n = 4$ olur.

Cevap B

6. $\dfrac{3x + 28}{x} = 3 + \dfrac{28}{x}$ şeklinde yazılırsa,

bu ifadenin tamsayı belirtmesi için x doğal sayıları 28 i tam bölen sayılar olmalıdır.
Buna göre, x değerleri 28 in pozitif tam bölenleri sayısı kadar değer alır.
$28 = 2^2.7^1$ ise, P.T.B.S $= (2 + 1).(1 + 1) = 6$ bulunur.

Cevap D

7. $\dfrac{3x - 12}{x} = 3 - \dfrac{12}{x}$ şeklinde yazalım.

Bu ifadenin pozitif tamsayı belirtmesi isteniyor.
x tamsayıları 12 yi tam bölmeli ve $3 - \dfrac{12}{x}$ ifadesi pozitif tamsayı olmalıdır.
x değerleri : 1, 2, 3, 4, 6, 12 ve $-1, -2, -3, -4, -6, -12$ alınacak olursa, bu değerlerden 1, 2, 3, 4 değerleri $3 - \dfrac{12}{x}$ ifadesini pozitif tamsayı yapmaz.
O halde x in alacağı değerler 8 tanedir.

Cevap A

8. Okek'i 75 olan birbirinden farklı A ve B sayılarından biri 75, diğeri de 75 in en büyük tam böleni yani 25 alınırsa, A + B nin en büyük değeri bulunmuş olur.
Buradan $A + B = 75 + 25 = 100$ bulunur.

Cevap B

9. Okek(x, y) = 20.Obeb(x, y) olarak veriliyor.
x + y nin en küçük olması istendiğinden,
Obeb(x, y) = 1 ve
Okek(x, y) = 20
alıp $x = 4$, $y = 5$ seçersek $x + y$ en küçük 9 değerini alır.

Cevap C

10. Armut sayısı A olsun.
$A = 2x + 1 = 4y + 1 = 5z + 1$ şeklinde yazılabilir.
$A - 1 = 2x = 4y = 5z$
$A - 1 =$ Okek(2, 4, 5)
$A - 1 = 20$
$A = 21$ bulunur.

Cevap D