

VIII. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI-2000

A

Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir.

AB	A ve B noktalarından geçen doğru
$[AB]$	A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası
$ AB $	$[AB]$ nın uzunluğu
$m(\hat{A})$	A açısının ölçüsü
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
\mathbb{R}	Gerçek sayılar kümesi

1. Alanı a olan bir dik üçgenin iç teğet çemberi ile, alanı b olan bir dik üçgenin çevrel çemberi aynı çember ise, $\frac{a}{b}$ en az nedir?

- a) $3 + 2\sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $2 + \sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

2. Aşağıdakilerden hangisi tam sayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz?

- a) 23 b) 24 c) 25 d) 28 e) 33

3. $0, 1, 2, \dots, 9$ sayılarını, tek sayılar kendi içlerinde, çift sayılar da yine kendi içlerinde artan olmak koşuluyla, kaç değişik biçimde sıralayabiliriz?

- a) 126 b) 189 c) 252 d) 315 e) Hiçbiri

4. $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$ denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı nedir?

- a) $\frac{18}{7}$ b) $\frac{71}{4}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{24}{19}$ e) $\frac{13}{4}$

5. Bir ABC üçgeninde $[BD]$ kenarortay, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$, $|AB| = 2$ ve $|AC| = 6$ ise, $|BC|$ nedir?

- a) 3 b) $3\sqrt{2}$ c) 5 d) $4\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{6}$

6. $\sqrt{17p + 625}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir?

- a) 3 b) 67 c) 101 d) 151 e) 211

7. A, B, C, D ve E den bazıları doğrucu, bazıları da yalancıdır. Doğrucuların her söylediği doğru; yalancıların ise, her söylediği yalandır. A nın doğrucu olduğunu ve diğerlerinin de aşağıdaki önermeleri söylediğini biliyoruz:

B : Ben doğrucuyum.

C : D , doğrucudur.

D : B ve E nin ikisi birden doğrucu değildir.

E : A ve B doğrucudur.

Bu toplulukta toplam doğrucu sayısı nedir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Veriler yetersizdir

8. $(x + y)^5 = z$

$$(y + z)^5 = x$$

$$(z + x)^5 = y$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

9. $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$, $m(\hat{C}) = 120^\circ$, $|AB| = 2$, $|BC| = |CD| = \sqrt{3}$ ve $|ED| = 1$ olduğuna göre, $|AE|$ nedir?

- a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\sqrt{3}$

10. On tabanına göre yazılımı 50 basamaklı olan bir N tam sayısının soldan 26. basamağı dışındaki bütün basamaklarında 1 rakamı bulunuyor ve N , 13 ile bölünüyorsa, N nin yazılımında soldan 26. rakam nedir?

- a) 1 b) 3 c) 6 d) 8 e) Veriler yetersizdir

11. 7 kırmızı, 7 beyaz topu, her kutuda tam olarak 2 top olması koşuluyla, 7 kutuya kaç değişik biçimde dağıtabiliriz?

- a) 163 b) 393 c) 858 d) 1716 e) Hiçbiri

12. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için $|a_n| = |a_{n-1} + 2|$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) -4000 b) -3000 c) -2000 d) -1000 e) Hiçbiri

13. Birbirine dıştan teğet olan k_1 ve k_2 çemberlerinin ortak dış teğet doğrularından biri d olsun. d nin k_1 çemberine değdiği nokta A , k_1 çemberinin A dan geçen çapı $[AB]$, B noktasından k_2 çemberine çizilen teğetin değme noktası C ile gösterilmek üzere, $|AB| = 8$ ve k_2 çemberinin çapı 7 ise, $|BC|$ nedir?

- a) 7 b) $6\sqrt{2}$ c) 10 d) 8 e) $5\sqrt{3}$

14. $9^{87\ldots 2}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir?

- a) 81 b) 61 c) 41 d) 21 e) 01

15. A, B ve C , aralarında tavla oynarlar. Önce A ile B karşılaşır, kazanan C ile oynar. Bundan sonra, parti devam ettiği sürece, oynanan son oyunu kazanan, o karşılaşmada oynamayan üçüncü kişi ile karşılaşır. Oyunculardan biri art arda iki kez kazanınca, parti sona erer ve ardışık iki oyunu kazanan partinin galibi olur. Her oyunda iki tarafın da kazanma olasılığı eşit ise, C nin partiyi kazanma olasılığı nedir?

- a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{14}$ d) $\frac{1}{7}$ e) Hiçbiri

16. $(2 + (2 + (2 + x)^2)^2)^2 = 2000$ denkleminin gerçel kökleri toplamı nedir?

- a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 4

17. Kenar uzunlukları 1, 4, 7, 8 olan bir dörtgenin alanı en çok kaç olabilir?

- a) $7\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$ c) 18 d) $12\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{5}$

18. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tam sayısı nedir?

- a) 101 b) 105 c) 111 d) 119 e) Hiçbiri

19. Kenar uzunlukları 3, 7 ve 8 olan bir üçgenin içinde gelişigüzel alınan bir noktadan, köşelerden en az birine olan uzaklığın 1 den küçük olması olasılığı nedir?

- a) $\frac{\pi}{36}\sqrt{2}$ b) $\frac{\pi}{36}\sqrt{3}$ c) $\frac{\pi}{36}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

20. $p(x)$ tüm kökleri gerçel olan ve her x gerçel sayısı için $p(x^2 - 1) = p(x)p(-x)$ eşitliğini sağlayan bir polinom ise, $p(x)$ in derecesi en fazla kaç olabilir?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) $p(x)$ in derecesi için üst sınır yoktur. e) Hiçbiri

21. Bir $ABCD$ dışbükey kirişler dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$, $|AB| = 26$ ve $|BC| = 10$ ise, DAC üçgeninin alanı nedir?

- a) 120 b) 108 c) 90 d) 84 e) 80

22.

$$3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0$$

$$5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

23. 20 kişilik bir komite, A, B, C adayları arasından bir seçim yapmak için değişik türden bir oylamaya başvurur. Her komite üyesi, adaylara ilişkin tercih sıralamasını, herhangi iki aday arasında çekimser kalmaksızın, oy pusulasına yazar. (Örneğin, pusulaya BAC yazan üye, B yi A ya ve C ye; A yı da C ye tercih ediyor demektir.) Oy pusulaları açılınca, üç adayın altı değişik sıralanışından her birinin en az bir pusulada geçtiği ve tam olarak 11 üyenin A yı B ye; 12 üyenin C yi A ya; 14 üyenin de B yi C ye tercih ettiği görülür. Kaç komite üyesinin birinci tercihi B dir?

- a) 5 b) 7 c) 8 d) 10 e) Veriler yetersizdir

24. a, b, c, d, e negatif olmayan gerçel sayılar ve $a + b + c + d + e > 0$ olmak üzere, $a + c = tb$, $b + d = tc$, $c + e = td$ koşullarını sağlayan en küçük gerçel t sayısı nedir?

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 2

25. Alanı 18 olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde, $|AB| + |BD| + |DC| = 12$ ise, $|AC|$ nedir?

- a) 9 b) $6\sqrt{3}$ c) 8 d) 6 e) $6\sqrt{2}$

26. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 10$ ise,

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$$

gerektirmesinin tüm a, b tam sayıları için doğru olmasını p nin aşağıdaki değerlerinden hangisi sağlar?

- a) 5 b) 7 c) 11 d) 13 e) 17

27. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin, her $1 \leq k \leq 4$ için $(\alpha_1 \cdots \alpha_k)$, $\{1, \dots, k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde, kaç değişik $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$ permütasyonu vardır?

- a) 13 b) 65 c) 71 d) 461 e) Hiçbiri

$$\begin{array}{lll} 28. f_1(x) = x^2 + x & f_2(x) = 2x^2 - x & f_3(x) = x^2 + x \\ g_1(x) = x - 2 & g_2(x) = 2x & g_3(x) = x + 2 \end{array}$$

olmak üzere, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere f_i ve g_i fonksiyonlarından $h(x) = x$ fonksiyonu elde edilebiliyorsa, $F_i = 1$; aksi halde $F_i = 0$ olarak tanımlanıyor. (F_1, F_2, F_3) nedir?

- a) (0, 0, 0) b) (0, 0, 1) c) (0, 1, 0) d) (0, 1, 1) e) Hiçbiri

29. O_1 ve O_2 merkezli birbirine dıştan teğet iki çemberin ortak dış teğet doğrularından biri çemberlere sırasıyla B ve C noktalarında değiyor. Çemberlerin ortak noktası A olmak üzere BA doğrusu O_2 merkezli çemberi A ve D noktalarında kesiyor. $|BA| = 5$ ve $|AD| = 4$ ise $|CD|$ nedir?

- a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{27}$ c) 6 d) $\frac{15}{2}$ e) $4\sqrt{5}$

30. $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere, $(x^2 - 18)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$ denkleğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır?

- a) 59 b) 60 c) 61 d) 62 e) Hiçbiri

31. Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111 ile bölünen on basamaklı kaç tam sayı vardır?

- a) 0 b) 1264 c) 2842 d) 3456 e) 11111

32. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir?

- a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ e) Hiçbiri

33. Bir $ABCD$ karesinin $[AB]$ kenarı üstünde bir K noktası, $[BC]$ kenarı üstünde de bir L noktası alınıyor. $|AK| = 3$, $|KB| = 2$ ve K nin DL doğrusuna uzaklığı 3 ise, $|BL| : |LC|$ nedir?

- a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{8}{7}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. Aşağıdaki önermelerden hangisi, en az bir p asal sayısı için doğru değildir?

- a) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü varsa,
 $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü vardır.
- b) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü yoksa,
 $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü yoktur.
- c) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü varsa,
 $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü vardır.
- d) $x^2 + x + 25 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin çözümü yoksa,
 $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin de çözümü yoktur.
- e) Hiçbiri

35. $S = \{1, 2, \dots, 32\}$ olmak üzere; S nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde, a, b yi; b de c yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir?

- a) 17 b) 24 c) 25 d) 29 e) Hiçbiri

36. $x_1 = -1$ ve her n pozitif tam sayısı için $x_{n+1} = (1 + \frac{2}{n})x_n + \frac{4}{n}$ ise, x_{2000} nedir?

- a) 1999998 b) 2000998 c) 2009998 d) 2000008 e) 1999999