

XIII. Ulusal Matematik Olimpiyatı
Birinci Aşama Sınavı

B

1. $ABCD$ konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası M olmak üzere, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$. O_1, O_2, O_3, O_4 noktaları sırasıyla, ABM , BCM , CDM , DAM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleriyse, $\text{Alan}(ABCD)/\text{Alan}(O_1O_2O_3O_4)$ nedir?

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

2. Aşağıdaki sayılardan hangisi $3^{3n+1} + 5^{3n+2} + 7^{3n+3}$ sayısını her n pozitif tam sayısı için böler?

a) 53 b) 11 c) 7 d) 5 e) 3

3. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 3 b) 2 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\sqrt{2}$

4. $xyz = 10^6$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) doğal sayı üçlüsü vardır?

a) 824 b) 816 c) 812 d) 784 e) 568

5. $|AB| = 2$ olmak üzere, A ve B noktalarından geçen 4 yarıçaplı çember, A ve C noktalarından geçen 3 yarıçaplı çembere dıştan teğet olsun. BC doğrusu ikinci çembere teğetse, $|BC|$ kaçtır?
- a) $\sqrt{7}$ b) $4 + \sqrt{9}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $2 + \frac{\sqrt{43}}{2}$ e) 7
6. $n < 2005$ pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sayısının, hiçbirisi 5 ile bölünmeyen tüm a_1, a_2, \dots, a_n pozitif tam sayıları için, $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4$ sayısının 5 ile bölünmesini sağlayan en büyük değeri nedir?
- a) 2004 b) 2003 c) 2002 d) 2001 e) 2000
7. $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ denkleminin en büyük ve en küçük gerçel köklerinin arasındaki fark F ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- a) $8 \leq F$ b) $6 \leq F < 8$ c) $4 \leq F < 6$ d) $2 \leq F < 4$ e) $0 \leq F < 2$
8. Tüm basamakları 0 dan farklı olan ve basamaklarındaki rakamlar nasıl sıralanırsa sıralansın oluşan sayıların hepsinin 7 ile bölündüğü kaç tane altı basamaklı pozitif tam sayı vardır?
- a) 255 b) 166 c) 133 d) 77 e) 11

9. $AD \parallel BC$ olmak üzere $ABCD$ ikizkenar yamuğunun köşegen uzunluğu $\sqrt{3}$ ve taban açısı 60° olsun. Bu yamukla aynı düzlemde bulunan bir P noktası, $|PA| = 1$ ve $|PD| = 3$ koşullarını sağlıyorsa, $|PC|$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) $\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{6}$

10. $10^3 < n < 10^6$ koşulunu sağlayan bir n tam sayısına, son üç basamağındaki rakamların toplamı, daha önceki basamaklarındaki rakamların toplamına eşitse, *dengeli* sayı diyoruz. Tüm dengeli sayıların toplamı 13 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) 12 b) 11 c) 7 d) 5 e) 0

11. a nın kaç pozitif gerçel değeri için, $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ denkleminin farklı iki tam sayı kökü vardır?

a) 3 b) 2 c) 1 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

12. Toplam ağırlığı 500 kg olan 100 taşın her birinin ağırlığı 1 kg, 10 kg veya 50 kg dır. Ağırlığı 10 kg olan taşların sayısının alabileceği kaç değer vardır?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

13. Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan ABC üçgeninin, A ve C köşelerinden ve diklik merkezinden geçen çemberin merkezi, üçgenin çevrel çemberi üzerinde yer alıyorsa, $|AC|$ nedir?

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) 2

14. Aşağıdaki sayılardan hangisi $n^{2225} - n^{2005}$ sayısını n nin bütün tam sayı değerleri için bölmez?

a) 23 b) 11 c) 7 d) 5 e) 3

15. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 6$ eşitliğini sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) 30 b) 23 c) 16 d) 9 e) 2

16. Ördek avına çıkan Ali ile Veli'den her ikisinin de, üstüne ateş ettiği ördeği vurma olasılığı $1/2$ dir. Av sırasında Ali toplam 12, Veli de toplam 13 ördeğe ateş ederse, Veli'nin Ali'den çok ördek vurma olasılığı nedir?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{13}{24}$ d) $\frac{13}{25}$ e) $\frac{1}{2}$

17. Kenar uzunluğu 1 olan $ABCD$ karesinin merkezinden, A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

18. k sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^2 - y^2 = k$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 2009 b) 2008 c) 2007 d) 2006 e) 2005

19.
$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2} = \frac{y-2}{xy-4}$$

denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

20. 20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir altkümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu altkümeye bir *komite* diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

a) 1140 b) 1020 c) 570 d) 380 e) 120

- a) 4 b) 3 c) 2 d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

- a) 5 b) 4 c) 2 d) 1 e) 0

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ c) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ e) Hiçbiri

- a) 53124 b) 43125 c) 35142 d) 21435 e) 13425

- 25.** Bir üçgenin, uzunlukları 5 ve $2\sqrt{6}$ olan kenarlarına ait yüksekliklerin uzunlukları sırasıyla h_1 ve h_2 olmak üzere, $5 + h_1 \leq 2\sqrt{6} + h_2$ ise, bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu kaçtır?

a) $5\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{6}$ c) $2\sqrt{6}$ d) 7 e) 5

- 26.** Bir n tam sayısı için, $n^2 + 1$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

- 27.** a, b, c, d gerçel sayılar ve $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 0 \\ f(x) - (g(x))^3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin birden çok gerçel kökü varsa, $f(x)g(x) = 0$ denkleminin en çok kaç farklı gerçel kökü olabilir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

- 28.** Ali, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan birini seçip, bu taşı Betül'ün göremeyeceği biçimde işaretliyor ve taşları karıştırıyor. Betül, her hamlede mevcut taşları hiçbir boş olmayan üç öbeğe ayırıyor. Ali, işaretlediği taşı içermeyen iki öbekten, varsa daha çok taştan oluşmasını, her ikisi de aynı sayıda taştan oluşuyorsa, herhangi birini oyundan çıkartıyor ve geri kalan taşları yeniden karıştırıyor. Sıra tekrar Betül'e geliyor ve oyun iki taş kalana kadar bu şekilde sürüyor. İki taş kalınca, Ali, Betül'e hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. Betül, işaretli taşı en az kaç hamlede bulmayı garantileyebilir?

a) 19 b) 18 c) 17 d) 13 e) 11

- 29.** Bir $ABCD$ dikdörtgeninde, E, F, G noktaları, sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BF| = |FG|$, $m(\widehat{FGE}) = 90^\circ$, $|BC| = 4\sqrt{3}/5$ ve $|EF| = \sqrt{5}$ koşulları sağlanıyorsa, $|BF|$ kaçtır?

a) 1 b) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$

- 30.** Her n pozitif tam sayısı için, $f(2n+1) = 2f(2n)$, $f(2n) = f(2n-1) + 1$ ve $f(1) = 0$ ise, $f(2005)$ sayısının 5 e bölümünde elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

- 31.** a, b, c hepsi birden sıfır olmayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$bx^2 + cx + a = 0$$

$$cx^2 + ax + b = 0$$

denklem sisteminin en büyük gerçel kökü ile en küçük gerçel kökü arasındaki fark en çok kaç olabilir?

a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) 1 d) 0 e) Üst sınırı yoktur

- 32.** a, b, c ; 1 den büyük tam sayılar olmak üzere, $a! = b!c!$ denkleminin kaç çözümü vardır?

a) 8 b) 6 c) 2 d) 1 e) Sonsuz çoklukta

- 33.** K , $ABCD$ kırışler dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası olmak üzere, $|AB| = |BC|$, $|BK| = b$ ve $|DK| = d$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) \sqrt{bd} b) $\sqrt{2(b^2 + d^2 - bd)}$ c) $\sqrt{2bd}$ d) $\sqrt{b^2 + bd}$ e) $\sqrt{d^2 + bd}$

- 34.** $xyz = 510510$ ve $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

a) 8 b) 3 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 35.** a, b ve c , $a < b$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, her x gerçel sayısı için, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ise, $\frac{a+b+c}{b-a}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ b) 3 c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) 2 e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

- 36.** n güreşçinin katıldığı bir turnuvada, farklı herhangi iki güreşçi aralarında tam olarak bir kez güreşiyor. Her karşılaşma sonucunda kazanan 2, kaybeden 0 puan alıyor; beraberlik durumunda ise, her iki güreşçiye de 1er puan veriliyor. Turnuva sonucunda en çok toplam puana sahip olan güreşçi, turnuva boyunca en az galibiyet almış olan güreşçi ise, n en az kaç olabilir?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5