



TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

15. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2007
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü
B

29 Nisan 2007 Pazar, 13.00-15.30

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 36 adet sorudan oluşmaktadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir cevabı vardır. Doğru cevabınızı, cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu tamamen karalayarak işaretleyiniz.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.**
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal ya da karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen, en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday, eğer bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (<http://www.tubitak.gov.tr>) yayımlandıktan sonra 5 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte TÜBİTAK'a başvurmalıdır. Bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2007 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukukî sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi, bu tür durumlarda, sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

NOT: Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir.

AB	A ve B noktalarından geçen doğru
$AB//CD$	AB , CD ye paralel
$AB \perp CD$	AB , CD ye dik
$[AB]$	A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası
$ AB $	$[AB]$ nin uzunluğu
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$m(\hat{A})$	A açısının ölçüsü
$\llbracket x \rrbracket$	x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayı

1. O merkezli AB çaplı yarım çember üstünde C ve D noktaları, $ABCD$ bir dışbükey dörtgen olacak biçimde alınıyor. $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesişim noktası Q , yarım çembere C ve D noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası P olmak üzere, $m(\widehat{AQB}) = 2m(\widehat{COD})$ ve $|AB| = 2$ ise, $|PO|$ nedir?

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}$

2. $n!(2n+1)$ ve 221 sayılarının aralarında asal olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 13 b) 12 c) 11 d) 10 e) Hiçbiri

3. $\left\lfloor \left\lfloor \frac{6x+5}{8} \right\rfloor \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$ eşitliğini sağlayan gerçel sayıların toplamı kaçtır?

a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{81}{90}$ e) 2

4. 123456789 sayısı ile başlanarak, her adımda, her ikisi de sıfırdan farklı bitişik iki rakamın değerleri birer azaltılarak yerleri kendi aralarında değiştiriliyor. Sonlu sayıda adım sonucunda elde edilebilecek en küçük sayının rakamları toplamı nedir?

a) 9 b) 5 c) 3 d) 1 e) 0

5. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $|AB| = 4$, $|AC| = 3$ ve A köşesinden $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı D olmak üzere, $[BD]$ üstünde bir P noktası için $5|AP| = 13|PD|$ ise, $|CP|$ nedir?

a) $\frac{5\sqrt{5}+3}{5}$ b) $\frac{37}{13}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{56}{15}$ e) $\frac{9+4\sqrt{3}}{5}$

6. $10 \cdot 3^{195} \cdot 49^{49}$ sayısının dört tabanına göre yazımının son üç basamağı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 232 b) 212 c) 132 d) 130 e) 112

7. $a < b < c < d$ tam sayılar olmak üzere, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 9 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 7$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

a) 63 b) 42 c) 28 d) 21 e) 14

8. Bir matematik dersinde öğretmen tahtaya yazdığı soruyu, Ali, Betül, Cem, Çağla, Dursun, Emre ve Fatma'nın gruplar halinde çözmesini istiyor. Her grup iki veya üç kişiden oluşacaksa, bu yedi öğrenci kaç farklı biçimde gruplara ayrılabilir?

a) 630 b) 280 c) 210 d) 105 e) 70

- 13.** Bir ABC üçgeninde $|AB| = 3$ ve C ye ait yüksekliğin uzunluğu 2 ise, diğer iki yükseklik uzunluklarının çarpımı en fazla kaç olabilir?
- a) 6 b) $3\sqrt{2}$ c) 5 d) $\frac{144}{25}$ e) Hiçbiri
- 14.** Bir tam sayının karesinin iki katına ve bir tam sayının küpünün üç katına eşit olup, 10^6 dan küçük olan kaç pozitif tam sayı vardır?
- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri
- 15.** Farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir kümenin en büyük iki elemanının çarpımının $8/19$ u, geriye kalan elemanların toplamından büyük değilse, kümedeki sayılardan en büyüğünün alabileceği en küçük değer nedir?
- a) 20 b) 19 c) 13 d) 12 e) 8
- 16.** 10 farklı kitap üç rafı bir kitaplığa, hiçbir raf boş kalmayacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
- a) $81 \cdot 10!$ b) $55 \cdot 10!$ c) $50 \cdot 10!$ d) $36 \cdot 10!$ e) Hiçbiri

17. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dörtgeninin $[DC]$ kenarının orta noktası M ile gösterilmek üzere, $AC \perp BM$, $|DC| = 12$ ve $|AB| = 9$ ise, $|AD|$ nedir?

a) 12 b) 9 c) 6 d) 4 e) Hiçbiri

18. n ve m tam sayılar olmak üzere, $n \leq 2007 \leq m$ ve $n^n \equiv -1 \equiv m^m \pmod{5}$ ise, $m - n$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

19. Birim kenarlı bir eşkenar üçgenle başlanarak her kenarın orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Sonra, elde edilen çokgenin her kenarının orta üçte birini taban alan eşkenar üçgenler kesilerek çıkarılıyor. Böylece bu işlem sonsuz kez tekrarlandığında elde edilen şeklin alanı nedir?

a) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ e) Hiçbiri

20. Aşağıdaki n sayılarından hangisi için, 1 den n ye kadar olan tam sayılar bir çemberin ertafına, her sayı, her iki yanındaki sayıların farkına bölünecek biçimde dizilebilir?

a) 13 b) 9 c) 7 d) 6 e) 5

- 21.** $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B})$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberine C noktasında teğet olan doğru ile AB doğrusunun kesişimi K noktasıdır. L , $[BC]$ kenarı üstünde bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{ALB}) = m(\widehat{CAK})$, $5|LC| = 4|BL|$ ve $|KC|=12$ ise, $|AK|$ nedir?

a) 9 b) 8 c) 6 d) $4\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

- 22.** $n^3 + 8$ sayısının en çok üç pozitif böleninin bulunmasını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

- 23.** $x_1 = 5$, $x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için

$$x_n = x_{n-2} - \frac{1}{x_{n-1}}$$

ise, m nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2007 b) 2006 c) 2005 d) 406 e) Hiçbiri

- 24.** 9 ardışık bölümden oluşan bir şeridin her bölümü kırmızı veya beyaza boyanıyor. Herhangi bitişik iki bölüm birlikte beyaza boyanamıyorsa, bu boyama kaç değişik biçimde yapılabilir?

a) 360 b) 144 c) 128 d) 89 e) 34

- 25.** Bir $ABCD$ karesinin sırasıyla $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üstünde alınan M ve N noktaları için $|BM| = 21$, $|DN| = 4$ ve $|NC| = 24$ ise, $m(\widehat{MAN})$ nedir?

a) 60° b) 45° c) 37° d) 30° e) 15°

- 26.** Her $n \geq 1$ için $a_{n+48} \equiv a_n \pmod{35}$ koşulunun sağlandığı bir $(a_n)_{n=1}^\infty$ tam sayı dizisinde, i ve j sırasıyla, her $n \geq 1$ için, $a_{n+i} \equiv a_n \pmod{5}$ ve $a_{n+j} \equiv a_n \pmod{7}$ bağıntılarını sağlayan en küçük pozitif tam sayılarsa, (i, j) ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $(16, 18)$ b) $(1, 48)$ c) $(8, 6)$ d) $(3, 16)$ e) $(16, 4)$

- 27.** Kare şeklindeki bir arazi, sınırlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen şeklindeki n tarlaya bölünüyor. Tarlaların çevre uzunluklarının toplamı, arazinin çevre uzunluğunun 100 katıysa, n en çok kaç olabilir?

a) 200000 b) 100000 c) 50000 d) 20000 e) 10000

- 28.** 8×8 bir satranç tahtasının birim karelerinden her birinin merkezine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Her satır, her sütun ve iki köşegenden birine paralel olup birim karelerin merkezlerinden geçen her doğru üstündeki sayıların toplamı çift ise, tahtaya yazılı bütün sayıların toplamı en fazla kaç olabilir?

a) 64 b) 56 c) 52 d) 48 e) 32

- 29.** Birim çember üstünde $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 72^\circ$ olacak şekilde A, B, C noktaları alınıyor. BCD bir eşkenar üçgen olacak şekilde çemberin iç bölgesinde alınan bir D noktası için, AD doğrusu çemberi ikinci kez E noktasında kesiyorsa, $|DE|$ nedir?

- a) $\sqrt{3} - 1$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Hiçbiri

- 30.** c , a ve b nin pozitif ortak katlarının en küçüğünü ve d de, ortak bölenlerinin en büyüğünü göstermek üzere,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

31.
$$\left(x + 1\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right) = \frac{45}{32}$$

denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı kaçtır?

- a) $-\frac{7}{12}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) -1 e) 0

- 32.** Bir çember etrafında yazılı n tam sayıdan her biri, kendisini saat yönünde izleyen iki sayının farkının mutlak değerine eşit olup, tüm sayıların toplamı 278 ise, n kaç farklı değer alabilir?

- a) 139 b) 4 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

- 33.** Bir A noktasından C çemberine çizilen teğetlerin değme noktaları M ve N dir. $[AN]$ üstünde alınan bir P noktası için MP ile C nin ikinci kesişim noktası Q , P den geçen ve MA ya paralel olan doğru ile MN nin kesişim noktası R olmak üzere, $|MA| = 2$, $|MN| = \sqrt{3}$ ve $QR//AN$ ise, $|PN|$ nedir?

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

- 34.** 15 den küçük kaç p asal sayısı için,

$$\begin{aligned} m + n + k &\equiv 0 \pmod{p} \\ mn + mk + nk &\equiv 1 \pmod{p} \\ mnk &\equiv 2 \pmod{p} \end{aligned}$$

sistemini sağlayan (m, n, k) tam sayı üçlüsü vardır?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

- 35.** $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ sayısının ondalık yazımında, virgülden sonra üçüncü basamaktaki rakam nedir?

- a) 1 b) 3 c) 5 d) 8 e) Hiçbiri

- 36.** Herhangi üçü bir doğru üstünde bulunmayan beş noktadan bazılarını köşe kabul eden dışbükey çokgenlerin sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) 16 b) 15 c) 12 d) 11 e) 10