



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU  
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

21. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2013  
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü

A

14 Nisan 2013 Pazar, 13.00-15.30

ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI :

T.C. KİMLİK NO. :

OKULU / SINIFI :

SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 36 sorudan oluşmaktadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu tamamen karalayarak işaretleyiniz.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürcektir.**
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal ya da karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama yapmak için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, itiraz için sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (<http://www.tubitak.gov.tr>) yayınlandıktan sonra 5 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurmalıdır. Bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayların sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2013 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukukî sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi bu tür durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

NOT: Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir.

$AB$	$A$ ve $B$ noktalarından geçen doğru
$[AB]$	$A$ ve $B$ noktalarını birleştiren doğru parçası
$ AB $	$[AB]$ nin uzunluğu
$m(\widehat{ABC})$	$ABC$ açısının ölçüsü

1.  $|AC| > |AB|$  olan bir  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  ve ağırlık merkezi  $G$  olmak üzere,  $IG$  ve  $BC$  doğruları birbirine paralel,  $|BC| = 2$ , ve  $\text{Alan}(ABC) = 3\sqrt{5}/8$  ise,  $|AB|$  nedir?

a)  $\frac{9}{8}$                       b)  $\frac{11}{8}$                       c)  $\frac{13}{8}$                       d)  $\frac{15}{8}$                       e)  $\frac{17}{8}$

2.  $p, q$  asal sayılar ve  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,  $1/p + 2013/q = n/5$  eşitliğini sağlayan kaç  $(p, q, n)$  üçlüsü vardır?

a) 7                      b) 6                      c) 5                      d) 4                      e) 3

3. Katsayıları  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  kümesine ait olan bir polinomun  $x - 6$  ile bölümünden kalan 2013 ise, bu polinomda  $x$  in katsayısı en az kaç olabilir?

a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) 1

4.  $1, 2, \dots, 49$  sayıları  $7 \times 7$  bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

a) 7                      b) 6                      c) 5                      d) 4                      e) 3

5.  $[BC]$  kenarının uzunluğu 11 olan  $ABC$  üçgeninin bu kenarı üstünde bir  $D$  noktası  $|BD| = 8$  olacak biçimde alınıyor.  $C$  ve  $D$  noktalarından geçen çember  $AB$  doğrusuna bir  $E$  noktasında teğettir.  $B$  den geçen ve  $DE$  doğrusuna dik olan doğru üzerinde bulunan bir  $P$  noktası için  $|PE| = 7$  ise,  $|DP|$  kaçtır?

a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) Hiçbiri

6. 5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111. pozitif tam sayı nedir?

a) 760                      b) 756                      c) 755                      d) 752                      e) 750

7.  $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$  denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

a) 8                      b) 7                      c) 6                      d) 5                      e) 4

8. Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?

a) 105                      b) 100                      c) 95                      d) 90                      e) 85



13. Çevrel çemberinin merkezi  $O$  olan bir  $ABC$  üçgeninin  $[BC]$  kenarı üstündeki  $D$  ve  $E$  noktaları  $D$ ,  $B$  ile  $E$  arasında yer almak üzere,  $|AD| = |DB| = 6$  ve  $|AE| = |EC| = 8$  koşullarını sağlıyor.  $ADE$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  noktası ve  $|AI| = 5$  ise,  $|IO|$  nedir?

a)  $\frac{26}{5}$                       b) 5                      c)  $\frac{23}{5}$                       d)  $\frac{21}{5}$                       e) Hiçbiri

14.  $n$  tam sayısını bölen pozitif tam sayıların sayısı  $d(n)$  ile gösterilmek üzere; 64800 sayısının tüm  $k$  pozitif tam sayı bölenleri için,  $d(k)$  sayılarının toplamı nedir?

a) 1440                      b) 1650                      c) 1890                      d) 2010                      e) Hiçbiri

15.  $[1, 2013]$  aralığında yer alan  $n$  gerçel sayı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa,  $n$  en az kaç olabilir?

a) 14                      b) 13                      c) 12                      d) 11                      e) 10

16. 16 beyaz ve 4 kırmızı top her biri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

a)  $\frac{5}{64}$                       b)  $\frac{1}{8}$                       c)  $\frac{4^4}{\binom{16}{4}}$                       d)  $\frac{5^4}{\binom{20}{4}}$                       e)  $\frac{3}{32}$

17. Kenar uzunluğu 10 olan bir  $ABC$  eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir  $P$  noktası için  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 128$  ise, kenar uzunlukları  $|PA|, |PB|, |PC|$  olan bir üçgenin alanı nedir?

a)  $6\sqrt{3}$       b)  $7\sqrt{3}$       c)  $8\sqrt{3}$       d)  $9\sqrt{3}$       e)  $10\sqrt{3}$

18. 
$$\binom{2013}{1} + 2013\binom{2013}{3} + 2013^2\binom{2013}{5} + \dots + 2013^{1006}\binom{2013}{2013}$$

toplamının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 20      b) 14      c) 7      d) 1      e) Hiçbiri

19.  $x$  bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 2      b)  $3\sqrt{2}$       c)  $1 + \sqrt{2}$       d)  $2\sqrt{2}$       e) Hiçbiri

20. Ağırlıkları  $1, 2, \dots, 2013$  gram olan 2013 taşın her birinin üstüne  $1, 2, \dots, 2013$  sayılarından biri, her sayı tam olarak bir kez kullanılarak yazılıyor. Sayılar nasıl yazılırsa yazılsın, tüm taşların üstünde kendi ağırlıklarının yazılıp yazılmadığı, sol kefesindeki ağırlıktan sağ kefesindeki ağırlığın çıkarılmasının sonucunu gösteren iki kefeli bir tartı  $k$  kez kullanılarak kontrol edilebiliyorsa,  $k$  en az kaç olabilir?

a) 15      b) 12      c) 10      d) 7      e) Hiçbiri



**25.**  $|AB| = |AC|$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $D$  noktası  $[AB]$  kenarı üstünde yer almak üzere,  $[CD]$  iç açıortay ve  $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$  dir.  $[AB]$  kenarının uzantısı üstünde ve  $B$  den sonra yer alan bir  $F$  noktası için,  $|BC| = |AF|$  dir.  $[CF]$  nin orta noktası  $E$  olmak üzere,  $ED$  ve  $AC$  doğrularının kesişim noktası  $G$  ise,  $m(\widehat{FBG})$  nedir?

- a)  $150^\circ$       b)  $135^\circ$       c)  $120^\circ$       d)  $105^\circ$       e) Hiçbiri

**26.**  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,  $n^3 + 2$  ve  $(n + 1)^3 + 2$  sayılarının her ikisini de bölen asal sayıların sayısı en çok kaç olabilir?

- a) 3      b) 2      c) 1      d) 0      e) Hiçbiri

**27.**  $(a, b)$  ikilisinin  $(1, 2), (3, 5), (5, 7), (7, 11)$  değerlerinden kaçısı için  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$  polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

- a) 4      b) 3      c) 2      d) 1      e) 0

**28.** Başlangıçta tahtaya bir  $(m, n)$  pozitif tam sayı ikilisi yazılmıştır. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu sayılardan birini seçip silerek, yerine bu sayının yarısından küçük olmayan bir tam sayı yazıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun  $(m, n) = (7, 79), (17, 71), (10, 101), (21, 251), (50, 405)$  için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

- a) 4      b) 3      c) 2      d) 1      e) Hiçbiri



- 29.**  $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 6$  ve  $|AC| = 7$  olan bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  nun  $BC$ ,  $AC$  ve  $AB$  doğrularına göre simetriği sırasıyla,  $A_1$ ,  $B_1$  ve  $C_1$  noktaları olsun.  $A_1B_1C_1$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin  $A$  noktasına uzaklığı nedir?

- a) 6                      b)  $\sqrt{29}$                       c)  $\frac{19}{2\sqrt{6}}$                       d)  $\frac{35}{4\sqrt{6}}$                       e)  $\sqrt{\frac{35}{3}}$

- 30.** 2013 den küçük kaç  $n$  pozitif tam sayısı için,  $n$  yi bölen en küçük asal sayı  $p$  olmak üzere,  $p^2 + p + 1$  sayısı  $n$  yi böler?

- a) 212                      b) 206                      c) 191                      d) 185                      e) 173

- 31.** Gerçel sayılardan oluşan  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  dizisi her  $n \geq 3$  için,

$$a_n = (n - 1) a_1 + (n - 2) a_2 + \cdots + 2 a_{n-2} + a_{n-1}$$

eşitliğini sağlamaktadır.  $a_{2011} = 2011$  ve  $a_{2012} = 2012$  ise,  $a_{2013}$  nedir?

- a) 6025                      b) 5555                      c) 4025                      d) 3456                      e) 2013

- 32.** Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

- a) 768                      b) 642                      c) 564                      d) 510                      e) 456

- 33.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $[BC]$  kenarı üstünde  $|BD| = 4$  ve  $|DC| = 3$  olacak biçimde yer alan  $D$  noktası için,  $[AD]$  iç açıortaydır.  $[AB]$  kenarı üstünde yer alan ve  $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC})$  koşulunu sağlayan  $A$  dan farklı bir  $E$  noktası için,  $[AE]$  doğru parçasının orta dikmesi ile  $BC$  doğrusu  $M$  noktasında kesişiyorsa,  $|CM|$  nedir?

a) 12                      b) 9                      c) 7                      d) 5                      e) Hiçbiri

- 34.**  $a! + b^3 = 18 + c^3$  eşitliğini sağlayan kaç  $(a, b, c)$  pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

a) 4                      b) 3                      c) 2                      d) 1                      e) 0

- 35.**  $f(x) = x + 1 + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$  olmak üzere,  $\overbrace{f(f(\cdots(f(n))))}^{21 \text{ kere}} = 2013$  olmasını sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısı nedir? (Burada  $\lfloor a \rfloor$  ile,  $a$  gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösterilmektedir.)

a) 1214                      b) 1202                      c) 1186                      d) 1178                      e) Hiçbiri

- 36.** En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü,  $K > E$  olmak üzere,  $K$  kız ve  $E$  erkekten oluşuyor. Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe  $1/2$  ve her yenilgiye 0 puan veriliyor. Turnuva bittiğinde, her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa,  $E$  sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) 1