

Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu  
XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı  
İkinci Aşama Sınavı

*Birinci Gün*  
*11 Aralık 2004*

**1.**  $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$  olan bir  $ABC$  üçgeninde,  $A$  köşesine ait yükseklik, açı-ortay ve kenarortayın ayakları, sırasıyla,  $H$ ,  $L$  ve  $D$  noktalarıdır.  $m(\widehat{HAL}) = m(\widehat{DAL})$  olması için gerek ve yeter koşulun,  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$  olması olduğunu kanıtlayınız.

**2.** Bir ülkedeki 80 kentten bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. Her kentten en az 7 başka kente doğrudan uçak seferi bulunmakta olup, herhangi bir kentten bir diğerine doğrudan ya da sonlu sayıda aktarma yaparak uçakla ulaşmak mümkündür. Karşılıklı uçak seferleri hangi kentler arasında düzenlenmiş olursa olsun, herhangi bir kentten bir diğerine en çok  $k$  aktarmayla ulaşılmasını olanaklı kılan en küçük  $k$  sayısını bulunuz.

**3. a.**  $n^2 - 1$ ,  $n^2 - 2$  ve  $n^2 - 3$  sayılarından her biri için, bu sayının pozitif bölenlerinin sayısını 10 yapan bir  $n$  tam sayısı bulunuz.

**b.**  $n^2 - 4$  ün pozitif bölenlerinin sayısının,  $n$  tam sayısının hiçbir değeri için 10 olamayacağını gösteriniz.

---

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.*  
*Her soru 7 puan değerindedir.*