

Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu
XIII. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
10 Aralık 2005

1. Tüm a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$\sqrt{a^4 + c^4} + \sqrt{a^4 + d^4} + \sqrt{b^4 + c^4} + \sqrt{b^4 + d^4} \geq 2\sqrt{2}(ad + bc)$$

olduğunu gösteriniz.

2. $|BC| > |AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde, $[AC]$ nın orta dikmesi BC yi K ; $[BC]$ nın orta dikmesi de AC yi L noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ; CKL ve OAB üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri de, sırasıyla O_1 ve O_2 olmak üzere, OCO_1O_2 dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

3. $n + 1$ kentin bulunduğu bir ülkede, bu kentlerden bazıları arasında karşılıklı uçak seferleri yapılmaktadır. A ve B kentleri arasında yapılan bir karşılıklı sefer, aynı gün içinde hem A dan B ye, hem de B den A ya yapılan bir uçuş ikilisi anlamına gelip, bir kentten diğerine karşılığı olmayan tek yönlü bir sefer mevcut değildir. İki kent arasında aynı gün içinde birden çok sayıda karşılıklı sefer yapılabilir. A kenti için, bir günde A dan kalkan uçak sayısını d_A ile gösteriyoruz. Başkent dışındaki tüm A kentleri için $d_A \leq n$ ve yine başkent dışındaki ve aralarında karşılıklı uçak seferi bulunmayan farklı herhangi iki A, B kenti için, $d_A + d_B \leq n$ koşulları sağlanmaktadır. $n + 1$ kent arasında yer alan başkentten bir gün içinde yapılan uçak seferlerinin sayısı konusunda ise, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Bu ülkede bir günde en çok kaç karşılıklı uçak seferi yapılabileceğini ve bu en çok karşılıklı sefer sayısını olanaklı kılan tüm uçuş çizelgelerini belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.