

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

XIV. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
16 Aralık 2006

1. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

2. 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklık bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

3.

$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

polinomumun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.