

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu
XV. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
8 Aralık 2007

1. Dar açılı bir ABC üçgeninin AC kenarını çap kabul eden çember, AB ve BC yi, A ve C dışında, sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberi, CK doğrusunu C dışında F noktasında; AL doğrusunu ise, A dışında D noktasında kesiyor. ABC üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir E noktası alıp, BE ile AC nin kesiştiği noktaya N diyelim. Eğer

$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$

ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

2. 2007×2007 bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın i . satır ve j . sütunundaki birim kareyi (i, j) ile; $x \leq i$ ve $y \leq j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı (x, y) birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her (i, j) birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her (i, j) birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

3. $a + b + c = 3$ eşitliğini sağlayan tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \geq 4$$

olduğunu gösteriniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.