

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün

6 Aralık 2009

4. Dar açılı bir ABC üçgenin diklik merkezi H ve, A , B , C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1 , B_1 , C_1 dir. K , $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A , K , P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

5. Tüm a , b , c , pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} + \frac{(c+a)(b^4-c^2a^2)}{bc+2ca+ab} + \frac{(a+b)(c^4-a^2b^2)}{ca+2ab+bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

6. $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$ ve a_1, a_2, \dots, a_n tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i \mid N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.