

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün

28 Kasım 2010

4. A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, BC yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgeninin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $[EQ]$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

5. $0 \leq a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini \mathcal{S} ile gösterelim. \mathcal{S} ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \leq n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve \mathcal{S} ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

6. K , düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A , K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.