

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı  
İkinci Aşama Sınavı

*İkinci Gün*  
*4 Aralık 2011*

4.  $a_1 = 5$  ve  $n \geq 1$  için,  $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$  olsun.  $p \equiv 3 \pmod{4}$  koşulunu sağlayan bir  $p$  asal sayısı  $a_{2011} + 1$  sayısını bölüyorsa,  $p = 3$  olduğunu kanıtlayınız.

5.  $M$  ve  $N$  düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalarından biri  $M$  ye, diğeri de  $N$  ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi  $K(M, N)$  ile gösterelim.  $K(M, N)$  nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm  $(M, N)$  ikililerini belirleyiniz.

6.  $A$  ülkesindeki 2011 kent ile  $B$  ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz  $k$  kent bulunuyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

---

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.*  
*Her soru 7 puan değerindedir.*