Sayma yöntemleri-Faktöriyel- Permütasyon – Kombinasyon

1. Saymanın temel kuralları :

Bir çokluğu saymak için üç yöntem uygulanır. Bunlar : Eşleme – toplama ve çarpma yöntemleridir.

a) Eşleme Yöntemi :

Saymak istediğimiz çokluğun elemanları ile 1 den başlayan doğal sayıları 1-1 eşlersiniz. En son eşlenen sayı o çokluğun sayısını verir. Örneğin bir grupta bulunan öğrencileri saymak eşleme yöntemi ile saymaktır.

b) Toplam Yöntemi :

Daha önce ayrı ayrı sayılan kümelerin eleman sayılarını toplayarak, bunların tümünden oluşan kümenin eleman sayısını bulma yöntemidir. Örneğin cebimizdeki para çokluğunu bulmak için üzerilerinde yazılı miktarların toplamını alırsınız.

c) Çarpma Yöntemi :

Sayılması istenen çokluk ayrı ayrı gruplardan oluşuyorsa, her gruptaki çoklukların sayıları ile grup sayısının çarpımları alınır..Sayılması istenen miktar bulunmuş olur.

Bu yöntemle çokluk sayısını bulmaya çarpma yöntemi denir.

Örneğin yandaki dikdört-

gende bulunan karelerin

sayısını bulalım. Burada

6 sütun ve her sütunda

4 kare olduğundan kare sayısını bulmak için bunlar çarpılır. 6 . 4 = 24 bulunur. Bu yolla kare sayısı bulma yöntemi çarpma kuralını kullanma yöntemidir.

Bu yöntemle çözülebilen problemleri inceleyelim.

ÖRNEK :

1

A

2

3

B

C

a

b

A dan B ye 3

değişik yol B den

C ye iki değişik

yol vardır.

A dan (B den geçme koşulu ile) C ye kaç değişik yolla gidilebilir?

ÇÖZÜM :

Yollar {(1, a) (1, b) (2, a) (2, b) (3, a) (3, b)} olmak üzere 6 yol bulunur.

Çarpma yöntemi ile daha çabuk 3 . 2=6 olarak bulunur.

ÖRNEK :

KONYA kelimesindeki harflerle beş harfli anlamlı yada anlamsız kaç sözcük yazılabilir ?

ÇÖZÜM :

5

4

3

2

1

Beş harfi yandaki

1; Numaraya 5 değişik harf yazılabilir.

2; Numaraya 4 değişik harf yazılabilir.

(Çünkü bir harf 1 numaraya yazılmıştır.)

3; Numaraya 3 değişik harf yazılabilir.

4; Numaraya 2 değişik harf yazılabilir.

5; Numaraya ise 1 harf kalır. Yazıla-bilecek sözcük sayısı, çarpma yöntemi gereğince 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 olarak bulunur.

ÖRNEK :

İki torbanın birinde siyah ve diğerinde beyaz

ve üzerlerinde 1,2,3,4,5 numaraları yazılı 5 er

bilye vardır.

Bu torbaların her birinden birer bilye çekilerek

ikililer elde ediliyor. Bu ikililerin sayısı kaçtır ?

ÇÖZÜM :

Çarpma yöntemi ile 5.5 = 25 ikili bulunur.

ÖRNEK :

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanlarını

kullanarak 300 den büyük üç basamaklı kaç

tane sayı yazabiliriz. (Bir kez kullandığınız

rakamı bir daha kullanabilirsiniz)

ÇÖZÜM :

Üç basamaklı sayının yüzler basamağına

ancak 3, 4, 5 rakamlarından biri gelir. Diğer

basamaklara ise 5 rakamdan biri getirilebilir.

yüzler

onlar

birler

3

5

5

= 75

.

.

Çarpma yöntemi ile 3.5.5 = 75 sayı yazılabilir.

ÖRNEK :

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları ile

rakamlar tekrarsız ve 300 den büyük üç

basamaklı kaç sayı yazabilirsiniz.

3

4

3

= 36

.

.

yüzler basamağına 3 değişik rakam onlar basamağına (yüzler basamağına bir rakam yazıldığı için) 4 değişik rakam ve birler basa-mağına da 3 değişik rakam yazılabilir. Çarpma yöntemi gereği bu değişik değerler çarpılır.

Bu hesapları daha çabuk yapabilmek için (faktöriyel) hesapları kullanılır.

faktöriyel hesapları hatırlayalım.

Tanım : 1, 2, 3, 4........n (1 den n e kadar doğal sayıların çarpımı n nin yanına bir ünlem işareti konularak gösterilir ve n faktöryel diye okunur.)

1.2.3.4.5........n = n !

tanıma uymayan 0 ! ve 1 ! gösterimleri kullanılabilir ve değerleri 1 dir. 0! = 1; 1! = 1 dir.

Faktöryel hesapları

1. n!(n+1) = (n+1)!

2.  = (n-1)!

3. r!(r+1)(r+2) ... n = n

4.  = (r+1)(r+2)(r+3).n

olduğunu hatırlayınız.

ÖRNEK :

 in sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM :

 =  = 6.7 = 42 bulunur.

ÖRNEK :

 = 7.8 = 56 bulunur.

ÖRNEK :

 = 72 ise n kaçtır?

ÇÖZÜM :

= (n-1).n ⇒ n(n-1) = 72

n2 – n – 72 = 0 dır.

Bu ise (n-9)(n+8) = 0; n = 9 ve N = -8 bulunur. n = -8 olamaz (neden?) o halde n = 9 olmalıdır.

ÖRNEK:

 = 30 is n kaçtır?

ÇÖZÜM:

tanımdan (n-2)! = (n-4)! (n-3)(n-2) dir. O halde

= (n-3)(n-2) olacağından

(n-3)(n-2) = 30 ⇒ n2 – 5n – 24 = 0

(n-8)(n+3) = 0 ⇒ n = 8 , n = -3

n = -3 olamaz (neden?) ; n = 8 bulunur.

ÖRNEK :

7.  = 20 .  ise n kaçtır?

ÇÖZÜM :

 = (n-2)(n-1).n ; = n.(n+1) o halde 7

n(n-1)(n-2) = 20n.(n+1) den

7(n2-3 n+2) = 20(n+1)

7n2 – 41n – 6 = 0 denklemi bulunur.

(n = - olamaz.)

ÖRNEK :

(n+!)[n.n! + (2n-1).(n-1)! + (n-1).(n-2)!]

çarpımının sonucu nedir?

ÇÖZÜM:

(n+1)[ n.n! + (2n-1).(n-1)! + (n-1).(n-2)!] =

(n+1)[ n.n! + (n-1).(2n-1) . (n-1)!+(n-1)!] =

(n+1) [(n-1)! . (n2 + 2n – 1 + 1)]

= (n+1) (n-1)! . n(n+2)

= (n-1)! n.(n+1)(n+2) = (n+2)! bulunur.

ÖRNEK :

+ 3  +  sonucu nedir?

ÇÖZÜM :

+ 3  +  paydalarını n! olacak biçimde genişletip toplayalım.

 =

 =

n(n2 – 3n + 2 + 3n – 3 + 1) = n.n2 = n3

bulunur.

PERMÜTASYON

n elemanlı bir kümenin elemanlarını bir sırada yazmaya onun bir Permütasyonu denir.

Örneğin üç elemanlı bir a,b,c kümesinde {a,b,c} bir permütasyon (a, c, b) başka bir permütasyondur.

Permütasyonların sayısı

n elemanlı bir kümenin elemanlarının pemü-tasyonlarının sayısı P(n, n) biçiminde gösterilir.

Değeri P(n, n) = n! dir.

(çarpma kuralı ile bulunduğuna dikkat ediniz.)

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin permütasyonlarının sayısı P(n, r) ile gösterilir. P(n,r) yi hesaplıyalım.

n elemanlı kümenin r elemanlı bir alt kümesinde r tane eleman vardır. Bunların yerlerine kaç tane eleman yazılabileceğini altına yazalım ve çarpma kuralını uygulayalım.

1

2

3

4

r

n

n-1

n-2

n-3

n-r+1

. . . . .

r tane

o halde p(n,r) = n(n-1)(n-2)(n-3) . . (n-r+1)

çarpımıdır. Bunu basitleştirmek için paydayı 1 kabul edip pay ve paydayı (n-r)! İle çarpalım,

P(n,r)= 

buna göre, P(n,r) =  formülü bulunur.

Permütasyonla ilgili örnek Problemler

ÖRNEK :

Ankara’da arabalara üç harf ve 2 rakam kullanılarak plaka verilmektedir. (kullanılan harf sayısı 25 ve aynı harf birden fazla kullanılmaktadır.) Buna göre kaç arabaya plaka verilebilir.

ÇÖZÜM :

rakam

harf

çarpma kuralı ile

3

C

B

A

5

10

rakam

10

rakam

25

harf

25

harf

25

harf

S = 25.25.25.10.10 = 1562500 arabaya plaka verilir.

ÖRNEK :

Bir erkek öğrencinin 2 çift ayakkabısı, 2 ceket, 4 pantolon 3 gömleği ve üç değişik kravatı bulunmaktadır. Bunları kullanarak (hergün bir şeyi farklı olarak) giyinecektir. Kaç gün değişik kıyafetle çıkabilir ?

ÇÖZÜM :

Çarpma kuralı gereği bu değişik şeylerin çarpımı kadar gün değişik kıyafet giyer.

2.2.4.3.3 = 144 gün

ÖRNEK :

Bir otomobilde 5 kişilik yer vardır. (sürücü yeri dahil) 2 sinin sürücü belgesi bulunan beş kişi bu otomobilde kaç değişik biçimde seyahat edebilir ?

ÇÖZÜM :

2

4

3

2

1

sürücü

sürücü yerine 2 değişik kişi oturabilir. Diğer yerlere sıra ile 4, 3, 2, 1 değişik kişi oturabilir. O halde çarpma kuralı gereği 2.4! = 48 değişik biçimde oturabilirler.

ÖRNEK :

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları ile üç basamaklı, rakamları tekrarsız kaç sayı yazılabilir.

ÇÖZÜM :

5

4

3

yüzler

onlar

birler

değişik rakam yazılır.

çarpma kuralı gereğince 5.4.3 = 60 sayı yazılabilir.

ÖRNEK :

MERSİN kelimesindeki 6 harfle anlamlı yada anlamsız kaç sözcük yazılabilir ?

ÇÖZÜM :

P(6, 6) = 6! Kadar sözcük yazılabilir.

n elemandan (a) tanesi aynı ise

bunların permütasyonlarının sayısı 

ÖRNEK :

6 kitap, kitaplıkta bir rafa kaç değişik biçimde sıralanabilir ?

ÇÖZÜM :

Altının altılı permütasyonu kadar sıraya konulabilir. P(6, 6) = 6! = 720 değişik sırada yerleştirilebilir.

ÖRNEK :

Bir öğrencinin 3 matematik, 2 fizik ve 4 türkçe kitabı vardır. Her branştaki kitaplar yan yana gelmek koşulu ile bir rafa kaç değişik biçimde yerleştirilebilir ?

ÇÖZÜM :

Matematik kitapları 3!, fizik kitapları 2! ve Türkçe kitapları 4! Kadar sıraya konur. Ancak bunlar Matematik, Fizik ve Türkçe olmak üzere üç branştır. Bunlar da kendi arasında 3! kadar sıraya konabilir. Yani (M, F, T) yada (M, T, F) gibi değişik 3! sırada dizilebilir. O halde çarpma kuralı gereği

3!2!4! . 3! = 6.2.24.6 = 1728 değişik biçimde yerleştirilebilir ?

ÖRNEK :

6 arkadaş sinemaya gitti. Boş olan 4 tane numaralı sandalye ye kaç değişik biçimde oturabilirler ?

ÇÖZÜM :

Yerler değişik numarada olduğu için

permütasyondur.(sıra önemli) O halde

P(6,4) =  = 360 bulunur.

ÖRNEK :

İki torbanın her birinde, üzerlerinde 1 den 12 ye

kadar numara bulunan bilyeleri vardır. Her birinden 1 bilye alınarak ikili gruplar elde ediliyor. Kaç değişik ikili elde edebilirsiniz. ?

ÇÖZÜM :

Her birinde değişik 12 şer bilye olduğu için

bunların çarpımı kadar değişik ikili elde edilir.

12.12 = 144 (değişik ikili)

ÖRNEK :

6 kişiden ikisi önde 4 ü arkada olmak üzere sıralanarak fotoğraf çektirilecektir. Kaç poz resim çekilebilir.

ÇÖZÜM :

Önde P(6, 2) =  ;arkadakiler = P(4, 4) = 4! dir. O halde P(6,2).P(4,4) =  . 4! = 6! = 720

poz bulunur. (hepsinin aynı sırada olmasının sonucu değiştirmeyeceğine dikkat ediniz.)

ÖRNEK :

P(n, 4) = 42.P(n, 2) ise n kaçtır. P (n, r) n elemanlı r li permütasyonların sayısıdır.

ÇÖZÜM :

P(n,4) = 42P(n,2) ⇒ = 42. 

den 

= 42. 

sadeleşme yapılarak (n-2) . (n-3) = 42

bulunur. O halde

n2 – 5n + 6 – 42 = 0

n2 – 5n – 36 = 0

(n-9)(n+4) = 0 ⇒ n = 9 ; n = -4

(n= -4) olamaz. O halde n = 9 dur.

ÖRNEK :

{1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanları ile yazı-

labilen 5 rakamlı sayılardan kaç tanesinde 2

rakamı vardır.

ÇÖZÜM :

2 rakamı hepsinde bulunacağı için 2 yi ayrı tutarsak geriye kalan 5 elemanın 4 lü permü-tasyonları kadar (2 hariç) dört rakamlı sayı yazılabilir. 2 sayısı bu 4 rakamlı sayıda 5 deği-

şik yerde olabileceği için çarpma yöntemi

gereği 5.P(5, 4) = 5. = 600 sayı bulunur.

KOMBİNASYON

n elemanlı bir kümesin r elemanlı bir alt kümesine n nin r li bir kombinasyonu denir.

Örneğin A = {a, b, c, d} 4 elemanlı bir kümenin üçlü kombinasyonları;

{a, b, c} , {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d} olmak üzere 4 tanedir. Bunların her biri A nın üçlü bir kombinasyonudur.

n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombi-nasyonların sayısı C(n,r) , veya  simge-leri ile gösterilir. Bu sayı ise

C(n,r) =  ya da C(n,r) =  dir.

Bunların =  ya da =  olarak da yazılabileceğini görünüz.

n elemanlı r li kombinasyonlarının sayısı için şu dört eşitlik ve özelliği gösterebiliriz.

I) = 1

II) 

III) 

IV) r sayısı 0 dan başlayarak  den küçük en büyük tam sayıya kadar değiştiğinde  gitgide artan değer alır. r >  içinde gitgide azalan değerler alır. (r ile n-r değerlerinde ise eşit olmaktadır.)

ÖRNEK:

Herhangi üçü doğrusal olmayan 10 nokta kaç doğru belirtir?

ÇÖZÜM:

10 nun ikili kombinasyonları kadar doğru belirtilir.  = 45

ÖRNEK :

Herhangi üçü doğrusal olmayan 10 noktayla köşeleri bu noktalar olan kaç üçgen çizilebilir?

ÇÖZÜM :

10 nun üçlü kombinasyonları kadar üçgen çizilebilir.  = 120

ÖRNEK :

Üçü bir doğru diğer dördü bir doğru üzerinde olan 7 nokta kaç doğru belirtir?

ÇÖZÜM:

A

B

C

D

F

G

E

d1

d2

Şekilde görüldüğü gibi 3 nokta bir doğru 4 noktada bir doğru üzerindedir. Önce 7 nok-tadan

=  = 21 doğru geçer. 3 noktadan

=  = 3 doğru geçerdi ancak bu 1 doğru üzerindedir. 4 noktadan =  = 6 doğru geçerdi ama şimdi 1 doğru geçiyor. O halde 21 – 3 + 1 – 6 + 1 = 14 doğru bulunur. Pratikte d1 doğrusu üzerinde 3 nokta d2 doğrusu üzerinde 4 nokta var. Bunlardan

3.4 = 12 doğru geçer. d1 ve d2 yi alırsak

12 + 1 + 1 = 14 doğru bulunur.

ÖRNEK :

Bir sınavda 12 soru sorulmuştur. Baştan 3 soruyu herkesin yapması zorunludur. Diğer sorulardan 7 tane seçerek yanıtlaması istenmektedir. sınava giren bir öğrenci bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

ÇÖZÜM :

12 –3 = 9 sorudan 7 tane seçecektir.

= = 72 değişik seçenek vardır.

ÖRNEK :

Birbirine paralel 5 doğru ile bunları kesen ve birbirine paralel 6 doğru çiziliyor. Bu doğrular kaç tane değişik paralel kenar oluşturur?

ÇÖZÜM :

d1

d2

d3

d4

d5

a1

a2

a3

a4

a5

a6

Verilen doğrular şekilde olduğu gibi d1, d2, d3, d4, d5 ve a1, a2, a3, a4, a5, a6 olsun. Karşılıklı kenarları olan dörtgenler paralel kenar olduğu için paralellerden ikişer ikişer almanız gerekir. O halde paralel kenar sayısı

= 10.15 = 150 bulunur.

ÖRNEK :

d1 // d2 // d3 // d4

d1

d2

d3

d4

a1

a2

a3

ve a1, a2, a3 doğ-

ruları bir A nokta-

sında kesişiyor.

Bu şekilde kaç

tane yamuk var-

dır?

ÇÖZÜM :

Yamuk, karşılıklı iki kenarı paralel diğer iki kenarı paralel olmayan dörtgendir. O halde yamuk sayısı,

=  = 6.3 = 18 bulunur.

ÖRNEK :

10 voleybol oyuncusundan belli biri kaptandır. Kaptan daima takımda bulunmak üzere 6 kişilik değişik kaç voleybol takımı kurulabilir?

ÇÖZÜM :

Biri her takımda bulunacağı için 9 oyuncudan 5 ini seçmek gerekir. O halde

=  = 126 takım kurulur.

ÖRNEK :

9 kişilik bir gruptan 5’i A, 4’ü B kentine kaç değişik biçimde gider?

ÇÖZÜM:

9 kişiden 5’i A kentine gider geriye kalan 4’ü B ye gider. O halde yalnız A kentine giden-lerin sayısını bulmak yeterlidir.

=  = 126 bulunur.

NOT :  olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK :

10 kişilik bir gruptan 5’i A, 3’ü B ve 2’si C kentine kaç değişik biçimde gider?

ÇÖZÜM :



=  = 2520

ÖRNEK :

C(n,2) = 45 ise n kaçtır?

(C(n,2) , n elemanlı ikili kombinasyonlarının sayısıdır.)

ÇÖZÜM:

 = 45 ⇒ n(n-1) = 90 ; n = 10 bulunur.

ÖRNEK :

bir torbada 5 kırmızı, 12 Beyaz bilye vardır. Bu torbadaki bilyelerle 1 kırmızı 3 beyaz olmak üzere kaç değişik grup bilye elde edilir?

ÇÖZÜM :

= 5. = 1100 grup bulunur.

ÖRNEK :

Bir sandıkta bulunan 12 ampulden 4 ü bozuktur. Bu sandıktan 1 i bozuk 3 ü sağlam olmak üzere kaç değişik grup oluşturulabilir?

ÇÖZÜM :

4 ü bozuksa 8 i sağlamdır. O halde,

= 4. = 4.56 = 224 grup oluşur.

[www.matematik10.com](http://www.matematik10.com)