

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

PARÇALI FONKSİYON

Tanım kümesinin alt aralıklarında ayrı birer fonksiyon olarak tanımlanan fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

$$f(x) = \begin{cases} A(x), & x < m \\ B(x), & m \leq x \leq n \\ C(x), & n < x \end{cases}$$

şeklinde yazılırlar. $x = m$ ve $x = n$ gibi tanım aralıklarının uç noktalarına kritik noktalar denir.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+4, & x \leq -2 \\ x^2+2x, & x > -2 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

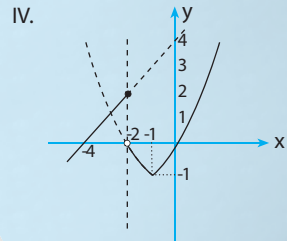
I. $y = x + 4$ için $x = 0, y = 4 \Rightarrow (0, 4)$
 $y = 0, x = -4 \Rightarrow (-4, 0)$

II. $y = x^2 + 2x$ için $x = 0 \Rightarrow y = 0, (0, 0)$
 $y = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$
 $x_1 = 0, x_2 = -2$
 $(0, 0)$ ve $(-2, 0)$

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

$$T\left(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{4}\right) = T(-1, -1)$$

III. Kritik nokta $x = -2$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq -1 \\ 1, & x < -1 \end{cases}$$

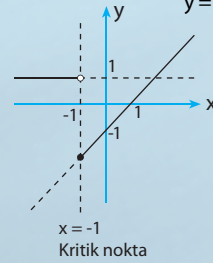
fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çizeceğimiz doğrular $y = x - 1$ ve $y = 1$ doğrularıdır. Bu doğruları çizdikten sonra tanımlanan bölgedeki uzantısını alıp, diğer kısmını sileceğiz.

I. Kritik nokta $x = -1$

II. $y = x - 1$ için $x = 0 \Rightarrow y = -1, (0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow x = 1, (1, 0)$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ -2, & -1 < x < 1 \\ -2x, & x \leq -1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

I. $y = x \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$x = 1, y = 1 \Rightarrow (1, 1)$

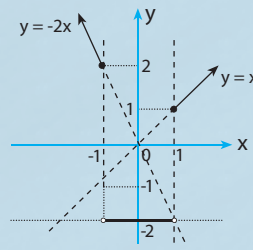
II. $y = -2$

III. $y = -2x \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$x = -1, y = 2 \Rightarrow (-1, 2)$

IV. Kritik noktalar $x = 1$ ve $x = -1$

V.



FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM ARALIĞI

1. Polinom fonksiyonlar;
Tanım kümesi \mathbb{R} (Reel sayılar) dir.
2. Rasyonel fonksiyonlar;
 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ için tanım kümesi
 $\mathbb{R} - \{\text{Paydayı sıfır yapan değerlerdir.}\}$
3. Köklü fonksiyonlar; Tanım kümesi
 $\sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{R}, & n \text{ tek} \\ f(x) \geq 0, & n \text{ çift} \end{cases}$
4. Logaritmik fonksiyonlar;
Tanım kümesi $\log f(x)$ için $f(x) > 0$ dir.

$$f(x) = \sqrt{5 - |2x - 3|}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Köklü fonksiyon olduğu için ve derece çift olduğundan (yazılmazsa 2 dir.)

Kökün içi sıfır ve sıfırdan büyük olmalıdır.

$$5 - |2x - 3| \geq 0 \Rightarrow 5 \geq |2x - 3|$$

$$5 \geq 2x - 3 \geq -5 \Rightarrow 8 \geq 2x \geq -2 \Rightarrow \boxed{4 \geq x \geq -1}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

- A) $\mathbb{R} - \{2\}$ B) $\{2\}$ C) $(2, \infty)$ D) \mathbb{R} E) $[2, \infty)$

(Payda sıfır olmamalı ve kökün içi sıfır ve sıfırdan büyük olmalı.)

I. $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

II. $\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x \neq 2$

III. Tanım kümesi $(2, \infty)$

$$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

fonksiyonunun tanım kümesi T ve görüntü kümesi G ise $T \cap G$ kümesi nedir?

I. Tanım kümesi: $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{-1} + \frac{1}{-1}$
Tanım kümesi: $[-1, 1] = T$

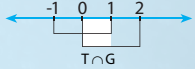
II. Görüntü kümesi: Tanım kümesi değerlerine karşılık çıkan küme.

$$x=1 \text{ ve } x=-1 \text{ için } f(x)=0$$

$$x=0 \text{ için } f(x)=2 \text{ olduğundan}$$

$$\text{Görüntü kümesi: } [0, 2] = G$$

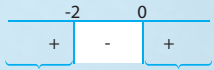
III. $T \cap G$ kümesi: $[0, 1]$



$$y = \log \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{1-|x|} \right)$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

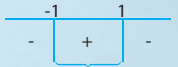
I. $x^2+2x \geq 0 \Rightarrow x(x+2) \geq 0$



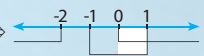
II. $1-|x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

III. $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{1-|x|} > 0$ (Pay daima pozitif olacağından payda da pozitif olmalıdır.)

$1-|x| > 0 \Rightarrow$



IV. Sonuç \Rightarrow



Sonuç: $(0, 1)$ aralığıdır.

ÇİFT VE TEK FONKSİYONLAR

1. $f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ 'e çift fonksiyon denir.

Grafikleri Oy eksenine göre simetriktr.

2. $f(-x) = -f(x)$ ise $f(x)$ 'e tek fonksiyon denir.

grafikleri orijin noktasına göre simetriktr.

R den R ye tanımlı fonksiyonlardan hangisi çift fonksiyondur?

A) $f(x) = x^2 - x + 1$

B) $f(x) = x + \cos x$

C) $f(x) = x + \sin x$

D) $f(x) = x^2 + \cos x$

E) $f(x) = x^2 + \sin x$

Çift fonksiyon olması için;

$f(-x) = f(x)$ olmalıdır.

A) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1 \neq f(x)$

B) $f(-x) = -x + \cos(-x) \neq f(x)$

C) $f(-x) = -x + \sin(-x) \neq f(x)$

D) $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$

E) $f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) = x^2 - \sin x \neq f(x)$

Cevap: D

MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

$A \subset R$ olmak üzere A dan R'ye bir f fonksiyonu için;

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $|f(x)|$ fonksiyonuna mutlak değer fonksiyonu denir.

$x < 0$ olduğuna göre;

$$|x-1| + |x| + 3 \text{ ifadesinin eşiti nedir?}$$

$x < 0$ için $|x-1| + |x| + 3$

↓

$$-x + 1 + (-x) + 3$$

$$-x + 1 - x + 3 = -2x + 4$$

R^+ da tanımlı, $f(x) = \frac{|x+9-5\sqrt{x}|-9}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) \sqrt{x}

B) $\sqrt{x} + 4$

C) $\sqrt{x} - 3$

D) $\sqrt{x} - 5$

E) $\sqrt{x} + 5$

$$f(x) = \frac{|x+9-5\sqrt{x}|-9}{\sqrt{x}} = \frac{|x-6\sqrt{x}+9+\sqrt{x}|-9}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2 + \sqrt{x} - 9}{\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in R^+ \text{ için } (\sqrt{x}-3)^2 + \sqrt{x} > 0 \text{ olduğundan,}$$

$$= \frac{x+9-5\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} - 5$$

$$y = |x - 4|$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$$y = |x - 4| = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ -x + 4, & x < 4 \end{cases}$$

I. $y = x - 4$ için;

$$x = 0 \Rightarrow y = -4, \quad (0, -4)$$

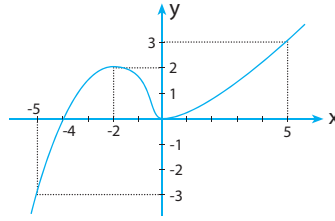
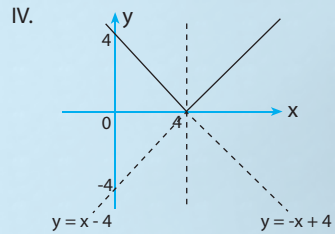
$$y = 0 \Rightarrow x = 4, \quad (4, 0)$$

II. $y = -x + 4$ için

$$x = 0 \Rightarrow y = 4, \quad (0, 4)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4, \quad (4, 0)$$

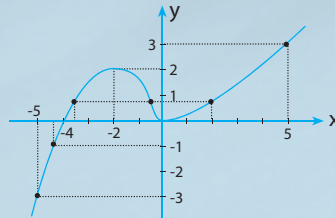
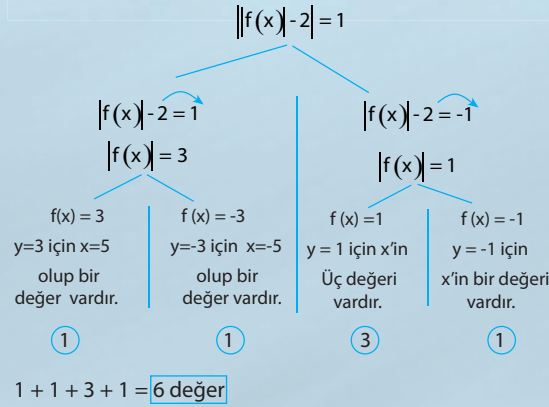
III. Kritik nokta, $x = 4$



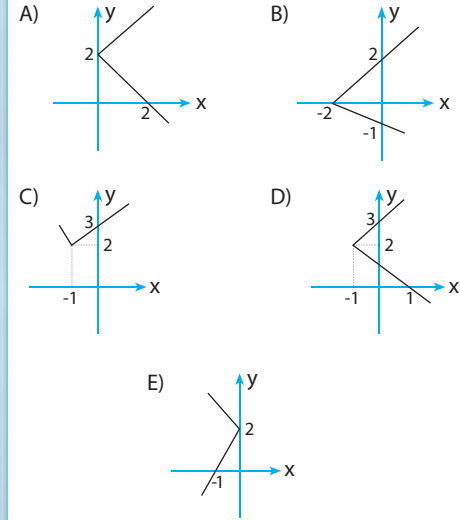
$[-5, 5]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor.

$||f(x) - 2| = 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

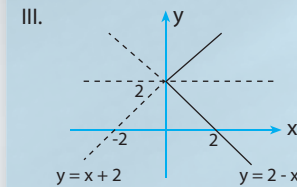


$|y - 2| = x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



I. Kritik nokta $y - 2 = 0$, $y = 2$ dir.

II. $y > 2$ için $y - 2 = x \Rightarrow y = x + 2$
 $y \leq 2$ için $-y + 2 = x \Rightarrow y = 2 - x$



Cevap: A