

**Neler öğreneceksiniz?**

- ❖ Bir fonksiyon grafiğinden dönüşümler yardımıyla yeni fonksiyon grafikleri çizmeyi,
- ❖ Fonksiyonlarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapıldığını,
- ❖ Tek ve çift fonksiyonların cebirsel ve grafiksel özelliklerini öğreneceksiniz.

**Başlamadan bilmeniz gereken beceriler:**

- ❖ 9. sınıf matematik dersinde gördüğümüz fonksiyonlar ile ilgili temel kavram ve kuralları bilmeniz gerekmektedir.

**3.1.1 - DÖNÜŞÜMLER**

Dönüşümler, bilgisayar grafiğinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bilgisayar ekranındaki bir nesnenin yerini, şeklini değiştirmek ve değişen nesnenin yeni yerini ve şeklini belirlemek için kullanılır. Bilgisayar grafiğinde dönüşümler;

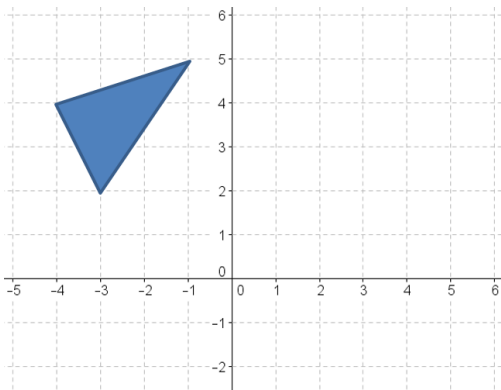
- ❖ öteleme,
- ❖ simetri,
- ❖ döndürme,

Ölçeklendirme olmak üzere dört farklı yöntemin tek tek ya da birlikte kullanılmasıyla yapılmaktadır. Mühendislik, tıp ve sanayide robotların hareketlerini sağlamak amacıyla sensör, kamera gibi birçok aygıt yanında, bilgisayar yazılımları da kullanılmaktadır. Bilgisayar yazılımlarında, robotun hareketini sağlamak amacıyla birçok dönüşüm birlikte kullanılır.

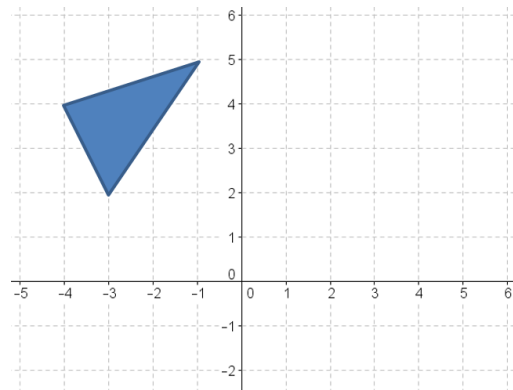


Bir şekli yada bir nesneyi ötelersek yada simetriğini alırsak ya da döndürürsek şekil de yada nesnede değişiklik olur mu?

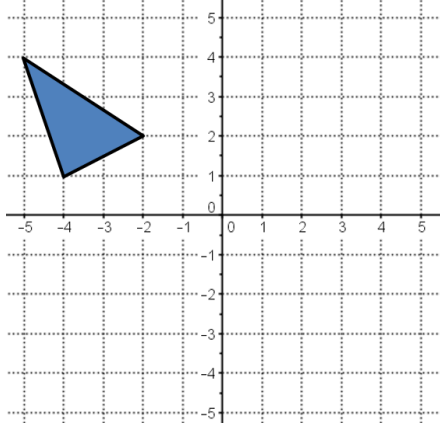
a) Aşağıdaki şeklin y eksenine göre simetriğini alınız.



b) Aşağıdaki şekli 6 birim sağa 1 birim aşağıya öteleyiniz.



c) Aşağıdaki şeklin orjine göre simetriğini çiziniz.



**HATIRLAYALIM :**

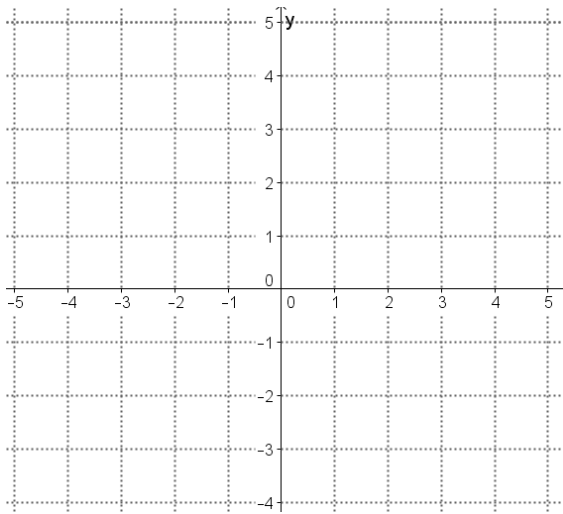
Geçen yıl matematik dersinde, fonksiyon grafiklerinin nasıl yorumlanacağından ve çizilebileceğinden söz etmiş, çok sık kullanılan fonksiyonların grafiklerini tablo oluşturarak ve aynı zamanda bilişim teknolojilerinden yararlanarak çizmiştik. Birçok fonksiyon grafiği, bu temel fonksiyon grafiklerine uygulanacak dönüşümlerle elde edilebilir. Grafiğini bildiğimiz fonksiyonlardan elde edilebilen diğer fonksiyonların grafikleri için yeniden tablo oluşturmak yerine, yapılan dönüşüm, grafiğe uygulanarak fonksiyonun grafiği belirlenebilir.

Fonksiyon grafiklerine uygulanan dönüşümleri, üç ana başlıkta inceleyeceğiz:

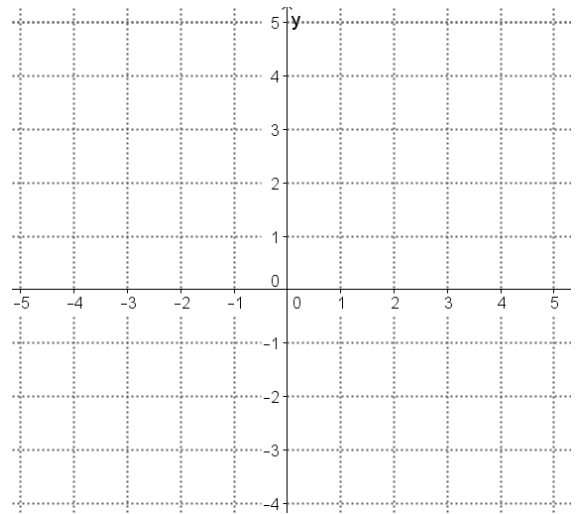
Öteleme, simetri ve ölçeklendirme. Kısım boyunca örneklerimizde, geçen yıl grafiklerini çizdiğimiz  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) biçimindeki fonksiyonların grafiklerini kullanarak dönüşümleri inceleyeceğiz.

$y=x^n$  fonksiyonlarını  $n = -1, 1, 2, 3$  için inceleyelim. Daha doğrusu geçen yıl çizdiğimiz bu fonksiyon grafiklerini hatırlayalım.

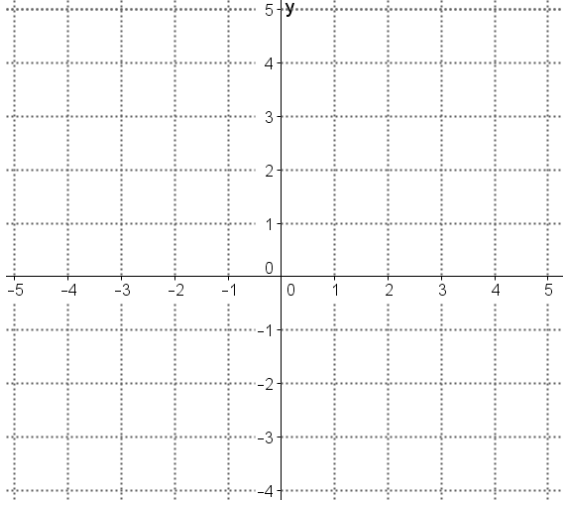
$y=x$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



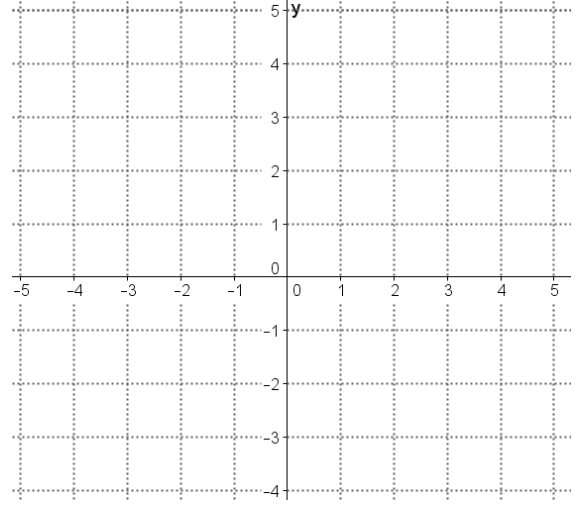
$y=f(x) = -x$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



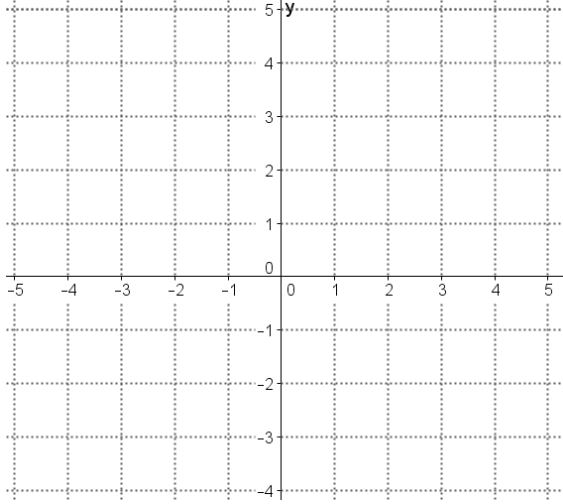
$y=f(x)=|x|$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



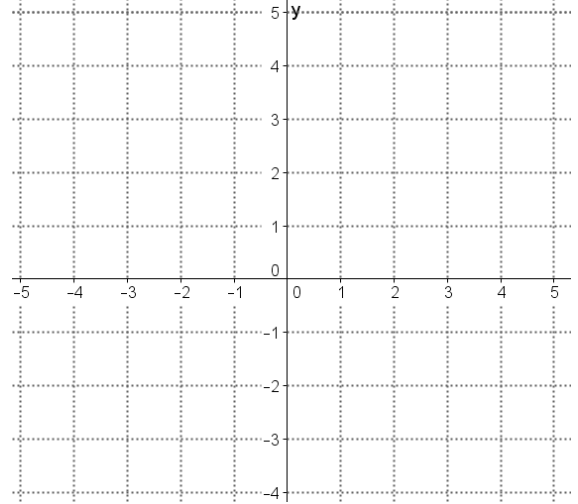
$y=f(x)=x^3$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



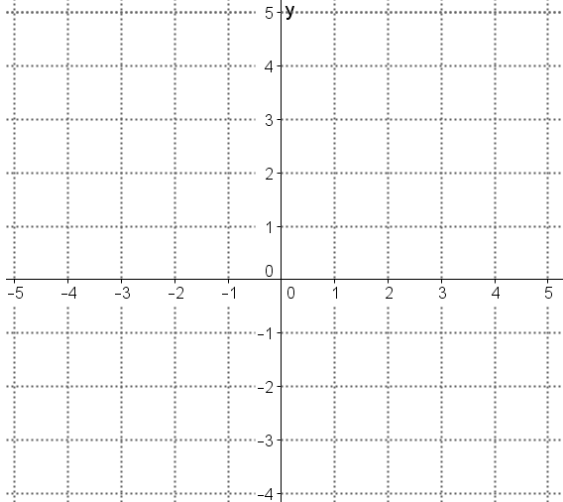
$y=f(x)=x^2$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



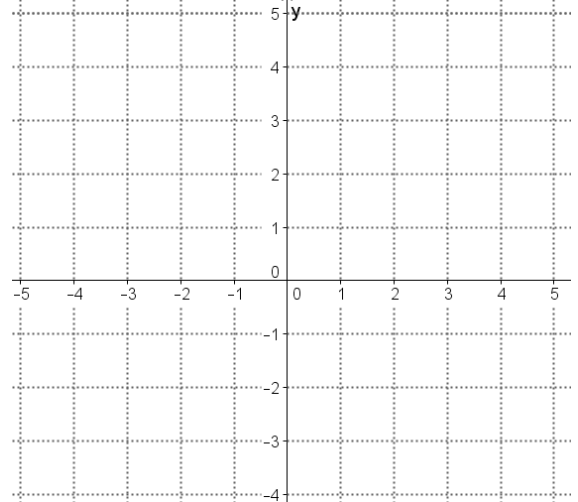
$y=f(x)=-x^3$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



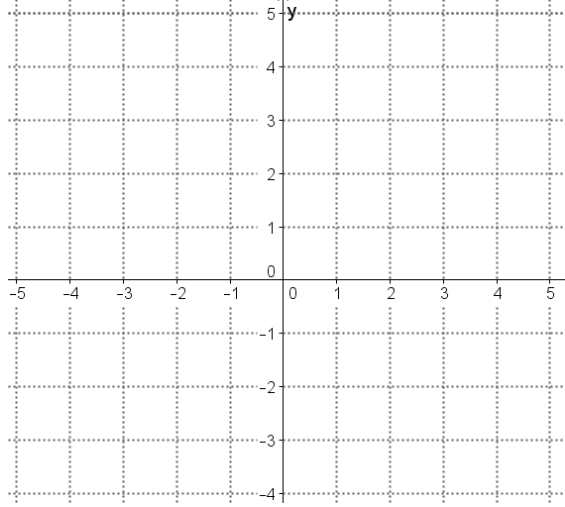
$y=f(x)=-x^2$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



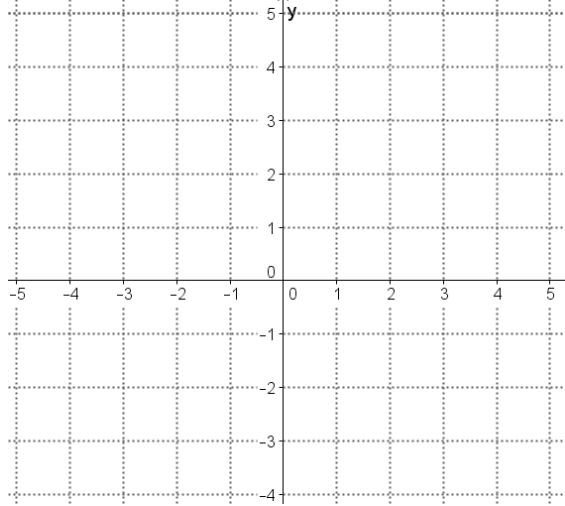
$y=f(x)=x^4$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



$y=f(x)=\frac{1}{x}$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



$y=f(x)=-\frac{1}{x}$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.

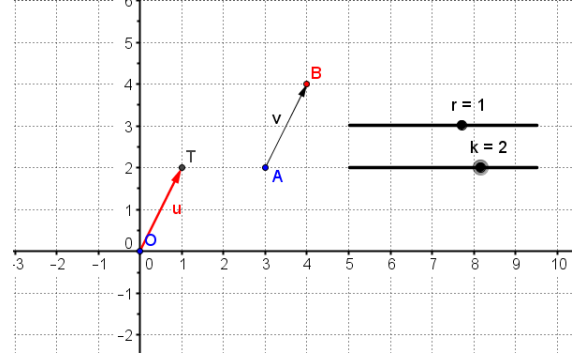


Sanırsanız yukarıdaki çizimleri geçen yıldan hatırladınız. Hatırladınız mı ? ☹️ 😊

### ÖTELEME:

Şimdi bu fonksiyonların grafiklerini öteleyerek döndürerek veya yansıtarak yeni fonksiyon grafikleri elde edeceğiz. Bunu yapmadan önce geogebra (Dinamik-geometri cebir) programını biraz tanıyalım.

Öncelikle bir noktayı ötelenmenin geogebra programı yardımıyla nasıl yapıldığına bakalım.



Burada r yatay eksende k dikey eksende ötelemeyi göstermektedir.

O halde bir A(x,y) noktasının  $\vec{u} = (r, k)$  ötelemesiye elde edilen B noktasının koordinatları B(x+r,y+k) olmaktadır.  
 $x'=x+r$  ve  $y'=y+k$  dersek  
 $x=x'-r$  ve  $y=y'-k$  olur.

Kısaca  $y=f(x)$  fonksiyonunda y yerine  $y-k$  ve x yerine  $x-r$  yazarak elde edilen fonksiyon grafiği (r,k) kadar ötelenir.

Gelin bunu  $y=f(x) = x$   $y=f(x)=x^2$  fonksiyonlarına uygulayalım.  
Geogebra uygulamasıyla bu fonksiyonların grafiklerine bakalım.

$y=f(x) = x+2$  fonksiyonun grafiğini çizelim.



$y=f(x) = x-3$  fonksiyonun grafiğini çizelim.



$y=x^2 + 1$  fonksiyonunu çiziniz.



$y=x^3 + 1$  fonksiyonunu çiziniz.



$y=x^2 - 1$  fonksiyonunu çiziniz.



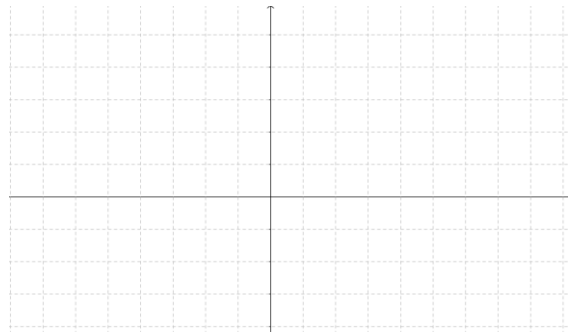
$y=x^3 - 1$  fonksiyonunu çiziniz.



$y=-x^2 + 4$  fonksiyonunu çiziniz.



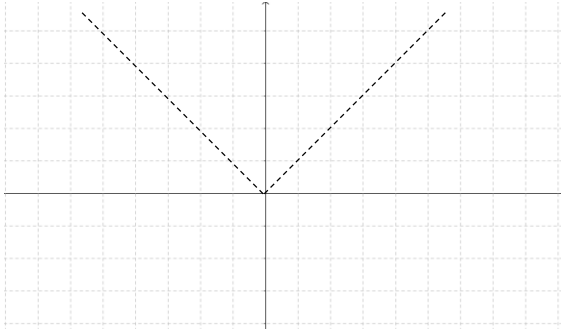
$y=-x^3 + 2$  fonksiyonunu çiziniz.



Bu durumda en genel halde  $y=f(x)$  fonksiyonun  $(r,k)$  kadar ötelenmesiyle elde edilen fonksiyon  $g(x)=f(\dots\dots\dots)+\dots\dots\dots$  olur.

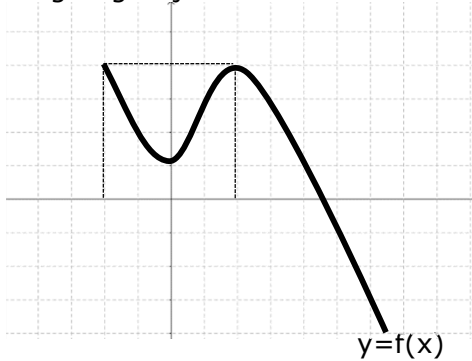
Örneğin ;  $y=g(x) = |x - 3| - 1$  fonksiyonun grafiğini çizelim.

Önce  $y = f(x) = |x|$  fonksiyonun grafiğini çizelim.  $f(x)=|x|$  fonksiyonu 3 birim sağa 1 birim aşağı ötelendiğinden grafik sağa 3 aşağı 1 birim kayacaktır.



Bunu bir de geogebra'da gözlemleyelim.

**ÖRNEK :** Aşağıda grafiği verilen  $y=f(x)$  fonksiyonu için  $y=g(x)=f(x+1) + 1$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

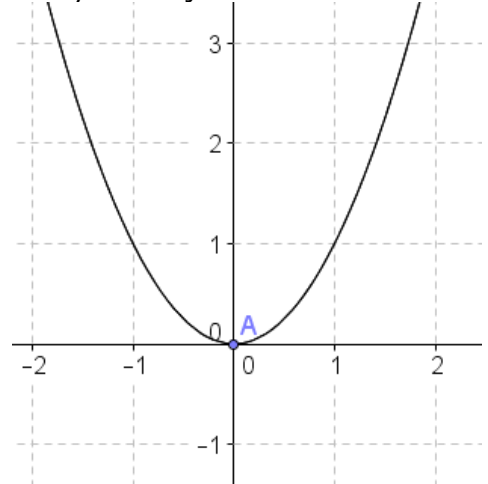


Föy-9 u açınız.

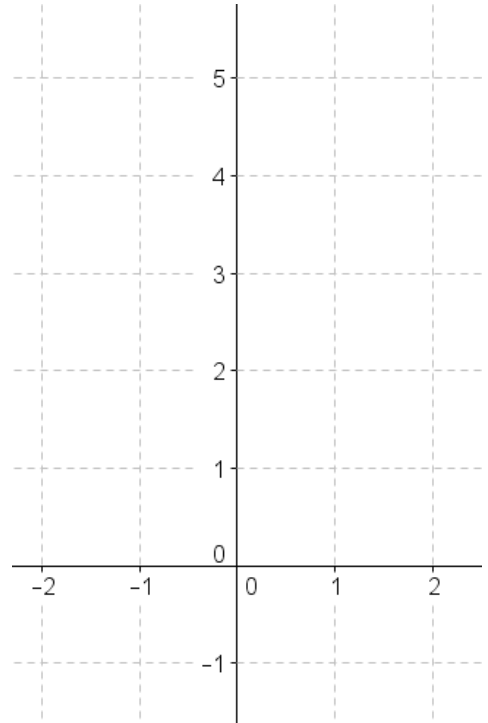
### ÖLÇEKLENDİRME :

Düşey eksen ve yatay eksenle yapılan ötelemeler, başlangıçtaki fonksiyon grafiğinin sadece yerini değiştirmektedir. Ölçeklendirme dönüşümleri ise fonksiyon grafiğinde bozulmalara neden olabilir. Bu bozulmalar, fonksiyonun grafiğinin eksenlere göre daralma ya da genişleme yapmasıyla ortaya çıkar. Bu ise cebirsel olarak,  $f(x)$  fonksiyonunun bağımsız ya da bağımlı değişkeninin sıfırdan farklı bir gerçekte sayı ile çarpılmasıyla gerçekleşir. Bu dediklerimizi örnekleyelim. Bunu için geogebra programından yardım alalım.

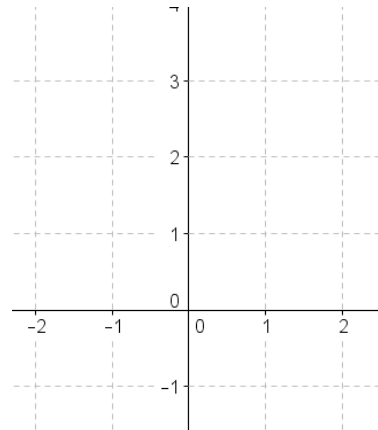
$y=x^2$  fonksiyonunu çizelim.



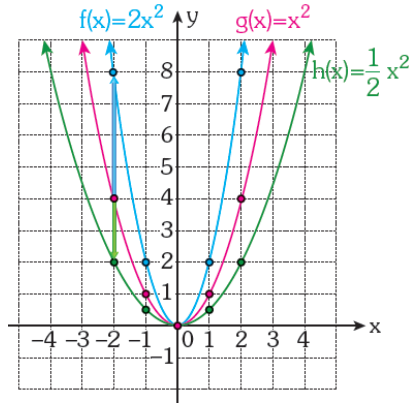
Acaba  $y=2.x^2$  fonksiyonun grafiği nasıldır?



$y=\frac{1}{2} x^2$  fonksiyonun grafiği nasıldır?



Böylece bir fonksiyonun y leri a katına çıkarılırsa eğri y eksenine yaklaşmaktadır.

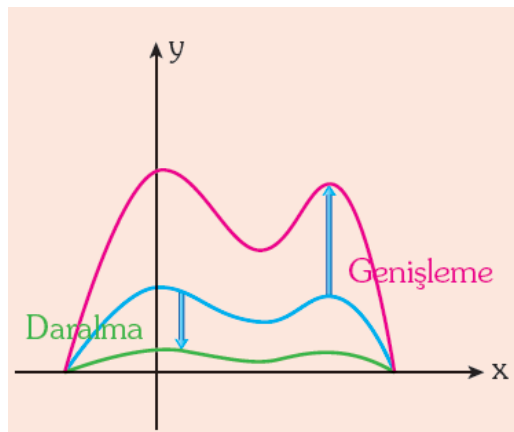


Yukarıda elde ettiğimiz grafiklerden şu sonuçlara ulaşabiliriz.  
 $g(x) = 2x^2 = 2f(x)$  olduğundan  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun grafiği üzerinde apsisi  $x$  olan noktanın ordinatı  $f(x)$  iken  $g(x)$  fonksiyonunun grafiği üzerinde apsisi  $x$  olan noktanın ordinatı  $2f(x)$  tir. Bu durumu "g(x) fonksiyonunun grafiği f(x) fonksiyonunun grafiğinin dikey olarak 2 çarpanı ile genişletilmiş halidir." biçiminde ifade edebiliriz. Benzer olarak  $h(x) = 1/2 f(x)$  olduğundan "h(x) fonksiyonunun grafiği, f(x) fonksiyonunun grafiğinin 1/2 çarpanı ile daraltılmış halidir." biçiminde ifade edebiliriz.

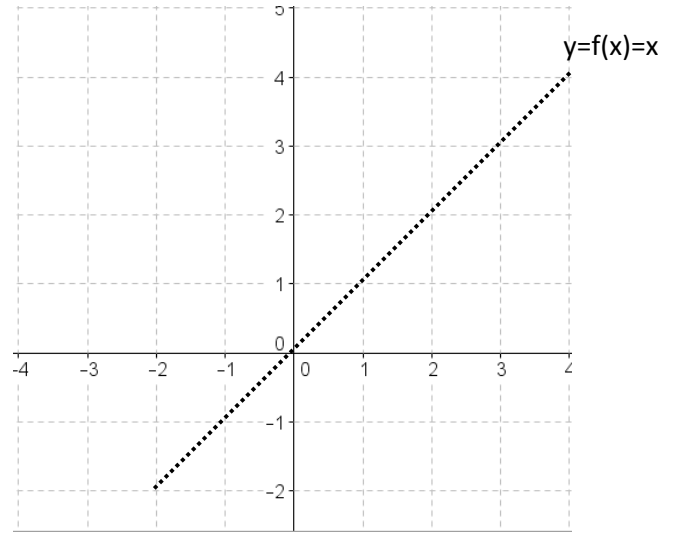
### Düşey Eksende Ölçeklendirme

k bir pozitif gerçel sayı olmak üzere,  
 1)  $k > 1$  ise  $y = k \cdot f(x)$  fonksiyonunun grafiği için,  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği, dikey olarak k çarpanı ile genişletilir.

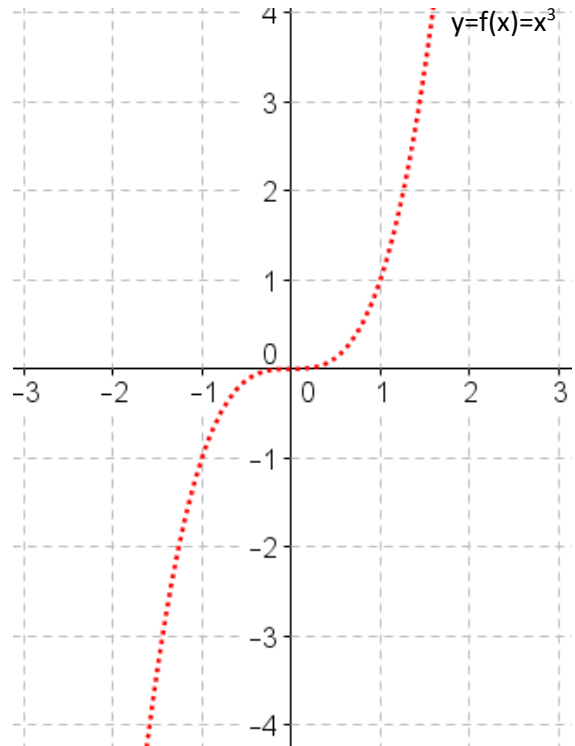
2)  $0 < k < 1$  ise  $y = k \cdot f(x)$  fonksiyonunun grafiği için,  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği dikey olarak k çarpanı ile daraltılır.



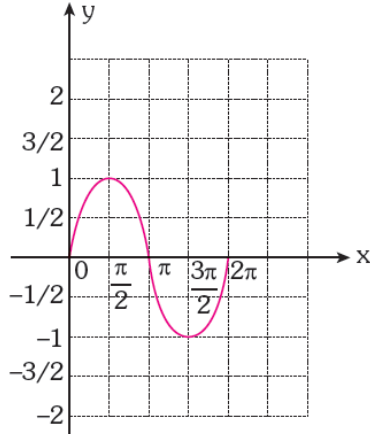
**ÖRNEK :**  $y=f(x)=x$  olduğuna göre:  
 $y=g(x)=2.f(x)$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



**ÖRNEK :**  $y=f(x)=x^3$  olduğuna göre:  
 $y=g(x)=\frac{1}{2} \cdot f(x)$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

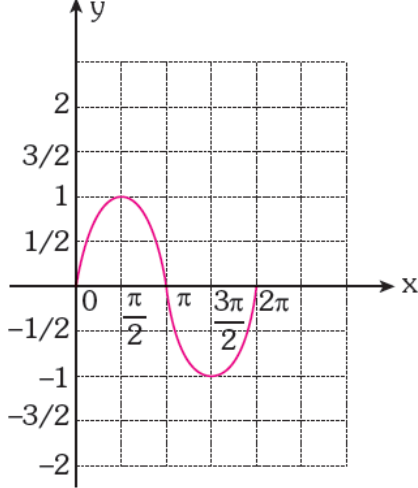


**ÖRNEK :**

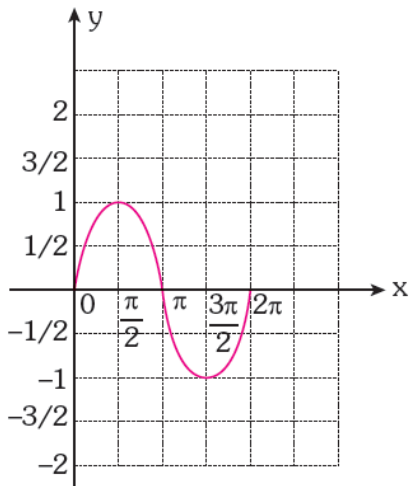


$y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. **Buna göre, aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.**

a)  $y = g(x) = 2.f(x)$



b)  $y = g(x) = \frac{1}{2}.f(x)$

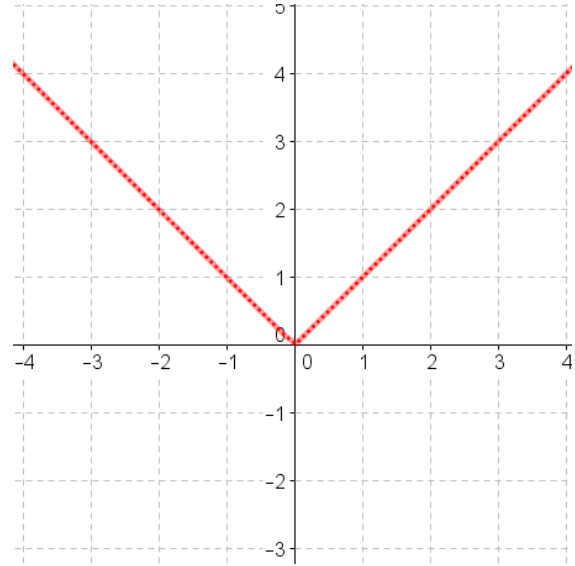


Sıra yatay eksene göre ölçeklendirmeye geldi. Bir önceki örneklerde  $y$  lerin  $k > 0$  sayısı ile çarpıldığında neler olduğunu inceledik. Şimdi ise  $x$  lerin  $k > 0$  ile çarpılmasıyla grafiğin nasıl değiştiğini inceleyelim.

Örneğin  $y = f(x) = |x|$  ise  $y = g(x) = f(2x)$  in grafiği nasıl olur? (bu sefer  $x$ 'i genişletiyoruz)

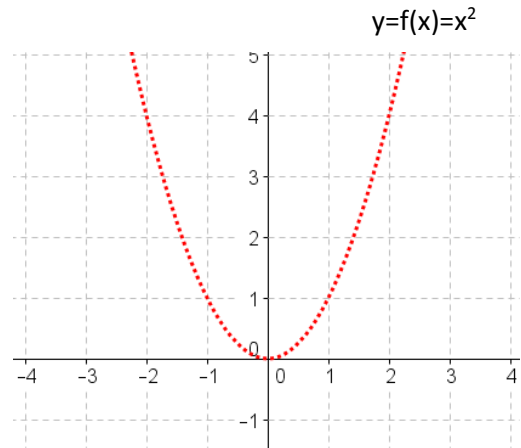
Geogebra'yı üç aşağı beş yukarı nasıl kullandığımızı öğrendik. Gelin yine Geogebra'yı kullanarak değişimin nasıl gerçekleştiğine bakalım.

Öncelikle  $y = f(x) = |x|$  i çizelim.



**ÖRNEK :**  $y = f(x) = x^2$  olduğuna göre:  $y = g(x) = f(2x)$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

İlk önce  $y = f(x) = x^2$  fonksiyonunun grafiğini çizelim.





Yukarıda verilen iki örneği inceleyerek  $g(x)=f(2x)$  ile  $g(x)=2.f(x)$  arasında bir fark olup olmadığını tartışınız. Eğer fark varsa bu farkın ne olduğunu açıklayınız.

### **Yatay Eksende Ölçeklendirme**

$k$  bir pozitif gerçel sayı olmak üzere,

1)  $k > 1$  ise  $y = f(k \cdot x)$  fonksiyonunun grafiği için,  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği yatay olarak  $\frac{1}{k}$  çarpanı ile .....

2)  $0 < k < 1$  ise  $y = f(k \cdot x)$  fonksiyonunun grafiği için,  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği yatay olarak  $\frac{1}{k}$  çarpanı ile.....

.....

