OLASILIK

SAYMA PROBLEMLERİ:

TOPLAMA YÖNTEMİ:

Bir E olayı E_1 veya E_2 olaylarından birinin gerçekleşmesiyle oluşuyor,
E_1 olayı için n seçenek, E_2 olayı için m seçenek varsa,
E olayı için n+m seçenek vardır.

$E=E_1 \cup E_2$ ve $E_1 \cap E_2=\emptyset$ için:
$s(E)=s(E_1 \cup E_2)=s(E_1)+s(E_2)=n+m$

ÖRNEK:

A kentinden B ye kara, deniz veya hava yollarından biri ile gidilebilmektedir.İki ayrı kara yolu, üç ayrı deniz yolu ve iki ayrı hava yolu bulunmaktadır.
A dan B ye kaç farklı yolla gidilebilir? Y: 2+3+2=7

ÖRNEK:

$A=\{(x,y): x^2+y^2 \leq 5 , \quad x,y \in Z\}$ kümesi kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM:

$x^2+y^2=0$ için: (0,0) 1 tane
$x^2+y^2=1$ için: (1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1) 4 tane
$x^2+y^2=2$ için: (1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1) 4 tane
$x^2+y^2=3$ için: YOK —
$x^2+y^2=4$ için: (2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2) 4 tane
$x^2+y^2=5$ için: (2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1),(1,2),
(1,-2),(-1,2),(-1,-2) 8 tane
+______
21 tane

ÇARPMA YÖNTEMİ:

Bir E olayı, ardarda E_1 ve E_2 olaylarının gerçekleşmesiyle oluşuyor,
E_1 olayı için n seçenek, E_2 olayı için m seçenek varsa,
E olayı için n.m seçenek vardır.

$s(E)=s(E_1xE_2)=s(E_1)xs(E_2)=n.m$

ÖRNEK:

A kentinde D ye, önce B ve sonra C den geçmek koşuluyla gidiliyor.
A dan B ye 2 yol, B den C ye 5 yol, C den D ye 3 yol varsa,
A dan D ye kaç değişik yoldan gidilebilir? Y:2.3.5=30

ÖRNEK:

{ 0,1,2,...,9 } elemanları kullanılarak n basamaklı kaç şifre yazılabilir?

ÇÖZÜM:

Her basamakta on tane rakam kullanılabilir.

$\underbrace{10.10.10....10}_{n \text{ tane}}=10^n$

ÖRNEK:

Üç basamaklı doğal sayılardan kaç tanesinde 0 rakamı kullanılır?

ÇÖZÜM:

Üç basamaklı doğal sayılar: 9.10.10=900 tane
0 rakamı kullanılmayanlar: 9.9.9=729 tane
0 rakamı kullanılanlar: 900-729=171 tane

ÖRNEK:

En az iki basamağı aynı olan dört basamaklı kaç doğal sayı vardır?

ÇÖZÜM:

Dört basamaklı doğal sayılar: 9.10.10.10.=9000
Basamakları farklı olanlar: 9.9.8.7=4536
En az iki basamağı aynı olanlar: 9000-4536=4464

ÖRNEK:

s(A)=n, s(B)=m olmak üzere;
A dan B ye kaç tane fonksiyon tanımlanabilir?
Bu fonksiyonlardan kaç tanesi bire-birdir?

ÇÖZÜM:

A daki 1. eleman, B deki m tane elemandan biriyle,
2. eleman, B deki m tane elemandan biriyle,

n. eleman, B deki m tane elemandan biriyle eşlenebileceğinden;
n tane m in çarpımı (n^m) kadar eşleme yapılabilir.

Fonksiyon sayısı: n^m dir.

A daki 1. eleman, B deki m tane elemandan biriyle,
2. eleman, kalan m-1 tane elemandan biriyle,
3. eleman, kalan m-2 tane elemandan biriyle,

n. eleman, kalan m-(n-1) tane elemandan biriyle eşlenebileceğinden , eşleme sayısı :
m.(m-1).(m-2)…(m-n+1) dir.

Bu da tanımlanabilecek 1-1 fonksiyonların sayısıdır.

ÖRNEK:

{0,1,2,3,4,5} kümesinin elemanları ile;

a. Üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

Yüzler basamağına: 0 dışında beş rakamdan biri,
Onlar basamağına: altı rakamdan biri,
Birler basamağına: altı rakamdan biri yazılabileceğinden ;
5.6.6=180 sayı yazılabilir.

b. Üç basamaklı, rakamları tekrarsız kaç sayı yazılabilir?

Yüzler basamağına: 0 dışında beş rakamdan biri,
Onlar basamağına: kalan beş rakamdan biri,
Birler basamağına: kalan dört rakamdan biri yazılabileceğinden ;
5.5.4=100 sayı yazılabilir.

c. Üç basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

Yüzler basamağına: 0 dışında beş rakamdan biri,
Onlar basamağına: altı rakamdan biri,
Birler basamağına: 0 veya 2 veya 4 rakamlarından biri yazılabileceğinden; 5.6.3=180 sayı yazılabilir.

ÖRNEK:

600 sayısının kaç tane pozitif tamsayı böleni vardır?

ÇÖZÜM:

$600=2^3.3.5^2$
Pozitif tamsayı bölenlerinde:
2 olmayabilir, 2 olabilir, 4 olabilir, 8 olabilir. (4 seçenek)
3 olmayabilir, 3 olabilir. (2 seçenek)
5 olmayabilir, 5 olabilir, 25 olabilir. (3 seçenek)
seçenek sayıları çarpımı: 4.2.3=24

KURAL: Farklı asal çarpanlarının üslerinin birer fazlalarının çarpımı kadar pozitif tamsayı böleni vardır.

ÖRNEK:

A={1,2,….,100} kümesi için ;

Ü={(a,b,c): a,b,c $\in$ A , a < b ve a < c } kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM:

a=1,2,…,99 alındığında;

b sayısı 100-a türlü, c sayısı 100-a türlü seçilebilir.

(a,b,c) gibi $(100-a)^2$ tane üçlü yazılabir.

a=1 alınırsa, b için 98, c için 98 seçenek. $98.98=98^2$

a=2 alınırsa, b için 97, c için 97 seçenek. $97.97=97^2$

…………

a=98 alınırsa,b için 1, c için 1 seçenek. $1.1=1^2$

$99^2+98^2+\ldots+1^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$=328 350

PERMÜTASYON (SIRALAMA)

A={a_1,a_2,…,a_n} kümesinin
$0 \le r \le n$ olmak üzere elemanlarından r tanesinin sıralanmasına n elemanın r-li bir permütasyonu denir.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

$P(n,0)=1$ ve $P(n,n)=n!$ dir.

ÖRNEK:

A={a,b,c,d} kümesinin 3 lü permütasyonları?

ÇÖZÜM:

P(4,3)=4.3.2=24

abc	bac	cab	dab
acb	bca	cba	dba
abd	bad	cad	dac
adb	bda	cda	dca
acd	bcd	cbd	dbc
adc	bdc	cdb	dcb

ÖRNEK:

E={a,b,c,,,,x,y,z} 26 harfli İngiliz abc si. 21 sessiz, 5 sesli harf var.
İlk ve son harfleri farklı sesli harflerden, diğerleri farklı sessiz harflerden oluşan 5 harfli kaç kelime yazılabilir?

ÇÖZÜM:

İlk ve son harflerde:
5 sesli harften ikisi, P(5,2)
araya: 21 sessiz harften üçü, P(21,3) şekilde sıralanabilir.
Hepsi birlikte:
P(5,2).P(21,3)=5.4.21.20.19=159 600

ÖRNEK:

7 erkek, 3 kız öğrenci yan yana sıralanacak:

a. Koşulsuz: $P(10,10)=10!$

b. 3 kız bir arada olacak:

3 kız, bir eleman olarak alınırsa, 7 erkekle birlikte;
$P(8,8)=8!$ şekilde sıralanır.
3 kız kendi aralarında; $P(3,3)=3!$ şekilde sıralanır.
Hepsi birlikte; $P(8,8).P(3,3)=8!.3!$ şekilde sıralama yapılabilir.

c. Baş ve sonda erkekler olacak, herhangi iki kız yan yana gelmeyecek:

7 erkek kendi aralarında; $P(7,7)=7!$,
arada kalan 6 yere de 3 kız; $P(6,3)$
ve birlikte; $7!.6.5.4$

ÖRNEK:

20000 ile 70000 arasında rakamları tekrarsız kaç çift sayı vardır?

ÇÖZÜM:

On binler basamağına; $A=\{2,3,4,5,6\}$
Birler basamağına; $B=\{0,2,4,6,8\}$ kümesinin elemanlarından biri yazılacaktır. $A\cap B=\{2,4,6\}$

On binler basamağına; $\{2,4,6\}$ dan biri yazılırsa,
Birler basamağına; B de kalan dört elemandan biri,
diğer üç basamağa da kalan sekiz rakamdan üçü yazılır. $3.4.P(8,3)$ sayı yazılır. VEYA
On binler basamağına; $\{3,5\}$ ten biri yazılırsa,
Birler basamağına; B den biri ve diğer üç basamağa da kalan sekiz rakamdan üçü yazılır. $2.5.P(8,3)$ sayı yazılır.

Hepsi birlikte:
$3.4.P(8,3)+2.5.P(8,3)=7392$ sayı.

ÖRNEK:

{1,3,5,7} kümesinin elemanları ile rakamları tekrarsız kaç sayı yazılabilir? Toplamları kaçtır?

ÇÖZÜM:

Bir basamaklı: P(4,1)=4 tane
İki basamaklı: P(4,2)=4.3=12 tane
Üç basamaklı: P(4,3)=4.3.2=24 tane
Dört basamaklı: P(4,4)=4.3.2.1=24 tane
Hepsi birlikte: 4+12+24+24=64 tane sayı yazılabilir.

Bir basamaklıların toplamı: 1+3+5+7=16
İki basamaklıların toplamı:
12 tane sayının her basamağında, her rakam 12:4=3 er kez kullanılmıştır. Toplam: 3.16.10+3.16=528

Üç basamaklıların toplamı:
24 tane sayının her basamağında, her rakam 24:4=6 şar kez kullanılmıştır. Toplam:6.16.100+6.16.10+6.16=10656

Dört basamaklıların toplamı:
24 tane sayının her basamağında, her rakam 24:4=6 şar kez kullanılmıştır.
Toplam: 6.16.1000+6.16.100+6.16.10+6.16=106656

Tümünün toplamı: 106656+10656+528+16=117856

ÖRNEK:

Yazılabilen dört basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında, baştan 19. sayı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Her basamakta, her sayı altışar kez kullanıldığından:
1 ile , 3 ile ,5 ile başlayan altışar sayı vardır.
19. sayı 7135 olur.

DÖNEL SIRALAMA:

s(A)=n ve $0 \leq r \leq n$ olmak üzere;
r elemanın dönel sıralama sayısı:

$$Q(n,r)=\frac{P(n,r)}{r} \quad \text{dir.}$$

$$Q(n,n)=\frac{P(n,n)}{n}=(n-1)!$$

ÖRNEK:

A={a,b,c,d} kümesinin 3 lü dönel sıralama sayısı?

ÇÖZÜM:

Q(4,3)= $\frac{P(4,3)}{3}=\frac{4.3.2}{3}=8$

ÖRNEK:

5 erkek, 3 kız öğrenci yuvarlak masa etrafına sıralanacak:

a. Koşulsuz: Q(8,8)=(8-1)!=7!

b. E_1 ve K_1 yan yana olacak:

E_1,K_1 bir eleman olarak alınırsa, diğerleriyle birlikte
7 eleman sıralanır. Q(7,7)=(7-1)!=6!
E_1, K_1 kendi aralarında 2! şekilde sıralanır.
Tümü bir arada düşünülürse:
6!.2! sıralama vardır. 6!.2=1 440

c. E_1 ve K_1 yan yana olmasın:

Koşulsuz sıralama sayısı ile yan yana olma sayısı arasındaki fark,yan yana olmama durumunu verir. 7!-6!.2=3 600

d. Herhangi iki kız yan yana gelmesin:

5 erkek sıralanır: (5-1)!=4!
Aralarındaki 5 boşluğa 3 kız sıralanır: 5.4.3
Tümü bir arada düşünülürse:
4!.5.4.3 sıralama var.

ÖRNEK:

n evli çift yuvarlak masa etrafına sıralanacak:

a. Bir erkek, bir bayan:

n erkek sıralanır: (n-1)!

Aralarındaki n boşluğa n bayan sıralanır: n!

Tümü bir arada düşünülürse: (n-1)!.n! sıralama var.

b. Çiftler ayrılmayacak:

Çiftler bir eleman olarak alınırsa: n çift, (n-1)!

Her çift kendi arasında 2 şekilde sıralanacağından:

n çift kendi aralarında : 2^n

Tümü bir arada düşünülürse : $(n-1)!.2^n$

TEKRARLI PERMÜTASYON:

n tane elemandan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tanesi aynı ve $r_1+r_2+\ldots+r_n=n$ olmak üzere n elemanın tekrarlı permütasyonlarının sayısı:

$$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ kümesinin r elemanlı tekrarlı permütasyonlarının sayısı:

n^r dir.

ÇÖZÜM:

1. sıraya, n tane elemandan biri;

2. sıraya, n tane elemandan biri;

……….

r. sıraya, n tane elemandan biri yazılabileceğinden,

r tane n in çarpımı (r^n) kadar sıralama yapılabilir.

ÖRNEK:

A={a,b,c} kümesinin 2 li tekrarlı permütasyonları 3^2 tanedir.

aa , ab , ba , ac , ca , bb , bc , cb , cc

ÖRNEK:

4 ev, 6 renk boya ile kaç değişik şekilde boyanır?

a. Koşulsuz: $6.6.6.6=6^4$

b. Farklı renkler kullanılacak: P(6,4)=6.5.4.3=180

c. Yan yana iki ev aynı renkten olmasın: 6.5.5.5

ÖRNEK:

a,a,a,b,c harfleri ile 5 harfli kaç kelime yazılabilir?

ÇÖZÜM:

$P(5;3,1,1)=\frac{5!}{3!.1!.1!}=5.4=20$

ÖRNEK:

2 tane 0, 3 tane 1, 5 tane 2 rakamıyla;

a. 10 basamaklı kaç şifre yazılabilir?

$P(10;2,3,5)=\frac{10!}{2!.3!.5!}=2520$

b. 10 basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

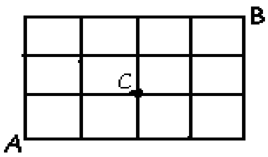
0 ile başlayan şifre sayısı: $P(9;1,3,5)=\frac{9!}{3!.5!}=504$

2520-504=2016 tane doğal sayı yazılabilir.

2.YOL: 1 başlayanlar+ 2 ile başlayanlar

P(9;2,2,5)+P(9;2,3,4)=756+1260=2016

ÖRNEK:



A dan B ye en kısa yoldan kaç değişik şekilde gidilebilir?

ÇÖZÜM:

Yatay yollar : 1 sembolü ile,

Dikey yollar : 0 sembolü ile gösterildiğinde;

A dan, B ye en kısa yol: 4 tane 1, 3 tane 0 sembolü ile yazılabilecek şifre sayısı kadardır. P(7;4,3)= $\frac{7!}{4!.3!} = 35$

C den geçmek koşulu ile:

A dan, C ye: P(3;2,1)= $\frac{3!}{2!} = 3$ C den, B ye: P(4;2,2)= $\frac{4!}{2!.2!} = 6$

A dan, C ye VE C den, B ye: 3.6=18

ÖRNEK:

6 tane özdeş portakal, 3 çocuğa kaç değişik şekilde dağıtılabilir?

ÇÖZÜM:

Portakallar 0 sembolü ile , ayıraçlar 1 sembolü ile gösterilirse; iki tane ayıraç, altı portakalı üç bölüme ayırır.

Örneğin: 00100010 yazılımında;

1. çocuk 2, 2. çocuk 3, 3. çocuk 1 portakal almıştır.

Dağılım sayısı: P(8;6,2)= $\frac{8!}{6!.2!} = 28$

Her çocuk en az bir portakal alıyor ise:

İki ayıraç, 6 portakalın aralarında oluşan 5 tane aralıktan seçilen iki tanesine yazılır:

Dağılım sayısı: C(5,2)=10

!!! UYARI: Dağıtılacak özdeş nesne sayısı: r

Kişi sayısı: n ise ; C(r-1, n-1) dağılım vardır.

KOMBİNASYON:

S(A) = n ve $0 \leq r \leq n$ olmak üzere;
A kümesinin r elemanlı alt kümelerine
n elemanın r-li bir kombinasyonu denir.

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

- $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$, $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

ÖRNEK:

A={a,b,c,d} kümesinin 3-lü kombinasyonları?

ÇÖZÜM:

{a,b,c} , {a,b,d} , {a,c,d} , {b,c,d} olmak üzere;

$\binom{4}{3}=4$ tane.

ÖRNEK:

4 öğretmen, 7 öğrenciden 5 kişilik grup kaç değişik şekilde seçilebilir?

a. Koşulsuz: $\binom{11}{5} = 462$

b. 2 si öğretmen: $\binom{4}{2}\binom{7}{3} = 6.35 = 210$

c. En az 3 ü öğretmen: $\binom{4}{3}\binom{7}{2} + \binom{4}{4}\binom{7}{1} = 91$

d. Belli bir öğretmen ile belli bir öğrenci bir arada olmayacak:

$$\binom{11}{5} - \binom{9}{3} = 378$$

Belli bir öğretmenle, öğrenciyi alır, kalan 9 kişi içinden 3 kişi daha seçersek; öğretmen ile öğrencinin bir arada olduğu grupları buluruz.

ÖRNEK:

n köşeli konveks çokgenin köşegenleri kaç noktada kesişir?

ÇÖZÜM:

C(n,4)= $\frac{n!}{4!(n-4)!}$

(oluşturulabilen dörtgen sayısı)

ÖRNEK:

6 kişi, her masada en az bir kişi olmak koşulu ile yuvarlak masalara kaç değişik şekilde sıralanabilir?

2 masaya:

$$\binom{6}{5}.4!.0!+\binom{6}{4}.3!.1!+\frac{1}{2}\binom{6}{3}.2!.2!=274$$

Masalara dağılım: 5, 1 veya 4, 2 veya 3, 3 olabilir.

UYARI: 3'e, 3 dağılımda masalar farklı kabul edilmemiştir.

3 masaya:

$$\frac{1}{2}\binom{6}{4}\binom{2}{1}.3!.0!.0!+\binom{6}{3}\binom{3}{2}.2!.1!+\frac{1}{3!}\binom{6}{2}\binom{4}{2}.1!.1!.1!=225$$

Masalara dağılım: 4, 1, 1 veya 3, 2, 1 veya
2, 2, 2 olabilir. (Eşit sayıda kişi bulunan masalar farklı kabul edilmemiştir.)

- 2n elemanlı küme ikişerli gruplara kaç değişik şekilde ayrılabilir?

$$(2n-1)(2n-3)...5.3.1=\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}...\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{n!}=\frac{(2n)!}{n!.2^n}$$

- A={1,2,...,n} kümesinin ardışık sayı içermeyen r-li kombinasyonları?

$(0\le r\le n-r+1)$ için $\binom{n-r+1}{r}$ dir.

ÖRNEK:

A={1,2,3,4,5,6,7} kümesinin ardışık sayı içermeyen 3 elemanlı alt kümeleri?

$\binom{7-3+1}{3}=10$ tanedir.

ÖRNEK:

10 kişilik bir sınıftan:

a. 2 kişi kaç değişik şekilde seçilebilir? C(10,2)=45

b. Bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç değişik şekilde seçilebilir? P(10,2)=90

c. 2 şerli gruplar kaç değişik şekilde oluşturulabilir?

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{5!}=9.7.5.3.1=945$$

d. Oluşturulacak 2 şerli gruplar farklı yerlere gönderilecek ise: $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=113400$

M={ $\infty.a_1,\infty.a_2,...,\infty.a_n$ } kümesinden her eleman istenildiği kadar kullanılmak üzere r elemanlı kombinasyon sayısı:

$\binom{r+n-1}{r}$ dir.

ÖRNEK:

3 çeşit tost satılan büfeden 6 tost kaç değişik şekilde alınabilir? $\binom{3+6-1}{6}=28$

ÖRNEK:

A={1,2,3,4} kümesinin 3-lü kombinasyonları kaç tanedir?

ÇÖZÜM:

$\binom{4}{3}=4$ tanedir.

(Burada bir eleman birden fazla kullanılamaz.)

Her eleman istenildiği kadar kullanılırsa; $\binom{4+3-1}{3}=20$

ÖRNEK:

İçinde üç çeşit şeker bulunan bir kavanozdan, üç şeker kaç değişik şekilde seçilebilir?

ÇÖZÜM:

A,A,A	A,A,B	A,A,C	A,B,B	A,C,C
B,B,B	B,C,C	C,C,C	C,B,B	A,B,C

Olmak üzere;

$$\binom{r+n-1}{r}=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$$ tanedir.

ÖRNEK:

x,y,z pozitif tamsayıları için; xyz=4000 olacak şekilde kaç farklı (x,y,z) üçlüsü yazılabilir?

ÇÖZÜM:

$4000 = 2^5.5^3$

$$\binom{5+3-1}{5}\binom{3+3-1}{3}=21.10=210$$

DAĞITIM PROBLEMLERİ:

A) r farklı nesne, n farklı kutuya:

1) Her kutuya en çok bir tane:
$P(n,r)=n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$

2) Her kutuya istenildiği kadar: $n.n...n=n^r$

3) Her kutuya istenildiği kadar:
(kutulardaki sıra önemli)
$n(n+1)(n+2)...(n+r-1)=\dfrac{(n-1+r)!}{(n-1)!}$

B) r özdeş nesne, n farklı kutuya:

1) Her kutuya en çok bir tane: $\binom{n}{r}$

2) Her kutuya istenildiği kadar: $\binom{r+n-1}{r}$

3) Her kutuya en az bir tane: $\binom{r-1}{n-1}$

ÖRNEK:

x+y+z=2 denkleminin doğal sayı çözümlerinin kümesi kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM:

2=1+1 , iki tane 1 sayısı, x,y ve z bilinmeyenlerine istenildiği kadar dağıtılacak:

$$\binom{r+n-1}{r}=\binom{2+3-1}{2}=\binom{4}{2}=6$$

Ç={(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),
(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)}

ÖRNEK:

Beş farklı kitap, üç raflı bir kitaplığa yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?
(Raflara istenildiği kadar kitap sıralanabilir.)

ÇÖZÜM:

1. kitap, 3 raftan birine,
2. kitap, 4 yerden birine,
(3 raf+1. kitabın ayırdığı bölümlerden biri)
3. kitap, 5 yerden birine,
(3 raf+1. ve 2. kitapların ayırdığı bölümler.)
……………….
3.4.5.6.7=2520 değişik sıralama yapılabilir.

BİNOM TEOREMİ:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\ldots+\binom{n}{r}x^{n-r}y^r+\ldots+\binom{n}{n}y^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

Baştan (r+1) inci terim : $\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ dir.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n.2^{n-1}$$

$$\binom{n}{r_1\quad r_2\quad .\quad .\quad r_n}=\frac{n!}{r_1 r_2 \ldots r_n}$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum\binom{n}{r_1\quad r_2\quad .\quad .\quad r_m}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_m^{r_m}$$

Katsayılar toplamı: m^n

Farklı terim sayısı: $\binom{n+m-1}{n}$

Katsayılar içinde en büyüğü: n=mr ise $\frac{n!}{(r!)^m}$

n=mr+k ise $\frac{n!}{(r+1)^k(r!)^m}$

ÖRNEK:

$(x+y+z)^4$ ifadesinin açılımında:

Katsayılar toplamı: $3^4=81$

Farklı terim sayısı: $\binom{4+3-1}{4}=15$

Katsayılar içinde en büyüğü: $\frac{4!}{2!(1!)^3}=12$

OLASILIK:

ÖRNEK UZAY:

Sonucu belli olmayan bir deneyde elde edilmesi mümkün olan bütün sonuçların kümesine örnek uzay denir.

OLAY:

Örnek uzayın herhangi bir alt kümesine olay denir.

$\emptyset$:imkansız olay   E:kesin olay

Örnek uzayın ayrık iki alt kümesine ayrık olaylar denir.

Örnek uzayın bütün alt kümelerinin kümesinden [0,1] aralığına tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan her P fonksiyonuna olasılık fonksiyonu ve $A \subset E$ olayının P(A) görüntüsüne A nın olasılık'ı denir.

O_1: $A \subset E$ ise $0 \leq P(A) \leq 1$

O_2: $P(E)=1$

O_3: $A \cap B=\emptyset$ ise $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

$P(\emptyset)=0$

$A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$P(A')=1-P(A)$

$E=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ için $P(a_1)=P(a_2)=\dots=P(a_n)$ ise

E örnek uzayına eş olumlu örnek uzayı denir. $P(A)=\dfrac{s(A)}{s(E)}$

B olayının gerçekleşmiş olması halinde, A olayının olasılığına A nın, B koşullu olasılığı denir. $P(A\backslash B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{s(A\cap B)}{s(B)}$

$P(A \cap B)=P(A).P(B)$ ise A ve B bağımsızdır.

n tane bağımsız deneyin her birinden olumlu sonuç elde edilme olasılığı p olsun.

Bu n tane deneyden r tane olumlu sonuç elde edilme olasılığı:

$\binom{n}{r}.p^r.(1-p)^{n-r}$ dir. (Binom dağılım fonk.)

ÖRNEK:

Beşer seçenekli,25 sorulu bir testte,soruların tümünü tahmin eden öğrencinin 24 soruyu doğru işaretleme olasılığı kaçtır?

ÇÖZÜM:

5 seçenekli bir soruda doğru tahmin yapma olasılığı:

p=$\frac{1}{5}$ tir.

Yanlış tahmin yapma olasılığı: 1-p=$\frac{4}{5}$ olur.

P(A)=$\binom{25}{24}(\frac{1}{5})^{24}.(\frac{4}{5})$

ÖRNEK:

A nın problemi çözme olasılığı 4/5,
B nin 2/3, C nin 3/7 dir.
Üçü de uğraştığında problemin çözülmüş olma olasılığı ?

ÇÖZÜM:

Problemi çözememe olasılıkları;

P(A')=1-$\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, P(B')=1-$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, P(C')=1-$\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

Üçünün de problemi çözememe olasılığı:

P(A'$\cap$B'$\cap$C')=$\frac{1}{5}.\frac{1}{3}.\frac{4}{7}=\frac{4}{105}$

Problemin çözülmüş olma olasılığı: 1-$\frac{4}{105}=\frac{101}{105}$

ÖRNEK:

Bir çift zar atıldığında toplam 8 gelme olasılığı kaçtır?

ÇÖZÜM:

E={(1,1),(1,2), … ,(6,6)} , s(E)=36
A={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)} , s(A)=5

P(A)=$\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{5}{36}$

ÖRNEK:

6 kırmızı, 4 beyaz, 8 mavi top bulunan torbadan 3 top çekiliyor.

a. Üçü de kırmızı:

s(E)=$\binom{18}{3}=\frac{18.17.16}{3.2.1}$ s(A)=$\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}$

P(A)=$\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6.5.4}{18.17.16}$

b. 2 beyaz, 1 kırmızı:

s(E)=$\binom{18}{3}=\frac{18.17.16}{3.2.1}$ s(A)=$\binom{6}{2}\binom{8}{1}=\frac{6.5}{2.1}.\frac{8}{1}$

P(A)=$\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6.5.8.3}{18.17.16}$

c. En az bir kırmızı:

s(E)=$\binom{18}{3}=\frac{18.17.16}{3.2.1}$ s(A)=$\binom{12}{3}=\frac{12.11.10}{3.2.1}$

P(A)=$\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{12.11.10}{18.17.16}$ hiç biri kırmızı değil.

P(A')=1-P(A)=1-$\frac{12.11.10}{18.17.16}$ en az biri kırmuzı.

d. Üçü de farklı renkten:

s(E)=$\binom{18}{3}=\frac{18.17.16}{3.2.1}$, s(A)=$\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{8}{1}$

P(A)=$\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6.4.8.3!}{18.17.16}$

e. Önce kırmızı, sonra beyaz, sonra mavi çekme olasılığı:

P(K)=$\frac{6}{18}$, P(B)=$\frac{4}{17}$, P(M)=$\frac{8}{16}$

P(A)=P(K$\cap$B$\cap$M)=P(K).P(B).P(M)=$\frac{6.4.8}{18.17.16}$

ÖRNEK:

A nın 3, B nin 9 kitabı vardır.
Kitaplarını kaç değişik biçimde değiştirebilirler?

ÇÖZÜM:

Birer, ikişer veya üçer kitap değiştirebileceklerinden;

$$\binom{3}{1}\binom{9}{1}+\binom{3}{2}\binom{9}{2}+\binom{3}{3}\binom{9}{3}=3.9+3.36+1.84=219$$

ALIŞTIRMALAR:

$$\frac{1}{\binom{9}{r}}-\frac{1}{\binom{10}{r}}=\frac{11}{6\binom{11}{r}}$$ ise r=?

Y:5

$(x+y+z)^{1996}$ ifadesinin açılımında $x^{19}y^{96}$ lı terim?

Y: $\binom{1996}{19}\binom{1977}{96}x^{19}y^{96}z^{1881}$

{1,2,3,4,5,6} kümesinin elemanları ile üç basamaklı, rakamları farklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında baştan 61. sayı kaçtır?

Y:412

Altı çocuklu (ikiz çocuk yok) bir ailenin çocuklarının üçünün erkek, üçünün kız olma olasılığı kaçtır?

Y:5/16

KONU TESTİ:

1. Bir çift zar atılıyor. Üstte okunan sayılar toplamının çift sayı olma olasılığı kaçtır?

A) 17/36 B) 1/2 C) 5/9 D) 7/12 E) 5/12

2. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} kümesi veriliyor.

A kümesinden seçilen bir elemanın $\{3,4\} \cup \{4,5,6,7\} \cup \{6,7,8\}$ kümesinin de elemanı olma olasılığı kaçtır?

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6 D) 0,7 E) 0,8

3. Bir torbada 5 beyaz, 5 kırmızı, 5 siyah ve 5 sarı olmak üzere toplam 20 top vardır.

Torbadan aynı anda çekilen 4 toptan en az ikisinin aynı renkten olma olasılığı kaçtır?

A) 800/969 B) 4219/4845 C) 864/969 D) 844/969 E) 3456/4854

4. Analitik düzlemde köşeleri ;

A(1,1) , B(-1.1) , C(1,-1) ve D(-1,-1) olan kare alınıyor.

Kare içinde alınan bir P noktasının O(0,0) noktasına, A(1,1) noktasından daha yakın olma olasılığı kaçtır?

A) 1/8 B) 1/4 C) 3/8 D) 5/8 E) 7/8