

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodunu Bulma

Eyüp Kamil Yeşilyurt

Bu yazımda sadece trigonometrik fonksiyonları düşünerek, genel ve pratik sonuçlar vermeye çalışacağım. Benzer çalışma trigonometrik olmayan fonksiyonlarda da yapılmalı, bu da yeni bir araştırma konusu olduğundan o kısımları okuyucunun merakına bırakıyorum.

Birinci Bölüm

Tanım. f , A 'dan B 'ye tanımlı bir fonksiyon olsun. A kümesinin her x elemanı için, $f(x + T) = f(x)$ eşitliğini gerçekleyen sıfırdan farklı en az bir pozitif T reel sayısı varsa, f 'ye **periyodik fonksiyon**, T 'ye **f 'nin bir periyodu** denir. Eğer bu eşitliği gerçekleyen birden fazla pozitif T reel sayısı varsa bunların en küçüğüne **f 'nin esas periyodu** denir. f fonksiyonunun periyodu¹ T_f veya $\text{Per}(f)$ ile gösterilir.

Bilinen şu eşitlikleri tekrar hatırlatalım:

$$\begin{aligned}\text{Per}(\sin x) &= \text{Per}(\cos x) = \text{Per}(\sec x) = \text{Per}(\text{cosec } x) = 2\pi \\ \text{Per}(\tan x) &= \text{Per}(\cot x) = \pi\end{aligned}$$

Sonuç 1: f bir trigonometrik fonksiyon ve g herhangi bir fonksiyon olmak üzere, f o g fonksiyonunun periyodik olması için gerek ve yeter koşul g fonksiyonunun doğrusal yani birinci dereceden olmasıdır.

Örnekler.

$y = 2 \cdot \sin(3x + 5) + 7$ periyodik fonksiyondur.

$y = 2 \cdot \sin(\ln x) + 7$ periyodik fonksiyon değildir.

$y = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{x} + 5\right) + 7$ periyodik değildir.

$y = 2 \cdot \sin(3x^2 + 5) + 7$ periyodik değildir.

$y = 2 \cdot \sin(3\sqrt{x} + 5) + 7$ periyodik değildir.

¹ Aksi belirtilmedikçe periyot denilince esas periyot anlaşılmalıdır.

Sonuç 2: Bir fonksiyonun kuralının toplama ve çarpmaya göre terslerini kural kabul eden fonksiyonlar da periyodik olup, periyotları aynıdır.

$$\text{Per}(f) = \text{Per}(-f) = \text{Per}\left(\frac{1}{f}\right)$$

Sonuç 3: f ile g periyodik trigonometrik fonksiyon ise $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları da periyodiktir. ²

Sonuç 4: f ve g periyodik trigonometrik fonksiyon olmak üzere

$$\text{Per}(f \mp g) = \text{OKEK} \{ \text{Per}(f), \text{Per}(g) \}$$

Bu eşitliğin daima sağlanması için $\text{Per}(f) \neq \text{Per}(g)$ olması gerekir. ³

Sonuç 5: f ve g periyodik trigonometrik fonksiyon olmak üzere;

$\text{Per}(f) = \text{Per}(g)$ ise

$$\text{Per}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Per}(f \cdot g) = \text{Per}(f^2) = \text{Per}(g^2) = \frac{\text{Per}(f)}{2} = \frac{\text{Per}(g)}{2}$$

$\text{Per}(f) \neq \text{Per}(g)$ ise

$$\text{Per}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Per}(f \cdot g) = \text{OKEK} \{ \text{Per}(f), \text{Per}(g) \}$$

Sonuç 6: f , herhangi bir trigonometrik fonksiyon olsun. a, b, c sıfırdan farklı, d ve e de herhangi iki reel sayı olmak üzere; $y = a \cdot f^b(cx + d) + e$ fonksiyonu periyodiktir.

Örnek. $y = 3 \cdot \sin^{\frac{3}{5}}(-4x + 5) + 7$ fonksiyonu periyodiktir.

Sonuç 7: f , sinüs, kosinüs, sekant ve kosekant fonksiyonlarından herhangi biri olsun. a, c sıfırdan farklı, d ve e de herhangi iki reel sayı olmak üzere;

b tek tamsayı ise

$$\text{Per}[a \cdot f^b(cx + d) + e] = \text{Per}[f(cx)] = \frac{2\pi}{c},$$

b çift tamsayı ise

$$\text{Per}[a \cdot f^b(cx + d) + e] = \text{Per}[f^2(cx)] = \frac{\pi}{c},$$

² Bileşke fonksiyonların periyotları, lise müfredatında olmadığı için bu yazımızda incelemeye alınmamıştır.

³ İstisna durumlar ilerleyen bölümlerde anlatılacaktır.

$b = \frac{m}{n}$ rasyonel ise

$$\text{Per}[a \cdot f^{\frac{m}{n}}(cx + d) + e] = \text{Per}[f^m(cx)],$$

b irrasyonel ise

$$\text{Per}[a \cdot f^b(cx + d) + e] = \text{Per}[f(cx)] = \frac{2\pi}{c}$$

Sonuç 8: f , tanjant veya kotanjant fonksiyonlarından herhangi biri olsun. a, b, c sıfırdan farklı, d ve e de herhangi iki reel sayı olmak üzere;

$$\text{Per}[a \cdot f^b(cx + d) + e] = \text{Per}[f(cx)] = \frac{\pi}{c}$$

Örnekler.

a) $\text{Per}[3 \cdot \sin^{\frac{3}{5}}(-4x + 5) + 7] = \text{Per}(\sin^3 4x) = \text{Per}(\sin 4x) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ olur.

b) $\text{Per}[2 \cdot \sin(3x + 5) + 7] = \text{Per}[2 \cdot \cos(3x + 5) + 7] = \text{Per}[2 \cdot \sec(3x + 5) + 7]$
 $= \text{Per}[2 \cdot \csc(3x + 5) + 7] = \text{Per}(\sin 3x) = \frac{2\pi}{3}$ olur.

c) $\text{Per}(\sin x \cdot \sin y) = \text{Per}(\sin x \cdot \cos y) = \text{Per}\left[\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right]$
 $= \text{Per}[\sin(x + y) + \sin(x - y)] = \text{OKEK}\{\text{Per}[\sin(x + y)], \text{Per}[\sin(x - y)]\}$ olur.⁴

Uyarı. $x \neq y$ olması durumunda $\text{Per}(\sin x \cdot \sin y) = \text{Per}(\sin x \cdot \cos y) = \text{Per}(\sec x \cdot \csc y)$ gibi değişiklikler periyodu değiştirmez.

d) $\text{Per}(\sin^2 x) = \text{Per}(\sin x \cdot \sin x) = \text{Per}(\sin 2x + \sin 0^\circ) = \text{Per}(\sin 2x) = \frac{2\pi}{2} = \pi$ olur.⁵

e) $\text{Per}(\sin^7 x \cdot \tan^4 2x) = \text{Per}(\sin x \cdot \tan 2x) = \text{Per}(\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x)$
 $= \text{Per}[\sin x \cdot (\sin 4x + \sin 0)] = \text{Per}(\sin x \cdot \sin 4x + \sin x) = \text{Per}(\sin 5x + \sin 3x + \sin x)$
 $= \text{OKEK}\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{1}\right) = \frac{\text{OKEK}(2\pi, 2\pi, 2\pi)}{\text{OBEB}(5, 3, 1)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ olur.⁶

2. yol $\text{Per}(\sin^7 x \cdot \tan^4 2x) = \text{Per}(\sin x \cdot \tan 2x) = \text{OKEK}(2\pi, \pi) = 2\pi$

⁴ Periyot hesaplarında ters dönüşüm formülünde \sin veya \cos olması önemli değildir, önemli olan x ile y 'nin toplamı ve farkının alınmasıdır.

⁵ Eğer, $\sin x \cdot (\sin 2x + \sin 0^\circ)$ gibi çarpım durumu olsaydı, $\sin 0^\circ = 0$ sadeleştirilemezdi çünkü bunun yerine $\cos 0^\circ = 1$ gelebilir ve sonucu etkileyebilirdi.

⁶ Periyotları farklı olan toplam, fark, çarpım ve bölüm durumundaki fonksiyonların varsa önce üsleri sadeleştirilmelidir.

$$f) \text{Per}\left(\frac{\tan\left(\frac{1}{4}x\right)}{\cot\left(\frac{1}{7}x\right)}\right) = \text{OKEK}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{7}\right) = \text{OKEK}(4\pi, 7\pi) = 28\pi \text{ olur.}$$

İkinci bölüm – Özel Durumlar

Soru. Aşağıdaki fonksiyonlardan periyodik olanların periyotlarını bulunuz?

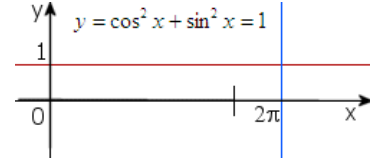
a) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

b) $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$

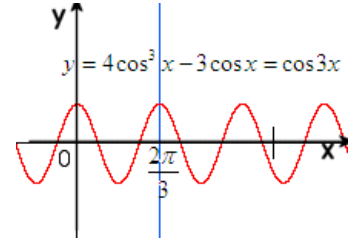
c) $y = \cos^4 x - \cos^2 x$

Çözüm.

a) $\text{Per}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \text{Per}(\sin^2 x + \sin^2 x) = \text{Per}(2\sin^2 x) = \pi$ işlemini yapamayız çünkü periyotlar farklı değil. $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ fonksiyonu ile $y = 1$ sabit fonksiyonu eşittir. Sabit fonksiyonlar tanımdan dolayı periyodik fonksiyonlar olarak kabul edilmemiştir. Sabit fonksiyon grafikleri görünüşte periyodik özelliklere sahiptir. Her pozitif değer bu fonksiyonun periyodu seçilebilirdi fakat esas periyot belirsiz olduğundan sabit fonksiyonlar periyodik kabul edilmemiştir.

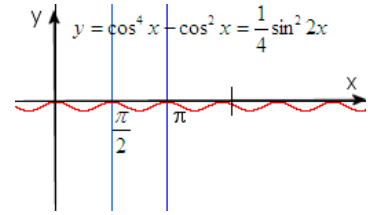


b) $\text{Per}(4\cos^3 x - 3\cos x) = \text{Per}(\sin x + \sin x) = \text{P}(2\sin x) = 2\pi$ denilemez çünkü periyotlar farklı değil. Verilen fonksiyon düzenlenirse, $4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$ eşitliğinden, $\text{Per}(4\cos^3 x - 3\cos x) = \text{Per}(\cos 3x) = \frac{2\pi}{3}$ olması gerektiğini anlıyoruz.



c) $\cos^4 x - \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x - 1) = -\cos^2 x \sin^2 x$
 $= -\frac{1}{4} \sin^2 2x$ olduğundan $\text{Per}(\cos^4 x - \cos^2 x) = \frac{\pi}{2}$

Kısa yöntemler bu örnekte de kullanılamaz.



Sonsöz, yeni baskılarında MEB ders kitabının özel durumları da dikkate alarak düzenleme yapılması temennisiyle...

Eyüp Kamil Yeşilyurt – Mustafa Yağcı