

MODÜLER ARİTMEK

$x, y \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x \equiv y \pmod{m}$ ifadesi

" x in m ye bölümünden kalan y "
şeklinde okunur.

$$5 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv 11 \equiv 14 \equiv \dots \quad (\text{hepsi 3 ile bölün - } \downarrow \text{ } \text{döğünde 2 kalanını veriyor.})$$

😊 Bir denklipin bir tarafına modun katları eklenir ya da çıkarılırsa denklik bozulmaz.

$$x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow x \pm mk \equiv y \pmod{m}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} -3 \equiv 2 \pmod{5} &\Rightarrow -3 + 5k \equiv 2 \pmod{5} \\ &\quad \downarrow \\ &2 \end{aligned}$$

$$7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\mathbb{Z}/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$\mathbb{Z}/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

1) $\mathbb{Z}/7$ de $2x+5=1$ denkleminin kökü nedir?

$$2x+5=1 \Rightarrow 2x=-4$$

$$x = -2 + 7k \Rightarrow \boxed{x=5}$$

😊 $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow x-y = mk, k \in \mathbb{Z}$ dir.

2) $4x+3 \equiv 6 \pmod{7}$ denklipini sağlayan en küçük pozitif x tam sayısı kaçtır?

$$\begin{array}{r} 4x+3 \mid 7 \\ \underline{6} \\ 6 \end{array}$$

$$4x+3 = 7k+6$$

$$4x+3-6 = 7k$$

$$4x-3 = 7k$$

\downarrow
 \times

$$k=3 \text{ için } 4x-3=21$$

$$4x=24$$

$$x=6$$

3) $3x+2 \equiv 5 \pmod{6}$ denklipini sağlayan en küçük iki basamaklı x doğal sayısı kaçtır?

$$3x+2-5 = 6k$$

$$3x-3 = 6k$$

$$3x = 6k+3$$

$$\downarrow$$

 $k=5 \text{ için } 3x=33 \Rightarrow x=11$

4) $m > 1$ olmak üzere

$76 \equiv 4 \pmod{m}$ denklipini sağlayan kaç tane m tam sayısı vardır?

$$76-4 = mk$$

$$72 = mk \Rightarrow k = \frac{72}{m}$$

$$m \rightarrow \cancel{2}, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 36, 72$$

. 11 tanedir.

5) $7k+4$ biçimindeki bir sayı 3 ile kalansız bölünebildiğine göre 21 den küçük k pozitif tam sayıları kaç tanedir?

$$7k+4 = 0+3m$$

$$k+1 = 3m$$

$$\rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$$

7 tanedir.

6) 3^{73} ün 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

$$3^{73} \equiv x \pmod{5}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$3^3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

4. kuvvette 1 bulundugu için 73 sayısı 4e bölünür.

$$\begin{array}{r} 73 \mid 4 \\ \underline{-4} \quad 12 \\ 33 \\ \underline{-32} \end{array}$$

① \Rightarrow kalan 1 olduğundan budo bizi 1.

$$\text{kuvvete } 3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

\downarrow
Cevap: 3

7) 127^9 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

$$127^1 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$127^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$127^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

⋮

$$127^9 \equiv 1 \pmod{7}$$

8) 1995^{1995} sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

$$1995 \equiv 6 \pmod{9}$$

modüler aritmetikte kalanlarla işlem yapılır.

$$6^1 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$6^2 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$6^3 \equiv 0 \pmod{9}$$

⋮

$$6^{1995} \equiv 0 \pmod{9}$$

9) $3^{1994} \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre x kaçtır?

$$3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$3^3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$1994 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\downarrow$$

$$2. \text{ kuvvete gideriz. } 3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\Downarrow$$

$$x=4$$

10) $16^{1991} \equiv x \pmod{7}$ olduğuna göre x nedir?

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1991 \equiv 2 \pmod{3}$$

↓

$$2. \text{ kuvvete gideriz. } (x=4)$$

11) $24^{103} \equiv x \pmod{7}$ olduğuna göre x kaçtır?

$$3^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$3^4 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$3^5 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\begin{array}{r} 103 \overline{) 6} \\ -6 \quad 17 \\ \hline 43 \\ -42 \\ \hline 1 \end{array}$$

1 ⇒ kalan 1 olduğundan 1. kuvvete gidilir.
x=3

12) 1998^{2014} sayısının birler basamağındaki rakam nedir?

$$\begin{array}{r} 1998 \overline{) 10} \\ -1998 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$8^1 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$8^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$8^3 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$8^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$8^5 \equiv 8 \pmod{10}$$

4 te bir tekrarladığı için
 $2014 \overline{) 4}$

2 ⇒ kalan 2 olduğundan
2. kuvvete gidilir.
kalan = 4

13) $63^{195} \equiv x \pmod{6}$ olduğuna göre x nedir?

$$63^1 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$63^2 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$63^3 \equiv 3 \pmod{6}$$

⋮

$$63^{195} \equiv 3 \pmod{6}$$

$$14) 2^x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^y \equiv 4 \pmod{7} \text{ denliklerini sağlayan}$$

en küçük x ve en küçük y pozitif tam sayıları için y-x nedir?

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ (en az)}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$3^4 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow y=4 \text{ (en az)}$$

$$4-3=1$$

15) $\mathbb{Z}/11$ de $\frac{13}{7}$ nin değeri nedir?

$$\frac{13+11k}{7} \Rightarrow k=2 \text{ için } \frac{13+22}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

16) $\mathbb{Z}/3$ te $\frac{2}{7}$ nin değeri nedir?

$$\frac{2+3k}{7} \Rightarrow k=4 \text{ için } \frac{2+12}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

17) Bugün günlerden Pazartesi olduğuna göre 250 gün sonra hangi gün olur?

$$250 \equiv 5 \pmod{7}$$

↓
kalan 5 olduğundan 5 gün ileri gideriz.

Salı
Çarş. Perş. Cuma **Cumartesi**

18) Bir doktor 3 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini Çarşamba tutan bu doktor 7. nöbetini hangi gün tutar?

$$7-1 = 6 \text{ (daha 6 nöbet tutması lazım)}$$

$$6 \cdot 3 = 18 \text{ gün ileri gidilecek}$$

$$18 \equiv 4 \pmod{7}$$

Perş.
Cuma Cumr. **Pazar**

19) 8 günde bir deneme sınavına giren bir çocuk 3. denemeye Salı günü girdiğine göre 14. denemeye hangi gün girer?

$$14-3 = 11 \text{ denemeye daha girecek}$$

$$11 \cdot 8 = 88 \text{ gün ileri gidilecek}$$

$$88 \equiv 4 \pmod{7}$$

↓

kalan 4 olduğundan

.
Cumartesi

20) Bir doktor 5 günde bir nöbet tutmaktadır. 13. nöbetini Pazar günü tutan bu doktor ilk nöbetini hangi gün tutar?

$$13-1 = 12 \text{ (geride 12 nöbet var)}$$

$$12 \cdot 5 = 60 \text{ gün geri gidilecek}$$

$$60 \equiv 4 \pmod{7}$$

↓
4 gün geri

C
Çarş. Perş. Cuma Cumartesi

21) $\mathbb{Z}/5$ te $x^2+6x+3=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$$x^2+6x+3+5=0$$

$$x^2+6x+8=0$$

$$x+4$$

$$x+2$$

$$(x+4) \cdot (x+2) = 0$$

$$x=-4 \text{ ise } \boxed{x=1} \quad \{1,3\}$$

$$x=-2 \text{ ise } \boxed{x=3}$$

22) $\mathbb{Z}/5$ te $f(x)=2x+4$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2} = \frac{1}{2} (x-4)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+5k}{2} = 3$$

$$f^{-1}(x) = 3 \cdot (x-4) = 3x - \underbrace{12}_{-12+15} = 3x+3$$

23) $(x+4) \cdot (x+5)$ çarpımı $\mathbb{Z}/5$ te nedir?

$$(x+4) \cdot (x+5) = x^2+5x+4x+20$$

$$= x^2 + \underbrace{9x}_4 + \underbrace{20}_0$$

$$= x^2+4x$$