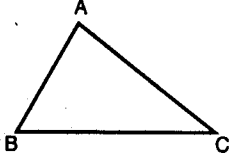


İSPATLAR

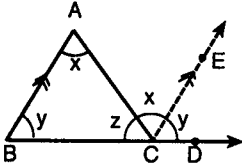
1.



Üçgenin iç açı-
larının ölçüleri
toplamı 180° dir.

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$$

İSPAT



Üçgenin iç açılarının ölçüleri x, y, z olsun.

[CE // [AB] çizelim.

$$m(\hat{BAC}) = m(\hat{ACE}) = x \text{ (İç ters açılar)}$$

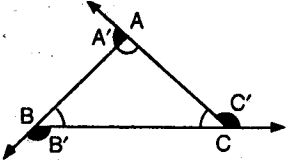
$$m(\hat{ABC}) = m(\hat{ECD}) = y \text{ (Yöndeş açılar)}$$

B, C, D noktaları doğrusal olduğundan

$$x + y + z = 180^\circ \text{ olur.}$$

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ \text{ dir.}$$

2.



Üçgenin dış
açılarının ölçü-
leri toplamı
 360° dir.

$$m(\hat{A}') + m(\hat{B}') + m(\hat{C}') = 360^\circ \text{ dir.}$$

İSPAT

$$m(\hat{A}) + m(\hat{A}') = 180^\circ$$

$$m(\hat{B}) + m(\hat{B}') = 180^\circ$$

$$+ m(\hat{C}) + m(\hat{C}') = 180^\circ$$

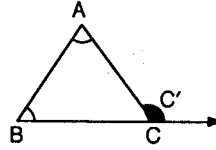
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{A}') + m(\hat{B}') + m(\hat{C}') = 540^\circ$$

$$180^\circ$$

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + 180^\circ = 540^\circ$$

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 360^\circ \text{ olur.}$$

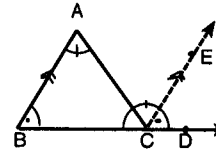
3.



Üçgende bir dış açı-
nın ölçüsü, kendi-
sine komşu olmayan
iki iç açının ölçüleri
toplamına eşittir.

$$m(\hat{C}') = m(\hat{A}) + m(\hat{B}) \text{ dir.}$$

İSPAT



[CE // [AB] çizelim.

$$m(\hat{ECA}) = m(\hat{CAB}) = m(\hat{A}) \text{ (İç ters açılar)}$$

$$m(\hat{ECD}) = m(\hat{ABC}) = m(\hat{B}) \text{ (Yöndeş açılar)}$$

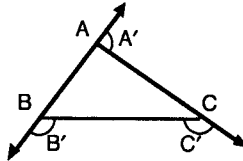
$$m(\hat{C}') = m(\hat{A}) + m(\hat{B}) \text{ bulunur.}$$

4.

Bir üçgende herhangi iki dış açının ölçüleri
toplamından üçüncü dış açının ölçüsü çı-
karılırsa, sonuç üçüncü iç açının ölçüsünün
iki katına eşit olur.

$$m(\hat{A}') + m(\hat{B}') - m(\hat{C}') = 2m(\hat{C})$$

İSPAT



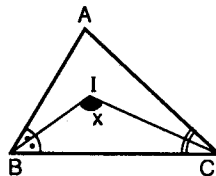
$$m(\hat{A}') = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$$

$$m(\hat{B}') = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$$

$$+ m(\hat{C}') = + m(\hat{A}) + m(\hat{B})$$

$$m(\hat{A}') + m(\hat{B}') - m(\hat{C}') = 2m(\hat{C}) \text{ olur.}$$

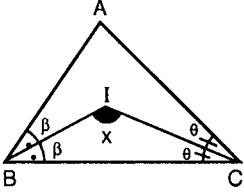
5.



Bir üçgende; iki iç
açıortayın oluştur-
duğu açının ölçüsü,
üçüncü köşedeki iç
açının ölçüsünün ya-
rısından 90° fazladır.

$$m(\hat{BIC}) = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT



ABC üçgeninde;

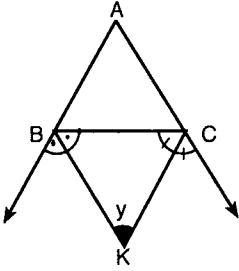
$$2\beta + 2\theta + m(\hat{A}) = 180^\circ \text{ dir.}$$

BIC üçgeninde;

$$\beta + \theta + x = 180^\circ \text{ dir.}$$

$$x = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ olur.}$$

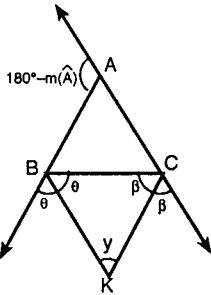
6.



Bir üçgende; iki dış açıortayın oluşturduğu açının ölçüsü, üçüncü köşedeki açının ölçüsünün yarisının tamlıdır.

$$m(\hat{BKC}) = y = 90^\circ - \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT



ABC üçgeninde dış açılar;

$$2\theta + 2\beta + 180^\circ - m(\hat{A}) = 360^\circ \text{ dir.}$$

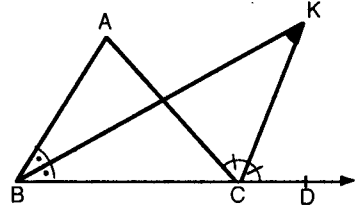
BCK üçgeninde;

$$\beta + \theta + y = 180^\circ \text{ dir.}$$

$$2(180 - y) + 180 - m(\hat{A}) = 360^\circ$$

$$y = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ bulunur.}$$

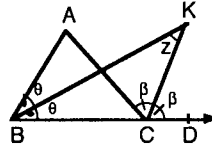
7.



Bir üçgende; komşu olmayan bir iç açı ve bir dış açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü, üçüncü köşedeki açının ölçüsünün yarisına eşittir.

$$m(\hat{BKC}) = \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT



KBC üçgeninde;

$$\beta = \theta + z$$

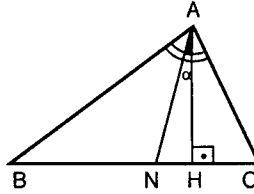
ABC üçgeninde;

$$2\beta = 2\theta + m(\hat{A})$$

$$2(\theta + z) = 2\theta + m(\hat{A})$$

$$z = \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ bulunur.}$$

8.



Bir üçgende; bir köşeden çıkan yükseklik ile iç açıortayın oluşturduğu açının ölçüsü, diğer iki açının ölçülerinin farkının mutlak değerinin yarisına eşittir.

$$m(\hat{HAN}) = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT

ABH üçgeninde;

$$m(\hat{BAH}) = 90^\circ - m(\hat{B})$$

[AN] açıortay olduğundan;

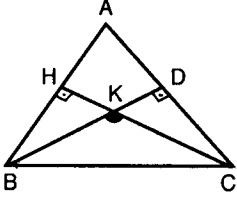
$$90^\circ - m(\hat{B}) - \alpha = \frac{m(\hat{A})}{2}$$

$$180^\circ - 2m(\hat{B}) - 2\alpha = m(\hat{A})$$

$$180^\circ - 2m(\hat{B}) - 2\alpha = 180^\circ - [m(\hat{B}) + m(\hat{C})]$$

$$\alpha = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2} \text{ bulunur.}$$

9.



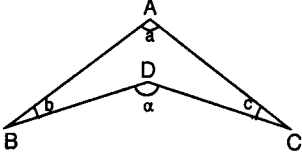
Bir üçgende; iki köşeden çizilen yükseklikler arasında oluşan açının ölçüsü, üçüncü açının bütünleridir.

$$m(\widehat{HAD}) + m(\widehat{HKD}) = 180^\circ \text{ dir.}$$

İSPAT

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{HKD}) = 180^\circ$ (Kolları karşı durumlu dik açı)

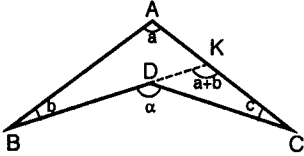
10.



Şekildeki gibi konkav bir dörtgende

$$a + b + c = \alpha \text{ dir.}$$

İSPAT



[BD]'nin uzantısı [AC] yi K da kessin.

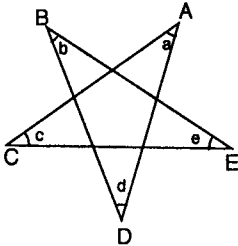
ABK üçgeninden;

$$m(\widehat{CKD}) = a + b$$

CKD üçgeninden;

$$\alpha = a + b + c \text{ bulunur.}$$

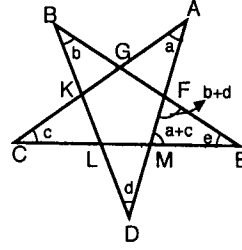
11.



Beş köşeli yıldızın iç açıları ölçüleri toplamı 180° dir.

$$a + b + c + d + e = 180 \text{ dir.}$$

İSPAT



FBD üçgeninden;

$$m(\widehat{MFE}) = b + d$$

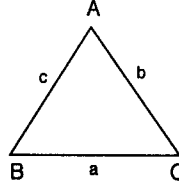
MCA üçgeninden;

$$m(\widehat{EMF}) = a + c$$

FME üçgeninden;

$$a + b + c + d + e = 180^\circ \text{ bulunur.}$$

12.



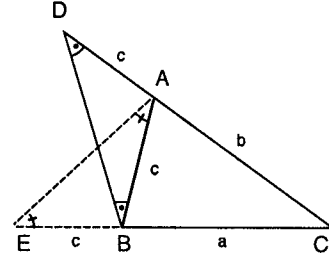
Bir üçgende bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük; farklarının mutlak değerinden büyüktür.

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

İSPAT



[AC] kenarının uzantısı üzerinde

$|AB| = |AD| = c$ olacak biçimde bir D noktası alınırsa;

$$m(\widehat{BDA}) < m(\widehat{DBC}) \text{ olduğundan}$$

$$a < b + c \text{ dir.}$$

[BC] kenarının uzantısı üzerinde;

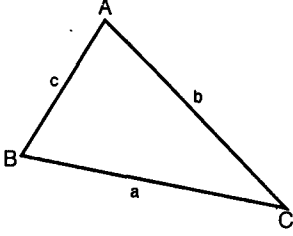
$|EB| = |AB| = c$ olacak biçimde bir E noktası alınırsa;

$$m(\widehat{AEC}) < m(\widehat{EAC}) \text{ olduğundan;}$$

$$b < a + c \text{ dir. Bu } b - c < a \text{ biçiminde yazılırsa;}$$

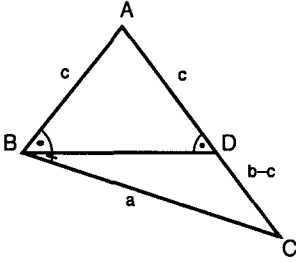
$$|b - c| < a < b + c \text{ elde edilir.}$$

13. Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar; küçük açı karşısında küçük kenar bulunur. Diğer bir deyişle bir üçgende büyük kenar karşısındaki açı, küçük kenar karşısındaki açıdan daha büyüktür.



$$m(\hat{C}) < m(\hat{B}) < m(\hat{A}) \Leftrightarrow c < b < a \text{ dir.}$$

İSPAT



[AC] kenarı üzerinde $|AB| = |AD| = c$ olacak biçimde bir D noktası alınırsa;

$|AB| = |AD|$ olduğundan;

$$m(\hat{ABD}) = m(\hat{ADB}) < m(\hat{ABC}) \text{ bulunur.}$$

$$m(\hat{ADB}) = m(\hat{DCB}) + m(\hat{DBC}) \text{ olduğundan;}$$

$$m(\hat{DCB}) < m(\hat{ADB}) < m(\hat{ABC})$$

$$m(\hat{DCB}) < m(\hat{ABC}) \text{ elde edilir.}$$

$$c < c + (b - c) \text{ olacağından}$$

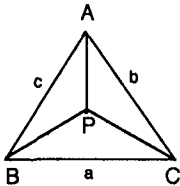
$$c < b \text{ olur.}$$

$$m(\hat{C}) < m(\hat{B}) \Leftrightarrow c < b \text{ elde edildi.}$$

Aynı işlemler diğer kenarlar içinde yapılırsa;

$$m(\hat{C}) < m(\hat{B}) < m(\hat{A}) \Leftrightarrow c < b < a \text{ bulunur.}$$

14.

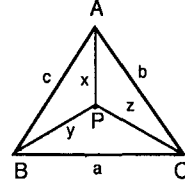


Bir ABC üçgeninin içinde alınan herhangi bir P noktasının, üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamı, üçgenin yarı çevresinden büyük, çevresinden küçüktür.

$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olmak üzere;}$$

$$u < |PA| + |PB| + |PC| < 2u \text{ dur.}$$

İSPAT



$$|PA| = x, |PB| = y, |PC| = z \text{ olsun.}$$

$$a < y + z < b + c$$

$$b < x + z < a + c$$

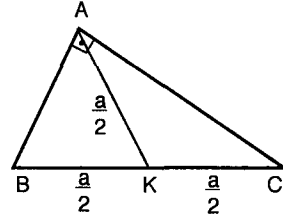
$$+ c < x + y < a + b$$

$$\frac{a+b+c}{2} < x+y+z < a+b+c$$

$$u < |PA| + |PB| + |PC| < 2u \text{ bulunur.}$$

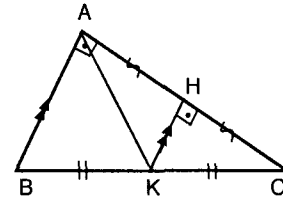
15. Bir dik üçgende hipotenüse alt kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir.

I. İSPAT



ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $|BK| = |KC|$ ise $|AK| = |BK| = |KC| = \frac{a}{2}$ olur.

II. İSPAT



$[KH] \perp [AC]$ çizelim. Aynı kenara inilen dikmeler birbirine paralel ve $|BK| = |KC|$ olduğundan $|AH| = |HC|$ olur. Yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğundan AKC üçgeni ikizkenar olup $[AC]$ tabanıdır.

Buna göre; $|AK| = |KC| = |BK|$ olur.

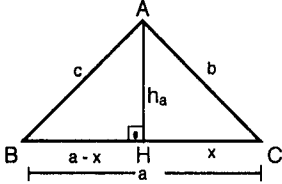
16. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a , b ve c ; yükseklikleri h_a , h_b ve h_c ;

$$u = \frac{a+b+c}{2},$$

$$t = \sqrt{u \cdot (u-a)(u-b)(u-c)} \text{ olmak üzere;}$$

$$h_a = \frac{2t}{a}, \quad h_b = \frac{2t}{b}, \quad h_c = \frac{2t}{c} \text{ olur.}$$

İSPAT



$$(\widehat{AHC} \text{ de pisagor}) \quad (1) \dots\dots (h_a)^2 + x^2 = b^2$$

$$(\widehat{ABH} \text{ de pisagor}) \quad (2) \dots\dots (h_a)^2 + a^2 - 2ax + x^2 = c^2$$

(1), (2) de yerine yazılırsa;

$$a^2 - 2ax + b^2 = c^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \dots\dots (3)$$

(3), (1) de yerine yazılırsa;

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 \text{ (iki kare farkı)}$$

$$= \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right) \cdot \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)$$

$$= \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) \cdot \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)$$

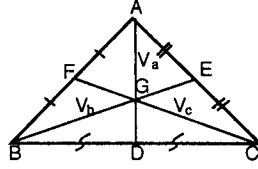
$$= \frac{1}{4a^2} [c^2 - (a-b)^2] \cdot [(a+b)^2 - c^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2} (c-a+b) \cdot (c+a-b) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b-c)$$

$$= \frac{16}{4a^2} (u-a)(u-b)(u) \cdot (u-c)$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2}{a} \sqrt{u \cdot (u-a)(u-b)(u-c)} = \frac{2t}{a} \text{ bulunur.}$$

17.



Bir üçgenin ağırlık merkezinin bir köşeye olan uzaklığı o köşeden geçen kenarortayın $\frac{2}{3}$ ü,

kenarı kestiği noktaya uzaklığı ise kenarortayın $\frac{1}{3}$ ü kadardır.

$$|GA| = \frac{2}{3} V_a$$

$$|GD| = \frac{1}{3} V_a$$

$$|GB| = \frac{2}{3} V_b$$

$$|GE| = \frac{1}{3} V_b$$

$$|GC| = \frac{2}{3} V_c$$

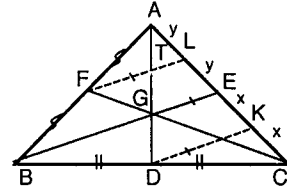
$$|GF| = \frac{1}{3} V_c$$

$$|GA| = 2 \cdot |GD|$$

$$|GB| = 2 \cdot |GE|$$

$$|GC| = 2 \cdot |GF| \text{ dir.}$$

İSPAT



D noktasından [BE] ye [DK] paralelini, F noktasından [BE] ye [FL] paralelini çizelim. Bir üçgende bir kenarın orta noktasından kenarlardan birine çizilen paralel doğru parçası diğer kenarda ortalar. O halde;

$$|EK| = |KC| = x \text{ ve } |AL| = |LE| = y \text{ olur ve}$$

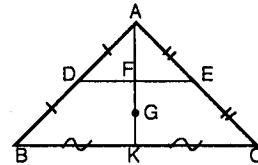
$$|AE| = |EC| \text{ ve } 2x = 2y \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

$$|AT| = |TG| = |GD| \text{ olur.}$$

$$\text{Sonuçta; } |AG| = 2|GD| \text{ veya}$$

$$|AG| = \frac{2}{3} |AD| \text{ dir.}$$

18.



Bir üçgende bir kenara ait orta taban ile ağırlık merkezi arasında kalan doğru uzunluğu, bu kenara ait kenarortay uzunluğunun altıda biri kadardır.

$$\text{Şekilde } \frac{|AK|}{|FG|} = \frac{1}{6} \text{ dir.}$$

İSPAT

Şekilde [DE] orta taban olduğundan $\frac{|AF|}{|AK|} = \frac{1}{2}$

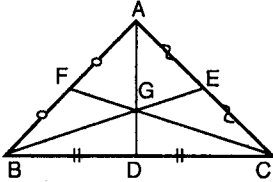
dir. Diğer taraftan $|AG| = \frac{2|AK|}{3}$ dir.

$$|FG| = |AG| - |AF|$$

$$\Rightarrow |FG| = \frac{2|AK|}{3} - \frac{|AK|}{2} = \frac{4|AK| - 3|AK|}{6}$$

$$\Rightarrow |FG| = \frac{|AK|}{6} \Rightarrow \frac{|AK|}{|FG|} = 6 \text{ bulunur.}$$

19. (Kenarortay Teoremi):



Şekildeki ABC üçgeninde;

$$|BC| = a,$$

$$|AC| = b,$$

$$|AB| = c \text{ ve}$$

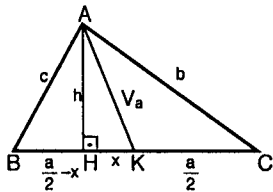
$$|AD| = V_a,$$

$|BE| = V_b$, $|CF| = V_c$ olmak üzere, bu uzunluklar arasında;

$$b^2 + c^2 = 2V_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad a^2 + c^2 = 2V_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2V_c^2 + \frac{c^2}{2} \quad \text{bağıntıları vardır.}$$

İSPAT



Şekildeki ABC üçgeninde [AK]

kenarortay,

$$|BK| = |CK| = \frac{a}{2} \text{ olsun.}$$

ABC üçgeninin A köşesinden [BC]'ye [AH] dikmesini çizelim. $|HK| = x$ ise $|BH| = \frac{a}{2} - x$ olur.

AHK üçgeninde;

$$\textcircled{1} \dots h^2 + x^2 = V_a^2 \text{ (Pisagor teoremi)}$$

AHC üçgeninde;

$$\textcircled{2} \dots h^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = b^2 \text{ (Pisagor teoremi)}$$

ABH üçgeninde;

$$\textcircled{3} \dots h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = c^2 \text{ (Pisagor teoremi)}$$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ den

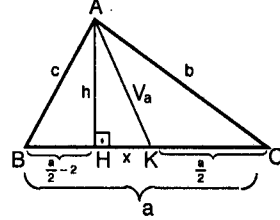
$$h^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + h^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + c^2$$

$$2h^2 + 2x^2 + \frac{2a^2}{4} = b^2 + c^2 \Rightarrow 2(h^2 + x^2) + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ 'de yerine yazılırsa

$$2Va^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \text{ bulunur.}$$

20.



Bir üçgende aynı kenara ait kenarortay ile yükseklik arasında kalan doğru parçasının uzunluğu

$$|KH| = x = \frac{|b^2 - c^2|}{2a} \text{ dir.}$$

İSPAT

Kenarortay teoreminin ispatında;

$$h^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 \text{ ve}$$

$$h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = c^2 \text{ idi.}$$

Bu iki bağıntıyı taraf tarafa çıkarırsak;

$$h^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b^2 \text{ ve}$$

$$- \quad h^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = c^2$$

$$2ax = b^2 - c^2$$

$$x = \frac{|b^2 - c^2|}{2a} \text{ bulunur.}$$

21. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a,b,c ve kenarortay uzunlukları V_a, V_b, V_c olmak üzere bu uzunluklar arasında,

$$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ bağıntısı vardır.}$$

İSPAT

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}, \text{ (Kenarortay teo.)}$$

$$2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}, \text{ (Kenarortay teo.)}$$

$$+ 2V_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}, \text{ (Kenarortay teo.)}$$

$$2(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ bulunur.}$$

22. Bir dik üçgende hipotenüse alt kenarortay uzunluğunun karesinin beş katı, diğer kenarortay uzunluklarının kareleri toplamına eşittir.

Şekilde G ağırlık merkezi;

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow 5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$$

$$m(\hat{B}) = 90^\circ \Rightarrow 5V_b^2 = V_a^2 + V_c^2$$

$$m(\hat{C}) = 90^\circ \Rightarrow 5V_c^2 = V_a^2 + V_b^2 \text{ dir.}$$

İSPAT

$m(\hat{A}) = 90^\circ$ olsun.

$$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \dots (1)$$

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \dots (2)$$

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow V_a = \frac{a}{2} \dots (3)$$

(2), (1) de yerine yazılırsa;

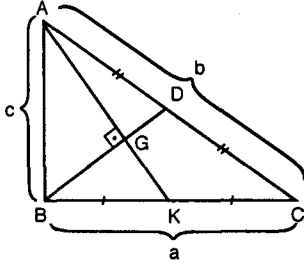
$$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 3.(a^2 + a^2) \dots (4)$$

(3), (4) de yerine yazılırsa,

$$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 6.4V_a^2$$

$$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2 \text{ bulunur.}$$

23.

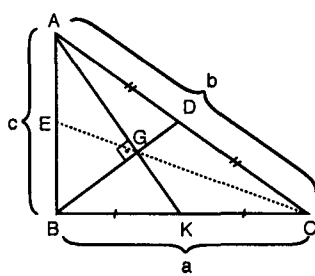


Herhangi iki kenara ait kenarortayları dik kesişen bir üçgende; üçüncü kenarın karesinin 5 katı, diğer iki kenarın kareleri toplamına eşittir.

Şekilde G ağırlık merkezi $[BD] \perp [AK]$ ise;

$$5c^2 = a^2 + b^2 \text{ dir.}$$

İSPAT



$[CE]$ kenarortayını çizelim.

$$m(\hat{BGA}) = 90^\circ$$

$$IEGI = \frac{c}{2} \text{ dir.}$$

G, ağırlık merkezi ise

$$IGCI = c \text{ dir.}$$

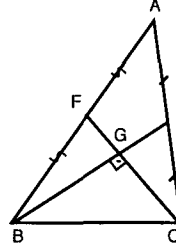
ABC üçgeninde kenarortay teoremi uygulanırsa,

$$2. IECI^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{9c^2}{4} = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{10c^2}{2} = a^2 + b^2 \Rightarrow 5c^2 = a^2 + b^2 \text{ bulunur.}$$

24.

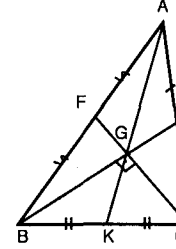


ABC üçgeninde G ağırlık merkezi ve

$[BE] \perp [CF]$ ise

$$V_a^2 = V_b^2 + V_c^2 \text{ dir.}$$

İSPAT



$[AK]$ kenarortayını çizelim.

$$IGKI = \frac{V_a}{3}$$

$$IBCI = \frac{2V_a}{3} \text{ olur.}$$

$$IBGI = \frac{2V_b}{3};$$

$IGCI = \frac{2V_c}{3}$ olduğundan BGC dik üçgeninde;

$$\left(\frac{2V_b}{3}\right)^2 + \left(\frac{2V_c}{3}\right)^2 = \left(\frac{2V_a}{3}\right)^2$$

$$V_b^2 + V_c^2 = V_a^2 \text{ bulunur.}$$

25. Bir ABC üçgeninin kenar uzunluğu büyüdükçe bu kenara ait kenarortay uzunluğu küçülür, kenar uzunluğu küçüldükçe kenarortay uzunluğu büyür.

İSPAT

Üçgenin kenar uzunlukları a, b ve c olsun.

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \text{ ise } V_a = \frac{a}{2} \text{ idi.}$$

$$m(\hat{A}) > 90^\circ \text{ ise } b^2 + c^2 < a^2 < (b+c)^2 \text{ olur.}$$

Buna göre a büyüyor b ve c küçülüyor demektir. Kenarortay teoreminden;

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{Küçüldü} - \text{Büyüdü} = \text{Küçüldü}$$

$$\text{Buna göre } V_a < \frac{a}{2} \Rightarrow V_a < \frac{a}{2} \text{ olur.}$$

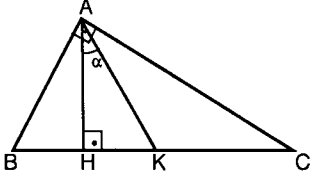
$$m(\hat{A}) < 90^\circ \text{ ise } (b-c)^2 < a^2 < b^2 + c^2 \text{ olur. b ve c büyür a küçülür.}$$

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{Büyüdü} - \text{Küçüldü} = \text{Küçüldü}$$

$$V_a > \frac{a}{2} \text{ olur.}$$

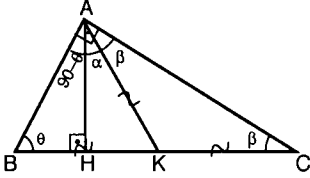
26. Bir ABC dik üçgeninde hipotenüse ait yükseklik ile kenarortay arasında kalan açı diğer iki dar açının farkının mutlak değerine eşittir.



Şekilde, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, $[AH] \perp [BC]$ ve $IBKI=IKCI$ ise;

$$m(\widehat{HAK}) = \alpha = |m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})| \text{ dir.}$$

İSPAT



$m(\widehat{BAC})=90^\circ$ ve $IBKI = IKCI$ olduğundan; $IAKI = IBKI = IKCI$ olur. O halde;

$$m(\widehat{KAC}) = m(\widehat{KCA}) = \beta \text{ (} \widehat{AKC} \text{ ikizkenar)}$$

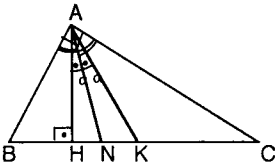
$$m(\widehat{ABC}) = \theta \text{ ise } m(\widehat{BAH}) = 90 - \theta \text{ olur.}$$

$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ \text{ olduğundan;}$$

$$90^\circ - \theta + \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = |\theta - \beta| \text{ bulunur.}$$

27.



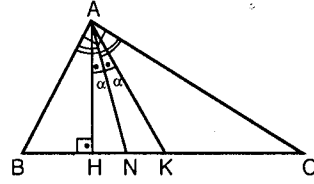
Bir dik üçgende, dik açı köşesine ait açıortay, aynı zamanda hipotenüse ait yükseklik ile kenarortay arasında kalan açının da açıortayıdır.

Şekilde; $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$,

$IBKI = IKCI$, $[AH] \perp [BC]$ ise

$$m(\widehat{HAN}) = m(\widehat{KAN}) = \alpha = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT



$m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$, $[AH] \perp [BC]$ olduğundan;

$$m(\widehat{HAN}) = \alpha = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2} \text{ dir.}$$

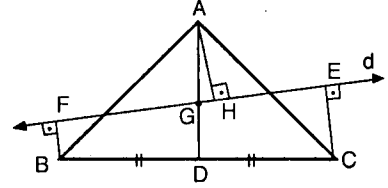
$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ,$$

$[AH] \perp [BC]$ ve $IBKI = IKCI$ olduğundan;

$$m(\widehat{HAK}) = |m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})| \text{ dir.}$$

$$m(\widehat{KAN}) = |m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})| - \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2} \\ = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2} \text{ bulunur.}$$

28.

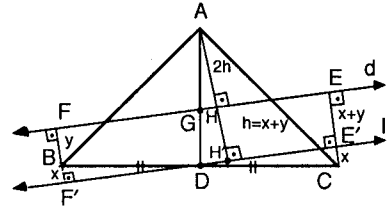


ABC üçgeninin G ağırlık merkezinden geçen bir d doğrusu çizilsin.

$[BF] \perp d$, $[CE] \perp d$ ve $[AH] \perp d$ olmak üzere

$$|FB| + |EC| = |AH| \text{ dir.}$$

İSPAT



D noktasından geçen ve d ye paralel olan bir l doğrusu çizelim.

Bu durumda $IBDI = IDC$, $[E'C] \perp l$, ve $[F'B] \perp l$ olduğundan; $BF'D \cong CE'D$ olur.

Buna göre; $|E'C| = |BF'| = x$, $|FB| = y$,

$|AH| = 2h$ dersek, G ağırlık merkezi ve $d \parallel l$ olduğundan, $|HH'| = h$ olur.

$FF'E'E$ dikdörtgen olduğundan;

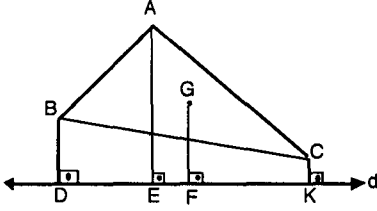
$$|FF'| = |EE'| = h = x + y \text{ olur.}$$

$$|FB| + |CE| = y + (x + x + y) = 2(x+y) = 2h$$

O halde;

$$|AH| = 2h = 2(x+y) = |FB| + |CE| \text{ dir.}$$

29.



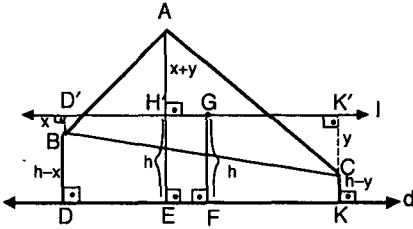
Şekilde ABC üçgeninde G ağırlık merkezidir.

$[BD] \perp d$, $[AE] \perp d$, $[GF] \perp d$ ve

$[CK] \perp d$ ise

$3IGFI = IBDI + IAEI + ICKI$ olur.

İSPAT



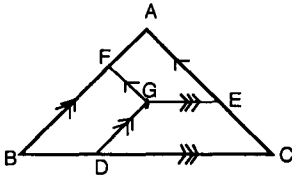
G ağırlık merkezinden geçen ve d ye paralel olan bir l doğrusu çizelim. $ICKI = y$, $IDB'I = x$ ve $IGFI = h$ dersek.

$IDD'I = IH'EI = IGFI = IKK'I = h$ dir.

$3IGFI = IDD'I + IH'EI + IKK'I = 3h$ olur.

$IBDI + IAEI + ICKI = (h-x) + (x+y+h) + (h-y)$
 $= 3h = 3IGFI$ bulunur.

30.

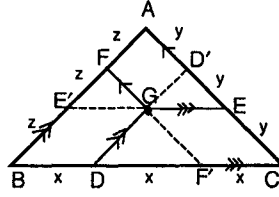


Herhangi bir ABC üçgeninde G ağırlık merkezinden kenarlara çizilen paralellerin toplam uzunluğu üçgenin çevresinin üçte biri kadardır.

Şekilde G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi; $[GE] \parallel [BC]$, $[GD] \parallel [AC]$, $[FG] \parallel [AB]$ ise;

$IGFI + IGD I + IGEI = \frac{IABI + IACI + IBCI}{3}$ tür.

İSPAT



Paralel doğruları diğer kenarlara sırası ile D', E' ve F' noktalarına kadar uzatalım.

G ağırlık merkezi olduğundan $[FF']$ paralelinde $IF'CI = x$ ise $IBFI = 2x$ olur.... ① olur.

$[DD']$ paralelinde $IDBI = x$ ise $IDCI = 2x$ olur..... ②

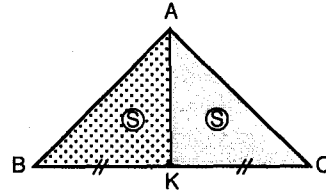
① ve ② den $IDF'I = x$ olur.

Bu işlemler diğer kenarlar için de yapılırsa $IGFI = y$ ve $IGDI = z$ bulunur. Buna göre;

$IGDI + IGEI + IGFI = \frac{IABI + IBCI + IACI}{3}$ olur.

ZAFER YAYINLARI

31.



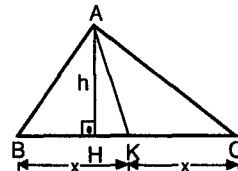
Herhangi bir ABC üçgeninde bir kenara ait kenarortay uzunluğu üçgenin alanını iki eşit alana böler.

Şekildeki ABC üçgeninde;

$IBKI = IKCI$ ise

$\widehat{\text{Alan}}(\widehat{ABK}) = \widehat{\text{Alan}}(\widehat{ACK})$ dir.

İSPAT



$[AH] \perp [BC]$ çizelim.

$IAHI = h$,

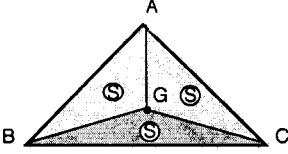
$IBKI = IKCI = x$ diyelim.

$$\widehat{\text{Alan}}(\widehat{ABK}) = \frac{h \cdot x}{2}$$

$$\widehat{\text{Alan}}(\widehat{ACK}) = \frac{h \cdot x}{2}$$

$\widehat{\text{Alan}}(\widehat{ABK}) = \widehat{\text{Alan}}(\widehat{ACK})$ bulunur.

32.

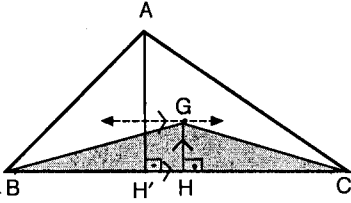


Herhangi bir ABC üçgeninde, G ağırlık merkezini köşelere birleştiren doğru parçaları üçgenin alanını üç eşit alana böler.

Şekilde G ağırlık merkezi ise;

$$\text{Alan}(\widehat{ABG}) = \text{Alan}(\widehat{BCG}) = \text{Alan}(\widehat{ACG}) \text{ dir.}$$

İSPAT



$[GH] \perp [BC]$ ve $[AH'] \perp [BC]$ çizelim. Aynı kenara inilen dikmeler birbirine paralel ve G ağırlık merkezi olduğundan $IGHI = h$ dersek $IAH'I = 3h$ olur.

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{3h \cdot |BC|}{2} \text{ ve}$$

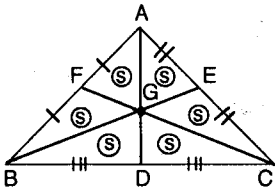
$$\text{Alan}(\widehat{BCG}) = \frac{h \cdot |BC|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{BCG})} = 3 \text{ olur.}$$

Aynı işlemler diğer üçgenlerin alanları için yapılır;

$$\text{Alan}(\widehat{ABG}) = \text{Alan}(\widehat{BCG}) = \text{Alan}(\widehat{ACG}) \text{ bulunur.}$$

33. Herhangi bir ABC üçgeninde, üç kenarortay, üçgenin alanını 6 eşit alana böler.



Şekildeki ABC üçgeninde G ağırlık merkezi ise;

$$\text{Alan}(\widehat{BFG}) = \text{Alan}(\widehat{BDG}) = \text{Alan}(\widehat{DCG}) = \text{Alan}(\widehat{EAG}) = \text{Alan}(\widehat{AFG}) = \text{Alan}(\widehat{CEG}) \text{ dir.}$$

İSPAT

$$\text{Alan}(\widehat{BCG}) = \text{Alan}(\widehat{ACG}) = \text{Alan}(\widehat{ABG}) \dots ①$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Alan}(\widehat{BDG}) &= \text{Alan}(\widehat{DCG}) \\ \text{Alan}(\widehat{AEG}) &= \text{Alan}(\widehat{ECG}) \\ \text{Alan}(\widehat{AFG}) &= \text{Alan}(\widehat{BFG}) \end{aligned} \right\} \dots ②$$

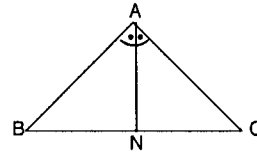
① ve ② den;

$$\text{Alan}(\widehat{BFG}) = \text{Alan}(\widehat{BDG}) = \text{Alan}(\widehat{DCG}) =$$

$$\text{Alan}(\widehat{CEG}) = \text{Alan}(\widehat{EAG}) = \text{Alan}(\widehat{AFG}) \text{ bulunur.}$$

34. İç Açıortay Teoremi

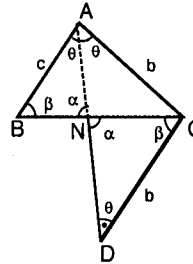
Bir üçgende açıortay uzunluğu karşı kenarı komşu kenarları oranında böler.



Şekildeki ABC üçgeninde [AN] açıortay ise;

$$\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|NC|} \text{ dir.}$$

İSPAT



[AB] ye [CD] paralelini çizip [AN] nin uzantısı ile D noktasında kesiştirelim.

[AB] // [CD] olduğundan;
 $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{ADC}) = \theta$ ve
 $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{NCD}) = \beta$ olur.

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAD}) = \theta$ olduğundan;

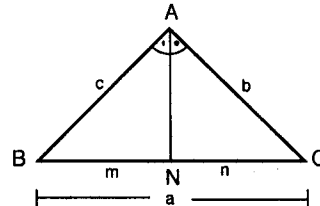
ADC üçgeni ikizkenar üçgen olur.

Buna göre $|AC| = |CD|$ dir.

$$\widehat{ABN} \sim \widehat{DCN} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|BN|}{|CN|} = \frac{|AN|}{|DN|} \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|CN|} \text{ bulunur.}$$

35.



Şekildeki ABC üçgeninde [AN] açıortay ise $|BN|=m$ ve $|NC|=n$ olmak üzere;

$$m = \frac{c \cdot a}{b + c}, n = \frac{b \cdot a}{b + c} \text{ dir.}$$

İSPAT

[AN] açıortay olduğundan;

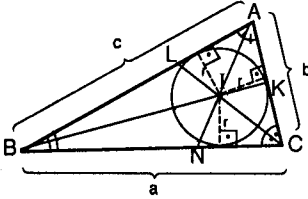
$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow m = \frac{n \cdot c}{b} = \frac{(a-m) \cdot c}{b} \Rightarrow$$

$$m \cdot b = ac - mc \Rightarrow m \cdot b + m \cdot c = a \cdot c \Rightarrow$$

$$m(b+c) = a \cdot c \Rightarrow m = \frac{a \cdot c}{b+c} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Benzer biçimde } n = \frac{b \cdot a}{b+c} \text{ bulunur.}$$

36.



Bir üçgende iç açıortaylar sabit bir noktada kesişirler. Bu kesişim noktasına (Şekilde I noktası) üçgenin iç teğet çemberinin merkezi denir. İç teğet çemberinin yarıçapı r ile gösterilir.

K, L ve N noktaları (eşkenar üçgenin dışında) değme noktaları değildir.

Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkez noktasının ($|AB| = c$, $|AC| = b$ ve $|BC| = a$ olmak üzere) açıortayları bölme oranı;

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{b+c}{a}, \frac{|BI|}{|IL|} = \frac{a+c}{b}, \frac{|CI|}{|IK|} = \frac{a+b}{c} \text{ dir.}$$

İSPAT

ABN üçgeninde;

$$[BI] \text{ açıortay ise; } \frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AI|}{|IN|} \dots \textcircled{1}$$

ANC üçgeninde;

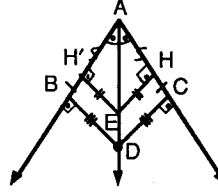
$$[CI] \text{ açıortay ise; } \frac{|AC|}{|CN|} = \frac{|AI|}{|IN|} \dots \textcircled{2}$$

① ve ② den;

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|CN|} \Rightarrow \text{orantı özelliğinden}$$

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{|AB| + |AC|}{|BN| + |CN|} = \frac{b+c}{a} \text{ bulunur.}$$

37.



Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir noktadan, açının kollarına inilen dikmeler birbirine eşittir. Ayrıca dikmelerin köşeden ayırdığı kenar uzunlukları da birbirine eşittir.

Şekilde;

[AD] açıortay,

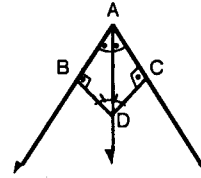
[EH'] ⊥ [AB], [EH] ⊥ [AC],

[BD] ⊥ [AB], [DC] ⊥ [AC] ise;

$$|IH'E| = |IEH|, |IAH'| = |IAH|$$

$$|IBH'| = |ICH|, |IBA| = |ACI|, |BDI| = |DCI| \text{ dir.}$$

İSPAT



[AD] açıortay ışını,

[DB] ⊥ [AB],

[DC] ⊥ [AC] olsun.

$$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) \text{ ve}$$

$$m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DCA}) = 90^\circ$$

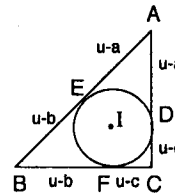
olduğundan üçgenin iç açıları toplamından $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC})$ bulunur. Buna göre;

$\widehat{ABD} \sim \widehat{ACD}$ olur. [AD] hipotenüsleri ortak olduğundan, $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$ bulunur.

O halde;

$$|BDI| = |DCI| \text{ ve } |ABI| = |ACI| \text{ dir.}$$

38.



Şekildeki ABC üçgeninde I iç teğet çemberinin merkezi; D, E ve F değme noktaları; $|AB| = b$,

$|AC| = c$, $|BC| = a$ ve

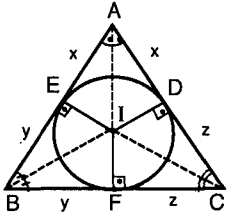
$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olmak üzere;}$$

$$|AEI| = |ADI| = u - a$$

$$|BFI| = |BEI| = u - b$$

$$|CFI| = |CDI| = u - c$$

İSPAT



Merkezden teğetin değme noktasını birleştiren doğru parçası teğete diktir. (İspatı sonra yapılacaktır.)

D, E ve F değme noktaları olduğundan;

$$[ID] \perp [AC],$$

$$[IE] \perp [AB],$$

$$[IF] \perp [BC] \text{ ve}$$

$[AI], [BI], [CI]$ açıortay olduğundan;

$$IAEI = IADI = x$$

$$IBFI = IBFI = y$$

$$ICFI = ICDI = z \text{ olur.}$$

$$2x + 2y + 2z = a + b + c, (\widehat{ABC} \text{ nin çevresi})$$

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

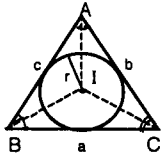
$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = u \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow x + y + z = u \Rightarrow x = u - (y + z)$$

$$= u - b, (b = x + z)$$

diğer bağıntılarda benzer biçimde bulunur.

39.

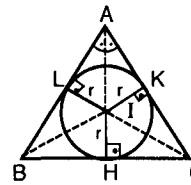


Bir üçgenin içteğet çemberinin yarıçapı r , kenar uzunlukları a, b, c ve

$$u = \frac{a + b + c}{2} \text{ ise}$$

$$\boxed{\text{Alan}(\widehat{ABC}) = u \cdot r \text{ dir.}}$$

İSPAT



Çemberin merkeze uzaklığı sabit (r) olduğundan;

$$[IH] = [IK] = [IL] = r \text{ olur.}$$

L, H, K değme noktaları olduğundan;

$$[IH] \perp [BC], [IK] \perp [AC],$$

$$[IL] \perp [AB] \text{ olur. O halde;}$$

$$\text{Alan}(\widehat{BIC}) = \frac{r \cdot a}{2}$$

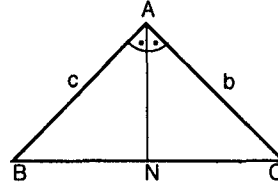
$$\text{Alan}(\widehat{AIC}) = \frac{r \cdot b}{2}$$

$$+ \text{Alan}(\widehat{AIB}) = \frac{r \cdot c}{2}$$

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \text{Alan}(\widehat{BIC}) + \text{Alan}(\widehat{AIC}) + \text{Alan}(\widehat{AIB})$$

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c) = u \cdot r \text{ bulunur.}$$

40.



Bir üçgende bir açığa alt açıortay uzunluğu üçgenin alanını komşu kenarları oranında böler.

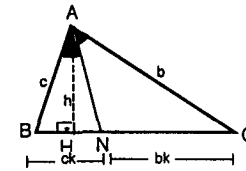
Şekilde $[AN]$ açıortay, $IAI = c$, $IACI = b$ ise;

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{ABN})} = \frac{b + c}{c},$$

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{ACN})} = \frac{b + c}{b} \text{ ve}$$

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABN})}{\text{Alan}(\widehat{ACN})} = \frac{c}{b} \text{ dir.}$$

İSPAT



$[AN]$ açıortay,

$$IAI = c \text{ ve}$$

$$IACI = b \text{ olduğundan;}$$

$$IBNI = c \cdot k \text{ dersek}$$

$$ICNI = b \cdot k \text{ olur.}$$

(k , oran sabiti)

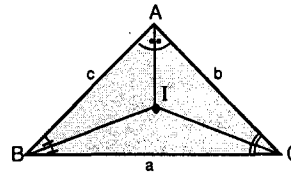
$[AH] \perp [BC]$ çizelim. Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşit olduğundan;

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{ABN})} = \frac{bk + ck}{ck} = \frac{b + c}{c}$$

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{ACN})} = \frac{bk + ck}{bk} = \frac{b + c}{b}$$

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{ABN})}{\text{Alan}(\widehat{ACN})} = \frac{ck}{bk} = \frac{c}{b} \text{ bulunur.}$$

41.

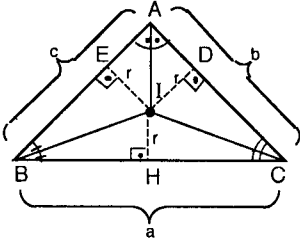


Bir üçgende iç açıortayların kesim noktasını köşelere birleştirerek elde ettiğimiz üçgenlerin alanları kenar uzunlukları ile orantılı olur.

Şekilde I açıortayların kesim noktası ise;

$$\boxed{\frac{\text{Alan}(\widehat{BIC})}{a} = \frac{\text{Alan}(\widehat{AIC})}{b} = \frac{\text{Alan}(\widehat{AIB})}{c} \text{ dir.}}$$

İSPAT



Açıortay üzerinden alınan ve açının kollarına inilen dikmeler eşit olduğundan;

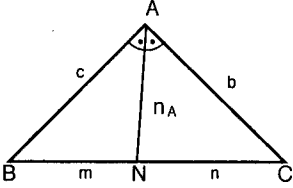
$$|IH| = |ID| = |IE| = r \text{ olur.}$$

$$\text{Alan}(\widehat{BIC}) = \frac{r \cdot a}{2}, \text{ Alan}(\widehat{AIC}) = \frac{r \cdot b}{2}$$

$$\text{Alan}(\widehat{AIB}) = \frac{r \cdot c}{2} \text{ olduğundan;}$$

$$\frac{\text{Alan}(\widehat{BIC})}{a} = \frac{\text{Alan}(\widehat{AIC})}{b} = \frac{\text{Alan}(\widehat{AIB})}{c} \text{ bulunur.}$$

42.

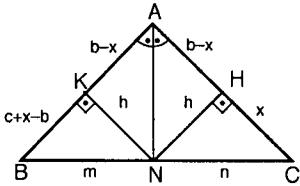


Bir üçgende iç açıortay uzunluğunun karesi, açıortaya göre komşu kenarlar çarpımı ile ayırmış olduğu kenar uzunlukları çarpımı farkına eşittir.

Şekilde [AN] açıortay, IBNI = m, INCI = n, IABI = c, IACI = b olmak üzere;

$$|ANI|^2 = n_A^2 = b \cdot c - m \cdot n \text{ dir.}$$

İSPAT



[NH] ⊥ [AC], [NK] ⊥ [AB] çizelim.

[AN] açıortay olduğundan;

$$|IKNI| = |IHNI| = h \text{ ve } |AKI| = |AHI| = b - x \text{ dersek}$$

$$|IKBI| = c + x - b, |IHCI| = x \text{ olur.}$$

$$\text{ANH dik üçgeninde } |ANI|^2 = h^2 + (b-x)^2$$

$$|ANI|^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx \dots\dots (1)$$

$$\text{NHC dik üçgeninde } n^2 = h^2 + x^2 \dots\dots (2)$$

$$\text{BKN dik üçgeninde } m^2 = h^2 + (c+x-b)^2$$

$$\Rightarrow m^2 = h^2 + c^2 + x^2 + b^2 - 2bc - 2bx + 2cx \dots\dots (3)$$

[AN] açıortay olduğundan;

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{m} \dots\dots (4)$$

(3) de (2) yi yerine yazıp x'i çekersek;

$$x = \frac{m^2 - b^2 - c^2 - n^2 + 2bc}{2(c-b)} \dots\dots (5)$$

(2) ve (5) i (1) de yerine yazarsak;

$$|ANI|^2 = b^2 + n^2 - 2b \cdot \frac{m^2 - b^2 - c^2 - n^2 + 2bc}{2(c-b)}$$

$$= \frac{b^2(c-b) + n^2(c-b) - bm^2 + b^3 + bc^2 + bn^2 - 2b^2c}{c-b}$$

$$= \frac{b^2c + n^2c + bc^2 - bm^2 - 2b^2c}{c-b}$$

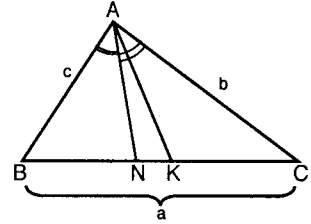
$$= \frac{bc(c-b) + n^2 \cdot c - m^2b}{c-b} \dots\dots (6)$$

(4) den;

$$\frac{bc \cdot (c-b) + n \cdot (mb) - m(nc)}{c-b}$$

$$= \frac{(c-b) \cdot (bc - m \cdot n)}{c-b} = bc - mn \text{ bulunur.}$$

43.



Bir ABC üçgeninde; IBCI = a, IACI = b, IABI = c; [AN], \widehat{BAC} açısının açıortayı ve IBKI = IKCI ise;

$$|IKNI| = \frac{a \cdot |b - c|}{2(b + c)} \text{ dir.}$$

İSPAT

INKI = x, IBNI = y ve INCI = z olsun.

$$\Rightarrow IKCI = z - x \text{ olur.}$$

IBKI = IKCI olduğundan;

$$y + x = z - x \Rightarrow 2x = z - y$$

$$\Rightarrow x = \frac{z - y}{2} \dots\dots (1)$$

Açıortay teoreminden;

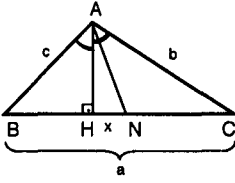
$$z = \frac{b \cdot a}{b + c} \text{ ve } y = \frac{c \cdot a}{b + c} \text{ idi.}$$

bu değerleri (1) de yerine yazalım.

$$x = \frac{\frac{ba}{b+c} - \frac{ac}{b+c}}{2} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$= \frac{a(b-c)}{2(b+c)} = \frac{a|b-c|}{2(b+c)} \text{ bulunur.}$$

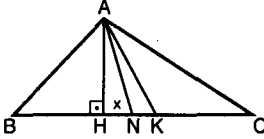
44. Bir ABC üçgeninde;



$ABI = c$,
 $ACI = b$,
 $BCI = a$,
 $[AH] \perp [BC]$ ve
 $[AN]$, \widehat{BAC} nın açıortayı olmak üzere;

$$|HN| = \frac{b-c}{2} \cdot \left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c} \right) \text{ dir.}$$

İSPAT



$IBKI = IKCI$ olacak biçimde $[AK]$ çizelim.
 $[AH] \perp [BC]$ ve
 $IBKI = IKCI$ olduğundan;

$$|HK| = \frac{b^2 - c^2}{2a} \text{ idi... (1)}$$

$[AN]$ açıortay, $IBKI = IKCI$ olduğundan;

$$|NK| = \frac{a \cdot |b - c|}{2(b+c)} \text{ idi... (2)}$$

$|HN| = |HK| - |NK|$ olduğundan bu denklemde (1) ve (2) yi yerine yazarsak;

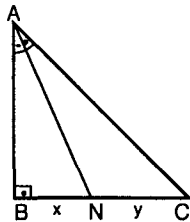
$$|HN| = \frac{b^2 - c^2}{2a} - \frac{a|b - c|}{2(b+c)}$$

$$|HN| = \frac{b-c}{2} \left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c} \right) \text{ bulunur.}$$

Not:

Ayrıca $|HN| = \frac{2u \cdot (u-a) \cdot |b-c|}{a(b+c)}$ ile de hesaplanabilir.

45.



Şekildeki ABC üçgeninde $[AN]$ açıortay, $IBNI = x$, $INCI = y$ ve $[CB] \perp [AB]$ ise

$$|ANI|^2 = \frac{2x^2y}{y-x} \text{ dir.}$$

İSPAT

$[AN]$ açıortay olduğundan,
 $ABI = x \cdot k$ dersek;
 $ACI = y \cdot k$ olur.

$$(xk)^2 + (x+y)^2 = (yk)^2 \quad (\widehat{ABC}'\text{de pisagor})$$

$$y^2k^2 - x^2k^2 = (x+y)^2$$

$$k^2(y^2 - x^2) = (x+y)^2$$

$$k^2 = \frac{x+y}{y-x}$$

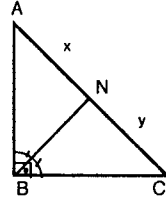
Açıortay teoreminden;

$$|ANI|^2 = (yk) \cdot (xk) - yx$$

$$= yx(k^2 - 1) = yx \left(\frac{x+y}{y-x} - 1 \right)$$

$$= yx \left(\frac{x+y-y+x}{y-x} \right) = \frac{2x^2y}{y-x} \text{ bulunur.}$$

46.



Şekildeki ABC üçgeninde $[BN]$ açıortay;
 $|ANI| = x$,
 $|NCI| = y$, ve
 $[AB] \perp [BC]$ ise
 $|BNI|^2 = \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} \text{ dir.}$

İSPAT

$[BN]$ açıortay olduğundan;

$ABI = xk$ dersek; $BCI = yk$ olur.

$$(xk)^2 + (yk)^2 = (x+y)^2, \quad (\widehat{ABC}'\text{de pisagor})$$

$$x^2k^2 + y^2k^2 = (x+y)^2$$

$$k^2(x^2 + y^2) = (x+y)^2$$

$$k^2 = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$$

Açıortay teoreminden;

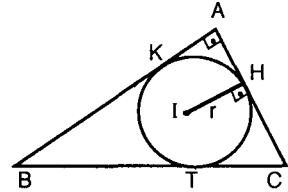
$$|BNI|^2 = (xk) \cdot (yk) - xy$$

$$= xy(k^2 - 1) = xy \left(\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} - 1 \right)$$

$$= xy \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$|BNI|^2 = \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} \text{ bulunur.}$$

47.

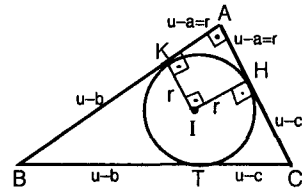


Bir ABC üçgeninde;

$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, T, H ve K iç teğet çemberinin değme noktaları, $[IH] \perp [AC]$ ve $|IH| = r$ ise

$$A(\widehat{ABC}) = |BT| \cdot |TC| \text{ dir.}$$

İSPAT



$[IK] \perp [AB]$ çizelim. $|IH| = |IK| = r$ dir. AKIH kare olur. $u - a = r$ dir.

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = u \cdot r = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

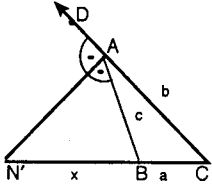
$$u \cdot r = \sqrt{u \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

$$u^2 \cdot r^2 = u \cdot (u-b) \cdot (u-c)$$

$$ur = (u-b)(u-c)$$

$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = |BT| \cdot |TC| \text{ bulunur.}$$

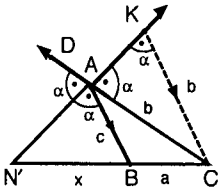
48. (Dış Açortay Teoremi)



Şekilde [AN],
ABC üçgeninde;
 $m(\widehat{BAD})$ nın açıortayı,
 $IN'BI = x$, $IBCI = a$,
 $IACI = b$ ve $IABI = c$ ise

$$\frac{x}{x+a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{IN'BI}{IN'CI} = \frac{IABI}{IACI} \text{ dir.}$$

İSPAT



[N'A] uzantısından;
[CK] // [AB]
olacak biçimde bir
K noktası alalım.

$$m(\widehat{DAN'}) = m(\widehat{KAC}) = \alpha \quad (\text{Ters açılar})$$

$$m(\widehat{N'AB}) = m(\widehat{AKC}) = \alpha \quad (\text{Yöndeş açılar})$$

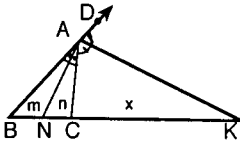
Buna göre CAK üçgeni ikizkenar olup;

$$ICKI = IACI = b \text{ bulunur.}$$

N'KC üçgeninde [AB] // [KC] olduğundan;

$$\frac{IN'BI}{IN'CI} = \frac{IABI}{ICKI} \Rightarrow \frac{x}{x+a} = \frac{c}{b} \text{ bulunur.}$$

49.



Bir üçgende aynı
köşeye ait iç açıortay
ile dış açıortay
arasındaki açı 90°
olup, iç açıortayın

kenar üzerinde ayırmış olduğu parçaların
oranı ile dış açıortayın diğer köşelere olan
uzaklıkları oranı birbirine eşittir.

Şekilde [AN] iç açıortay

[AK] dış açıortay ise

$$a) m(\widehat{KAN}) = 90^\circ \text{ dir.}$$

$$b) IBNI = m, INCI = n \text{ ve } ICKI = x \text{ olmak üzere;}$$

$$\frac{x}{n} = \frac{x+n+m}{m} \text{ dir.}$$

İSPAT

a) [AN] iç açıortay olduğundan;

$$m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{CAN}) = \theta \dots ①$$

[AK] dış açıortay olduğundan;

$$m(\widehat{CAK}) = m(\widehat{KAD}) = \beta \dots ②$$

① ve ② den $2\theta + 2\beta = 180$ (Bütünler açı-
lar)

$$\theta + \beta = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{KAN}) = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

b) [AN] iç açıortayından;

$$\frac{IACI}{IABI} = \frac{INCI}{INBI} \dots ①$$

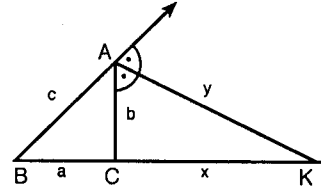
[AK] dış açıortayından;

$$\frac{ICKI}{IKBI} = \frac{IACI}{IABI} \dots ②$$

① ve ② den;

$$\frac{ICKI}{IKBI} = \frac{INCI}{INBI} \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{x+n+m}{m} \text{ bulunur.}$$

50.



Şekildeki ABC üçgeninde;

[AK] dış açıortay,

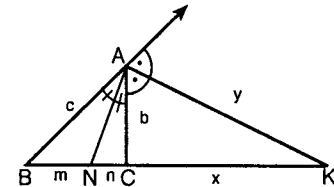
$$ICKI = x, IBCI = a,$$

$$IABI = c, IACI = b \text{ ve}$$

$IACI = y$ olmak üzere;

$$IAKI^2 = y^2 = x.(x+a) - bc \text{ dir.}$$

İSPAT



[AN] iç açıortayını çizelim.

$$IBNI = m,$$

$$INCI = n \text{ diyelim.}$$

$$m(\widehat{KAN}) = 90^\circ \text{ olur.}$$

[AN] iç açıortay olduğundan iç açıortay uzun-
luğundan,

$$IANI^2 = b.c - m.n \dots ①$$

[AK] dış açıortay olduğundan,

$$\frac{x}{n} = \frac{x+n+m}{m} \Rightarrow mx = nx + n^2 + mn$$

$$\Rightarrow n^2 + 2nx = mx + nx - mn \dots \textcircled{2}$$

KAN dik üçgeninde,

$$IANI^2 + IAKI^2 = INKI^2 \text{ (Pisagor bağıntısı)}$$

$$\Rightarrow IANI^2 + y^2 = (n+x)^2 = n^2 + 2nx + x^2 \dots \textcircled{3}$$

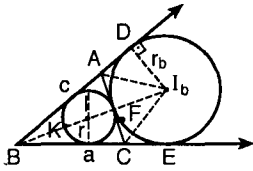
① ve ②, ③ de yerine yazılırsa;

$$bc - mn + y^2 = x^2 + nx + mx - mx - m.n$$

$$y^2 = x(x+n+m) - bc$$

$$y^2 = x(x+a) - bc \text{ bulunur.}$$

51.



Şekildeki ABC üçgeninde I_b noktası ABC üçgeninde dış teğet çemberinin merkezidir.

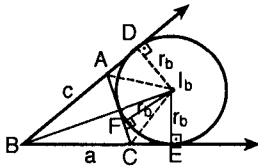
D, E ve F değme noktalarıdır.

$$|DI_b| = r_b, u = \frac{a+b+c}{2},$$

$|AB| = c, |AC| = b$ ve $|BC| = a$ olmak üzere;

$$A(\widehat{ABC}) = r_b \cdot (u - b) \text{ dir.}$$

İSPAT



Gerekli yardımcı çizimler yapıldıktan sonra;

$$A(\widehat{BI_b C}) = \frac{r_b \cdot a}{2}; A(\widehat{BI_b A}) = \frac{r_b \cdot c}{2}$$

$$A(\widehat{AI_b C}) = \frac{r_b \cdot b}{2}$$

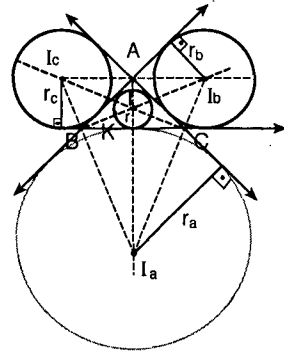
$$\begin{aligned} A(\widehat{ABC}) &= A(\widehat{BI_b C}) + A(\widehat{BI_b A}) - A(\widehat{AI_b C}) \\ &= \frac{r_b a}{2} + \frac{r_b c}{2} - \frac{r_b b}{2} = r_b \cdot \left(\frac{a+c-b}{2} \right) \\ &= r_b \left(\frac{2u-2b}{2} \right) = r_b \cdot (u-b) \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer kenarlara ait dış teğet çemberlerinin yarıçapları ile alan ilişkisi de aynıdır. Yani;

$$A(\widehat{ABC}) = r_a \cdot (u-a) = r_c \cdot (u-c) \text{ dir.}$$

52.



Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberinin yarıçapı r , dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c ise;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \text{ dir. Ayrıca;}$$

$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olmak üzere;}$$

$$r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c = u^2 \text{ dir.}$$

İSPAT

$$\begin{aligned} A(\widehat{ABC}) &= u \cdot r = r_a(u-a) \\ &= r_b(u-b) = r_c(u-c) = k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{u}{k}, \frac{1}{r_a} = \frac{u-a}{k},$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{u-b}{k}, \frac{1}{r_c} = \frac{u-c}{k}$$

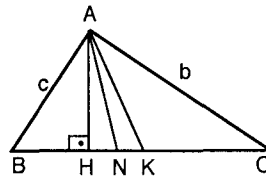
$$\Rightarrow \frac{u}{k} = \frac{u-a}{k} + \frac{u-b}{k} + \frac{u-c}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \text{ bulunur.}$$

53. Aynı köşeye (aynı kenara) ait yükseklik, açıortay, kenarortay sırası ile h_a, n_A, v_a olmak üzere;

$$h_a \leq n_A \leq v_a \text{ dir.}$$

İSPAT



$b > c$,

$|AH| = h_a \rightarrow$ yükseklik

$|AN| = n_A \rightarrow$ Açıortay

$|AK| = v_a \rightarrow$ Kenarortay olsun.

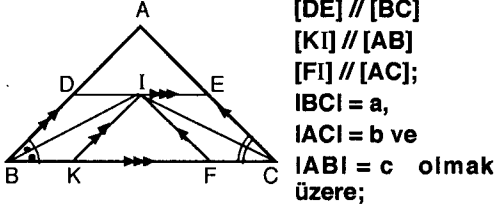
AHN üçgeninde $h_a < n_A$ olur. ... ①

$c < b$ olduğundan $INBI < INCI$ ve $[BC]$ nin orta noktası K olduğundan;

$IHNi < IHKi \Rightarrow |ANI| < |AKI| \dots \textcircled{2}$

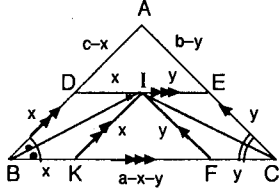
① ve ② den $h_a < n_A < v_a$ bulunur.

54. Şekildeki ABC üçgeninde I iç açıortayların kesim noktası;



[DE] // [BC]
[KI] // [AB]
[FI] // [AC];
IBC = a,
IAC = b ve
IAB = c olmak üzere;

- a) $IDEI = IBDI + IECI$
b) $\text{Çevre}(\widehat{ADE}) = b + c$
c) $\text{Çevre}(\widehat{IKF}) = a$ dir.
İSPAT



Şekilde;

$$m(\widehat{IBK}) = m(\widehat{DIB}) \text{ (iç ters)}$$

$$m(\widehat{ICK}) = m(\widehat{CIE}) \text{ (iç ters)}$$

Buna göre; BDI ve CIE üçgenleri ikizkenar, BDIK ve IFCE paralelkenar olup;

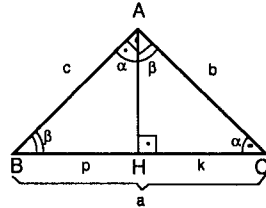
- a) $IDEI = x + y$
b) $\text{Çevre}(\widehat{ADE}) = b + c$
c) $\text{Çevre}(\widehat{KIF}) = a$ bulunur.

55. Bir dik üçgende hipotenüze ait yüksekliğin, hipotenüs üzerinde ayırmış olduğu doğru parçalarının uzunlukları IBHI = p, ICHI = k olmak üzere, her dik kenarın uzunluğunun karesi, bu parçalardan kendisine komşu olanın uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir. (Öklit bağıntıları)

Şekle göre;

$$\boxed{c^2 = p.a} \text{ ve } \boxed{b^2 = k.a} \text{ dir.}$$

İSPAT



$m(\widehat{HAC}) = \beta$ ve
 $m(\widehat{BAH}) = \alpha$ dersek
 $\alpha + \beta = 90^\circ$ olur.
Üçgenin iç açıları toplamından

$$m(\widehat{ABC}) = \beta \text{ ve } m(\widehat{ACB}) = \alpha \text{ olur.}$$

Buna göre $\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA} \sim \widehat{HAC}$ dir.

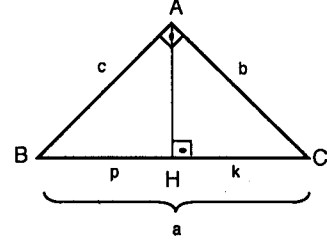
Buradan;

$$\frac{c}{a} = \frac{p}{c} \Rightarrow c^2 = p.a \text{ ve}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{a} \Rightarrow b^2 = k.a \text{ bulunur.}$$

56. Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir. (Pisagor bağıntısı)

İSPAT



$$c^2 = p.a$$

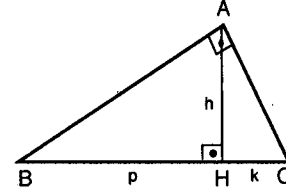
$$+ b^2 = k.a \text{ idi}$$

$$b^2 + c^2 = a(p + k)$$

$$b^2 + c^2 = a.a$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \text{ bulunur.}$$

- 57.

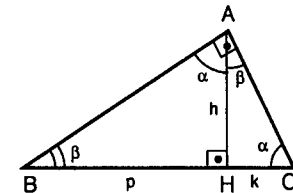


Bir dik üçgende hipotenüze ait yüksekliğin karesi, yükseklik ayağının köşelerden ayırdığı kenar uzunlukları çarpımına eşittir. (Öklit teoremi)

Şekilde $[AH] \perp [BC]$, $IAHI = h$, $IBHI = p$ ve $IHCI = k$ olmak üzere;

$$\boxed{h^2 = p.k} \text{ dir.}$$

İSPAT

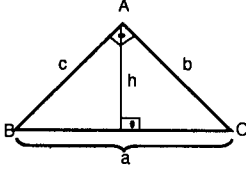


$$\widehat{HAC} \sim \widehat{HBA} \text{ idi.}$$

Buna göre;

$$\frac{h}{p} = \frac{k}{h} \Rightarrow h^2 = p.k \text{ bulunur.}$$

58.



Bir dik üçgende dik kenarlar çarpımının yarısı üçgenin alanını verir.

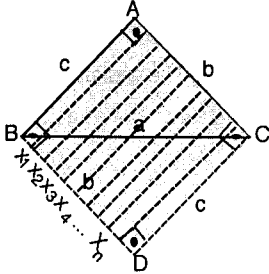
Buna göre;

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$$

dır. Buradan,

$$h = \frac{b \cdot c}{a} \text{ bulunur.}$$

İSPAT



Şeklimizi dikdörtgene tamamlayıp n-tane bölüntüye ayıralım. Herbir bölüntü c kadardır. Buna göre;
 $c \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ tane bölüntü dikdörtgeni tarar.

 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = b$ olduğundan;

$$\text{Alan}(\widehat{ABDC}) = b \cdot c \Rightarrow$$

$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} \text{ bulunur.}$$

59. Hipotenüsü a, hipotenüze ait yüksekliği h, dik kenarları b ve c olan bir dik üçgende;

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ dir.}$$

İSPAT

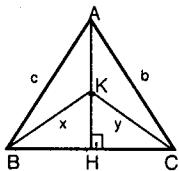
Hipotenüs a olduğundan;

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ dir.}$$

$$h = \frac{b \cdot c}{a} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{a}{b \cdot c} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ bulunur.}$$

60. Şekildeki ABC üçgeninde;



$$[AH] \perp [BC],$$

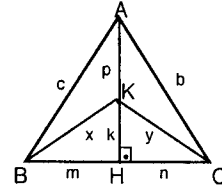
$$|AB| = c, |AC| = b,$$

$$|BK| = x \text{ ve}$$

$$|CK| = y \text{ olmak üzere;}$$

$$c^2 + y^2 = b^2 + x^2 \text{ dir.}$$

İSPAT



$$c^2 = m^2 + (p + k)^2 \dots\dots ①$$

$$x^2 = m^2 + k^2 \dots\dots ②$$

$$b^2 = n^2 + (p + k)^2 \dots\dots ③$$

$$y^2 = n^2 + k^2 \dots\dots ④$$

① ve ③ taraf tarafa çıkarılırsa;

$$c^2 - b^2 = m^2 - n^2 \dots\dots ⑤$$

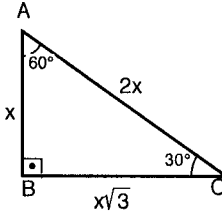
② ve ④ taraf tarafa çıkarılırsa;

$$x^2 - y^2 = m^2 - n^2 \dots\dots ⑥$$

⑥, ⑤ de yerine yazılırsa;

$$c^2 - b^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow c^2 + y^2 = b^2 + x^2 \text{ bulunur.}$$

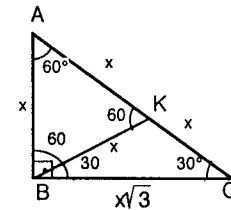
61.



Bir dik üçgende 30° lik açının karşısındaki kenar uzunluğu x birim ise hipotenüs uzunluğu 2x birim; 60° lik açının karşısındaki kenar uzunluğunda $x\sqrt{3}$ birimdir.

Şekilde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$, $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ ve $|AB| = x$ ise $|AC| = 2x$ ve $|BC| = x\sqrt{3}$ dür.

İSPAT



[BK] kenarortayını çizelim. Hipotenüze ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğundan;

$$|BK| = |CK| = |AK| = x \text{ olur.}$$

$m(\widehat{BAK}) = 60^\circ$ olduğundan BAK üçgeni eşkenar olur. Buradan;

$$|AB| = |AK| = |KC| = |BK| = x \text{ olur.}$$

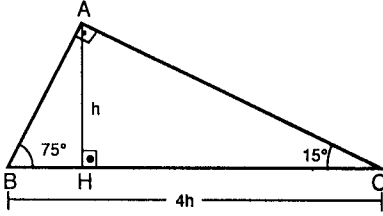
ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısından;

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + |BC|^2 = (2x)^2$$

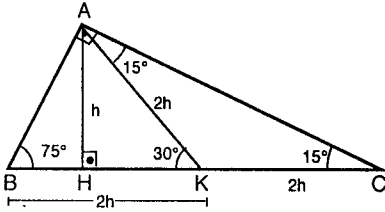
$$|BC|^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow |BC| = x\sqrt{3} \text{ br bulunur.}$$

62. Bir dik üçgende 15° lik (veya 75° lik) bir açı verilmişse bu dik üçgende hipotenüse ait yükseklik, hipotenüs uzunluğunun dörtte biri kadardır.



Şekilde $4|AH| = |BC|$ dir.

İSPAT



$|BK| = |KC|$ olacak biçimde

$[AK]$ kenarortayını çizelim.

$[AK]$ kenarortay,

$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ olduğundan

$|AK| = |KC|$ ve $m(\widehat{KAC}) = 15^\circ$ olur.

$m(\widehat{AKH}) = 30^\circ$ (dış açı)

AKH dik üçgeninde;

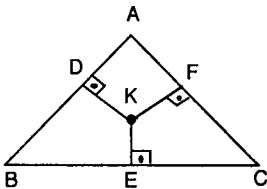
$30^\circ \rightarrow |AH| = h$ dersek

$90^\circ \rightarrow |AK| = 2h$ olur.

$|AK| = |KC| = |BK| = 2h \Rightarrow$

$|BC| = 4h$ bulunur.

63. (Carnot Teoremi)



Şekildeki ABC üçgeninde;

$[KD] \perp [AB]$,

$[KE] \perp [BC]$,

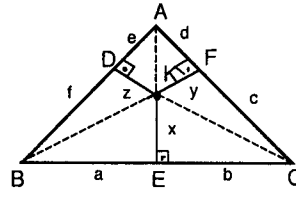
$[KF] \perp [AC]$ ise;

dikme ayaklarının köşeden ayırmış olduğu kenar uzunluklarına göre komşu olmayan kenarların kareleri toplamı birbirine eşittir.

Yani;

$$|BE|^2 + |CF|^2 + |AD|^2 = |BD|^2 + |AF|^2 + |EC|^2 \text{ dir.}$$

İSPAT



Şekilde;

$|BE| = a$,

$|EC| = b$,

$|FC| = c$,

$|AF| = d$,

$|AD| = e$,

$|DB| = f$,

$|DK| = z$, $|KF| = y$ ve $|KE| = x$ dersek;

$$x^2 + b^2 = y^2 + c^2 \dots (1)$$

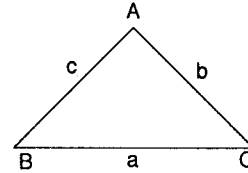
$$x^2 + a^2 = z^2 + f^2 \dots (2)$$

$$y^2 + d^2 = z^2 + e^2 \dots (3)$$

(1) den (2) çıkarılıp (3) ile toplanırsa;

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2 \text{ bulunur.}$$

64. (Kosinüs Teoremi)



Bir ABC üçgeninde;

$|BC| = a$, $|AC| = b$ ve

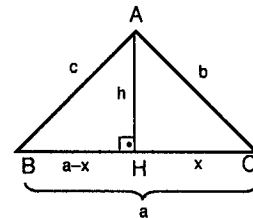
$|AB| = c$ olmak üzere;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C} \text{ dir.}$$

İSPAT



$[AH] \perp [BC]$ yüksekliğini çizelim.

$|HC| = x$ dersek;

$|BH| = a - x$ olur.

AHB dik üçgeninde;

$$\cos \widehat{B} = \frac{a-x}{c} \dots (1)$$

AHC dik üçgeninde pisagor bağıntısından;

$$b^2 = h^2 + x^2 \dots (2)$$

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısından;

$$c^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$= a^2 - 2ax + x^2 + h^2 \dots\dots (3)$$

(2), (3) de yerine yazılırsa

$$c^2 = a^2 - 2ax + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \dots\dots (4)$$

(1) den x çekilip (4) de yerine yazılırsa;

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2a(a - c \cdot \cos \hat{B})$$

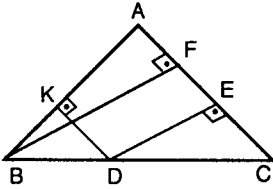
$$\Rightarrow \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}} \text{ bulunur.}$$

Diğer kenarlar için de ispatı benzer biçimde yapılır.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$$

65.



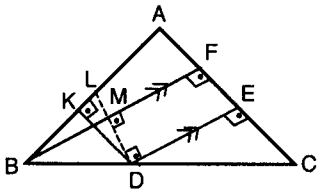
İkizkenar bir üçgende taban üzerinden alınan bir noktadan eşit kenarlara indirilen dikmelerin toplamı eşit kenarlara ait bir yüksekliğe eşittir.

Şekilde $IBI = IACI$,

$[DE] \perp [AC]$,

$[DK] \perp [AB] \Rightarrow \boxed{IKDI + IDEI = IBFI}$ dir.

İSPAT



$[LD] \parallel [AC]$ çizelim.

BLD üçgeni ikizkenar olur.

$[BF] \perp [AC]$ ve $[DE] \perp [AC] \Rightarrow$

$[BF] \parallel [DE]$ dir.

$[LD] \parallel [AC]$ de olduğundan DMFE dikdörtgen olur.

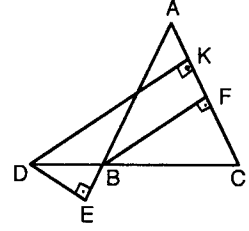
$$IMFI = IDEI \dots\dots (1)$$

BDL üçgeni ikizkenar $\Rightarrow IBMI = IDKI \dots (2)$

(1) ve (2) den $IMFI + IBMI = IDKI + IDEI$ olur.

$IBFI = IKDI + IDEI$ bulunur.

66.



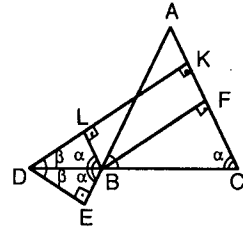
İkizkenar üçgenin tabanının uzantısı üzerinde alınan bir noktadan, üçgenin eşit kenarlarına inilen dikmelerin uzunlukları farkının mutlak değeri eşit kenara ait bir yüksekliğe eşittir.

Şekilde;

$IBI = IACI$, $[DE] \perp [AE]$, $[DK] \perp [AC]$ ve

$[BF] \perp [AC]$ ise $\boxed{IDKI - IDEI = IBFI}$ dir.

İSPAT



$[AC]$ ye paralel $[BL]$ çizelim.

LBFK dikdörtgen olur.

$$m(\hat{C}) = m(\hat{LBD}) = \alpha \text{ (Yöndeş)}$$

$$m(\hat{ABC}) = m(\hat{DBE}) \text{ (Ters açılar)}$$

Bu durumda $m(\hat{LDB}) = m(\hat{EDB})$ olur.

$\hat{DEB} \cong \hat{DLB}$ dir. (DB ortak hipotenüs olduğundan)

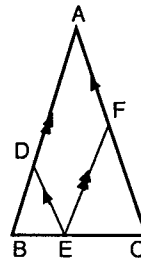
$ILKI = IBFI$ ve $IDLI = IDEI$ dir.

$$ILKI + IDLI = IBFI + IDEI \Rightarrow$$

$$IDKI = IBFI + IDEI \Rightarrow$$

$$\boxed{IDKI - IDEI = IBFI} \text{ bulunur.}$$

67.



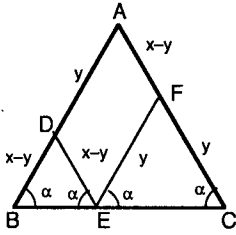
İkizkenar bir üçgende taban üzerinden alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının uzunlukları toplamı eş kenarların birinin uzunluğuna eşittir.

Şekilde; $IBI = IACI$,

$[DE] \parallel [AC]$ ve $[EF] \parallel [AB]$ ise

$$\boxed{IDEI + IEFI = IABI = IACI} \text{ dir.}$$

İSPAT



$|AB| = |AC| = x$ olsun.
 $|FC| = y$ diyelim.
 $|AF| = x - y$ olur.
 $m(\widehat{B}) = m(\widehat{FEC})$
 (yöndeş)
 $\Rightarrow |FC| = |EF| = y$

DEFA paralelkenar olduğundan;

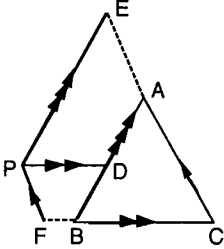
$$|EF| = |AD| = y$$

$$|AF| = |DE| = x - y$$

$$|DE| + |EF| = x - y + y = x = |AB| = |AC|$$

bulunur.

68. Şekilde ABC eşkenar üçgen;

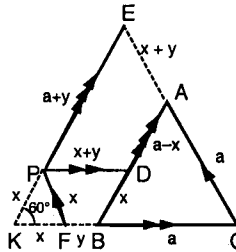


$[PF] \parallel [AC]$, $[PD] \parallel [BC]$,

$[PE] \parallel [AB]$ ise

$$|PE| + |PF| - |PD| = |BC| \text{ dir.}$$

İSPAT



ABC eşkenar üçgeninin bir kenar uzunluğu a olsun. $[EP]$ ve $[CB]$ uzantılarını K noktasında birleştirelim. PKF , KEC eşkenar üçgen $PKBD$ paralelkenar olur.

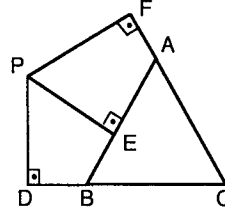
$$|PK| = x, \quad |FB| = y \text{ dersek,}$$

$$|PD| = x + y \text{ ve } |PE| = a + y \text{ olur.}$$

$$|PE| + |PF| - |PD| = a + y + x - (x + y) = a$$

bulunur.

69.



ABC eşkenar üçgen

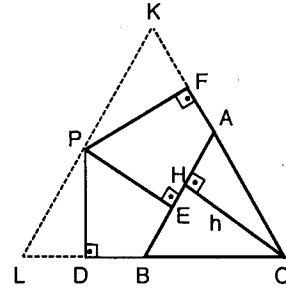
$[PD] \perp [BC]$,

$[PE] \perp [AB]$,

$[PF] \perp [AC]$ ise

$$|PD| + |PF| - |PE| = \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT



P noktasından $[AB] \parallel [KL]$ çizelim.

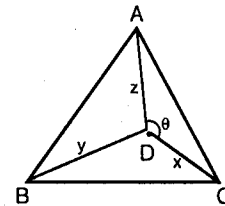
KLC üçgeni eşkenar olur.

$$|PF| + |PD| = |PE| + |CH| \text{ dir.}$$

$$|PF| + |PD| - |PE| = |CH| = \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = h$$

bulunur.

70.



Şekildeki ABC eşkenar üçgeninde;

$$|DC| = x,$$

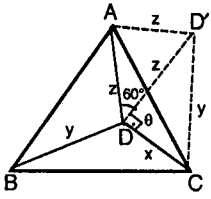
$$|BD| = y,$$

$$|AD| = z \text{ ve}$$

$$x^2 + z^2 = y^2 \text{ ise}$$

$$m(\widehat{ADC}) = \theta = 150^\circ \text{ dir.}$$

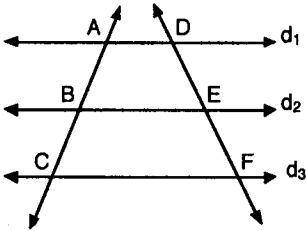
İSPAT



ABC üçgeninin dışında ADD' eşkenar üçgen olacak biçimde bir D' noktası alalım. ADD' üçgeni eşkenar olduğundan $m(\widehat{ADD'}) = 60^\circ$ ve $IAI = IDD' = IAD' = z$ olur.

$x^2 + z^2 = y^2$ eşitliği verildiğinden $DD'C$ üçgeninde; $m(\widehat{D'DC}) = 90^\circ$ olur. Buna göre $m(\widehat{ADC}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ bulunur.

71. (Tales Teoremi)

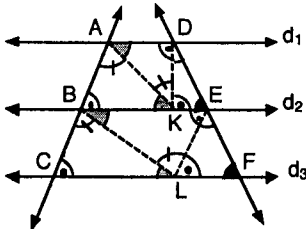


Paralel doğruları kesen herhangi iki doğru üzerinde, paralellerin ayırdıkları doğru parçaları orantılıdır.

$d_1 // d_2 // d_3$ ise

$$\frac{IAI}{IBI} = \frac{IDEI}{IEFI}, \frac{IAI}{IBI} = \frac{IDEI}{IDFI} \text{ dir.}$$

İSPAT



$[AB]$ ye D' 'den $[DK]$ paraleli, $[AB]$ ye E' 'den $[EL]$ paraleli çizelim.

Buna göre;

$$\widehat{ADK} \sim \widehat{BEL} \Rightarrow \frac{IAI}{IBEI} = \frac{IDKI}{IELI} = \frac{IAKI}{IBLI} \dots (1)$$

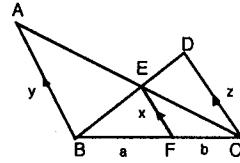
$$\widehat{ABK} \sim \widehat{BCL} \Rightarrow \frac{IAI}{IBI} = \frac{IBKI}{ICLI} = \frac{IAKI}{IBLI} \dots (2)$$

$$\widehat{DKE} \sim \widehat{ELF} \Rightarrow \frac{IDKI}{IELI} = \frac{IKEI}{ILFI} = \frac{IDEI}{IEFI} \dots (3)$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } \frac{IAI}{IBI} = \frac{IAKI}{IBLI} = \frac{IDKI}{IELI} \dots (4)$$

(3) ve (4) den

$$\frac{IAI}{IBI} = \frac{IDKI}{IELI} = \frac{IDEI}{IEFI} \Rightarrow \frac{IAI}{IBI} = \frac{IDEI}{IEFI} \text{ bulunur.}$$

72. $[AB] // [EF] // [DC]$ 

$$IEFI = x,$$

$$IABI = y,$$

$$IDCI = z,$$

$$IBFI = a \text{ ve}$$

$$IFCI = b \text{ ise}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ ve } a.z = b.y \text{ dir.}$$

İSPAT

BDC üçgeninde $[EF] // [DC]$ ise

$$\frac{IBFI}{IBCI} = \frac{IEFI}{IDCI} \text{ dir.} \dots (1)$$

ACB üçgeninde $[EF] // [AB]$ ise

$$\frac{IFCI}{IBCI} = \frac{IEFI}{IABI} \dots (2)$$

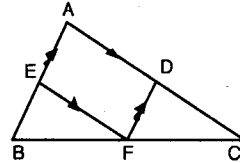
(1) ve (2) taraf tarafa toplanır;

$$\frac{IBFI}{IBCI} + \frac{IFCI}{IBCI} = \frac{IEFI}{IDCI} + \frac{IEFI}{IABI}$$

$$\Rightarrow \frac{IBFI + IFCI}{IBCI} = \frac{IEFI}{IDCI} + \frac{IEFI}{IABI}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x}{z} + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \text{ bulunur.}$$

73.



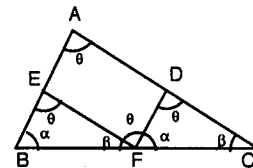
Şekilde;

$[EF] // [AC]$,

$[FD] // [AB]$ ise;

$$\frac{IEFI}{IACI} + \frac{IFDI}{IABI} = 1 \text{ dir.}$$

İSPAT



$[EF] // [AC]$,

$[FD] // [AB]$ ise

AEFD paralelkenardır.

$$IAEI = IFDI \text{ ve}$$

$$IEFI = IADI \text{ dir.}$$

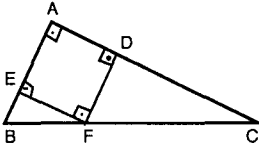
ABC üçgeninde $[DF] // [AB]$ ise

$$\frac{IFDI}{IABI} = \frac{IDCI}{IACI} = \frac{IACI - IADI}{IACI} = 1 - \frac{IADI}{IACI}$$

$$\frac{IFDI}{IABI} + \frac{IADI}{IACI} = 1 \text{ (} IADI = IEFI \text{)}$$

$$\frac{IFDI}{IABI} + \frac{IEFI}{IACI} = 1 \text{ bulunur.}$$

74.



Şekilde ABC bir dik üçgen ve EFDA kare ise $IACI = b$, $IABI = c$ ve $IEFI = x$ olmak üzere karenin bir kenar uzunluğu;

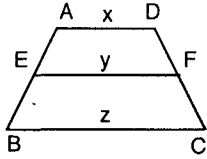
$$x = \frac{b \cdot c}{b + c} \text{ dir.}$$

İSPAT

$$\frac{x}{c} + \frac{x}{b} = 1 \Rightarrow \frac{xc + xb}{cb} = 1$$

$$x(b + c) = c \cdot b \Rightarrow x = \frac{c \cdot b}{b + c} \text{ bulunur.}$$

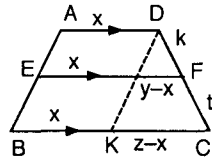
75.



Şekilde;
 $[AD]/[EF]/[BC]$,
 $IADI = x$, $IEFI = y$,
 $IIBC = z$ ise;

$$\frac{IAEI}{IEBI} = \frac{IDFI}{IFCI} = \frac{y - x}{z - y} \text{ dir.}$$

İSPAT



$[DK] \parallel [AB]$
 çizelim.
 $\frac{k}{k + t} = \frac{y - x}{z - x}$

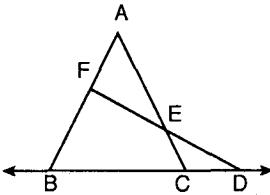
$$kz - kx = ky - kx + ty - tx$$

$$kz - ky = ty - tx$$

$$k(z - y) = t(y - x)$$

$$\frac{k}{t} = \frac{y - x}{z - y} \text{ bulunur.}$$

76.

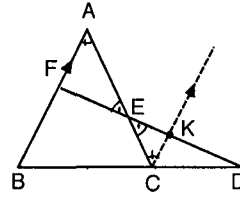


(Menelaüs Teoremi)

Bir üçgende iki kenar ile üçüncü kenarın uzantısını bir noktada kesen herhangi bir doğru parçası için

$$\frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 \text{ bağıntısı vardır.}$$

İSPAT



C'den [AB] ye [CK] paraleli çizersek.

$$\widehat{AFE} \sim \widehat{CKE} \text{ ve}$$

$$\widehat{DKC} \sim \widehat{DFB}$$

benzerliklerini elde ederiz. Buna göre;

$$\widehat{AFE} \sim \widehat{CKE} \text{ ise;}$$

$$\frac{IAFI}{ICKI} = \frac{IFEI}{IKEI} = \frac{IAEI}{ICEI} \dots (1)$$

$$\widehat{DKC} \sim \widehat{DFB} \text{ ise;}$$

$$\frac{IDKI}{IDFI} = \frac{IKCI}{IFBI} = \frac{IDCI}{IDBI} \dots (2)$$

$$(1) \text{ den } \frac{IAEI}{ICEI} \cdot \frac{ICKI}{IAFI} = 1 \dots (3)$$

$$(2) \text{ den } \frac{ICDI}{IDBI} \cdot \frac{IFBI}{IKCI} = 1 \dots (4)$$

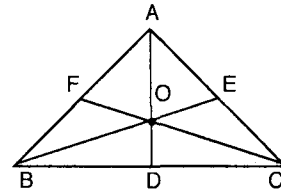
(3) ve (4) taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{IAEI}{ICEI} \cdot \frac{ICKI}{IAFI} \cdot \frac{ICDI}{IDBI} \cdot \frac{IFBI}{IKCI} = 1 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \frac{IAEI}{ICEI} \cdot \frac{ICDI}{IAFI} \cdot \frac{IFBI}{IDBI} = 1 \text{ bulunur.}$$

77. (Seva Teoremi)

Bir üçgende bir köşeden çıkıp karşı kenarı kesen doğru parçaları bir tek noktada kesişiyorsa, bu doğru parçalarının köşelerden ayırmış olduğu kenar uzunlukları için komşu olmayan kenarlar çarpımı birbirine eşittir.

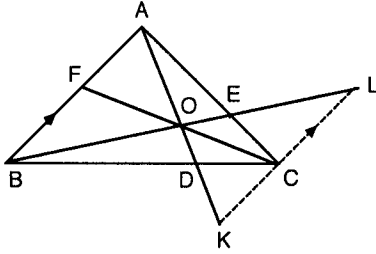


Şekilde O noktası [BE], [CF] ve [AD] nın kesim noktası ise;

$$|BD| \cdot |EC| \cdot |AF| = |DC| \cdot |AE| \cdot |FB|$$

$$\text{veya } \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1 \text{ dir.}$$

İSPAT



[KL] // [AB] çizelim.

$\widehat{ECL} \sim \widehat{EAB}$ dir.

$$\frac{|EC|}{|EA|} = \frac{|LC|}{|AB|} \dots (1)$$

$\widehat{DCK} \sim \widehat{DBA}$ dir.

$$\frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|CK|}{|AB|} \dots (2)$$

(1) ve (2) taraf tarafa çarpılırsa;

$$\frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|CK|}{|AB|} = \frac{|LC|}{|AB|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|}$$

$|EC| \cdot |CK| \cdot |BD| = |EA| \cdot |LC| \cdot |DC| \dots (3)$ elde edilir.

$\widehat{OKC} \sim \widehat{OAF}$ dir.

$$\frac{|KC|}{|AF|} = \frac{|OC|}{|OF|} \dots (4)$$

$\widehat{OLC} \sim \widehat{OBF}$ dir.

$$\frac{|LC|}{|BF|} = \frac{|OC|}{|OF|} \dots (5)$$

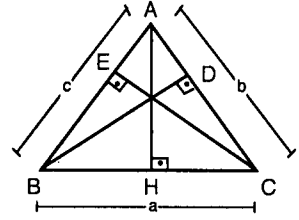
(4) ve (5) den

$$\frac{|KC|}{|AF|} = \frac{|LC|}{|BF|} \text{ dir. } \dots (6)$$

(3) ve (6) dan

$|BD| \cdot |EC| \cdot |AF| = |DC| \cdot |AE| \cdot |BF|$ bulunur.

78.



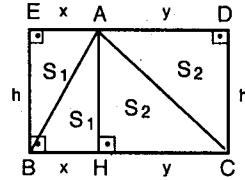
$|AH| = h_a$, $|BD| = h_b$ ve $|CE| = h_c$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı, yükseklik ile yüksekliğin indiği kenar uzunluğunun (tabanın) yarısının çarpımına eşittir.

Şekildeki ABC üçgeninde;

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ dir.}$$

İSPAT

Dik üçgenin alanı dikdörtgene tamamlayarak daha önceden yapılmıştı. ABC üçgenini yine dikdörtgene tamamlayalım.



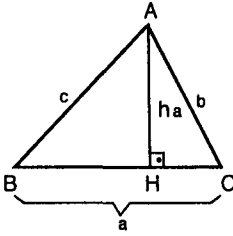
$$A(BCDE) = h(x+y) = 2S_1 + 2S_2 \text{ dir.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = S_1 + S_2 = \frac{h(x+y)}{2} = \frac{a \cdot h}{2} \text{ bulunur.}$$

79. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde; $u = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere ABC üçgeninin alanı;

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \text{ dir.}$$

İSPAT



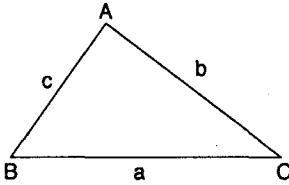
Üçgenin bir kenarına ait yüksekliği

$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ olduğu gösterilmiştir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \text{ bulunur.}$$

80.



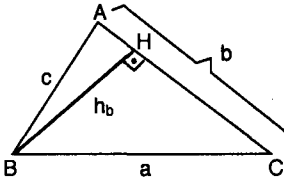
Bir ABC üçgeninde;

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \hat{B}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A} \text{ dir.}$$

İSPAT



$$\sin \hat{A} = \frac{h_b}{c}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

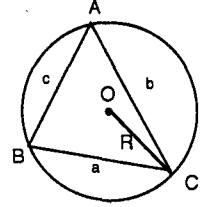
$$h_a = \frac{b \cdot h_b}{a}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot h_b}{2 \cdot a}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2 \cdot a} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2} \text{ bulunur.}$$

81. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ; çevrel çemberinin yarıçapı $IOCI = R$ olmak üzere üçgenin alanı,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \text{ dir.}$$



İSPAT

ABC üçgeninde;

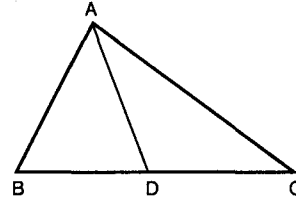
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{2R} \text{ dir.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \text{ bulunur.}$$

82. (Stewart Teoremi)

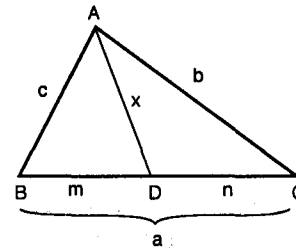


Herhangi bir ABC üçgeninde AD herhangi bir kesen olmak üzere

$$|AD|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot |DC| + |AC|^2 \cdot |BD|}{|BC|} - |BD| \cdot |CD|$$

dir.

İSPAT



ABD üçgeninde cos. teoreminden;

$$x^2 = m^2 + c^2 - 2mc \cdot \cos B$$

ABC üçgeni ve cos teoreminden;

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$x^2 = m^2 + c^2 - \cancel{2m \cdot c} \frac{(m+n)^2 + c^2 - b^2}{\cancel{2(m+n)} \cdot \cancel{c}}$$

$$x^2 = m^2 + c^2 - \left[\frac{m(m+n)^2}{m+n} + \frac{(c^2 - b^2)m}{m+n} \right]$$

$$x^2 = \cancel{m^2} + c^2 - \cancel{m^2} - mn + \frac{b^2 m - c^2 m}{m+n}$$

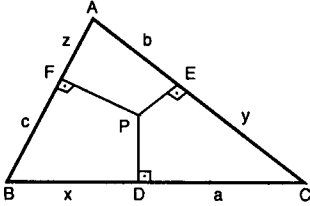
$$x^2 = \frac{c^2 m + c^2 n + b^2 m - c^2 m}{m+n} - m.n$$

$$x^2 = \frac{c^2 n + b^2 m}{m+n} - m.n$$

$$|AD|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot |DC| + |AC|^2 \cdot |BD|}{|BC|} - |BD| \cdot |CD|$$

bulunur.

83. (Genel CARNOT Teoremi)

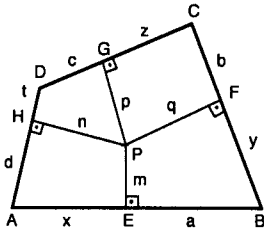


P, üçgenin iç bölgesinde herhangi bir nokta olmak üzere; [PD] ⊥ [BC], [PE] ⊥ [AC],

[PF] ⊥ [AB] ise,

$$|BD|^2 + |EC|^2 + |FA|^2 = |DC|^2 + |AE|^2 + |BF|^2$$

idi.



P Dörtgenin iç bölgesinde herhangi bir nokta olmak üzere; [PE] ⊥ [AB], [PF] ⊥ [BC]

[PG] ⊥ [CD], [PH] ⊥ [AD] ise

$$|EA|^2 + |FB|^2 + |GC|^2 + |HD|^2 = |EB|^2 + |FC|^2 + |GD|^2 + |HA|^2 \text{ dir.}$$

Buna genelleştirirsek tüm çokgenler içinde geçerlidir.

İSPAT

ABCD dörtgeni için;

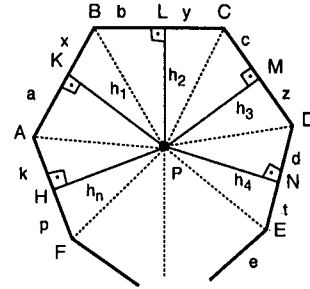
$$x^2 + \cancel{m^2} = \cancel{m^2} + d^2 \quad (\text{AEPH kirisler dörtgeni})$$

$$y^2 + \cancel{d^2} = \cancel{m^2} + a^2 \quad (\text{EBFP kirisler dörtgeni})$$

$$z^2 + \cancel{a^2} = \cancel{d^2} + b^2 \quad (\text{PFCG kirisler dörtgeni})$$

$$+ t^2 + \cancel{b^2} = \cancel{d^2} + c^2 \quad (\text{HPGD kirisler dörtgeni})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ bulunur.}$$



P, çokgenin iç bölgesinde herhangi bir nokta olmak üzere;

[PK] ⊥ [AB], [PL] ⊥ [BC], [PM] ⊥ [CD], ... ise

$$|KA|^2 + |HF|^2 + \dots + |ND|^2 + |MC|^2 + |LB|^2 =$$

$$|KB|^2 + |HA|^2 + \dots + |NE|^2 + |MD|^2 + |LC|^2 \text{ dir.}$$

İSPAT

$$h_n^2 + k^2 = h_1^2 + a^2 \quad (\text{AHPK kirisler dörtgeni})$$

$$h_1^2 + x^2 = h_2^2 + b^2 \quad (\text{BKPL kirisler dörtgeni})$$

$$h_2^2 + y^2 = h_3^2 + c^2 \quad (\text{CLPM kirisler dörtgeni})$$

$$h_3^2 + z^2 = h_4^2 + d^2 \quad (\text{DMPN kirisler dörtgeni})$$

$$h_4^2 + t^2 = \dots + e^2 \quad (\dots \text{ kirisler dörtgeni})$$

$$\dots$$

$$\dots = h_n^2 + p^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \dots + k^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \dots + p^2$$