Diziler ve Seriler

Yazar
Prof .Dr. Vakıf CAFEROV

ÜNİTE
7

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- dizi kavramını tanıyacak,
- dizilerin yakınsaklığını araştırabilecek,
- sonsuz toplamın anlamını bilecek,
- serilerin yakınsaklığını araştırabilecek,
- bazı serilerin toplamını bulabileceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Ünitedeki kavramları, tanımları, testleri iyi öğreniniz
- Çözümleri verilmiş örneklerin çözümlerini iyice inceleyiniz
- Herhangi bir dizi, seri örnekleri alıp onların yakınsaklığını araştırmaya çalışınız.

1. Giriş

Cebir kuralları ile ancak sonlu tane sayıyı toplayabiliriz. Buna karşılık matematikte sonsuz sayıda sayının "toplamı" ile de sık sık karşılaşmaktayız. Örneğin, $\frac{1}{3}$ sa-yı-ssının ondalık açılımı

$$\frac{1}{3} = 0,333 \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$ gibi bir sonsuz toplamdır.

Böyle bir toplama seri kavramı ile anlam kazandırılmıştır. Bu ünitede seri kavramı ile, serilerle çok yakından alakalı olan dizi kavramını inceleyeceğiz.

2. Diziler

Tanım kümesi IN doğal sayılar kümesi, değer kümesi ise IR gerçel sayılar kümesi olan bir fonksiyona **dizi** denir. Dizinin verilebilmesi için her 1, 2, ..., n, ... doğal sayılarına $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ gibi gerçel sayıların karşı getirilmesi gerekmektedir. x_1, x_2, ... sayılarına dizinin **terimleri,** n ye bağlı bir ifade olan x_n ye ise dizinin **genel terimi** denir. Diziler ya $x_1, x_2, x_3, \ldots$gibi veya x_n genel terimini parantez içine alarak $\{x_n\}$ veya (x_n) gibi de gösterilebilir.

Örnek: 1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ dizisinin genel terimi $x_n = \frac{1}{2^n}$ dir. Bu nedenle, dizi $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ şekilnde gösterilir. Bu dizinin, örneğin 8. ci terimi $x_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$ dır.

2) -1, 1, -1, 1, ... dizisinin genel terimi $x_n = (-1)^n$ dir. Buna göre, dizi kısaca $((-1)^n)$ şeklinde gösterilir.

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ dizisinin genel terimi $x_n = \frac{1}{n}$ dir. Bu nedenle, dizi $\left(\frac{1}{n}\right)$ şeklinde gösterilir.

4) a ve d gerçel sayılar olmak üzere,

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

dizisinin genel terimi $x_n = a + (n - 1) d$ dir. Böyle ifade edilebilen bir diziye **aritmetik dizi**, d sayısına da dizinin **ortak farkı** denir.

(a + (n - 1) d) aritmetik dizisinde ardışık (birbirini takip eden) herhangi iki terim arasındaki farkın daima sabit olup d ye eşit olduğuna dikkat ediniz.

5) a ve q, $q \neq 0$, gerçel sayılar olmak üzere

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

dizisinin genel terimi $x_n = a \cdot q^{n-1}$ dir. Böyle bir diziye **geometrik dizi,** q sayısına da dizinin **ortak çarpanı** denir.

(aq^{n-1}) geometrik dizisinde ardışık herhangi iki terimin oranı daima sabit olup q ya eşittir.

6) $\sqrt{3}$ sayısının yaklaşık değerlerini gösteren

1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205, ...

rasyonel sayıları da bir dizi oluşturur. Önceki örneklerden farklı olarak bu dizinin genel terimini bir formülle ifade etmek mümkün değildir.

7) Yarıçapı r olan bir daire içine çizilmiş düzgün n-kenarlının (n-gen) çevresinin P_n uzunluğu $P_n = 2nr \sin\frac{\pi}{n}$ formülü ile hesaplanır. Buna göre, bu dairenin içine çizilmiş düzgün üçgen, dörtgen, beşgen, ... lerin çevre uzunlukları

$$6r \sin\frac{\pi}{3},\ 8r \sin\frac{\pi}{4},\ 10r \sin\frac{\pi}{5}, \ldots$$

gibi bir dizi oluşturur.

Aşağıdaki dizilerin genel terimlerini yazınız.

1) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$ **3)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$

2) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **4)** $-\frac{1}{3!}, \frac{1}{6!}, -\frac{1}{9!}, \frac{1}{12!}, \ldots$

Cevaplarınız $x_n = \frac{n}{n+2}$, 2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 3) $x_n = \frac{n}{2^n}$ ve 4) $x_n = \frac{(-1)^n}{(3n)!}$ olmalıydı.

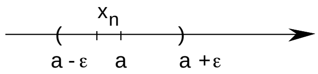
Bir (x_n) dizisinde n büyüdükçe, dizinin terimleri belli bir a sayısına istenildiği kadar yaklaşıyorsa, (x_n) dizisi a sayısına yakınsıyor denir. Bu durumu matematik dille ve daha kesin olarak ifade etmeden önce bir hatırlatma yapalım: matematikte, sıfıra istenildiği kadar yakın olabilen pozitif sayılar, ε (epsilon), δ (delta) , ... gibi harflerle gösterilirler.

(x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyor ve n nin n_0 dan büyük tüm değerleri için $|x_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman a sayısına (x_n) dizisinin limiti denir ve

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{veya} \quad (x_n) \to a$$

şeklinde gösterilir ("lim" sembolü latince "limes" sözünden kaynaklanıp limit anlamı ifade etmektedir). Bu durumda **(x_n) dizisi a ya yakınsıyor** da denir. Eğer bir dizi herhangi bir limite yakınsıyor ise, bu diziye **yakınsak dizi**, hiç bir limite yakınsamıyorsa **ıraksak dizi** denir.

Mutlak değerin özelliklerine göre, $|x_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliği $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ ve $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ eşitsizlikleri ile eşdeğer olduğundan, limitin yukarıdaki tanımı geometrik olarak şöyle yorumlanabilir: Sayı ekseni üzerinde orta noktası a ve uzunluğu 2ε olan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığı verildiğinde ε ne kadar küçültülürse küçültülsün, n nin öyle bir n_0 değeri vardır ki numarası (indisi) n_0 dan büyük olan tüm x_n terimleri bu aralığın içine düşer.



$|x_n - a|$ mutlak değeri sayı ekseni üzerinde x_n noktası ile a noktası arasındaki uzaklığı gösterdiğinden limitin tanımı şöyle de ifade edilebilir: Belli bir n den sonra x_n ile a arasındaki uzaklık önceden verilen ve istenildiği kadar küçük olabilen pozitif ε sayısından küçük oluyorsa, (x_n) dizisinin limiti a dır.

Örnek: $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, a =0 dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Buna göre eğer, $n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1$, $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right.$ nun tam değeri artı $\left.1\right)$ alırsak o zaman $n > n_0$

eşitsizliğini sağlayan tüm n ler için $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olur.

Yukarıdaki örneğe benzer olarak $(x_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ dizisinin de limitinin sıfır olduğu gösterilebilir. Fakat bu dizide sıfıra yaklaşma hızı daha yüksektir. Örneğin,

$\left(\frac{1}{n}\right)$ için $x_5 = 0,2$; $x_{10} = 0,1$ iken, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ için $x_5 = \frac{1}{32} = 0,03125$,

$x_{10} \cong 0,001$ olur.

$(x_n) = ((-1)^n)$ dizisi ise ıraksaktır. Çünkü n nin tek veya çift olmasına bağlı olarak n büyüdükçe x_n hem -1 hem de 1 değerleri almaya devam eder. Yani tek indisli terimler 1 e, çift indisli terimler -1 e yaklaşmaz. Dolayısıyla ne -1 ne de 1 limit olmadığı gibi başka bir sayı da bu dizinin limiti olamaz.

Bu kitabın amacı dışındaki yöntemlerle $(x_n) = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu ispatlamak mümkündür. Bu dizinin limitine, 1. ve 5. ünitelerde de sözünü ettiğimiz e sayısı denir:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

?

1) $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ **dizisinin limitinin** 1 **olduğunu gösteriniz**.

2) $(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **dizisinin limitinin** 0 **olduğunu gösteriniz**.

Dizilerin yakınsak olduğunu tanımdan hareketle göstermek zor olabilir. Bu durumlarda aşağıdaki önermeler yararlı olabilir.

1) (x_n) dizisi yakınsak ise limiti tektir.

2) (x_n) dizisi yakınsak ise sınırlıdır, yani öyle bir M sayısı vardır ki tüm n ler için $|x_n| \leq M$ sağlanır.

3) (x_n) ve (y_n) yakınsak dizileri verildiğinde eğer her n için $x_n \leq y_n$ ise o zaman

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leq \lim_{n \to \infty} y_n$$

dir.

4) (x_n) ve (y_n) yakınsak dizileri verildiğinde $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$ dizileri de yakınsaktır ve

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n$$

dir. Son eşitlikte $y_n = c$ sabit dizisini alırsak, o zaman $\lim_{n \to \infty} (c_n) = c \lim_{n \to \infty} (x_n)$ eşitliği çıkar. Başka deyişle sabiti limit işareti dışına çıkarmak mümkündür.

5) (x_n) ve (y_n) yakınsak ve $\lim_{n \to \infty} y_n \neq 0$ ise o zaman $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} x_n}{\lim_{n \to \infty} y_n}$$

6) (x_n), (y_n) ve (z_n) dizileri verilsin ve her n için $z_n \leq x_n \leq y_n$ eşitsizliği sağlanmış olsun. Eğer (y_n) ve (z_n) dizileri ayni limite yakınsar ise (x_n) dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} z_n$$

dir.

Bu önermeler tanımdan yararlanarak ispatlanabilir, fakat ispatlar üzerinde durmayacağız.

Örnek:1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 - n + 2}$ 2) $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$

limitlerini hesaplayınız.

Çözüm: 1) $\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 - n + 2}$ kesrinde pay ve paydayı n^2 ile bölersek

$$\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 - n + 2} = \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}$$ olur. O zamar

$$\lim_{n \to \infty} 1 = 1,\ \lim_{n \to \infty} 2 = 2,\ \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 3.\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 3.0 = 0,\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} . \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.0 = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n^2} = 2.\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

olduklarından

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 - n + 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \to \infty}\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$ bulunur.

2) $\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$ ifadesini $\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)$ ile çarpıp bölersek

$$\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) = \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)} = \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1}\right)^2 - n^2}{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)} =$$

$$= \frac{n^2 + 1 - n^2}{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

olur. $\sqrt{n^2 + 1} > n$ olduğunda $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} < \frac{1}{2n}$

olur. Dolayısıyla $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \dfrac{1}{2n}$

elde edilir.

$$0 < \sqrt{n^2+1} - n < \frac{1}{2n} \ ,$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ olduğundan yukarıdaki 6). önermeye göre

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0$$

olur.

Not: Iraksak olduğu halde limitinden söz etmenin yararlı olduğu diziler vardır. (x_n) dizisi verilsin. Eğer yeterli derecede büyük her $M > 0$ için bir n_0 doğal sayısı varsa ve $n > n_0$ eşitsizliğini sağlayan tüm n ler için $x_n > M$ oluyorsa, o zaman (x_n) dizisinin limiti sonsuzdur denir ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \quad \text{veya} \quad x_n \to \infty$$

şeklinde gösterilir. Eğer $(-x_n)$ dizisinin limiti ∞ ise (x_n) dizisinin limiti $-\infty$ dur denir ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ gibi gösterilir.

Örneğin, $(\sqrt{n})$, $\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{n!}{10^n}\right)$ dizilerinin limiti ∞ dur.

?

Yukarıdaki dizilerin limitinin ∞ olduğunu gösteriniz.

3. Seriler

Bir (x_n) dizisi verilsin. Bu dizinin ilk n tane teriminin toplamı olan $x_1 + x_2 + ... + x_n$ ifadesi sembolik olarak $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ gibi yazılır. Buradaki $\sum$ (sigma) harfi bu tür toplamları kısa olarak yazmak için kullanılır. k ya toplama indisi denir ve k indisi yerine başka indisin kullanılması sonucu etkilemez. Örneğin,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 999 + 1000 = \sum_{k=1}^{1000} k = \sum_{m=1}^{1000} m = \sum_{n=1}^{1000} n \ ,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i} = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{n}$$

yazılabilir. $\sum$ işareti matematikde çok kullanışlıdır ve çok zaman uzun ifadelerin yazılımını kısaltmaya imkan verir.

Şimdi (x_n) dizisinin sonlu tane elemanını değil de tüm elemanlarını "toplayalım".

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

sonsuz "toplamına" **seri** denir. Sigma gösterimi yardımı ile bu seri $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ gibi gösterilir. Şimdi sonsuz sayıda gerçel sayının toplamına anlam kazandırmak için

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinden yeni (s_n) dizisini elde edelim:

$s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$, ... , $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, ...

Eğer (s_n) dizisi yakınsak olup limiti a ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine **yakınsak seri** denir ve

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a$ gibi yazılır. a sayısına **serinin toplamı** da denilir.

Eğer (s_n) dizisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine **ıraksak seri** denir.

x_1 , x_2, ... sayılarına serinin **terimleri,** $x_n$ye **genel terimi,** (s_n) dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir.

Görüldüğü gibi sonsuz sayıda gerçel sayının "toplamı", sonlu sayıdakilerin toplamlarının bir limiti olarak tanımlanmaktadır.

Eğer (s_n) dizisinin limiti ∞ ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi ıraksak olmasına rağmen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ yazılımı kullanılır.

Örnek: $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geometrik diziden elde edilen, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu serinin kısmi toplamlar dizisini görelim:

$$s_1 = \frac{1}{3},\ s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2},\ \ldots,\ s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n};\ \ldots$$

s_n toplamının

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

ifadesine eşit olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla

$$s_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

olur.

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ olduğu da kolayca gösterilebilir. Buna göre,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2} \ ,$$

(s_n) dizisi yakınsak olduğundan verilen seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{1}{2}$ dir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \ .$$

a ve q gerçel sayılar ve q ≠ 1 olmak üzere

?

$$\mathbf{a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a\,(1 - q^n)}{1 - q}}$$

olduğunu gösteriniz.

?

q gerçel sayısı 0<q<1 koşulunu sağlasın. O zaman $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ geometrik serisinin yakınsak ve toplamının $\frac{1}{1 - q}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ olduğundan kısmi toplamlar aşağıdaki gibidir.

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad s_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, \ldots,$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

s_n nin ifadesini sadeleştirmek mümkündür. Bunun için

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ .\ .\ .+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $s_n = 1-\frac{1}{n+1}$ dir ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)=1-0=1 \text{ olur.}$$

Buna göre, seri yakınsak olup toplamı 1 dir.

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n(n+1)}+\ .\ .\ .\ =1$$

Önerme: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

İspat: Kısmı toplamlar için

$$s_{n-1} = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}, \quad s_n = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n$$

yazılabilir. Buradan $x_n = s_n - s_{n-1}$ olur. Seri yakınsak olduğundan (s_n) ve (s_{n-1}) dizileri serinin toplamı olan aynı a sayısına yakınsarlar. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = a - a = 0\ .$$

Yukarıda yakınsak olduklarını gösterdiğimiz $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ serilerinde genel terimler $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ve $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ dir. $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ve $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ dizilerinin limitlerinin sıfır olduğunu görmek zor değildir.

Yukarıdaki önermeye göre $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ koşulu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin yakınsaklığı için **gerekli** koşuldur. Yani bu koşul sağlanmıyorsa seri kesin olarak ıraksaktır. Ancak bu koşul yeterli olmayabilir: Genel terimi sıfıra yaklaşan seri ıraksak olabilir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek: Harmonik seri denilen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n}+\ .\ .\ .$$

serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce her $n \in IN$ için $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ olduğunu kolayca görebiliriz. (bunun için $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots$ kesirlerinin yerine onlardan küçük $\frac{1}{2n}$ kesrini yazmak yeterlidir) Buna göre s_n kısmi toplamları için aşağıdakileri yazabiliriz.

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$s_{2^2} = s_4 = s_2 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.\frac{1}{2}$$

$$s_{2^3} = s_8 = s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} > 2.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.\frac{1}{2}$$

$$s_{2^4} = s_{16} = s_8 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}} > 3.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4.\frac{1}{2}$$

.

.

.

$$s_{2^k} > k.\frac{1}{2}$$

dır.

Buradan $\lim_{k \to \infty} s_{2^k} = \infty$ olur. (s_n) pozitif terimli dizinin (s_{2^k}) alt dizisinin limiti ∞ olduğundan $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$ olduğu sonucuna varıyoruz. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olup $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ dur.

Sonuçta $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ olmasına rağmen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Not: 1) Seride toplama indisinin 1 den başlaması mecburi değildir. Örneğin, aynı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}, \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1}, \dots$ gibi de yazılabilir.

2) Her gerçel a sayısının $a = c_0, c_1 c_2 \dots$ gibi devirli veya devirsiz sonsuz ondalık kesirle yazılımının mümkün olduğunu biliyoruz. Bu yazılım aslında bir seriden başka bir şey değildir:

$$a = c_0, c_1 c_2 \dots = \frac{c_0}{10^0} + \frac{c_1}{10^1} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

Örneğin, $\frac{1}{3} = 0{,}3333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$

dir.

Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz:

?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$

Cevaplarınız $\frac{1}{4}$ ve $\frac{137}{300}$ olmalıdır.

Örnek: 1000 litrelik bir su deposu, önce 1 litre, sonra $\frac{1}{2}$ litre, ... , $\frac{1}{n}$ litre, .. . su alınarak boşaltılabilir mi?

Çözüm: Boşaltılan su miktarı

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

litredir. Bu serinin toplamı ∞ olduğundan depo sonlu adımda boşaltılabilir.

Örnek: 30 litrelik bir su deposu, önce $\frac{30}{2}$ litre, sonra $\frac{30}{2^2}$ litre, ... , $\frac{30}{2^n}$ litre, .. . su alınarak boşaltılabilir mi?

Çözüm: Boşaltılan su miktarı

$$\frac{30}{2} + \frac{30}{2^2} + ... + \frac{30}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{2^n}$$

litredir. Bu serinin toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{2^n} = 30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 30.\ 1 = 30$$

olduğundan, depo, bu yolla, sonlu adımda fiilen boşaltılamaz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.**

?

4. Pozitif Terimli Serilerin Yakınsaklığı

Bir serinin yakınsaklığının araştırılması ile serinin yakınsak olması halinde toplamının bulunması seri konusunun önemli iki problemidir. Serilerin yakınsaklığını araştırmak için çeşitli testler vardır. Biz bu kesimde pozitif terimli serilerin yakınsaklığını araştırmada kullanılan bazı testleri ele alacağız.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi verilsin. Eğer her n için $x_n > 0$ ise bu seriye **pozitif terimli seri** denir.

Pozitif terimli bir serinin yakınsaklığı veya ıraksaklığını bu seriyi, yakınsaklığı veya ıraksaklığı bilinen başka seri ile karşılaştırarak söylemek mümkün olur.

Karşılaştırma testleri

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **ve** $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ **pozitif terimli serileri verilsin.**

1) Öyle bir $n_0 \in IN$ bulunsun ki $n > n_0$ değerleri için $x_n \le y_n$ eşitsizliği sağlanmış olsun. O zaman:

- $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ **serisi yakınsak ise** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **de yakınsaktır.**
- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **serisi ıraksak ise** $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ **de ıraksaktır.**

2) Eğer $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$ **limiti mevcut olup pozitif bir sayıya eşitse, o zaman bu iki seri aynı zamanda yakınsak veya ıraksaktır.**

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

serilerinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: 1) $\frac{1}{n\,!} = \frac{1}{1\,.\,2.\,3\,.\,.\,.\,n} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan

$x_n = \frac{1}{n\,!}$, $y_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ alırsak $x_n \le y_n$ olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

geometrik serisi yakınsak olduğundan, karşılaştırma testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisi yakınsaktır.

2) $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

eşitsizliği her $n \in IN$ için doğru ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi de ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$

serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu seriyi ıraksak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ile karşılaştıralım. $x_n = \frac{1}{2n-1}$, $y_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} > 0$$

dir. Bu durumda 2). karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ serisi ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,2^n}$ **serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.** **?**

$\alpha \in IR^+$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serisi verilsin.

Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serisi ıraksaktır. $\alpha > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serisi yakınsaktır. Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinde $\alpha = 2 > 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Buna karşılık,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ serisinde $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan bu seri ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+2)}$ serisinin yakınsaklığını arştırınız.

Çözüm: Bu serinin genel teriminin paydasının derecesi $\frac{3}{2}$ dir.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}(n+2)} = \frac{1}{n^{1/2}(n+2)} = \frac{1}{n^{3/2} + 2n^{1/2}} \text{ olduğuna dikkat ediniz.}\right)$$

Bu seri ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ serisini karşılaştıralım.2). karşılaştırma testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}(n+2)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1$$

dir. Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak olduğundan $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+2)}$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ serisinin yakınsaklığını araştıralım.

Çözüm: $\frac{\sqrt{n}}{2n+3} = \frac{\sqrt{n}}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}$

olduğundan bu seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi ile karşılaştıralım.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{2n+3}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

2). karşılaştırma testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi ıraksak olduğundan $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ serisi ıraksaktır.

Cauchy testi

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitif terimli serisi verilsin. Eğer $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n}$ limiti varsa ve 1 den küçükse o zaman bu seri yakınsak, 1 den büyükse ıraksaktır.

D'Alambert oran testi

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitif terimli serisinde $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ limiti varsa ve 1 den küçükse bu seri yakınsak, 1 den büyükse ıraksaktır.

Cauchy ve D'Alambert testleri verilen serileri geometrik serilerle karşılaştırmaya dayanır.

Örnek: 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

serilerinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: 1) $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{(\ln n)^n}} = \dfrac{1}{\ln n}$,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

olduğundan Cauchy testine göre seri yakınsaktır.

2) $x_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$, $x_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+2)!}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} : \frac{3^n}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}.(n+1)!}{3^n.(n+2)!} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3.3^n.(n+1)!}{3^n.(n+1)!(n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+2} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathbf{n}}{3^{\mathbf{n}}}$ **serisinin yakınsaklığını araştırınız.**

?

Cevabınız "seri yakınsaktır" olmalıydı.

Pozitif terimli seri ya yakınsaktır ya da toplamı ∞ dur. Tüm terimleri negatif olan serilerin yakınsaklığı ise pozitif terimli serilerin yakınsaklığının bir sonucu olarak incelenebilir.

Pozitif terimli serilerde $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ veya $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ ise kök testi ve oran testi ile karar verilemez. Başka testleri denemek gerekir.

5. Alterne Seriler ve Mutlak Yakınsaklık

Her $n \in IN$ için $x_n > 0$ olmak üzere,

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$$

şeklindeki bir seriye **alterne seri** denir. Örneğin,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

serileri alterne serilerdir. Bu tür serilerin yakınsaklığı için Leibniz kuralı geçerlidir.

Leibniz Kuralı

$x_n > 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ alterne serisinde, eğer $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ ve her $n \in IN$ için $x_{n+1} < x_n$ ise o zaman bu alterne serisi yakınsaktır.

Örneğin, yukarıda örnek olarak verdiğimiz her iki alterne seri bu kurala göre yakınsaktırlar. Çünkü

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad , \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dir.

Örnek: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

alterne serilerinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: 1) Serinin genel terimi olan $\left((-1)^{n+1} \frac{n+2}{n}\right)$ dizisinin limiti yoktur.

Çünkü tek indisli terimler 1 e yakınsarken çift indisli terimler -1 e yakınsarlar. Serinin genel terimi sıfıra yakınsamadığından seri ıraksaktır.

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ ve $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$

olduğundan Leibniz Kuralına göre seri yakınsaktır.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

serisi verilsin. (Bu serinin terimleri hem pozitif, hem de negatif olabilir). Eğer terimlerin mutlak değerlerinden oluşan

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine **mutlak yakınsak** seri denir.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi yakınsak fakat mutlak yakınsak değilse bu seriye **koşullu (şartlı) yakınsak** seri denir.

Önerme: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi mutlak yakınsak ise yakınsaktır.

Örnek: 1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + ...$

serisi mutlak yakınsaktır. Çünkü mutlak değerlerden oluşan

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} + ...$$

serisi yakınsaktır.

2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ...$

serisi mutlak yakınsak değil fakat koşullu yakınsaktır. Çünkü serinin kendisi yakınsak iken terimlerin mutlak değerlerinden oluşan seri, harmonik seri olup ıraksaktır.

Değerlendirme Soruları

1. $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, ...$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\frac{n-1}{n}$

   B. $\frac{n+2}{2n}$

   C. $\frac{n+1}{2n}$

   D. $\frac{n-1}{2n}$

   E. $\frac{n-2}{2n}$

2. $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?

   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{4n - (-1)^n}{2n + 3}$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?

   A. -1
   B. 4/3
   C. 2
   D. 3
   E. 4

4. a sabitinin hangi değerinde $\left(\dfrac{an^2 + n - 1}{n}\right)$ dizisi yakınsaktır?

A. -1
B. $-\dfrac{1}{2}$
C. 0
D. 1
E. 2

5. Aşağıdaki dizilerden hangisi yakınsaktır?

A. $\left(\dfrac{1 + (-1)^n}{n}\right)$
B. $\left((-1)^{3n+1}\right)$
C. $\left((-1)^n n\right)$
D. $\left(\dfrac{(-1)^n n + 1}{n + 3}\right)$
E. $\left(n + (-1)^n n\right)$

6. İlk terimi 5, ortak farkı (-3) olan bir aritmetik dizinin ilk dört teriminin toplamı kaçtır?

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

7. İlk terimi 1, ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin ilk 10 teriminin toplamı kaçtır?

A. 29524
B. 31086
C. 33414
D. 36213
E. 41476

8. İlk terimi 1, olan bir geometrik dizinin 11. terimi 1024 olduğuna göre, dizinin ortak çarpanı kaçtır?

A. 2
B. 4
C. 8
D. 12
E. 16

9. Bir (x_n) dizisi yakınsak ise aşağıdaki dizilerden hangisi yakınsak olmayabilir?

A. $(3x_n)$

B. (x_n^2)

C. $\left(\frac{1}{x_n}\right)$

D. $\left(\frac{x_n}{x_n^2+1}\right)$

E. $(2x_n - x_n^2)$

10. $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n$ serisinin toplamı kaçtır?

A. $\frac{7}{4}$

B. $\frac{27}{28}$

C. $\frac{4}{7}$

D. $\frac{27}{196}$

E. $\frac{9}{196}$

11. Aşağıdakilerden hangileri **her zaman** doğrudur?

i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yakınsaktır.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$ dir.

iv) Mutlak yakınsak seri yakınsaktır.

v) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi yakınsak ise bu serinin kısmi toplamlar dizisinin limiti ∞ dur.

A. i, ii, iii, iv, v

B. i, iv

C. i, iv, v

D. i, iii

E. iii, iv, v

12. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ serisinin yakınsak olduğu q gerçel sayılarının **en geniş** kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $(-\infty, \infty)$

B. $(-\infty, 0)$

C. $(0, \infty)$

D. $(-1, 1)$

E. $(0, 1)$

13. Aşağıdaki serilerden hangisi ıraksaktır?

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n+2}$

E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{n^3+1}$

14. Aşağıdaki serilerden hangisi koşullu yakınsaktır?

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+1}$

E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ serisinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. $\frac{4}{3}$

E. 2

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D	2. B	3. C	4. C	5. A	6. C	7. A	8. A	9. C	10. D
11. B	12. D	13. D	14. C	15.B					

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Demana F., Waits B. K., Precalculus, Addison- Wesley Publishing Com., New York, 1990.

Gaughan E. D., Hall C. E., College Algebra and Trigonometry, Brooks/Cole Publishing Com., Monterey, 1984.

Göğüş M., Koçak Ş, Tayfur C., Üreyen M., Matematik I (Diferansiyel Hesap), Bizim Büro Basımevi, Ankara, 1984.

Göğüş M., Koçak Ş, Tayfur C., Üreyen M., Matematik I (İktisadi Uygulamalı) Bizim Büro Basımevi, Ankara, 1986.

Koçak Ş., Üreyen M., Göğüş M., Olgun Ş., Görgülü A., Genel Matematik Fasikül 1, Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 115, Eskişehir, 1990.

Göğüş M., Koçak Ş, Tayfur C., Üreyen M., Matematik Fasikül 1, Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 58, Eskişehir, 1986.

Larson R. E., Hostetler R. P., Edwards B. H., Brief Calculus, D.C. Heath and Com., Lexington, 1995.

Musser G.L., Burger W. F., Mathematics for Elementary Theachers, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

Saban G., Analize Giriş, İ. Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 1989.