

1. PARÇALI FONKSİYON

Tanım :

Tanım kümesinin aralıklarında ayrı birer fonksiyon olarak tanımlanan fonksiyonlara **parçalı fonksiyonlar** denir.

$$y = \begin{cases} f(x) , & x \leq a \text{ ise} \\ g(x) , & a < x < b \text{ ise} \\ h(x) , & x \geq b \text{ ise} \end{cases}$$

alt aralıkların uç noktaları olan $x = a$, $x = b$ noktalarına parçalı fonksiyonun kritik noktaları, ayrıca $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ fonksiyonlarına da **parçalı fonksiyonun dalları** denir.

Örnek 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 , & x \leq -1 \text{ ise} \\ 2^x - 2 , & -1 < x \leq 3 \text{ ise} \\ 1 , & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlanıyor.

- a) $f(20) + f(2) + f(-2) = ?$
b) **(fofof) (0) değerini bulunuz.**
c) $-1 < x \leq 3$ için $f^{-1}(6) = ?$
d) $x > 3$ için $f(x)$ in görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm

Yukarıda, parçalı fonksiyonda verilen aralıklara göre soruyu çözelim.

a) $f(20) = 1$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7 \quad \text{Bunları toplarsak}$$

$$f(20) + f(2) + f(-2) = 1 + 2 + 7 = 10$$

bulunur.

b) $\text{fofo}(f(0)) = \text{fofo}(-1) \quad \left| \quad \begin{array}{l} f(0) = 2^0 - 2 = -1 \\ f(-1) = (-1)^3 + 3 = 4 \\ f(4) = 1 \end{array} \right.$
 $= f(f(-1))$
 $= f(4)$
 $= 1$ bulunur.

- c) $-1 < x \leq 3$ için $f(x) = 2^x - 2$ şeklinde olup, buradan x 'i yalnız bırakalım.

$y = 2^x - 2$ ise $y + 2 = 2^x$ olup, her iki tarafın 2 tabanına göre logaritmasını alalım.

$\log_2(y + 2) = x$ bulunur. Buradan

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + 2) \text{ olup,}$$

$$f^{-1}(6) = \log_2(6 + 2) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \text{ bulunur.}$$

II. yol :

$$6 = 2^x - 2$$

$$8 = 2^x \text{ ise } x = 3 \text{ bulunur.}$$

- d) $x > 3$ için, fonksiyonu sabit olduğundan görüntü kümesi tek bir reel sayıdır.

Yani $(3, \infty)$ aralığındaki tüm sayıların görüntüsü tek bir sayıya eşittir.

Dolayısıyla $f(3, \infty) = 1$ dir.

Örnek 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx+2}{x^2+1} , & x \geq 1 \\ nx^2 - x , & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(1) = 4$ ve $f(-1) = 2$ ise,

$m + n$ toplamının değeri kaçtır?

Çözüm

$$x \geq 1 \text{ ise } f(1) = \frac{m \cdot 1 + 2}{1^2 + 1} = 4$$

$$m + 2 = 4 \cdot 2 \text{ ise } m = 6$$

$$x < 1 \text{ ise } f(-1) = n(-1)^2 - (-1) = 2$$

$$n + 1 = 2 \text{ ise } n = 1$$

ise $m + n = 6 + 1 = 7$ bulunur.

Örnek 3

$$f(x) = x + 1 , \quad g(x) = \begin{cases} x + 3 , & x \geq 1 \\ 2x - 3 , & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonları verildiğine göre, $(fog)(x)$ i bulunuz.

Çözüm

$$x \geq 1 \text{ ise } (fog)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1$$

$$= x + 3 + 1 = x + 4$$

$$x < 1 \text{ ise } (fog)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1$$

$$= 2x - 3 + 1 = 2x - 2$$

$$\text{ise } (fog)(x) = \begin{cases} x + 4 , & x \geq 1 \\ 2x - 2 , & x < 1 \end{cases}$$

Örnek 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x > 2 \\ x-1, & x \leq 2 \end{cases} \text{ ise}$$

$f^{-1}(x)$ in eşiti kaçtır?

Çözüm

Parçalı fonksiyonun tersinin tanımlı olabilmesi için parçalı fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta bire-bir ve örten olmalıdır. Ayrıca kritik noktadaki değerleri birbirine eşit olmalıdır. Yani,

$$2 \cdot 2 - 3 = 2 - 1$$

$$1 = 1 \text{ olmalı.}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2}, & x > 1 \\ x+1, & x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde ayrı ayrı tersleri alınır.

Not:

$x = 1$ ters fonksiyonun sınır değeri olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 5

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ x+2, & x \leq 1 \end{cases}$$

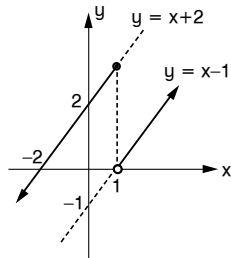
fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$x > 1$ ise $y = x - 1$ ve $x \leq 1$ ise $y = x + 2$ grafikleri ayrı ayrı çizilerek istenilen yerler taranır.

Buna göre;

şekildeki taralı bölgeler $f(x)$ in grafiğidir.



Örnek 6

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

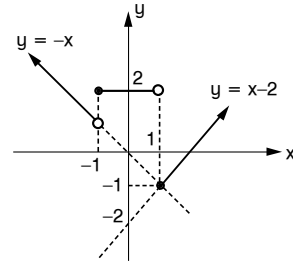
Çözüm

Verilen aralıklarda üç farklı fonksiyonun grafiği çizilir. $y = -x$ grafiği çizilir $x < -1$ kısmı taranır.

$y = x - 2$ fonksiyonunun grafiği çizilir $x \geq 1$ kısmı alınır.

$-1 \leq x < 1$ aralığında $f(x) = 2$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre;



Örnek 7

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ ise} \\ x^2 - 1, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Yukarıdaki örneklere benzer şekilde çözüm yapalım.

$$f(x) = x + 1$$

$$A(0, 1), B(-1, 0)$$

noktalarından geçen

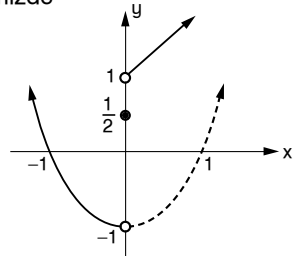
bir doğrudur.

$$f(x) = x^2 - 1$$

tepe noktası $(0, 1)$

olan bir paraboldür.

Bu fonksiyonların verilen aralıklarda grafiklerini çizdiğimizde



$x > 0$ için doğruyu, $x < 0$ için parabolün alındığına dikkat ediniz.

2. MUTLAKDEĞER FONKSİYON

Tanım :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) , & f(x) > 0 \\ 0 , & f(x) = 0 \\ -f(x) , & x < 0 \end{cases}$$

veya daha açık bir ifadeyle

$$|g(x)| = |x-3| = \begin{cases} x-3 , & x > 3 \\ 0 , & x = 3 \\ -x+3 , & x < 3 \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanan

$|f|: A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna **mutlakdeğer fonksiyonu** denir.

Mutlak değeri bir uzunluk olarak ele alıp incelemiştik, burada ise mutlakdeğeri bir fonksiyon olarak inceleyip, grafiklerini çizeceğiz.

Uyarı :

Mutlakdeğer fonksiyonunun içini sıfır yapan noktalar fonksiyonun kritik noktalarıdır. Bu fonksiyonlar incelenirken önce kritik noktalara göre parçalı biçimde yazılır.

Mutlakdeğer Fonksiyonun Özellikleri

- 1) $|f(x)| = |-f(x)|$
- 2) $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$
- 3) $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, $g(x) \neq 0$
- 4) $|f(x)|^n = |f^n(x)|$
- 5) $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$
- 6) $\sqrt[2m]{f(x)^{2m}} = |f(x)|$, $(m \in \mathbb{Z}^+)$

Örnek 1

$$f(x) = |4 + |x - |1 - x||$$

$x < 0$ ise **$f(x)$ fonksiyonunu düzenleyiniz.**

Çözüm

$x < 0$ olduğundan $|1 - x| = 1 - x$ olur.

$$\begin{aligned} f(x) &= |4 + |x - 1 + x|| \\ &= |4 + |2x - 1|| \end{aligned}$$

$x < 0$ olduğundan $|2x - 1| = -2x + 1$

$$f(x) = |4 - |2x - 1|| = |5 - 2x|$$

$$\begin{aligned} x < 0 \text{ olduğundan } f(x) &= |5 - 2x| \\ &= 5 - 2x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2

$f(x) = x + |x - 2|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon şeklinde yazınız.

Çözüm

Mutlakdeğer fonksiyonunun içini sıfır yapan değer kritik nokta olduğundan

$x > 2$ ise,

$$\begin{aligned} |x - 2| &= x - 2 \Rightarrow f(x) = x + x - 2 \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

$x < 2$ ise,

$$|x - 2| = -x + 2 \Rightarrow f(x) = x - x + 2 = 2$$

$x = 2$ için,

$$f(x) = 2 + |2 - 2| = 2$$

Buna göre $f(x)$ in parçalı fonksiyon şeklinde yazılmış hali,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 , & x > 2 \\ 2 , & x \leq 2 \end{cases} \text{ dir.}$$

Örnek 3

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - |x|$$

fonksiyonunu parçalı fonksiyon şeklinde yazınız.

Çözüm

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

$$f(x) = |x-3| - |x|$$

işaretlerini inceleyelim.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
x	-	0	+	+

Buna göre fonksiyonu tanımlayalım.

$$x < 0 \text{ ise } f(x) = -x + 3 - (-x) \\ = -x + 3 + x = 3$$

$$0 < x < 3 \text{ ise } f(x) = -x + 3 - x \\ = -2x + 3$$

$$x > 3 \text{ ise } f(x) = x - 3 - x = -3$$

Ayrıca kritik noktalara bakalım.

$$x = 0 \text{ için } f(0) = |0 - 3| - |0| = 3$$

$$x = 3 \text{ için } f(3) = |3 - 3| - |0| = -3$$

Buna göre;

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 0 \\ -2x + 3, & 0 < x < 3 \\ -3, & x \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 4

\mathbb{R}^+ da tanımlı,

$$f(x) = \frac{|x - \sqrt{x} + 1| - 1}{\sqrt{x}}$$

fonksiyonunun en sadeleştirilmiş halini bulunuz.

Çözüm

Mutlakdeğerin içini tamkare yapalım.

$$f(x) = \frac{|\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}| - 1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{|(\sqrt{x} - 1)^2 + \sqrt{x}| - 1}{\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x} - 1)^2 + \sqrt{x} > 0 \text{ olduğundan}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ = \frac{\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} \\ = \sqrt{x} - 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek 5

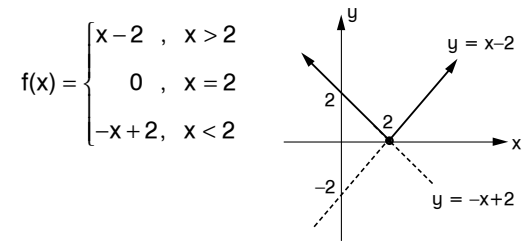
$f(x) = |x - 2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Mutlakdeğerin içini sıfır yapan değer $x = 2$ olup bu nokta fonksiyonun kritik noktasıdır. $x = 2$ nin sağında ve solunda fonksiyon farklı tanımlanır ve parçalı şekilde yazılır.

$$x > 2 \text{ ise } |x - 2| = x - 2 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

$$x < 2 \text{ ise } |x - 2| = -x + 2 \Rightarrow f(x) = -x + 2$$



Uyarı :

$y = x - 2$ nin grafiği ile

$y = -x + 2$ nin grafiğini incelediğimizde $y = x - 2$ nin ox eksenine göre simetriğinin alınmış hali $y = -x + 2$ grafiği olduğu görülür.

Bundan dolayı $f(x)$ fonksiyonunun tamamı mutlakdeğer içinde ise, mutlakdeğerin içinin grafiği çizilip ox eksenine göre simetriği alınırsa $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

Örnek 6

$f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Önce $f(x)$ in işaretini inceleyelim.

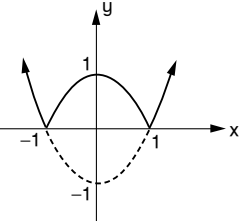
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \text{ veya } x \geq 1 \text{ ise} \\ -(x^2 - 1), & -1 < x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği $f(x) = x^2 - 1$ parabolünün $x \leq -1$ ile $x \geq 1$ şartına uyan parçası ile $f(x) = -x^2 + 1$ parabolünün $-1 < x < 1$ şartına uyan parçasının birleşimidir.

Pratik olarak $f(x)$ parabolü ve x eksenini altında kalan kısmın yine x eksenine göre simetriği alındığında $|f(x)|$ in grafiği çizilmiş olur.

$y = x^2 - 1$ in tepe noktası $(0, -1)$ olup, x eksenini kestiği yerler $x = -1$ ve $x = 1$ dir.



Buna göre grafik yukarıdaki gibi çizilmiş olur.

Örnek 7

$f(x) = x - |x - 2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Mutlakdeğerin içini sıfır yapan kritik nokta $x = 2$ dir.

$x > 2$ ise $f(x) = x - (x - 2) = x - x + 2 = 2$

$x < 2$ ise $f(x) = x + (x - 2) = 2x - 2$

$y = 2$

$y = 2x - 2$ in

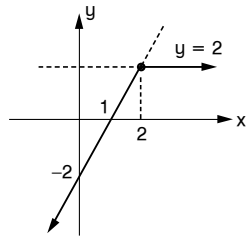
grafiklerini çizip

istenilen yerleri

taradığımızda

yandaki grafik

elde edilmiş olur.



Örnek 8

$$f(x) = \frac{|2-x|}{2-x} + x + 1$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

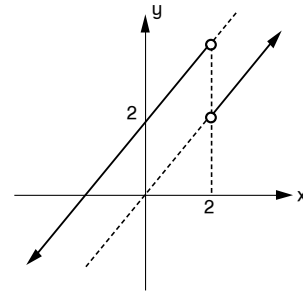
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	+	0	-

$$x > 2 \text{ ise } f(x) = \frac{-(2-x)}{2-x} + x + 1 = x$$

$$x = 2 \text{ ise } f(x) = \text{tanımsızdır.}$$

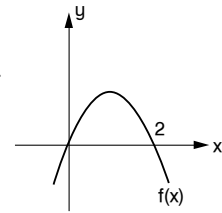
$$x < 2 \text{ ise } f(x) = \frac{2-x}{2-x} + x + 1 = x + 2$$

Belirtilen aralıklarda grafikleri çizelim.



Örnek 9

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.



$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$f(x)$ in grafiğinden yararlanarak işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	-

buna göre $g(x)$ 'i tanımlayalım.

* $x < 0$ ve $x > 2$ ise $f(x) < 0$ ve mutlakdeğerin tanımından $g(x) = 1/2[f(x) - f(x)]$ ise $g(x) = 0$ dir.

* $0 \leq x \leq 2$ ise $g(x) = 1/2(f(x) + f(x))$

$$g(x) = \frac{2f(x)}{2} = f(x) \text{ dir.}$$

buna göre $g(x)$ in grafiği ,

