POLİNOMLAR

Polinomlarla İlgili Temel Kavramlar:

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ şeklindeki ifadelere x değişkenine bağlı, reel katsayılı n'inci dereceden bir polinom denir.

- $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_k x^k, \ldots, a_y x, a_0$ ifadelerinin her birine P(x) polinomunun terimleri denir.
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_k, \ldots, a_y, a_0$ reel sayılarına, polinomun terimlerinin katsayıları denir.
- P(x) polinomunda $a_n x^n$ terimindeki en büyük n sayısına polinomun derecesi denir ve[P(x)]=n şeklinde gösterilir.
- Derecesi en büyük olan $a_n x^n$ terimindeki an reel sayısına polinomun katsayısı, a_0 sabitine ise polinomun sabit terimi denir.
- P(x) polinomu, terimlerin azalan derecelerine göre,
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ şeklinde veya P(x) polinomu terimlerin artan derecelerine göre,
  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ biçiminde sıralanır.
- Katsayıları reel sayılardan oluşan polinoma "Reel Katsayılı Polinom" denir ve reel katsayılı polinomlar kümesi $R_{[x]}$ ile gösterilir.

Örnek:

$P(x) = 2x^{5-3/n} + x^{n-2} + 4$ ifadesinin bir polinom olması için $n \in N$ kaç olmalıdır?

Çözüm:

5-3/n ifadesinin bir doğal sayı olması gerekir bunun için n yerine verilecek sayının 3'ün bölenleri olmalıdır.

3'ün bölenleri ise n = 1, n = 3, n = -1, n = -3 Ayrıca $n-2 \geq 0$ den $n \geq 2$ olması gerekir. O halde bu iki şartı da gerçekleyen n = 3 sayısıdır. Buna göre, P(x) polinomu

$P(x) = 2x^{5-3/3} + x^{3-2} + 4$

$P(x) = 2x^4 + x + 4$ dür.

ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOM

$P(x, y) = x^3y^2 - 2x^4 y^3 + xy + x - y + 1$ şeklindeki polinomlara x ve y değişkenlerine bağlı reel katsayılı bir polinom denir.

Bu polinomların derecesi x ve y'nin dereceler toplamının en büyüğüdür.

der P(x, y) = der P(x) + der P(y) dir.

Yukarıdaki iki değişkenli polinomun derecesi ikinci terimdeki x ve y'nin dereceler toplamıdır.

Der $P(x, y) = 4 + 3 = 7$ dir.

Örnek:

$P(x, y) = 2x^2y^4 – 3x^3y^5 + x^2y^3 - y^5 + 1$ polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm:

$2x^2y^4$ teriminin derecesi $2 + 4 = 6$

$-3x^3y^5$ teriminin derecesi $3 + 5 = 8$

x^2y^3 teriminin derecesi $2 + 3 = 5$

$-y^5$ teriminin derecesi 5

Yukarıda belirtilen en büyük dereceli terimin derecesi $P(x, y)$ polinomunun derecesidir. O halde, der $P(x, y) = 8$ dir.

Örnek:

$P(x) = x^3 – 3x^2 + 4x – 2$ ise

$P(2) = ?$, $P(0) = ?$, $P(1) = ?$

Çözüm:

$P(2) = 2^3 – 3.2^2 + 4.2 – 2$

$\quad = 8 – 12 + 8 – 2 = 2$ bulunur.

$P(0) = 0^3 – 3.0^2 + 4.0 – 2 = - 2$ bulunur.

$P(1) = 1^3 – 3.1^2 + 4.1 – 2$

$\quad = 1 – 3 + 4 – 2 = 0$ bulunur.

SIFIR POLİNOMU

$P(X) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomunda,

$a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$ ise; $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x^2 + 0x + 0$ polinomuna, **sıfır polinomu** denir.

Sıfır polinomu, 0 ile gösterilir. **Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir**.

Örnek:

$P(x) = (m + 3)x^2 + (n – 5) x + 1$ polinomunun sıfır polinomu olması için; m, n ve t reel sayılarını belirtelim.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun sıfır polinomu olması için;

$m + 3 = 0$, $\quad n – 5 = 0$, $\quad t = 0$;

$\quad m = -3$, $\quad n = 5$, $\quad t = 0$ olmalıdır.

SABİT POLİNOM

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ polinomunda, $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = 0$ ve $a_0 \neq 0$ ise; P(x) polinomuna, **sabit polinom** denir.

$0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + a_0$ sabit polinomu, a_0 ile gösterilir.

$x^0 = 1$ olduğundan; a_0 sabit polinomu, a_0x^0 biçiminde yazılabilir. Buna göre, sabit polinomun derecesi 0 dır.

Örnek:

$P(x) = (a – 4)x^2 + bx + 7$ polinomunun sabit polinom olması için, a ve b sayılarını belirtelim.

Çözüm:

$P(x) = A – 4)x^2 + bx + 7$ polinomunun sabit polinom olması için, $a – 4 = 0$ ve $b = 0$ olmalıdır. Buna göre, $a = 4$ ve $b = 0$ dır.

İKİ POLİNOM EŞİTLİĞİ

Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin kat sayıları eşit olan iki polinoma **eşit polinomlar** denir.

n. dereceden,

$A(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ve

$B(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ polinomları için;

$A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ ...\ ,\ a_2 = b_2,\ a_1,\ a_0 = b_0$ dır.

Örnek:

$A(x) = 5x^3 + (a + 1x^2 + d,$

$B(x) = (b - 1)x^3 – 3x^2 – (2c – 3)\ x + \frac{1}{2}$ polinomları veriliyor. A(x) = B(x) olması için; a, b, c ve d yi bulalım.

Çözüm:

$A(x) = 5x^3 + (a + 1)x^2 + d = 5x^3 + (a + 1)x^2 + 0x + d,$

$B(x) = (b – 1)x3 - 3x2 – (2c – 3)x + \frac{1}{2}$ olduğundan;

$A(x) = B(x) \Rightarrow 5 = b – 1,\ a + 1 = -3,\ 0 = -(2c – 3),\ d = \frac{1}{2}$

$b = 6, \qquad a = -4, \quad c = \frac{2}{3}, \qquad d = \frac{1}{2}$ dir.

POLİNOM FONKSİYONLARI

$P : R \rightarrow R$

$x \rightarrow P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ fonksiyonuna polinom fonksiyonu denir.

$P : R \rightarrow R$

$x \rightarrow P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ifadesi polinom fonksiyonudur.

Örnek:

$P(x) = x^2 + 2x + 1$ polinomu için P(X-1) polinomunu bulunuz.

Çözüm:

I.Yol:

P(x-1)'i bulmak için P(x)'de x yerine x-1'i yazalım.

$P(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$

$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = x^2$

$P(x-1) = x^2$ olarak bulunur.

II.Yol:

Önce $P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ olarak yazıp x yerine x-1'i yazalım.

$P(x-1) = (x-1+1)^2 = x^2$ bulunur.

Örnek:

P(x) polinomu için,

$P(x+2) = x^3 - 2x^2 + 4$ eşitliği veriliyor. Buna göre P(x) polinomunu bulunuz.

Çözüm:

$P(x+2) = x^3 - 2x^2 + 4$ eşitliğinde

$H = x + 2 \Rightarrow h - 2 = x$'i yerine yazalım.

$P(h - 2 + 2) = (h-2)^3 - 2(h-2)^2 + 4$

$P(h) = (h-2)^3 - 2(h-2)^2 + 4$

$P(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + 4$ bulunur.

POLİNOM KATSAYILAR TOPLAMI

$P(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinomunda x = 1 yerine yazılırsa

$P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ katsayılar toplamı bulunur.

P(x) polinomunda x = 0 yerine yazılırsa sabit terimi bulunur.

Örnek:

$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

Çözüm:

P(x) de x = 1 'i yerine yazalım.

$P(1) = 2.1^4 + 5.1^3 - 3.1^2 + 1-1$

$= 2 + 5 – 3 + 1 – 1 = 4$ bulunur.

POLINOMLARDA İŞLEMLER

1. Polinomlarda Toplama İşlemi:

$A(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$B(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

Polinomları verilsin, bu iki polinomu toplarken aynı dereceli terimler kendi arasında toplanarak iki polinomun toplamı elde edilir.

$A(x) + B(x) = a_4 x^4 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$

Örnek:

$P(x) = x^3 + 2x^2 – 3x + 1$, $Q(x) = 3x^2 + \sqrt{3}\ x + 4$ polinomlarının toplamı olan polinomu bulunuz.

Çözüm:

$P(x) + Q(x) = x^3 + (2+3) x^2 + (-3) + \sqrt{3}) x + 1 + 4$

$= x^3 + 5x^2 + (\sqrt{3}-3) x + 5$ dir.

Buna göre iki polinomun toplamı yine bir başka polinom olduğundan polinomlar toplama işlemine göre kapalıdır.

Polinomlarda Toplama İşleminin Özellikleri:

1. Polinomlar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.
2. Polinomlar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.
3. Polinomlar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.
4. Sıfır polinomu, polinomlar kümesinde toplama işlemine göre birim elemanıdır.
5. Her polinomun, toplama işlemine göre tersi vardır.

2. Polinomlarda Çıkarma İşlemi:

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için, $P(x) – Q(x) = P(x) + (-Q(x))$ tir.

$P(x) – Q(x)$ polinomuna, $P(x)$ polinomu ile $Q(x)$ polinomunun farkı denir.

Örnek:

$A(x) = 5x^4 + \frac{1}{2}x^3 – 3x^2 + \frac{7}{3}x + 2$ ve

$B(x) = - 5x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}$ polinomları için, $A(x) – B(x)$ farkını bulalım.

Çözüm:

$B(x) = -5x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}$ ise, $-B(x) = 5x^4 - \frac{3}{2}x^3 – 2x^2 - \frac{5}{2}$ dir.

$A(x) – B(x) = A(x) + (-B(x))$

$$= (5x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{7}{3}x + 2) + (5x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{5}{2})$$

$$= (5 + 5)x^4 + (\frac{1}{2} - \frac{3}{2})x^3 + (-3 - 2)x^2 + \frac{7}{3}\ x + (2 - \frac{5}{2})$$

$$= 10x^4 - x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Bu örnekte görüldüğü gibi, iki polinomun farkı da bir polinomdur.

Her A(x) ve B(x) polinomları için, A(x) – B(x) ifadesi de polinom olduğundan; polinomlar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalıdır.

3. Polinomlarda Çarpma İşlemi:

A(x) ve b(x) gibi iki polinomun çarpımı, A(x) ‘in her terimi B(x)’in her terimi ile ayrı ayrı çarpılarak bulunur.

$a_n x^n$ ile $b_k x^k$ teriminin çarpımı

$a_n x^n \cdot b_k x^k = (a_n \cdot b_k)\, x^{n+k}$ dir.

Yani $(5x^3) \cdot (-2x^4) = 5 \cdot (-2)\, x^{3+4} = -10x^7$

Bu çarpmaya göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

Der [A(x) . B(x)] = der (A(x)) + der (B(x))

Örnek:

$A(x) = 3x^4 + 1$, $B(x) = x^2 + x$

$C(x) = x^2 - x + 1$ polinomları veriliyor.

a) A(x) . B(x)

b) B(x) . C(x) çarpımlarını bulunuz.

Çözüm:

a) $A(x) \cdot B(x) = (3x^4 + 1) \cdot (x^2 + x)$

$$= 3x^4 \cdot x^2 + 3x^4 \cdot x + x^2 + x$$

$$= 3x^6 + 3x^5 + x^2 + x$$

b) $B(x) \cdot C(x) = (x^2 + x) \cdot (x^2 - x + 1)$

$$= x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 + x \cdot x^2 - x \cdot x + x \cdot 1$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + 1$$

$$= x^4 + x + 1 \quad \text{bulunur.}$$

Polinomlarda Çarpma İşleminin Özellikleri:

1. Kapalılık (iki polinomun çarpımı yine bir polinomdur.
2. Değişme özelliği vardır.

3. Birleşme özelliği vardır.

4. Çarpma işleminin birim (etkisiz) elemanı $P(x) = 1$ sabit polinomudur.

5. Polinomlar kümesinde çarpma işlemine göre bazı polinomların tersi yoktur.
   Yani $P(x) = x^2$ polinomunun tersi $1/x^2$ ifadesi polinom değildir.

6. Polinomlar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.
   $A(x) . (B(x) + C(x)) = A(x) . B(x) + A(x) . C(x)$

Polinomlar Halkası

Toplama ve çarpma işleminin özelliklerinden görüldüğü gibi $R_{[x]}$ polinomlar kümesi;

1. $(R_{[x]},+)$ sistemi değişmeli gruptur.
2. $R_{[x]}$ kümesi çarpma işlemine göre kapalı ve çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.
3. $R_{[x]}$ kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.

O halde $(R_{[x]}, + , .)$ sistemi bir halkadır. Buna polinomlar halkası denir.

4. Polinomlarda Bölme İşlemi:

A(x) polinomunun B(x) polinomuna bölümü

A(x)   B(x)
| T(x)
|
.
-____________
R(x)

Burada $A(x) = B(x) . T(x) + R(x)$ şeklinde yazılır.

Bu bölme işlemi yapılırken aşağıdaki hususlara dikkat edilmelidir:

1. Polinomlar azalan kuvvetlerine göre sıralanmalıdır.
2. Bölünen polinomun derecesi bölen polinomun derecesinden büyük olmalıdır.
   $derB(x) < derA(x)$
3. Kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük olmalıdır.
   $derR(x) < derB(x)$
4. $R(x) = 0$ ise A(x) polinomu B(x) polinomuna tam bölünüyor denir.
5. $derA(x) = derB(x) + derT(x)$

$$\text{der}\frac{A(x)}{B(x)} = \text{der}A(x) - \text{der}B(x) \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x) = x^4 - 2x^2 + x\ 5$ polinomunu

$Q(x) = x^2 + 3x - 1$ polinomuna bölelim.

$x^4 - 2x^2 + x + 5$ $\qquad$ $x^2 + 3x - 1$

$\qquad\qquad$ $x^2 - 3x + 8$

$\frac{x^4}{x^2} = x^2$

$\pm x^4 \pm 3x^3 \pm x^2$

$\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

-

$-3x^3 - x^2 + x + 5$

$\frac{8x^3}{x^2} = 8$

$\pm 3x^3 \pm 9x^2 \pm 3x$

-

$8x^2 - 2x + 5$

$\pm 8x^2 \pm 24x \pm 8$

-

$-26x + 13$

Bölüm : $x^2 - 3x + 8$

Kalan : $-26x + 13$

Horner Metodu

Bölen, birinci dereceden ya da birinci dereceden polinomların çarpımından oluşuyorsa bu metot uygulanabilir.

Örnek:

$Px^3 + qx^2 + nx + s$ polinomunu $(x - a)$ ‘ ya bölelim.

Çözüm:

1. Bölünen polinomun katsayıları x’in azalan kuvvetlerine göre sıralanır.
2. Bölümün derecesi bölünenin derecesinden küçük olacağı için bölümde x^3’ün katsayısı 0 olur.
3. p katsayısı aşağıya aynen yazılır.

4. a, p ile çarpılır, q’nun altına yazılarak toplanır. Ap + q olarak yazılır.

Bu işleme, kalan bulunana kadar devam edilir.

$px^3 + qx^2 + rx + s$, $x – a = 0$ ise $x = a$

Örnek:

$P(x) = x^4 – x^3 + 3x + 4$ polinomunun $x – 2$’ye bölündüğünde bölüm ve kalanı horner metodu yardımıyla bulunuz.

Çözüm:

P(x)’in katsayılarını belirleyip tabloda gösterelim. Ayrıca $x –2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ‘yi yerine yazalım.

Bölümün Katsayıları Kalan

		-1	0	3	4
2	1	2	2	4	14
	1	1	2	7	18

Bölümün Katsayıları Kalan

Bölüm $B(x) = x^3 + x^2 + 2x + 7$

Kalan $R(x) = 18$ bulunur.

Bölme İşlemi Yapmadan Kalan Bulma

Bir P(x) Polinomunun “x – a” ile Bölünmesinde Elde Edilen Kalan

Bir P(x) polinomunun (x – a) ile bölünmesinden elde edilecek bölüm Q(x) ve kalan k olsun. (x – a) birinci dereceden olduğundan, kalan sabit bir sayıdır. $P(x) = (x – a)\, Q(x) + k$ eşitliği her x için geçerlidir. Burada, x yerine a yazarsak $P(a) = 0.Q(a) + k \Rightarrow P(a) = k$ bulunur.

Bir P(x) polinomunun (x – a) ile bölünmesinden elde edilen kalan P(x) ya eşittir. O halde, bir polinomun (x – a) ile bölünmesinden kalanı bulmak için ($x – a = 0 \Rightarrow x = a$ olur.) polinomda x yerine a değeri yazılır.

Örnek:

$P(x) = x^2 – 3x + 21$ polinomunun (x – 2) ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

Çözüm:

$X – 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir. Bulacağımız kalan P(2) olacaktır. Öyleyse, $P(2) = 2^2 – 3 . 2 + 21 = 19$ olur.

Bir P(x) Polinomunun “ax + b” ile Bölünmesinden Elde Edilen Kalan

Bölen birinci dereceden olduğundan kalan yine sabit olur. Bölen olarak (ax + b) polinomunu alalım. Bu durumda P(x) = (ax + b) Q (x) + k yazılır.

Ax + b = 0 $\Rightarrow$ x = $\frac{-b}{a}$ olur. Polinomda x yerine $\frac{-b}{a}$ yazılırsa P($\frac{-b}{a}$) = k bulunur. O halde, bir P(x) polinomunun (ax + b) ile bölünmesinden kalanı bulmak için polinomda x yerine $\frac{-b}{a}$ yazılır.

Örnek:

$P(x) = x^3 - 4x + 1$ polinomunun 2x – 1 ile bölünmesinden kalanı bulunuz.

Çözüm:

$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^3} - 4.\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} - 2 + 1 = \frac{-7}{8}$ olur.

Bir P(x) Polinomunun "$x^2 + a$", "$x^3 + a$", "$x^4 + a$" ile Bölünmesinden Elde Edilen Kalan

P(x) polinomunun $x^2 + a$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulmak için polinomda x^2 yerine –a yazılır.

P(x) polinomunun $x^3 + a$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulmak için polinomda x^3 yerine –a yazılır.

P(x) polinomunun $x^4 + a$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulmak için polinomda x^4 yerine –a yazılır.

Örnek:

$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 7x - 1$ polinomunun, $x^2 + 2$ ile bölünmesinden kalanı bulunuz.

Çözüm:

İstenen kalanı bulmak için ($x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$) polinomda x^2 yerine –2 yazarız.

$P(x) = x^2 . x^2 - x^2 . x + x^2 + 7x - 1$ olur.

Kalan : (-2) (-2) – (-2) . x – 2 + 7x – 1 = 4 + 2x + 7x – 3 = 9x + 1 bulunur.

Bir Polinomun (x – a).(x – b) ile Bölünmesinden Elde Edilen Bölüm ve Kalan

Bir P(x) polinomunun (x – a) . (x – b) ile bölünmesini Horner yöntemi ile yapabiliriz. Verilen P(x) polinomu önce (x – a) ile bölünür, sonra elde edilen bölüm (x – b) ile bölünür.

Örnek:

Bir P(x) polinomunun (x + 3).(x – 2) ile bölünmesinden kalanı bulunuz.

Çözüm:

(x + 3).(x – 2) polinomu 2. dereceden olduğuna göre, kalan polinom en fazla 1. derecedendir. Kalan polinom K(x) = ax + b biçimindedir. Bölüm özdeşliği yazılırsa,

P(x) = (x + 3) (x – 2) B(x) + ax + b biçiminde olur.

$P(-3) = -5$ ve $P(2) = 4$ olduğu veriliyor.

$P(-3) = (-3 + 3)(-3 - 2) \,.\, B(-3) - 3a + b \Rightarrow P(-3) = -3a + b$

$P(2) = (2 + 3)(2 - 2) \,.\, B(2) + 2a + b \Rightarrow P(2) = 2a + b$ olur.

$-3a + b = -5$

$2a + b = 4$

denklem sistemi çözülürse, $a = \frac{9}{5}$ ve $b = \frac{2}{5}$ olur. Buradan, $K(x) = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$ bulunur.

Örnek:

Bir P(x) polinomunun $x^2 + 2$ ile bölünmesinden kalan $-2x + 6$ ve P(x) polinomunun kat sayıları toplamı 7 ise bu P(x) polinomunun $(x^2 + 2)(x - 1)$ ile bölünmesinden kalanı bulunuz.

Çözüm:

Bir P(x) polinomunun kat sayıları toplamını bulmak için polinomda x yerine 1 yazılır. P(1) verilen polinomun kat sayıları toplamıdır. Burada, $P(1) = 7$ veriliyor. Diğer taraftan kalan, en fazla 2. dereceden $ax^2 + bx + c$ biçiminde olur. Bölmenin özdeşliği yazılırsa;

$P(x) = (x^2 + 2)(x - 1)\,b(x) + ax^2 + bx + c$ olur. Polinomda,

$x = 1$ için $P(19 = (1 + 2) \,.\, (1 - 1) \,.\, B(1) + a + b + c = a + b + c = 7$ ve

$x^2 = -2$ yazılırsa, $-2a + bx + c = -2x + 6$ olur.

$bx + c - 2a = -2x + 6 \Rightarrow b = -2$ ve $c - 2a = 6$ olur. Ayrıca, $b = -2$ ise $a + b + c = 7$ den

$a - 2 + c = 7 \Rightarrow a + c = 9$ dur.

$c - 2a = 6$

$a + c = 9$

Sistemi çözülürse, $a = 1$, $c = 8$ bulunur. Öyleyse, $K(x) = x^2 - 2x + 8$ olur.