

A. Tanım: a, b, c reel (gerçek) sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki ifadelere, reel katsayılı ve x değişkenine bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Denklemden a; x^2 nin katsayısı, b; x in katsayısı c ise sabit terimdir.

Denklemin sağlayan x değerlerine denklemin kökü, köklerden oluşan kümeye de çözüm kümesi denir.

Örnek:

$$x^2 - (n - 1)x + 2 = 0$$

denkleminin bir kökü $x_1 = -1$ olduğuna göre, n kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Çözüm:

Kök, denklemin sağlayan x değeridir. O halde, $x_1 = -1$ denklemin sağlar.

$$x_1 = -1 \Rightarrow (-1)^2 - (n - 1) \cdot (-1) + 2 = 0$$

$$1 + n - 1 + 2 = 0$$

$$n = -2 \text{ bulunur.}$$

Cevap B

Örnek:

$$x^2 + 6x - 2 = 0$$

denkleminin bir kökü $x_1 = -1$ olduğuna

göre, $x_1^2 + \frac{4}{x_1^2}$ kaçtır?

- A) 20 B) 24 C) 28 D) 36 E) 40

Çözüm:

$$x = x_1 \Rightarrow x_1^2 + 6x_1 - 2 = 0$$

$$x_1^2 - 2 = -6x_1$$

$$\frac{x_1^2 - 2}{x_1} = -\frac{6x_1}{x_1}$$

$$x_1 - \frac{2}{x_1} = -6$$

Her iki tarafın karesini alırsak;

$$\left(x_1 - \frac{2}{x_1}\right)^2 = (-6)^2$$

$$x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot \frac{2}{x_1} + \frac{4}{x_1^2} = 36$$

$$x_1^2 + \frac{4}{x_1^2} = 40 \text{ bulunur.}$$

Cevap E

B. Kökleri Bulma

İkinci derece denklemlerin kökleri iki yolla bulunabilir.

I. yol: Çarpanlara ayırma

II. yol: Diskriminant Yardımı ile

Genellikle, daha kısa ve kolay olduğu için çarpanlara ayırma yolunu kullanırız. Ancak ifade çarpanlara zor ayrılıyorsa, diskriminant kullanarak soruyu çözebiliriz.

I. Çarpanlara Ayırarak Kök Bulma

Örnek:

$$x^2 + 7x - 8 = 0 \text{ denkleminin köklerini bulalım.}$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$+8$$

$$-1$$

$$(x + 8) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x + 8 = 0 \text{ veya } x - 1 = 0$$

$$x = -8 \text{ veya } x = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$ax^2 + bx = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ veya } x = -\frac{b}{a}$$

O halde çözüm kümesi $\{0, -\frac{b}{a}\}$ dir.

Örnek:

$4x^2 - 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(2x)^2 - (3)^2 = 0$$

$$(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ve}$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ dir.}$$

O halde çözüm kümesi, $\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$ dir.

Not: Bu şekilde köklere, yani mutlak değerce eşit ve ters işaretli köklere simetrik kök denir. Simetrik kök bulunmasının koşulu, denklemden "x" li terimin bulunmaması yani $ax^2 + bx + c = 0$ ifadesinde $b = 0$ olmasıdır.

Örnek:

$$(a - 3)x^2 + (a - 4)x + a - 13 = 0$$

denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre, köklerin çarpımı kaçtır?

A) -25 B) -16 C) -9 D) -4 E) -1

Çözüm:

Simetrik iki kök bulunma şartı, denklemden "x" li terimin bulunmaması yani b nin 0 (sıfır) olmasıdır.

* Denklemden $a = (a - 3)$, $b = (a - 4)$, $c = (a - 13)$ tür.

$$b = (a - 4) = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ tür.}$$

Yerine yazılırsa denklem

$$x^2 - 9 = 0 \text{ biçimine dönüşür.}$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ veya } x_2 = -3 \text{ tür.}$$

denklemin kökler çarpımı ise, $3 \cdot (-3) = 9$ dur.

Cevap C

Not: Her ikinci derece denklemin gerçel kökü olmayabilir. Bu durumda denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek:

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$x^2 + 2x + 1 + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = -1$$

Gerçel (reel) sayının karesi negatif olamaz.

Bu denklemin reel kökü yoktur, çözüm kümesi de boş kümedir.

II. Diskriminant Yardımıyla Kök Bulma

Çarpanlara ayırarak kök bulmada zorlandığımızda, ikinci yol olarak diskriminantı kullanırız.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

ifadesine bu denklemin diskriminantı denir. Diskriminantın işaretine göre kökler hakkında yorum yapılır.

• $\Delta < 0$ ise, denklemin gerçel kökü yoktur.

Çözüm kümesi: \emptyset

• $\Delta = 0$ ise, eşit iki kök, iki katlı kök, çakışık iki kök, çift katlı kök, denklem tam kare, çözüm kümesi tek elemanlı gibi ifadeler kullanılır. Kökler;

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ dir.}$$

• $\Delta > 0$ ise, denklemin farklı iki gerçel kökü vardır. Bunlar;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ dir.}$$

UYARI!

Diskriminant ile kök bulma yolunu, ifadeyi arpanlarına ayıramadığınızda kullanmaya alışınız.

Örnek:

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$1x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$$

Yani $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ tür.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= 9 - 12$$

$$= -3$$

$\Delta = -3 < 0$ olduğundan, denklemin gerçel kökü yoktur. Çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek:

$$16x^2 + 8x + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$a = 16, b = 8, c = 1 \text{ dir.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1$$

$$= 64 - 64 = 0$$

$\Delta = 0$ ise, eşit iki kök, iki katlı kök, çift katlı kök, çakışık iki kök, denklem tamkare gibi ifadeler kullanılmaktadır. Denklemin kökü,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 16} = -\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

$$\text{O halde, çözüm kümesi } \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

Örnek:

$$ax^2 + (2a + 1)x + a - 8 = 0$$

denkleminin iki eşit kökü olduğuna göre, a değerini bulalım.

Eşit iki kökü olması koşulu, $\Delta = 0$ dir.

$$a = a, b = 2a + 1, c = a - 8 \text{ dir.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(2a + 1)^2 - 4 \cdot a \cdot (a - 8) = 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 32a = 0$$

$$36a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{36} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$x^2 + 8x + a + 3$$

ifadesi bir tamkare olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm:

İfade tamkare ise,

$$x^2 + 8x + a + 3 = 0 \text{ denkleminde } \Delta = 0 \text{ dir.}$$

$$a = 1, b = 8, c = a + 3 \text{ tür.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a + 3) = 0$$

$$64 - 4a - 12 = 0$$

$$52 = 4a \Rightarrow a = 13 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$ax^2 - 3x - 5 = 0$$

denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü olduğuna göre, a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

$$\text{A) } a < -\frac{5}{3} \quad \text{B) } a < -\frac{20}{9} \quad \text{C) } a > -\frac{3}{5}$$

$$\text{D) } a > -\frac{9}{20} \quad \text{E) } a > \frac{20}{9}$$

Çözüm:

Denklemin birbirinden farklı iki gerçel kökünün olması için, $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$a = a, b = -3, c = -5 \text{ tir.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$(-3)^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) > 0$$

$$9 + 20a > 0$$

$$a > -\frac{9}{20} \text{ dir.}$$

Cevap D

C. İkinci Derece Denklemle Dönüştürülebilen Denklemler

1) $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \dots = 0$ Biçimindeki Denklemler

Her çarpan sıfıra eşitlenerek kökler bulunur. Yani,

$$f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0 \dots \text{dir.}$$

Örnek:

$$(x^2 - 3x - 4) \cdot (1 - x)^2 = 0$$

denkleminin farklı köklerinin toplamını bulalım.

$$(x^2 - 3x - 4) \cdot (1 - x)^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} -4 \\ +1 \end{array}$$

$$(x - 4) \cdot (x + 1) \cdot (1 - x) \cdot (1 - x) = 0$$

- $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$
- $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

Denkleminin dört gerçel kökü fakat farklı üç kökü vardır. Farklı köklerin toplamı da

$$4 + 1 + (-1) = 4 \text{ tür.}$$

2) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ biçimindeki (rasyonel) denklemler

Rasyonel denklemlerde pay sıfıra eşitlenir, payda ise sıfırdan farklı olmalıdır.

$$f(x) = 0 \text{ ve } g(x) \neq 0 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + x - 2} = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{ve} \quad x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$(x + 6) \cdot (x - 1) = 0 \quad \text{ve} \quad (x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

$$x = -6 \text{ ve } x = 1 \quad \text{ve} \quad x \neq -2 \text{ ve } x \neq 1 \text{ dir.}$$

Kökler -6 ve 1 gözüküyor, ancak $x \neq 1$ olduğundan kök olarak alınamaz. Kök yalnızca -6 dır. Çözüm kümesi $\{-6\}$ dir.

Örnek:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x + m} = 0$$

denkleminin çözüm kümesi tek elemanlı ise, m nin alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4) \cdot (x - 2) \text{ dir.}$$

$$\frac{(x - 4) \cdot (x - 2)}{x + m} = 0$$

denklemini çözüm kümesi tek elemanlı yani bu denklemi sağlayan x değeri bir tane ise, x + m ya x - 4 ya da x - 2 olmalıdır ki bir çarpan sadeleşsin.

$$x + m = x - 4 \quad \text{veya} \quad x + m = x - 2$$

$$m = -4 \quad \quad \quad m = -2 \text{ dir.}$$

O halde m nin alabileceği değerler toplamı -6 dır.

3) Köklü Denklemler

Köklü ifade yalnız bırakılır ve her iki tarafın uygun kuvveti alınarak ifade kökten kurtarılır. Oluşan denklem çözülür.

Not: Bulunan kökler *ilk denklemden* denenmelidir.

Örnek:

$$\sqrt{x + 7} + 5 = x$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sqrt{x + 7} + 5 = x$$

$$\sqrt{x + 7} = x - 5$$

Her iki tarafın karesini alalım.

$$x + 7 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 9) \cdot (x - 2) = 0$$

Buradan, $x = 9$ ve $x = 2$ bulunur.

$x = 2$ denklemi sağlamadığı için, çözüm kümesi $\{9\}$ dur.

Örnek:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 1$$

Çözüm:

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-4}$$

Her iki tarafın karesini alalım.

$$x+1 = 1 + 2\sqrt{x-4} + x-4$$

$$2 = \sqrt{x-4}$$

Her iki tarafın bir kez daha karesini alalım.

$$4 = x-4 \Rightarrow x = 8 \text{ bulunur.}$$

O halde çözüm kümesi $\{8\}$ dir.**4) Mutlak Değerli Denklemler**

İfade mutlak değerden kurtarılır. Bunun için mutlak değer içinin işaretine bakılır.

Not: Mutlak değerli denklemlerde bulunan kökler denenmelidir.**Örnek:**

$$x \cdot |x-3| = x+12$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$x-3=0 \text{ ise, } x=3 \text{ tür.}$$

- $x < 3$ için, mutlak değer içi pozitifdir, aynen çıkar.

$$x \cdot (x-3) = x+12$$

$$x^2 - 3x = x+12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6) \cdot (x+2) = 0 \Rightarrow x=6 \text{ ve } x=-2 \text{ dir.}$$

Halbuki $x \geq 3$ idi. $x = -2$ olamaz. $\boxed{x=6}$

- $x \geq 3$ için, mutlak değer içi negatiftir, önüne $(-)$ işareti alarak çıkar.

$$x \cdot (-x+3) = x+12$$

$$-x^2 + 3x = x+12$$

$$x^2 - 2x + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$$

$$= 4 - 48 = -44$$

$$\Delta = -44 < 0 \text{ olduğu için reel kök çıkmaz.}$$

O halde çözüm kümesi $\{6\}$ dir.**5) Değişken Değiştirilerek Çözülebilir Denklemler**a. $[f(x)]^2 + b \cdot [f(x)] + c = 0$ biçimindeki denklemlerde $f(x) = t$ dönüştürmesi yapılarak denklema. $t^2 + b \cdot t + c = 0$ durumuna getirilir ve t değerleri bulunur. Tekrar, $f(x) = t$ eşitliğinde yerine yazılarak $f(x)$ in kökleri bulunur.**Örnek:**

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0$$

denkleminin kökler toplamını bulalım.

Çözüm:

Denklem altıncı derecedendir. Fakat ikinci derece denkleme dönüştürülebilir.

$$x^3 = t \text{ olsun.}$$

$$(x^3)^2 - 9(x^3) + 8 = 0$$

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$(t-8) \cdot (t-1) = 0 \Rightarrow t=8 \text{ veya } t=1 \text{ dir.}$$

$$x^3 = t \text{ idi.}$$

$$x^3 = 8 \text{ veya } x^3 = 1 \text{ dir.}$$

Buradan, $x=2$ veya $x=1$ bulunur. Bu denklemin kökler toplamı da $2+1=3$ tür.**Örnek:**

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 20$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\sqrt[4]{x} = t \text{ olsun.}$$

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{x}\right) = 20 \text{ ise,}$$

$$t^2 + t - 20 = 0 \text{ dir.}$$

$$(t+5) \cdot (t-4) = 0 \Rightarrow t = -5 \text{ veya } t = 4 \text{ tür.}$$

$$\sqrt[4]{x} = t \text{ idi. O halde,}$$

$$\sqrt[4]{x} = -5 \text{ veya } \sqrt[4]{x} = 4 \text{ tür.}$$

- Çift dereceli kökün sonucu negatif olamaz $\sqrt[4]{x} = -5$ olamayacağından, buradan kök gelmez

- $\sqrt[4]{x} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = 4^4 \Rightarrow x = 256$ dir.

O halde çözüm kümesi $\{256\}$ dir.

Örnek:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

denkleminin köklerinden biri x_1 dir.

Buna göre, $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$ değeri kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11
(1999 -ÖSS - İptal)

Çözüm:

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ olsun.}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{ ifadesi}$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \text{ biçimine dönüşür.}$$

$$(t-3) \cdot (t-3) = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ tür.}$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ idi. O halde } x + \frac{1}{x} = 3 \text{ tür.}$$

Denklemin bir kökü x_1 ise, x yerine x_1 yazılabilir.

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = 3 \text{ iki tarafın karesinden}$$

$$x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = 7 \text{ bulunur.}$$

Cevap C

Örnek:

$$(x^2 + 2x)^2 - 11x^2 - 22x + 24 = 0$$

denkleminin reel köklerinin toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm:

$$(x^2 + 2x)^2 - 11x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$x^2 + 2x = t \text{ olsun. Denklem,}$$

$$t^2 - 11 \cdot t + 24 = 0 \text{ biçimine dönüşür.}$$

$$(t-8) \cdot (t-3) = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ veya } t = 3 \text{ tür.}$$

$$x^2 + 2x = t \text{ idi. O halde,}$$

$$x^2 + 2x = 8 \text{ veya } x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+4) \cdot (x-2) = 0 \quad (x+3) \cdot (x-1) = 0$$

$$\boxed{x=-4} \text{ veya } \boxed{x=2} \quad \boxed{x=-3} \text{ veya } \boxed{x=1}$$

Bu denklemin reel köklerinin toplamı da -4 tür.

Cevap A

D. Kök ve Katsayı Bağlılıkları

İkinci dereceden bir bilinmeyenli

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin köklerini bulmadan, köklerinin toplamı, çarpımı ve bunlar yardımıyla elde edilebilecek diğer ifadeler bulunabilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

- Kökler toplamı: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Kökler çarpımı: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ dir.

Örnek:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

denkleminin köklerinin toplamını ve çarpımını bulalım.

$a = 3$, $b = -5$, $c = 1$ dir.

- Kökler toplamı: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{3} = \frac{5}{3}$ tür.
- Kökler çarpımı: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ dir.

Örnek:

$$x^2 - 2x + m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$$

olduğuna göre, m değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm:

$a = 1$, $b = -2$, $c = m + 1$ dir. Bu tarz sorularda kökler toplamı ve çarpımını önceden bulmakta yarar vardır.

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} = m + 1$

Verilen ifadede paydaları eşitleyelim.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$$

$$\frac{x_2 + x_1}{x_2 \cdot x_1} = 2$$

$$\frac{2}{m+1} = 2$$

$$2 = 2m + 2 \Rightarrow m = 0 \text{ bulunur.}$$

Cevap B

Örnek:

$$4x^2 - 5x - 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2}$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{13}{5}$

(1997 - ÖYS)

Çözüm:

$a = 4$, $b = -5$, $c = -1$ dir.

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{4} = \frac{5}{4}$ tür.
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$ tür.

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} = \frac{2-x_2 + 2-x_1}{(2-x_1)(2-x_2)}$$

$$\frac{4 - (x_1 + x_2)}{4 - 2(x_1 + x_2) + (x_1 \cdot x_2)}$$

$$\frac{4 - \frac{5}{4}}{4 - 2 \cdot \frac{5}{4} + \frac{-1}{4}} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{11}{5} \text{ tir.}$$

Cevap D

Örnek:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x-a}$$

denkleminin kökler toplamı nedir?

- A) a B) b C) $-a$ D) $-b$ E) $-ab$

Çözüm:

Paydaları eşitleyelim.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x-a}$$

$$\frac{x+b}{b \cdot x} = \frac{1}{x-a}$$

İçler dışlar çarpımı yapalım.

$$x^2 + bx - ax - ab = bx$$

$$x^2 - ax - ab = 0 \text{ bulunur.}$$

$$a = 1, b = -a, c = -ab \text{ dir.}$$

$$\text{Kökler toplamı: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-a)}{1} = a \text{ dir.}$$

Cevap A

Örnek:

$$x^2 + (x_1 + 4)x - 3x_2 = 0$$

denkleminin kökleri sıfırdan farklı x_1 ve x_2 sayılarıdır.

Buna göre, büyük kök kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

(1993 - ÖYS)

Çözüm:

$$a = 1, b = x_1 + 4, c = -3x_2 \text{ dir.}$$

$$\bullet \text{ Kökler toplamı: } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-(x_1 + 4)}{1}$$

$$x_1 + x_2 = -x_1 - 4 \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Kökler çarpımı: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3x_2}{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3x_2$$

$$\boxed{x_1 = -3}$$

(1) de x_1 yerine -3 yazılırsa,

$$-3 + x_2 = -(-3) - 4$$

$$\boxed{x_2 = 2} \text{ dir.}$$

Buna göre, büyük kök 2 dir.

Cevap E

Örnek:

$$2x^2 - 3x + m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 = 3$$

olduğuna göre, m nin değeri kaçtır?

- A) -6 B) -3 C) 3 D) 6 E) 9

Çözüm:

$$a = 2, b = -3, c = m + 1 \text{ dir. Denkleimde}$$

$$\bullet x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \quad \bullet x_1 \cdot x_2 = \frac{m+1}{2} \text{ dir.}$$

$$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 = 3$$

$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = 3$$

$$x_1 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \text{ dir.}$$

Kök, denklemini sağlar. x yerine 2 yazarsak,

$$2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + m + 1 = 0$$

$$m = -3 \text{ bulunur.}$$

Cevap B

Örnek:

$$x^2 - 9x + a - 3 = 0$$

denkleminin köklerinden biri diğerinin iki katıdır.

Buna göre, a kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

Çözüm:

$$a = 1, b = -9, c = a - 3 \text{ tür. } x_1 = 2x_2 \text{ olsun.}$$

$$\bullet \text{ Kökler toplamı: } x_1 + x_2 = 9$$

$$2x_2 + x_2 = 9$$

$$3x_2 = 9$$

$$\boxed{x_2 = 3} \text{ tür.}$$

Kök, denklemini sağlar. x yerine 3 yazılırsa,

$$3^2 - 9 \cdot 3 + a - 3 = 0 \Rightarrow a = 21 \text{ dir.}$$

Cevap C

Örnek:

$$x^2 - (m - 2)x + 9 = 0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının 2 katına eşittir.

Buna göre, denklemin diskriminantı kaçtır?

- A) 64 B) 72 C) 81 D) 96 E) 108

Çözüm:

$$a = 1, b = -m + 2, c = 9 \text{ dur.}$$

$$\bullet x_1 + x_2 = m - 2 \quad \bullet x_1 \cdot x_2 = 9$$

Köklerin aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının 2 katına eşit olduğundan

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

$$\frac{m-2}{2} = 2 \cdot \sqrt{9} \Rightarrow m = 14 \text{ tür.}$$

Denklemin diskriminantıda ,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 108 \text{ dir.}$$

Cevap E

Örnek:

$$x^2 - ax + 9 = 0$$

denkleminin birbirinden farklı reel kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ toplamının değeri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 2 B) 10 C) 16 D) 20 E) 29

Çözüm:

Bu denklemin farklı iki reel kökü varsa $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$a = 1, b = -a, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 > 0$$

$$a^2 > 36 \text{ ise, } a > 6 \text{ veya } a < -6 \text{ dir.}$$

$$\bullet x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{a}{1} = a$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 9 + a \text{ dir.}$$

$$a > 6 \text{ ise, } 9 + a > 15$$

$$a < -6 \text{ ise, } 9 + a < 3 \text{ tür.}$$

Bu toplamın değeri 15 ten büyük veya 3 ten küçük olmalıdır. 10 olamaz.

Cevap B

Örnek:

$m \neq 1$ olmak üzere;

$$x^2 + x + 5m - 2 = 0$$

$$x^2 + mx + 3 = 0$$

denklemlerinin birer kökü ortaktır.

Buna göre, m nin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{28}{5}$ B) $-\frac{19}{5}$ C) $-\frac{12}{5}$ D) -2 E) $-\frac{6}{5}$

Çözüm:

Ortak kök x_1 olsun. x_1 her iki denkleminde kökü ise, her iki denklemin de sağlar.

$$x_1^2 + x_1 + 5m - 2 = 0$$

$$x_1^2 + m \cdot x_1 + 3 = 0$$

$$x_1^2 + x_1 + 5m - 2 = x_1^2 + m \cdot x_1 + 3$$

$$5m - 5 = m \cdot x_1 - x_1$$

$$5(m - 1) = x_1(m - 1) \Rightarrow x_1 = 5$$

Kök denklemin sağlar.

$$5^2 + 5 + 5m - 2 = 0$$

$$m = -\frac{28}{5} \text{ tir.}$$

Cevap A

E. Kökleri verilen İkinci Derece Denklemi Kurma

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem;

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \text{ şeklindedir.}$$

$x_1 + x_2$ toplamına T , $x_1 \cdot x_2$ çarpımına \mathcal{C} diyelim.

O halde denklem, daha kısa olarak

$$x^2 - Tx + \mathcal{C} = 0 \text{ biçimindedir.}$$

Örnek:

Kökleri -3 ve 5 olan ikinci derece denklemi bulalım.

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 5 \text{ olsun.}$$

$$x_1 + x_2 = T = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \mathcal{C} = -15 \text{ ve denklem}$$

$$x^2 - Tx + \mathcal{C} = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$2x^2 + 4x - 3 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, kökleri $x_1 - 1$ ve $x_2 - 1$ olan ikinci derece denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 4x + 3 = 0$ B) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

C) $2x^2 - 8x + 3 = 0$ D) $2x^2 + 8x + 3 = 0$

E) $2x^2 - 8x - 3 = 0$

Çözüm:

$a = 2$, $b = 4$, $c = -3$ tür. Buradan

$$x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Aranan denklemin kökleri, $x_1 - 1$ ve $x_2 - 1$ dir. Bu denklemin

• Kökler toplamı: $x_1 - 1 + x_2 - 1 = T$

$$-2 - 2 = T$$

$$-4 = T \text{ dir}$$

• Kökler çarpımı: $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = \mathcal{C}$

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \mathcal{C}$$

$$-\frac{3}{2} - (-2) + 1 = \mathcal{C}$$

$$\frac{3}{2} = \mathcal{C} \text{ dir.}$$

Aranan denklem;

$$x^2 - Tx + \mathcal{C} = 0$$

$$x^2 + 4x + \frac{3}{2} = 0 \text{ ve iki taraf 2 ile çarpılırsa}$$

$$2x^2 + 8x + 3 = 0 \text{ bulunur.}$$

Cevap D

Not: Bu soruda olduğu gibi, köklerin ikisine de aynı işlem uygulanmışsa, aranan denklemin köklerinden birini fonksiyon olarak düşünüp bunun tersini alırız. Bunu denklemde x yerine yazabiliriz.

Örnek:

$$4x^2 - 8x - 7 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, kökleri $2x_1 - 1$ ve $2x_2 - 1$ olan denklemi bulalım.

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \text{ dir.}$$

x yerine $\frac{x+1}{2}$ yazarsak,

$$4 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) - 7 = 0$$

$$x^2 - 2x - 10 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$3x^2 - 4x - 5 = 0$ denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci derece denklemi yazalım.

Bu denklemin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Aranan denklemin kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ dir.

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

x yerine $\frac{1}{x}$ yazarsak,

$$3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

$$\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} - 5 = 0$$

$$3 - 4x - 5x^2 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 4x - 3 = 0 \text{ dir.}$$

Not: Köklerinden biri köklü ifade içeren rasyonel katsayılı denklemin diğer kökü, bu kökün eşleniğidir.

Örnek:

Bir kökü $3 - \sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ikinci derece denklemi bulalım.

$$x_1 = 3 - \sqrt{5} \text{ ise, } x_2 = 3 + \sqrt{5} \text{ tir.}$$

$$x_1 + x_2 = T = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = Ç = 4 \text{ ve denklem}$$

$$x^2 - Tx + Ç = 0$$

$$\boxed{x^2 - 6x + 4 = 0} \text{ dir.}$$

F. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c, d, e, f reel (gerçek) sayılar, a, b ve c sayılarının en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere;

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

biçimindeki denklemlerdir. Bu şekilde iki veya daha çok denklem verildiğinde, genellikle denklemlerden birinde değişkenlerden biri diğerinin türünden yazılıp, öteki denklemde yerine yazılır.

Örnek:

$$xy^2 + x = \frac{10}{3}$$

$$x \cdot y = 1$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

$$\bullet x \cdot y = 1 \text{ ise, } x = \frac{1}{y} \text{ dir. Birinci denklemde}$$

x yerine $\frac{1}{y}$ yazalım.

$$xy^2 + x = \frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y^2 + \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{y^2 + 1}{y} = \frac{10}{3}$$

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

$$(3y - 1) \cdot (y - 3) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \text{ veya } y = 3 \text{ tür.}$$

$$x = \frac{1}{y} \text{ idi.}$$

$$y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ ve } (x, y) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ve } (x, y) = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$\text{O halde çözüm kümesi } \left\{ \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right) \right\}$$

tür.

G. Üçüncü Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c, d reel (gerçek) sayılar $a \neq 0$ olmak üzere;

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

biçimindeki ifadeler x değişkenine bağlı reel katsayılı üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Bu denklemin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun,

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \text{ dir.}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \text{ dir.}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri -1, b ve c dir.

Buna göre, $b^2 + c^2$ toplamı kaçtır?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

(1994 - ÖYS)

Çözüm:

Çarpanlara ayırarak kökleri bulalım.

$$(x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0$$

$$x^2 \cdot (x - 4) - (x - 4) = 0$$

$$(x - 4) \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 4) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = -1$$

O halde, $b = 4, c = 1$ ve

$$b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \text{ dir.}$$

Cevap A