

Cebirsel Fonksiyonlar

Yazar

Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

ÜNİTE

4

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- polinom, rasyonel ve cebirsel fonksiyonları tanıyacak ve bu türden bazı fonksiyonların grafiklerini öğrenmiş olacaksınız.

İçindekiler

- | | |
|--------------------------|-----|
| • Giriş | 123 |
| • Polinom Fonksiyonlar | 123 |
| • Rasyonel Fonksiyonlar | 129 |
| • Değerlendirme Soruları | 135 |

Çalışma Önerileri

- Ünite 3 ü öğrenmeden bu üniteyi çalışmaya başlamayınız
- Grafik çizimlerinde hangi tür noktalara önem verildiğine dikkat ediniz ve bu tür noktaların nasıl bulunduğunu iyi öğreniniz.
- Grafiği verilen fonksiyonlara benzer fonksiyonlar yazıp grafiklerini çizmeye çalışınız
- Doğrunun eğiminin anlamını iyi öğreniniz
- Doğru ve parabol çizimlerine önem veriniz

-
- Bir fonksiyonun tanım kümesi açıkça verilmemişse tanım kümesinin nasıl bulunacağını mutlaka öğreniniz.

1. Giriş

Bir fonksiyonun tam olarak belirlenebilmesi için tanım kümesinin, değer kümesinin ve kuralının açık olarak bilinmesi gerektiğini Ünite 3 de ifade etmiştik. Fonksiyonlar, kurallarına göre, cebirsel, üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, v.s. gibi isimler alırlar. Biz bu ünite de cebirsel fonksiyonları kısaca gözden geçireceğiz.

Uygun bir küme üzerinde tanımlı bir fonksiyonun kuralında değişkenle ilgili toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi işlemlerin yanı sıra kök alma işlemini de içeren kısaca kuralı cebirsel bir ifade ile verilen fonksiyonlara cebirsel fonksiyonlar denir. Örneğin,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 9}$$

$$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$$

$$k: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \frac{\sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}}{x^2 + 1}$$

fonksiyonları birer cebirsel fonksiyondur.

2. Polinom Fonksiyonlar

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ ve n doğal sayı olmak üzere

$$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

gibi fonksiyonlara **n. dereceden polinom fonksiyonlar** denir.

$P(x) = c$ sabit fonksiyonuna da 0. dereceden polinom fonksiyon olarak bakılabilir.

Aksi söylenmedikçe, bir polinom fonksiyonun tanım kümesi olarak \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi alınır. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ olmak üzere $P(x) = ax + b$ birinci dereceden polinom fonksiyona **doğrusal fonksiyon**, $P(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinom fonksiyona ise **kuadratik fonksiyon** da denir.

$y = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinin bir doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $y = ax + b$ fonksiyonunun grafiği üzerinde koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olan iki farklı A ve B noktalarını alalım. Bu noktalar $y = ax + b$ nin grafiği üzerinde olduklarından onun denklemini sağlamak zorundadırlar:

$y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Bu eşiklikleri taraf-tarafa çıkarırsak

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{veya} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

bulunur. Öte yandan geometriden bildiğimize göre farklı iki noktadan tek bir doğru geçer. Şimdi yukarıdaki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulmaya çalışalım. Bu doğru üzerinde (x, y) koordinatlı herhangi C noktasını alalım. Şekilden görüldüğü gibi

$$AD = x_2 - x_1, \quad AE = x - x_1,$$

$$BD = y_2 - y_1, \quad CE = y - y_1$$

dir.

ABD ve ACE üçgenlerinin benzerliklerinden

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BD}{AD}$$

veya

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

yazabiliriz. Buradan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

dır. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ olduğundan $y - y_1 = a(x - x_1)$ veya $y = ax + y_1 - ax_1$ çıkar. Öte yandan, $y_1 = ax_1 + b$ eşitliğinden b yi bulursak $b = y_1 - ax_1$ elde ederiz. Bunu yukarıda yazarsak

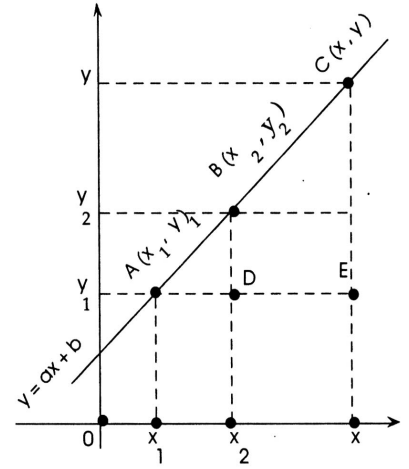
$$y = ax + b$$

buluruz. Bu onu gösteriyor ki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun denklemi $y = ax + b$ dir ve tersine, $y = ax + b$ fonksiyonunun grafiği bu iki noktadan geçen doğru olur.

Burada a sayısına doğrunun **eğimi** denir. $x = 0$ iken $y = b$ olduğundan b sayısı bu doğrunun ordinatlar eksenini hangi noktada kestiğini gösterir. Eğer $y = ax + b$ eşitliğinde $y = 0$ yazar ve x i çözersek bu doğrunun apsisler eksenini kestiği noktayı bulmuş oluruz. $y = 0$ ise $ax + b = 0$ olur. Bu denklemden

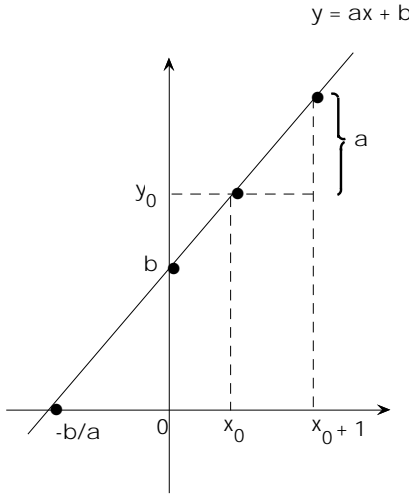
$$x = -\frac{b}{a}$$

bulunur.

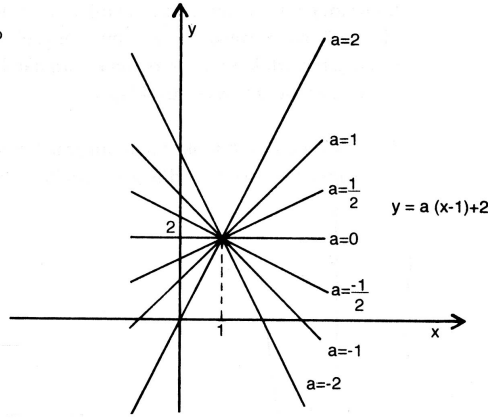


Şekil 4.1:

Aşağıdaki şekilleri inceleyerek eğimin bir doğru için önemini anlamaya çalışınız.



Şekil 4.2:



Şekil 4.3:

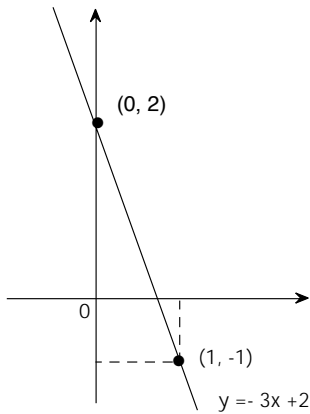
Yukarıda söylenilenlerden görüldüğü gibi $y = ax + b$ nin grafiğini çizmek için doğru üzerinde iki nokta bulmak yeterlidir. Bu iki nokta olarak genellikle doğrunun x -ekseni ve y -eksenini kestiği noktalar tercih edilir. Bunun için doğru denkleminde $y = 0$ yazıp x bulunur, sonra ise $x = 0$ yazıp y bulunur.

Örnek: $y = -3x + 2$ doğrusunu çiziniz.

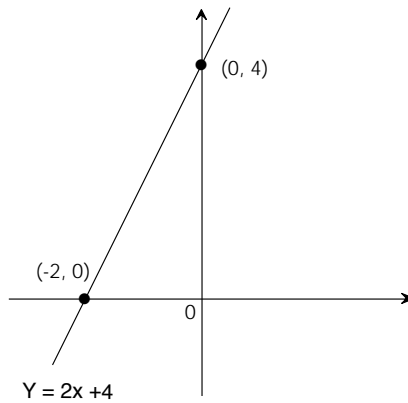
Çözüm: $x = 0$ ise $y = 2$; $x = 1$ ise $y = -1$. Buna göre $(0, 2)$ ve $(1, -1)$ noktalarından geçen doğruyu çizersek $y = -3x + 2$ nin grafiğini elde ederiz.

Örnek: $y = 2x + 4$ doğrusunu çiziniz.

Çözüm: $y = 0$ ise, $x = -2$; $x = 0$ ise $y = 4$. Buna göre $(-2, 0)$ ve $(0, 4)$ noktalarından geçen doğru aranan doğrudur.



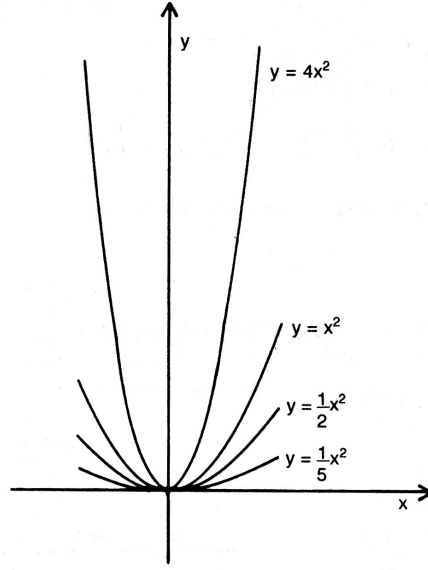
Şekil 4.4:



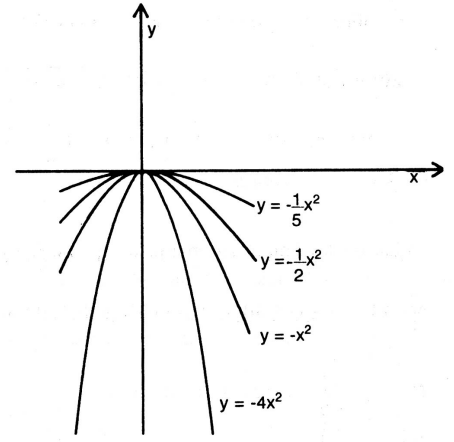
Şekil 4.5:

Şimdi $P(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinom fonksiyonları (kuadratik fonksiyonları) ele alalım. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğine **parabol eğrisi** denir ($a \neq 0$ olduğunu bir daha hatırlayalım). Ünite 3 de $y = x^2$ nin grafiğinden bahsetmiştik. $a > 0$ olmak üzere, $y = ax^2$ nin grafiği olan parabol eğrisi de $y = x^2$ grafiği gibi çizilir. a büyüdükçe bu parabolün kolları daralarak yükselir, a küçüldükçe parabolün kolları y-ekseninden uzaklaşır.

Eğer $a < 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği $y = (-a)x^2$ parabolünün x-eksenine göre simetriğidir ve $|a|$ büyüdükçe parabolün kolları x-ekseninden uzaklaşır.



Şekil 4.6:



Şekil 4.7:

Şimdi $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun grafiğini inceleyelim. Gösterelim ki bu fonksiyonun grafiği $y = ax^2$ nin grafiğinden kaydırma işlemleri ile elde edilebilir. Bu amaçla $ax^2 + bx + c$ ifadesini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Burada $p = -\frac{b}{2a}$, $q = \frac{4ac - b^2}{4a}$ dersek

$$ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiğini çizmek için $y = ax^2$ parabolünün grafiğini $|p|$ kadar sola veya sağa kaydıldıktan sonra yeni grafiği $|q|$ kadar aşağıya veya yukarıya kaydırmak gerekmektedir. Buna göre eğer $a > 0$ ise parabolün bir tane en alçak noktası, eğer $a < 0$ ise bir tane en yüksek noktası vardır. Bu noktaya parabolün **tepe noktası** denir. Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi parabolün tepe noktasının koordinatları

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

olur. Parabolün tepe noktasından geçip, y-eksenine paralel olan doğruya parabolün **ekseni** denir. Açıkça görüldüğü gibi $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün ekseninin denklemi

$$x = -\frac{b}{2a}$$

dır.

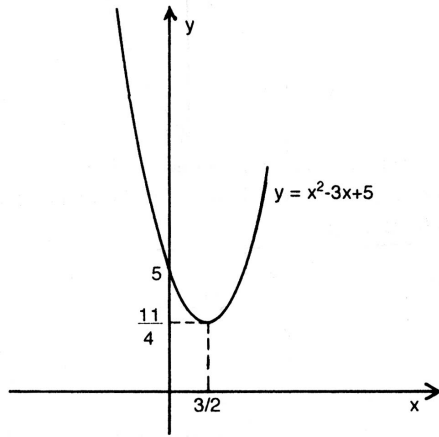
Örnek: 1) $y = x^2 - 3x + 5$ 2) $y = -2x^2 + 4x - 5$
parabollerinin tepe noktalarını, eksenlerini bulup grafiklerini çiziniz.

Çözüm: 1) $a=1, b=-3, c=5$ olduğundan $x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ gibi yazabiliriz.

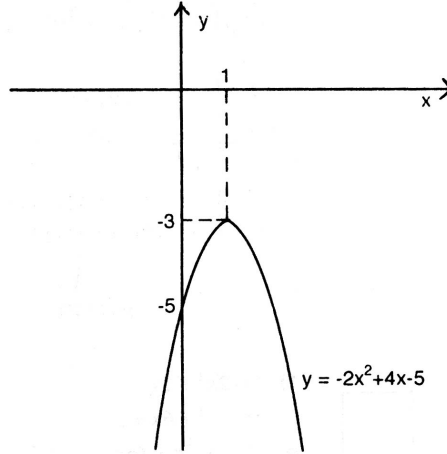
O zaman tepe noktasının koordinatları $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$, parabol ekseninin denklemi ise $x = \frac{3}{2}$ olur.

Eğer $y = x^2$ parabolünü $\frac{3}{2}$ birim kadar sağa kaydırırdık sonra elde edilen grafiği

$\frac{11}{4}$ birim kadar yukarı kaydırırsak aranan grafiği buluruz.



Şekil 4.8:



Şekil 4.9:

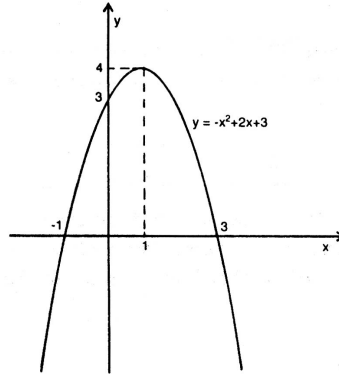
2) $a = -2, b = 4, c = -5$ olduğundan $-2x^2 + 4x - 5 = -2(x-1)^2 - 3$ yazılabilir. Buna göre tepe noktası $(1, -3)$, parabol ekseninin denklemi ise $x=1$ dir. Eğer $y = -2x^2$ parabolünü 1 birim kadar sağa kaydırırdık sonra 3 birim kadar aşağıya kaydırırsak aranan grafiği elde ederiz.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün koordinat eksenleri ile kesişim noktaları bulunursa, grafik daha kolay çizilebilir. Genellikle, $y = f(x)$ denklemi ile verilmiş eğrinin x -ekseni ile kesişim noktalarının apsisi, eğer varsa, $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir. Bu grafiğin y -ekseni ile kesişim noktası kolay bulunur, çünkü $y = f(x)$ de $x = 0$ yazarsak $y = f(0)$ bulunur ve y -ekseni ile kesişim noktası $(0, f(0))$ olur.

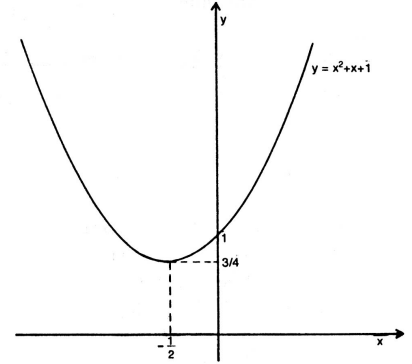
Örnek: 1) $y = -x^2 + 2x + 3$ 2) $y = x^2 + x + 1$
parabollerinin tepe ve eksenleri kestiği noktalarını bulup grafiklerini çiziniz.

Çözüm: 1) $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$ olduğundan tepe noktası $(1, 4)$ dür. $x = 0$ yazarsak $y = 3$ dür. $-x^2 + 2x + 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ dür. Buna göre parabolün y -ekseni ile kesişim noktası $(0, 3)$, x -ekseni ile kesişim noktaları ise $(-1, 0)$ ve $(3, 0)$ noktalarıdır.

2) $a = b = c = 1$ olduğundan tepe noktası $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ dür. $x = 0$ yazarsak $y = 1$ bulunur. $x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin gerçel kökleri yoktur. Çünkü diskriminant negatiftir: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Bu parabol y -eksenini $(0, 1)$ noktasında keser, ancak x -eksenini kesmez.



Şekil 4.10:



Şekil 4.11:

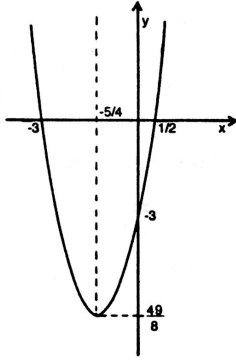
?

1) $y = 2x^2 + 5x - 3$

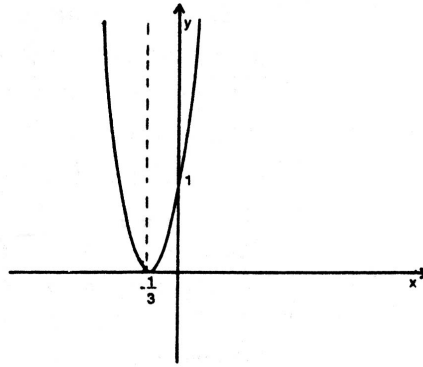
2) $y = 9x^2 + 6x + 1$

parabollerinin tepe noktalarını, eksenlerini, koordinat eksenleri ile kesişim noktalarını bulup grafiklerini çiziniz.

Cevaplarınız aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 4.12:



Şekil 4.13:

Daha yüksek dereceden ($n \geq 3$) polinom fonksiyonların grafikleri türev kavramı yardımıyla incelenebilir. Bu konuyu Ünite 10 da ele alacağız.

3. Rasyonel Fonksiyonlar

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom fonksiyon, $S = \{x \mid Q(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$f: \mathbb{R} - S \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

fonksiyonuna **rasyonel fonksiyon** denir. Bu fonksiyonun tanım kümesinin $Q(x)=0$ denkleminin kökleri dışındaki tüm gerçel sayılar kümesi olduğuna dikkat ediniz. Örneğin,

$$1) f(x) = \frac{1}{x} \quad 2) f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 2} \quad 3) f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

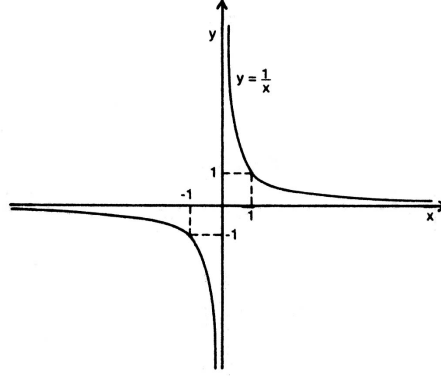
fonksiyonlarının herbiri rasyonel fonksiyonlardır. Bunlardan birincisinin tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$, ikincinin $\mathbb{R} - \{2\}$ iken üçüncü fonksiyonun tanım kümesi ise $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminde bulunan $x=2$ ve $x=3$ sayıları dışındaki gerçel sayılar kümesidir, yani $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ dır.

Örnek: $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Grafiği, x e bir kaç değer verip, bu değerlerin görüntüleri olan y değerlerini bularak çizmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

x	-5	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	3	5
$y = f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

Bulunan noktaları "uygun" bir eğri ile birleştirirsek $y = \frac{1}{x}$ in grafiğini elde ederiz. Bu eğriye **hiperbol** denir.



Şekil 4.14:

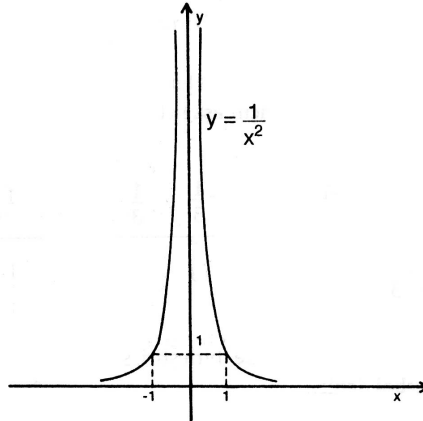
Düzlemde bir eğri ve bir doğru verilsin. Eğer eğri üzerindeki her hangi P noktası eğri üzerinde hareket ederek orijinden uzaklaştığında bu noktanın o doğruya olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyor ise bu doğruya o eğrinin **asimptotu** denir. Tanımdan görüldüğü gibi $y = \frac{1}{x}$ hiperbolünün iki asimptotu vardır. Bunlardan biri x - eksen, diğeri y - eksenidir.

Örnek: $y = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizin ve asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: Tanım kümesi $x = 0$ dışındaki gerçel sayılardır. Grafik çizimi için tablo oluşturalım.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

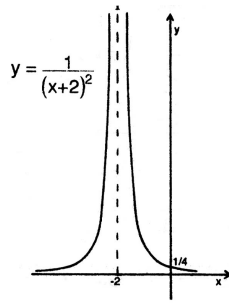
Tablodaki değerlere karşı gelen noktaları bulup "uygun" bir eğri ile birleştirirsek, grafik eğrisini bulmuş oluyoruz. Bu eğrinin de iki asimptotu vardır: Biri x - eksen, diğeri y - eksenidir.



Şekil 4.15:

Örnek: $y = \frac{1}{(x+2)^2}$ fonksiyonunun grafiğini ve grafik eğrisinin asimptotlarını bulunuz.

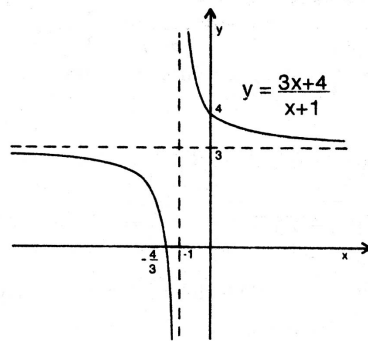
Çözüm: Tanım kümesi $x \neq -2$ değerleridir. Bu fonksiyonun grafiği, $y = \frac{1}{x^2}$ nın grafiği 2 birim sola kaydırılarak elde edilir. Asimptotlar ise x -ekseni ve $x = -2$ doğrusudur.



Şekil 4.16:

Örnek: $y = \frac{3x+4}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini ve grafik eğrisinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun tanım kümesi $x \neq -1$ değerleridir. $(3x+4)$ ü $(x+1)$ e bölersek $\frac{3x+4}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$ elde ederiz. Buna göre $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonun grafiğini önce 1 birim sola, sonra 3 birim yukarı kaydırırsak $y = \frac{3x+4}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini buluruz. Asimptotlar ise $y = 3$ ve $x = -1$ doğrularıdır.



Şekil 4.17:

Yukarıda bahsettiğimiz kaydırma yöntemi ile $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun grafiğini elde etmek mümkündür.

Örnek: $y = f(x) = \frac{3x - 3}{-x^2 + 2x + 3}$ fonksiyonunun,

- i) tanım kümesini ve $f(2)$, $f(-2)$, $f(1)$ değerlerini bulunuz.
 ii) $f(a) = 1$ eşitliğini sağlayan a değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: i) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$ ve $x = 3$ olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ kümesidir.

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2 - 3}{-2^2 + 2 \cdot 2 + 3} = \frac{3}{3} = 1 ,$$

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2) - 3}{-(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3} = \frac{-6 - 3}{-4 - 4 + 3} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5} ,$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1 - 3}{-1^2 + 2 \cdot 1 + 3} = \frac{0}{4} = 0$$

- ii) $f(a) = \frac{3a - 3}{-a^2 + 2a + 3} = 1$ eşitliğinin her iki tarafını $-a^2 + 2a + 3$ ile çarpalım.

$$3a - 3 = a^2 + 2a + 3 \quad \text{veya}$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

olur. Bu denklemi çözersek $a_1 = 2$, $a_2 = -3$ değerleri bulunur.

Şimdi rasyonel fonksiyon olmayan bir kaç cebirsel fonksiyonun grafiğini görelim.

Örnek: $y = f(x) = \sqrt{-3x + 2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz

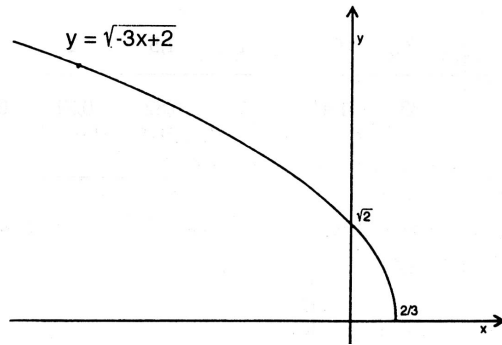
Çözüm: Karekök altındaki ifade negatif olmayacağından $-3x + 2 \geq 0$ olmalıdır.

Buradan $-3x \geq -2$ veya $x \leq \frac{-2}{-3}$ ve $x \leq \frac{2}{3}$ bulunur. Buna göre fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, \frac{2}{3}]$ aralığıdır. Grafiği çizmek için değerler tablosu oluşturalım.

x	$\frac{2}{3}$	0	-1	-2	-3	-4	-5
$y = f(x) = \sqrt{-3x + 2}$	0	1,41	2,23	2,82	3,31	3,74	4,12

(Bu ve bundan sonraki tablolarda irrasyonel sayıların yaklaşık değerleri alınmıştır).

Bu değerlere göre grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.18:

Örnek: 1) $y = \sqrt[5]{-x}$

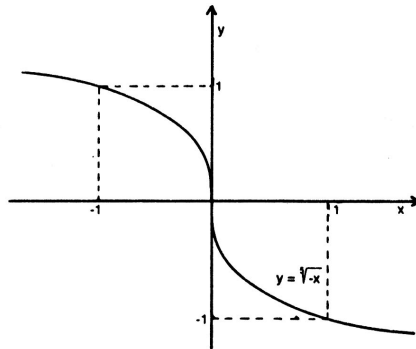
2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm: 1) Herhangi gerçel sayının tek dereceden kökü tanımlı olduğundan, bu fonksiyonun tanım kümesi \mathbb{R} dir. Grafik çizimi için aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \sqrt[5]{-x}$	1,32	1,25	1,15	1	0	-1	-1,15	-1,25	-1,32

Grafik aşağıdaki gibidir.

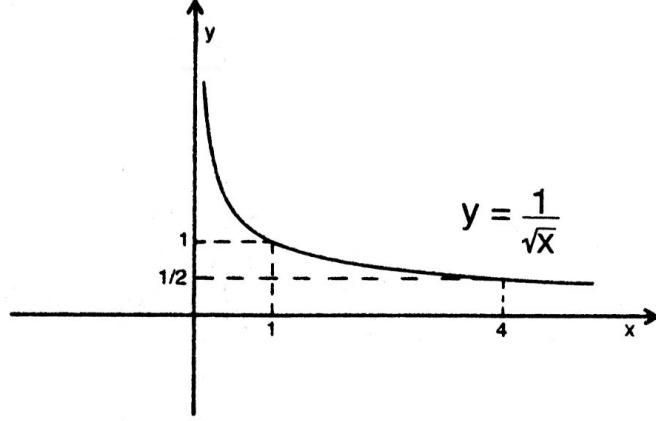


Şekil 4.19:

2) Fonksiyonun tanım kümesi $x > 0$ eşitsizliğini sağlayan x gerçel sayılarıdır.

Grafik çizimi için aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

x	0,3	0,5	1	1,5	2	3	4
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	1,83	1,41	1	0,82	0,71	0,57	0,5



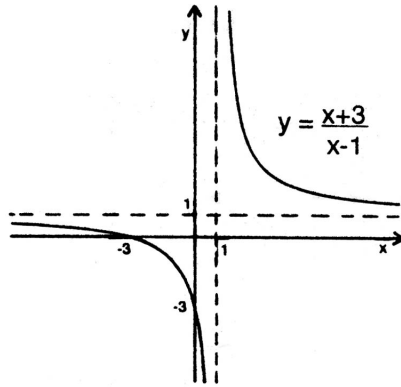
Şekil 4.20:



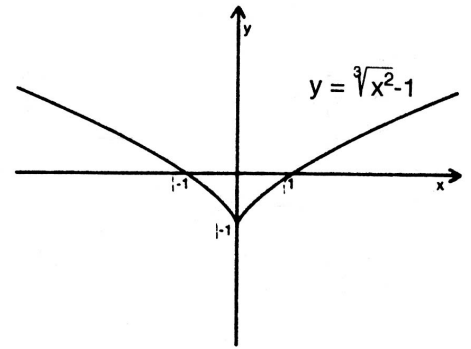
$y = \frac{x+3}{x-1}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz ve asimptotlarını bulunuz.

$y = \sqrt[3]{x^2} - 1$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Cevaplarınız aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 4.21:



Şekil 4.22:



Genel olarak cebirsel fonksiyonların grafiklerini elle çizmek kolay değildir. Ancak günümüzde bu grafikler bilgisayarlar yardımı ile kolayca çizilmektedir.

Değerlendirme Soruları

1. $y = 4x^2 - 12x + 13$ parabolünün tepe noktasının koordinatları hangisidir?

A. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$

C. $(3, -4)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

E. $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

2. $\varphi(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}$ için $\frac{1+x}{x} \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

A. $\frac{2+3x}{1-x}$

B. $\frac{2+3x}{1+x}$

C. $\frac{2-3x}{1-x}$

D. $\frac{2-3x}{1+x}$

E. $\frac{2+3x}{1-x^2}$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesi hangisidir?

A. $(0, \infty)$

B. $[0, \infty)$

C. \mathbb{R}

D. $[1, \infty)$

E. $(1, \infty)$

4. $f(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$ için $f(a) = \frac{1}{5}$ i sağlayan a değeri kaçtır?

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

E. -2

5. $y = \frac{2x-3}{x+2}$ fonksiyonunun grafiğinin asimptotları aşağıdaki seçeneklerden hangisinde verilmiştir?
- A. $x = 2, y = 2$
B. $x = -2$
C. $y = 2$
D. $x = -2, y = 2$
E. $x = -2, y = -2$
6. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x}}$ fonksiyonunun tanım kümesi hangisidir?
- A. $[0, 3]$
B. $(-\infty, 3)$
C. $[0, 3)$
D. $(-\infty, 0)$
E. $(2, 4)$
7. $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-4}$ fonksiyonunun tanım kümesi hangisidir?
- A. $(4, \infty)$
B. $[2, 4]$
C. $[4, \infty)$
D. $[-2, 2)$
E. $(2, 4)$
8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - ax + 13$ fonksiyonu veriliyor. $f(2) = 5$ olması için a kaç olmalıdır?
- A. 7
B. 8
C. 9
D. 11
E. 12
9. $f(x) = -2x^2 + ax + 3$ fonksiyonunun maksimum değerinin 11 olması için pozitif a değeri kaç olmalıdır?
- A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9

10. Grafiği yanda verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- i) $f(0) = 6$
- ii) $f(3) = 0$
- iii) $x = 1$ asimptottur
- iv) $y = 2$ asimptottur
- v) $f(-1) > 2$

- A. i, ii, v
- B. ii, iii,
- C. i, iv
- D. i, ii, iii, iv
- E. i, ii, iii, iv, v

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. A 3. C 4. E 5. D 6. C 7. C 8. E 9. D 10. E