

$f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$ gibi eşitsizliklerin çözüm kümesini bulmak için, $f(x)$ in işareti incelenmelidir. Bunun için sırayla şu işlemler yapılır:

- 1) Bir taraf sıfır olmalıdır. Eğer değilse, öncelikle sağ taraftaki ifadeler diğer tarafa alınmalı, gerekiyorsa paydalar eşitlenerek tek bir ifade oluşturulmalıdır.
- 2) $f(x)$ çarpanlara ayrılır. Her bir çarpan sıfıra eşitlenerek kökler bulunur. Bulunan kökler sayı doğrusu çizilerek gösterilir.
- 3) Oluşan bölgelerin işaretleri şu şekilde yazılır. En sağa, ya bu bölgeye ait bir sayı değeri verilerek bulunan işaret ya da her bir çarpandaki en büyük dereceli terimlerin işaretleri çarpımı yazılır. Sağdan sola doğru, tek katlı köklerden geçerken işaret değiştirerek çift katlı köklerden* geçerken işareti değiştirmeyerek, işaret tablosu tamamlanır.

4) Son olarak,

$f(x) > 0$ ise, tablodaki (+) işaretli yerleri

$f(x) \geq 0$ ise, (+) işaretli yerleri ve payın köklerini

$f(x) < 0$ ise, (-) işaretli yerleri

$f(x) \leq 0$ ise, (-) işaretli yerleri ve payın köklerini

çözüm kümesine yazarız.

Not: Çift katlı kök olması için, aynı kökten çift kez bulunmalıdır.

- $[f(x)]^{2n} = 0$ denkleminin kökleri çift katlıdır.
- $|f(x)| = 0$ denkleminin kökleri çift katlıdır.

Çift katlı olmayan köklere de tek katlı kök denir.

Örnek:

$(x - 3) \cdot (x + 1) < 2x + 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$(x - 3) \cdot (x + 1) < 2x + 2$$

Eşitsizliklerde işareti bilinmeyen ifadeler sadeleştirilmez. Sağ tarafı sıfır yapmak için, sağ tarafı sol tarafa alalım.

$$(x - 3) \cdot (x + 1) - 2 \cdot (x + 1) < 0$$

$$(x + 1) \cdot [(x - 3) - 2] < 0$$

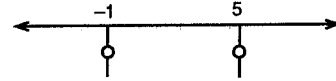
$$(x + 1) \cdot (x - 5) < 0$$

Eşitsizliğin sağ tarafı sıfır, sol taraf ise çarpanlara ayrılmış. Artık her çarpanı sıfıra eşitleyip kökleri bulalım.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Bulduğumuz kökleri sayı doğrusuna yerleştirelim.



Oluşan üç bölgenin işaretlerini yazmalıyız. Genellikle en sağdan başlanır. Bölgelerin işaretleri, ya o bölgeye ait bir sayı değeri yazılarak bulunur ya da kuraldan yazılır.

I) Örneğin en sağdaki bölgenin işaretini anlamak için, x yerine 5 ten büyük bir sayı olan 6 yazılabilir.

$$x = 6 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 5) = (6 + 1) \cdot (6 - 5) = 7 \text{ yani pozitifdir.}$$

II) Kurala göre, en sağa her bir çarpandaki en büyük dereceli terimlerin işaretleri çarpımı yazılır.

$$\begin{array}{c} (x + 1) \cdot (x - 5) \rightarrow ++ = + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ + \quad + \end{array}$$

Kökler tek katlı olduğu için, sağdan sola doğru köklerden geçerken işaret değiştirilmelidir.



Artık çözüm kümesini yazabiliriz.

$(x+1) \cdot (x-5) < 0$ yani tablodaki negatif bölgeler çözüm kümesidir.

O halde çözüm kümesi: $(-1, 5)$ tir.

Örnek:

$$(x-4)^2 \cdot (x+5) \cdot (6-x) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıların toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

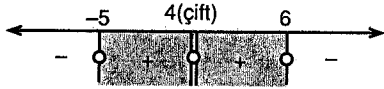
(1995 -ÖSS)

Çözüm:

Sağ taraf sıfır, sol taraf ise çarpanlarına ayrılmış. Her çarpanı sıfıra eşitleyip kökleri bulalım:

- $(x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$ çift katlı kök (2 kez)
- $x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$
- $6-x = 0 \Rightarrow x = 6$

Tabloyu oluşturalım.



İşaretlerin yazılması çok önemlidir. En sağa, her çarpandaki en büyük dereceli terimlerin işaretleri çarpımı yazılır.

$$(x-4)^2 \cdot (x+5) \cdot (6-x) \rightarrow + \cdot + \cdot (-) = -$$

Tek katlı köklerden geçerken işaret değişir, çift katlı köklerden geçerken işaret değişmez.

Çözüm kümesini yazalım:

$(x-4)^2 \cdot (x+5) \cdot (6-x) > 0$ yani tablodaki pozitif bölgeler çözüm kümesidir. (Eşitlik olmadığından, kökler dahil değildir.)

Ç.K. = $(-5, 4) \cup (4, 6)$ ve sağlayan tamsayılar toplamı,

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 5 = 1$$

Cevap A

Örnek:

4 katının 5 fazlası, kendisinin karesinden büyük olan en büyük tamsayı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(1997 -ÖYS)

Çözüm:

Sayı x olsun. Denklemini kuralım.

$$4x + 5 > x^2$$

$$0 > x^2 - 4x - 5$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x-5) \cdot (x+1) < 0$$

$$\bullet x - 5 = 0 \text{ ise } x = 5$$

$$\bullet x + 1 = 0 \text{ ise } x = -1$$

Kökleri bulduğumuza göre, tablo yapalım.



$(x-5) \cdot (x+1) < 0$ yani tablodaki negatif bölgeler çözüm kümesini oluşturur.

Ç.K. = $(-1, 5)$ tir. Bunu sağlayan en büyük tamsayı değeri de 4 tür.

Cevap B

Örnek:

$$\frac{(2-x) \cdot (3+x)}{x} > 0$$

eşitsizliği aşağıdaki aralıkların hangisinde sağlanır?

- A) $-\infty < x < -3$ B) $2 < x < 3$
C) $-3 < x < 0$ D) $-3 < x < -2$

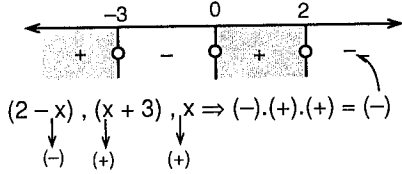
$$E) 3 < x < \infty$$

(1982 -ÖYS)

Çözüm:

Sağ taraf sıfır, sol taraf ise çarpanlara ayrılmış. Herbir çarpanı sıfıra eşitleyerek kökleri bulalım:

- $2 - x = 0$ ise $x = 2$
- $x + 3 = 0$ ise $x = -3$
- $x = 0$



$$\frac{(2-x) \cdot (3+x)}{x} > 0$$

yani pozitif sayılar çözüm kümesidir.

$$\text{Ç.K.} = (-\infty, -3) \cup (0, 2)$$

Cevap A

Örnek:

$$\frac{-(x+4) \cdot (x+5)^2}{x} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan negatif tamsayıların en küçükü kaçır?

- A) -6 B) -5 C) -3 D) -2 E) -1

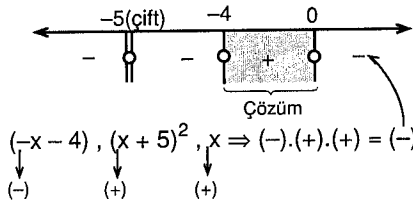
(1993 -ÖYS)

Çözüm:

Kesirdeki (-) işaretini bir çarpana verelim.

$$\frac{(-x-4) \cdot (x+5)^2}{x} > 0$$

- $-x - 4 = 0$ ise $x = -4$
- $(x+5)^2 = 0$ ise $x = -5$ çift katlı kök
- $x = 0$



$$\frac{(-x-4) \cdot (x+5)^2}{x} > 0$$

yani tablodaki pozitif bölgeler çözüm kümesini oluşturur.

Ç.K. = $(-4, 0)$ ve bu bölgedeki en küçük negatif tamsayı (-3) tür.

Cevap C

Örnek:

$$\frac{(x^2-2) \cdot (x^2+4)}{x^2-4} < 0$$

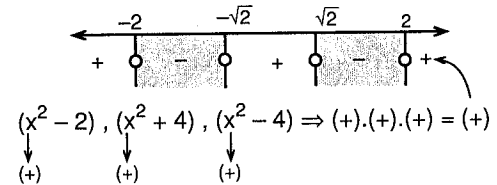
eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$
 B) $(-2, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$
 C) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, \infty)$
 D) $(\sqrt{2}, 2)$
 E) $[\sqrt{2}, 2]$

(1997 -ÖYS)

Çözüm:

- $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$
- $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ Karesi -4 olan gerçel sayı yoktur, kök gelmez. Ancak işaretine bakılır.
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ $x = -2$



Sıfırdan küçük yani negatif bölgeler isteniyordu. O halde,

$$\text{Ç.K.} = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$$

Cevap A

Not: Kökü olmayan ifadelerin de işaretlerine bakılır.

Örnek:

$$\frac{x}{2} < 1 + \frac{3}{2x}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif x tamsayı kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Çözüm:

Sağ taraf 0 olmadığından, sağ tarafı sol tarafa alalım.

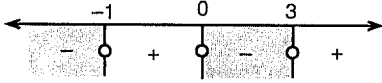
$$\frac{x}{2} - \frac{1}{1} - \frac{3}{2x} < 0$$

(x) (2x)

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{2x} < 0$$

$$\frac{(x-3) \cdot (x+1)}{2x} < 0$$

- $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $2x = 0 \Rightarrow x = 0$



$$\frac{(x-3) \cdot (x+1)}{2x} < 0$$

Yani negatif bölgeler çözüm kümesidir.

Ç.K. = $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$ ve çözüm kümesindeki en büyük negatif tamsayı -2 dir.

Cevap D

Örnek:

$$\frac{1}{x-3} > \frac{2}{9}$$

eşitsizliğini sağlayan x in doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Çözüm:

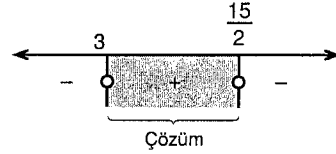
$$\frac{1}{x-3} > \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{2}{9} > 0$$

(9) (x-3)

$$\frac{9-2x+6}{9x-27} > 0 \Rightarrow \frac{-2x+15}{9x-27} > 0$$

$$\bullet -2x+15=0 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\bullet 9x-27=0 \Rightarrow x = 3$$



$$\frac{-2x+15}{9x-27} > 0$$

Yani pozitif bölgeler çözüm kümesidir.

Ç.K. = $\left(3, \frac{15}{2}\right)$ ve sağlayan x doğal

sayılarının toplamı,

$4 + 5 + 6 + 7 = 22$ dir.

Cevap D

Örnek:

$$\frac{(x-1)^{10} \cdot (3-x)}{x^2-5x+4} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in birbirinden farklı en küçük üç tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm:

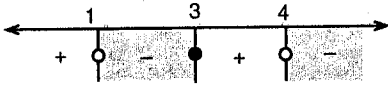
$$\bullet (x-1)^{10} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ Çift katlı (10 kez)}$$

$$\bullet (3-x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\bullet x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4) \cdot (x-1) \Rightarrow x = 4$$

$$x = 1$$

$x = 1$ kökü toplam 11 kez yani tek katlıdır.



$$\frac{(x-1)^{10} \cdot (3-x)}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$$

Yani negatif bölgeler ve eşitlikten dolayı payın kökleri çözüm kümesini oluşturur.

Ç.K. = $(1, 3] \cup (4, \infty)$ dur. Çözüm kümesindeki en küçük üç farklı tamsayının toplamı,

$$2 + 3 + 5 = 10 \text{ dur.}$$

Cevap C

Örnek:

$$\frac{(1-x) \cdot |x-2|}{|x-1|-3} \geq 0$$

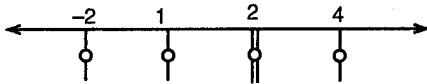
eşitsizliğin çözüm kümesindeki doğal sayılar kaç tanedir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- $|x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$ Çift katlı kök
- $|x - 1| - 3 = 0 \Rightarrow |x - 1| = 3$
 $x - 1 = 3$ veya $x - 1 = -3$
 $x = 4$ veya $x = -2$

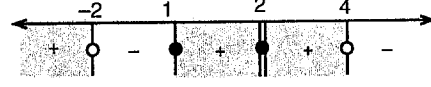
Tabloyu oluşturalım:



En sağdaki bölgenin işaretini anlamak için, x e 4 ten büyük bir değer verelim.

$$x = 5 \Rightarrow \frac{(1-5) \cdot |5-2|}{|5-1|-3} = \frac{-12}{1} = -12$$

Yani negatiftir.



İstenen, ≥ 0 yani pozitif bölgeler ve payın kökleridir.

Ç.K. = $(-\infty, -2] \cup [1, 4)$ ve bu kümedeki doğal sayılar 1, 2, 3 olmak üzere üç tanedir.

Cevap D

Not: $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

- Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ ise, $a > 0$
 $\Delta < 0$ dir.
- Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ ise, $a < 0$
 $\Delta < 0$ dir.

Örnek:

$$x^2 + 2x + a$$

Üç terimlisi x in bütün değerleri için 5 ten büyük olduğuna göre, a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty < a < -2$ B) $-2 < a < 1$
 C) $1 < a < 3$ D) $3 < a < 5$
 E) $6 < a < \infty$

Çözüm:

Çözülmesi gereken eşitsizlik

$$x^2 + 2x + a > 5$$

$$x^2 + 2x + a - 5 > 0 \text{ eşitsizliğidir.}$$

$a = 1$, $b = 2$, $c = a - 5$ olduğundan, bu eşitsizliğin daima sağlanması için,

$a > 0$ ve $\Delta < 0$ şartları gerekir.

- $a = 1 > 0$ şartı sağlanmıştır.

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 5) < 0$$

$$4 - 4a + 20 < 0$$

$$24 > 4a$$

$$6 < a$$

O halde, $6 < a < \infty$ dur.

Cevap E

İKİNCİ DERECE DENKLEMİN KÖKLERİNİN İŞARETİ

$a \neq 0$ olmak üzere,

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. İki kök olduğuna göre, $\Delta \geq 0$ dır. Öncelikle kökler çarpımına bakılır.

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ve buradan, x_1 ve x_2 nin işareti için ilk yorumlar yapılır. Daha sonra toplamına bakılır.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ve bununla birlikte, köklerin işareti bulunmuş olur.

Örnek:

$x^2 + 3x - 5 = 0$ denkleminin köklerinin işaretlerini bulalım.

$a = 1, b = 3, c = -5$ tir.

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

yani kökler çarpımı negatif olduğundan köklerden biri pozitif diğeri negatiftir.

$$\boxed{x_1 < 0 < x_2}$$

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$

yani kökler toplamıda negatif olduğundan negatif olan kök mutlak değerce büyüktür.

$$\boxed{|x_1| > x_2}$$

Örnek:

$$x^2 + (m-3)x + m^2 - 4 = 0$$

denkleminin gerçel kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$x_1 < 0 < x_2$$

$$|x_1| < x_2$$

olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $-2 < m < 2$

B) $-2 < m < 3$

C) $-3 < m < -2$

D) $-3 < m < 2$

E) $2 < m < 3$

Çözüm:

$a = 1, b = m - 3, c = m^2 - 4$ tür.

- $x_1 < 0 < x_2$ ise kökler ters işaretli, yani kökler çarpımı negatiftir.

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{1} < 0$$

$$m^2 < 4 \Rightarrow \boxed{-2 < m < 2}$$

- $|x_1| < x_2$ yani negatif kök mutlak değerce küçük ise, bu köklerin toplamı pozitifdir.

$$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{-(m-3)}{1} > 0$$

$$-m + 3 > 0 \Rightarrow \boxed{m < 3}$$

Ortak çözümden, $-2 < m < 2$ bulunur.

Cevap A

EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

İki veya daha fazla eşitsizliğin bulunduğu ifadelere, eşitsizlik sistemi adı verilir. Eşitsizlik sisteminin çözümü için, her bir eşitsizlik ayrı ayrı çözülür ve çözüm kümelerinin kesişimi alınır.

Örnek:

$$\frac{x-1}{2} < \frac{x+2}{3}$$

$$3x + 10 \geq x + 6$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Birinci derece eşitsizliklerde tablo yapmaya gerek yoktur.

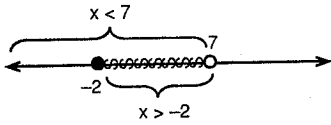
$$I) \quad \frac{x-1}{2} < \frac{x+2}{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{x-1}{2} < 6 \cdot \frac{x+2}{3}$$

$$3x - 3 < 2x + 4 \Rightarrow \boxed{x < 7}$$

$$II) \quad 3x + 10 \geq x + 6 \Rightarrow 2x \geq -4$$

$$\boxed{x \geq -2}$$

Ortak çözümü sayı doğrusunda gösterelim.



Ortak çözümden, Ç.K. = $[-2, 7)$ bulunur.

Örnek:

$$x^2 - 3mx + m - 3 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4$$

olduğuna göre, m nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, \infty)$ B) $(-\infty, 12)$
C) $\mathbb{R} - \{12\}$ D) $(3, 12)$
E) $(0, 12)$

(1996 ÖYS)

Çözüm:

Bu denklemin iki kökü varsa, $\Delta \geq 0$ olmalıdır.

$a = 1$, $b = -3m$, $c = m - 3$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \geq 0 \\ (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 3) &\geq 0 \\ 9m^2 - 4m + 12 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Delta < 0$ ve $a = 9 > 0$ olduğundan, eşitsizlik daima doğrudur.

$x_1 + x_2 = 3m$ ve $x_1 \cdot x_2 = m - 3$ olduğundan,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} - 4 > 0$$

$$\frac{3m}{m-3} - 4 > 0 \Rightarrow \frac{-m+12}{m-3} > 0$$

$$-m+12 = 0 \Rightarrow m = 12$$

$$m-3 = 0 \Rightarrow m = 3$$



O halde, $3 < m < 12$ dir.

Cevap D

EŞİTSİZLİK GRAFİĞİ

$y > f(x)$, $y \geq f(x)$, $y < f(x)$ veya $y \leq f(x)$ eşitsizliğinin grafiğini çizmek için, $y = f(x)$ fonksiyonunu grafiği çizilir.

- $y > f(x)$, $y = f(x)$ grafiğinin üstündeki bölgedir.
- $y \geq f(x)$, $y = f(x)$ ve üstündeki bölgenin birleşimidir.
- $y < f(x)$, $y = f(x)$ grafiğinin altındaki bölgedir.
- $y \leq f(x)$, $y = f(x)$ ve altındaki bölgenin birleşimidir.

Örnek:

$$y \leq 4 - x^2$$

$$x + y > 0$$

eşitsizlik sistemini sağlayan (x, y) ikililerinin analitik düzlemdeki görüntüsünü bulalım.

Çözüm:

Öncelikle, $y = 4 - x^2$ ve $x + y = 0$ grafikleri çizilir.

$$y = 4 - x^2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \quad x = -2$$

$a = -1 < 0$ olduğu için kollar aşağı bakar.

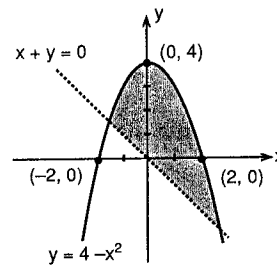
Tepesi noktası $T(r, k)$ olsun.

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} \text{ ve } k = f(0) = 4 \Rightarrow T(0, 4)$$

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

doğrusu, ikinci açıortay doğrusudur.

Grafikleri çizelim.



$y \leq 4 - x^2$,
 $y = 4 - x^2$ ve altındaki bölgenin bileşimidir.

$x + y > 0$,
 $x + y = 0$ üstündeki bölgedir.

Ortak bölge, şekildeki gibidir.