# Ünite 2

# DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

**Kışkırtıcı Soru:** Diophantos kaç yıl yaşamıştır?

**Kışkırtıcı Soruyu Soran:** Mete, durum 2.

**7 Kavram:** 1. Dereceden Denklemler, 2. Dereceden Denklemler, 1. Dereceden Eşitsizlikler, 2. Dereceden Eşitsizlikler, Çözüm, Çözüm Kümesi, Cebirsel İfade

## Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Arkadaşlar bugün Themis'in heykellerindeki eşitlik ve objektifliğin simgesi olan terazi ile geldim.

**Şekil 2.1:** Themis Heykeli

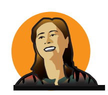
Hocam Themis kim?

Yunan mitolojisinde Themis adalet ve düzen tanrıçası olarak bilinir (Şekil 2.1). Themis heykelleri, bir elinde terazi diğer elinde ise kılıç olan gözleri bağlı bir kadını temsil eder. Bir elindeki terazi, adaleti ve bunun dengeli bir biçimde dağıtılmasını simgelemektedir.

Şimdi hatırladım hocam. Adalet bakanlığının logosunda da terazi vardı.

Biz işin hukuk kısmına girmeden, terazinin eşitlik özelliği ile ilgilenelim. Size 4 tane $100gr$, 4 tane de $50gr$ getirdim. Bunların hepsini, terazinin kefelerine, eşit ağırlıkta olacak şekilde yerleştirebilir misiniz?

Her iki kefeye ikişer tane $100gr$, ikişer tane de $50gr$ koyarsak ağırlıkları eşit olur. Terazi de dengede kalır.



$$\begin{aligned} 2\times100+2\times50 &= 2\times100+2\times50 \\ 200+100 &= 200+100 \\ 300 &= 300 \end{aligned}$$

Başka türlü terazi dengede olacak şekilde gramları yerleştirebilir miyiz?

Evet yerleştirebiliriz. Elimizde toplam $600gr$ olduğuna göre birinci kefeye üç tane $100gr$, diğer kefeye de kalanları koyarsak,

$$\begin{aligned} 3 \times 100 &= 1 \times 100 + 4 \times 50 \\ 300 &= 100 + 200 \\ 300 &= 300 \end{aligned}$$

şeklinde terazi dengede olur.

Bundan başka, eşitliği ünlü ressam Albrecht Dürer'in sihirli karesinde de görebiliriz (Şekil 2.2).

Sihirli kare mi?

Evet Gökçe. Şimdi sihirli karedeki sihiri görmeye çalışın.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

**Şekil 2.2:** A. Dürer'in Sihirli Karesi

Birinci yatay sıradaki sayıların toplamı otuz dört ve diğer yatay sıradakilerin toplamı da aynı sayı.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

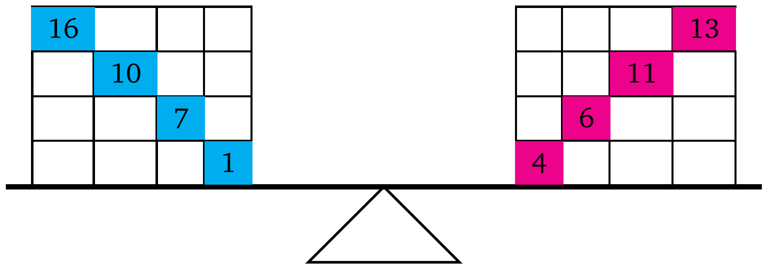
$$\begin{aligned} 16+3+2+13 &= 34 \\ 5+10+11+8 &= 34 \\ 9+6+7+12 &= 34 \\ 4+15+14+1 &= 34 \end{aligned}$$

Aaa düşey sıradaki sayıların da toplamı otuz dört.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

$$\begin{array}{r} 16 \\ 5 \\ 9 \\ +\ 4 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 10 \\ 6 \\ +\ 15 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 11 \\ 7 \\ +\ 14 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 8 \\ 12 \\ +\ 1 \\ \hline 34 \end{array}$$

Süper! Albrecht Dürer bir dahi olmalı. Sanki Themis'in terazisini kullanmış. Terazinin bir kefesine bir köşegendeki sayıları, diğer kefesine de diğer köşegendeki sayıları koyarsak terazimiz dengede kalır. Çünkü her iki kefedeki sayıların toplamı otuz dört olur.




**Şekil 2.3:** Sihirli Karedeki Eşitlik Durumu

Çok güzel, karedeki sihiri çözdünüz! Şimdi eşitlik kavramını matematiksel olarak inceleyelim. Bunun için cebirsel ifadelerin eşitliğinden bahsedeceğim.

Hocam, cebirsel ifade ne demektir?

Bilinmeyen dediğimiz $x, y, z, \ldots$ gibi değişkenleri, $1, 2, 3, \ldots$ gibi sayıları ve $+, -, \times, \ldots$ gibi işlemleri içeren ifadelerdir. Örneğin;

$$2x - 1, \;\; x + 3, \;\; \sqrt{x+5}, \;\; \ldots$$

gibi ifadelerdir. Şimdi, $2x - 1$ ile $x + 3$ cebirsel ifadelerinin eşit olması durumunu düşünelim. Söyleyin bakalım,

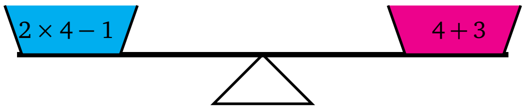
$$2x - 1 = x + 3$$

eşitliği $x$ in hangi değeri için doğrudur?

$$\begin{aligned} 2 \times 4 - 1 &= 4 + 3 \\ 8 - 1 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

$x = 4$ için doğrudur.

$x = 4$ de bu iki ifadenin eşitliğini, Şekil 2.4'de verilen dengedeki terazi gibi düşünebiliriz.



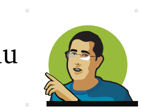

**Şekil 2.4:** Terazideki Eşitlik Durumu

Bu şekilde, bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin bazı değerleri için gerçeklenen eşitliklere denklem diyeceğiz. Bilinmeyenin denklemi sağlayan değerine denklemin çözümü denir. Denklemin çözümlerinin kümesine de çözüm kümesi denir. Denklem bilinmeyenin hiçbir değeri için sağlanmıyorsa, çözüm yok ve çözüm kümesi boş kümedir diyeceğiz.

O zaman $x = 4$ değeri, $2x - 1 = x + 3$ denkleminin çözümüdür.

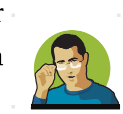
Denklemleri, günlük hayatımızda karşılaştığımız çoğu problemlerin çözümünde kullanırız.

Hocam, geçen gün amcam bana bir halk bilmecesi sordu. Onu da denklemle çözebilir miyiz?



Söyle bakalım bilmeceni Selçuk. Hep birlikte çözmeye çalışalım.

Yerde bir topal kaz varmış. Havada uçan bir gurup kaza, topal kaz seslenmiş: "Hey yüz kaz nereye gidiyorsunuz?" Havadaki kazlardan bir tanesi, "Biz yüz kaz değiliz! Bize bizim kadar, bizim yarımız kadar ve yarımızın yarısı kadar eklenirse, bir de sen olursan ancak o zaman yüz kaz oluruz" demiş. Acaba havada uçan kaz sayısı nedir?



Selçuk isabetli bir bilmece sordun. Denklemler yardımıyla bu bilmeceyi çözebiliriz. Bu bilmeceyi çözebilmek için buna uygun bir matematiksel model olan denklem kurmalıyız. Uçan kazların sayısına $x$ diyecek olursak, kaz bilmecesine karşılık gelen denklem,

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \qquad \text{olur.}$$

Peki, bu denklemde ki $x$ bilinmeyenini nasıl bulacağız?

Gökçe aslında bir denklemin nasıl çözüleceğini soruyorsun. Bunun için, eşitliği bozmayan işlemlerden yararlanacağız. Bu işlemler, bir eşitliğin iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya iki tarafından aynı sayının çıkarılması, iki tarafının aynı sayı ile çarpılması ve iki tarafının sıfırdan farklı bir sayıya bölünmesidir.

Sanırım bu işlemler dengedeki terazi için de geçerlidir.

Şimdi bu işlemleri kullanarak,

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

denklemini çözmeye çalışalım.

Denklem biraz kalabalık görünüyor.

Eşitliğin sol tarafındaki $x$ leri toplayıp sadeleştirebiliriz.

$$\begin{aligned}
\underset{(4)}{\frac{2x}{1}} + \underset{(2)}{\frac{x}{2}} + \underset{(1)}{\frac{x}{4}} + 1 &= 100 \\
\frac{8x + 2x + x}{4} + 1 &= 100 \\
\frac{11}{4}x + 1 &= 100
\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafından 1 i çıkaralım:

$$\begin{aligned}
\frac{11}{4}x + 1 - 1 &= 100 - 1 \\
\frac{11}{4}x &= 99
\end{aligned}$$

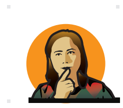
İyi gidiyorsun Zeynep, devam et istersen.

Şimdi iki tarafı 4'le çarpıp,

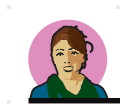
$$\begin{aligned} 4 \times \frac{11}{4}x &= 99 \times 4 \\ 11x &= 99 \times 4 \end{aligned}$$

sonra iki tarafı 11 e bölelim:

$$\begin{aligned} \frac{11x}{11} &= \frac{99 \times 4}{11} \\ x &= \frac{99}{11} \times 4 \\ x &= 9 \times 4 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

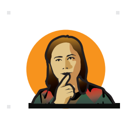


buluruz.

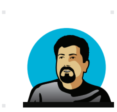


Denklemlerin hepsini böyle işlemler ile çözebilir miyiz?

Hayır Gökçe. Denklemlerin hepsi aynı türden olmadığından bunu genelleyemeyiz. Bunun için denklemleri bilinmeyen sayısı ve bilinmeyenlerin en yüksek kuvvetine göre sınıflandırıp, çözüm arayacağız. Biz şimdilik bir bilinmeyenli denklemlerle ilgileneceğiz. Bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin kuvveti bir olan denkleme, birinci dereceden bir bilinmeyenli (veya kısaca birinci dereceden) denklem denir. Bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin kuvveti iki olan bir denkleme, ikinci dereceden bir bilinmeyenli (veya kısaca ikinci dereceden) denklem denir.



O halde, kaz bilmecesinin denklemi birinci dereceden denklem olur.



Evet. Genel olarak birinci dereceden denklemler $a, b$ iki gerçel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b = 0$$

şeklindedir. Bu tür denklemlerin çözümü daha önce bahsettiğim, eşitliği bozmayan işlemlerle kolayca çözülür.

$$\begin{aligned} ax+b &= 0 \\ ax+b-b &= -b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

**Tanım** Bir denklemde eşitliği sağlayan bir sayıya, denklemin bir çözümü denir.

Buradan denklemin çözüm kümesi Ç= $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ olarak bulunur.

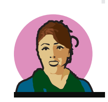
Gökçe yine mi! Hani cep telefonunu derse girerken kapatacaktın?

Özür dilerim hocam. Kardeşim kaz bilmecesine benzer bir mesaj göndermiş. Okuyorum okuyorum anlamıyorum. Lütfen yardımcı olabilir misiniz?

Neymiş söyle bakalım?

Hocam biliyorsunuz indirimler başladı. Kardeşimle babamdan para istemiştik. Ona vermiş bana da ona verdiği kadar verecekmiş. Fakat beni meraklandırmak için, babamın verdiği parayı bulmamı istiyor. Bu paranın beşte ikisine kot, dörtte birine kazak aldıktan sonra 35 lirasının kaldığını yazıyor.

Haydi yine iyisin. 35 liradan fazla alacaksın. Ne istersen alırsın!



Şakayı bırak Selçuk, babam fazla para vermez.

Haydi bakalım. Gökçe'ye babasının kaç lira para vereceğini bulmaya çalışalım ve onu meraktan kurtaralım.

Önce probleme karşılık gelen denklemi yazmamız gerekiyor. Gökçe'nin babasının kardeşine verdiği paraya $x$ dersek, denklemimiz

$$x = \frac{2}{5}x + \frac{x}{4} + 35$$

şeklinde olur.

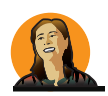
Anladım, kardeşim paranın $\frac{2}{5}$ ini kota ve $\frac{1}{4}$ ünü de kazağa harcamış.

Şu denklemi bir an önce çözüp $x$'i bulmak istiyorum. Ben de kotun fiyatını merak ettim.

$$\begin{aligned} x &= \underset{(4)}{\frac{2x}{5}} + \underset{(5)}{\frac{x}{4}} + 35 \\ &= \frac{8x+5x}{20} + 35 \\ &= \frac{13x}{20} + 35 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} x - \frac{13x}{20} &= 35 \\ \frac{20x-13x}{20} &= 35 \\ \frac{7x}{20} &= 35 \\ x &= 100 \end{aligned}$$



olur. Gökçe baban sana 100 TL verecek. Benim de merak ettiğim kotun fiyatı ise $100 \times \frac{2}{5} = 40$ TL dir.

Oh be rahatladım. Hepinize teşekkür ederim.

## İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Geçen hafta, Almanya'dan bir hoca seminer vermek üzere matematik bölümüne geldi. Hocamız ülkesine dönmeden önce, bir halı aldı.

Nasıl bir halı aldı hocam?

Ününü duymuş olduğu Hereke halısı aldı.

Hereke halılarının çok pahalı olduğunu duymuştum. Ne kadar büyüklükte bir halı aldı acaba? Çok merak ettim.

Dikdörtgen şeklinde bir halı aldı. Halının alanı $8m^2$ ve uzun kenarı kısa kenarından $2m$ fazlaydı.

Hocam, ama halının boyutlarını söylemediniz.

Ben bu halının boyutlarını bulabilirim. Dikdörtgenin alanı, uzun kenarı ile kısa kenarının çarpımına eşittir. Buna göre, halının kısa kenarına $x$ dersek, uzun kenarı $x+2$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} x(x+2) &= 8 \\ x^2+2x &= 8 \end{aligned}$$

ya da

$$x^2+2x-8=0$$

denklemini yazabilirim.

Bu denklemde $x^2$ var. Pınar hoca böyle denklemlere, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem demişti ama çözümünü anlatmamıştı.

Matematik tarihine baktığımızda, İslam dünyasının ilk büyük matematikçisi olan Harizmi, bu tür denklemleri geometrik yaklaşımla çözmüştür. Şimdi, Harizmi'nin

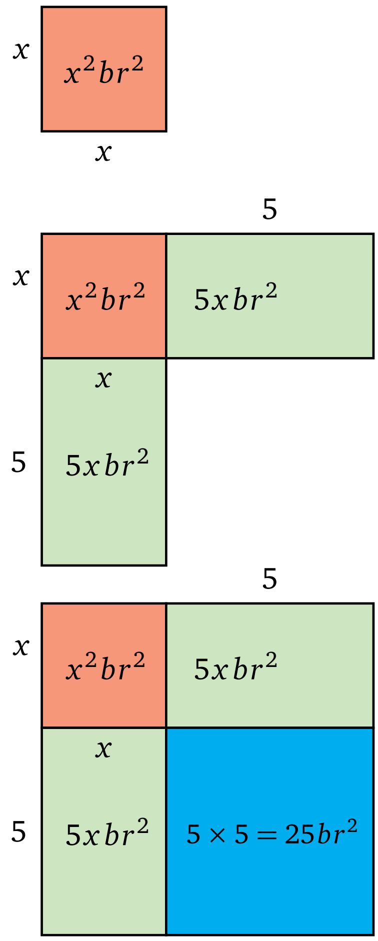
$$x^2+10x=39$$

denklemini nasıl çözdüğünü görelim. Önce, kenar uzunluğu $x$ birim olan bir kare alalım (Şekil 2.5).

Sonra bu kareye iki kenarından, kenar uzunlukları 5 ve $x$ olan iki dikdörtgen ekleyelim (Şekil 2.5).

Hocam, eklediğiniz dikdörtgenlerin kenarlarından birini neden 5 birim aldınız?

$x^2 + 10x = 39$ denklemini $x^2 + 5x + 5x = 39$ şeklinde yazabiliriz. Dikkat ederseniz $5x\,br^2$ eklediğimiz eşit olan dikdörtgenlerden birinin alanına karşılık geliyor. Yani, denklemimizde $10x$ terimi olduğu için, alanı $5x\,br^2$ olan iki tane dikdörtgen ekledik.




**Şekil 2.5:** Kareye Tamamlama

Sanırım sağ alt köşede ki boşluğu doldurursak, şeklimiz daha güzel görünecek.

O zaman şeklimizi, alanı $5 \times 5 = 25br^2$ olan kareyle tamamlayalım (Şekil 2.5). Oluşan bu şekil size tanıdık geldi mi?

Evet hocam, oluşturduğumuz bu şekil, kenarı $x + 5$ olan bir karedir ve bu karenin alanı da $(x+5)^2\ br^2$ olur.

Dikkat ederseniz, bu karenin alanını,

$$(x+5)^2 = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

şeklinde de yazabiliriz. Harizmi'nin ele aldığı denklem, $x^2 + 10x = 39$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (x+5)^2 &= 39 + 25 \\ (x+5)^2 &= 64 \\ x+5 &= \mp\sqrt{64} \\ x+5 &= \mp 8 \end{aligned}$$

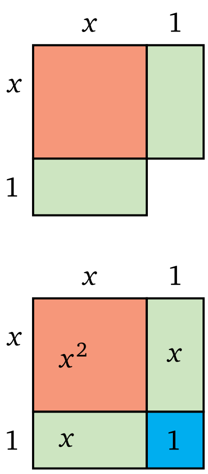
olur. Artık $x$ kenar uzunluğunu bulabiliriz. $x + 5 = 8$, buradan da $x = 3$ elde ederiz. Peki, $x + 5 = -8$ alabilirmiyiz?

Hayır alamayız. Çünkü, $x + 5$ oluşturduğumuz karenin kenar uzunluğudur ve dolayısıyla negatif bir sayı olamaz.

Artık, Alman hocanın aldığı halının boyutlarını bulabiliriz. Bunun için,

$$x^2 + 2x = 8$$

denklemini, Harizmi'nin geometrik yaklaşımı ile çözelim.




**Şekil 2.6:** Kareye Tamamlama

Hocam, $x^2 + 2x = 8$ denklemini, Şekil 2.6'da görüldüğü gibi bir karenin alanı ile iki dikdörtgenin alanları toplamı olarak düşünebiliriz. Sonra, alanı $1 \times 1 = 1\ br^2$ olan kare ekleyerek, kenar uzunluğu $x + 1\ birim$ olan kareye tamamlamış oluruz.

Selçuğun bulduğu karenin alanı (Şekil 2.6) ise,

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2 + x + x + 1\\ (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

olur. $x^2 + 2x = 8$ olduğundan, $(x+1)^2 = 8 + 1 = 9$ bulunur. Her iki tarafın karekökü alınarak,

$$\begin{aligned}x + 1 &= \mp\sqrt{9}\\ x + 1 &= \mp 3\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $x = 2$ veya $x = -4$ buluruz. Ama uzunluk negatif olamayacağı için $x = 2m$ halının kısa kenarıdır. Uzun kenarı ise, bunun $2m$ fazlası olduğundan $4m$ olur.

Artık, ikinci dereceden denklemlerin çözümünü veren formülü de çıkarabiliriz. Genel olarak verilen,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin çözümünü de Harizmi'nin geometrik yaklaşımıyla bulalım. Bunun için Harizmi'nin ele aldığı denkleme benzetmeye çalışalım.

**Tanım** $a, b, c$ $(a \neq 0)$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

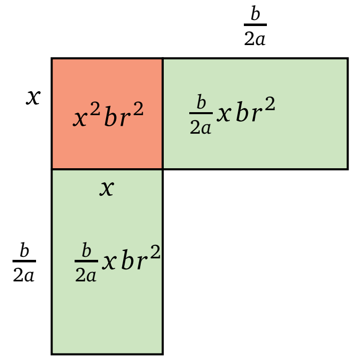
şeklindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler denir.

Harizmi'nin denkleminde, $x^2$ teriminin katsayısı bir olduğu için, genel denklemimizi de . $a$ ya bölerek $x^2$ nin katsayısını 1 yapmış oluruz.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

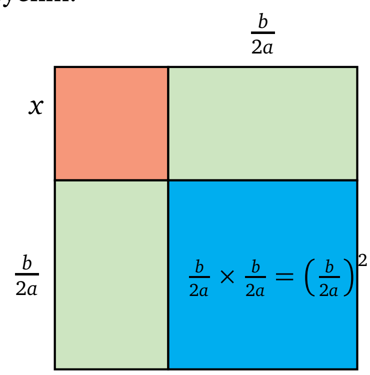
$\frac{c}{a}$ yı da eşitliğin diğer tarafına geçirirsek Harizmi'nin ele aldığı denkleme benzeyecek.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$




**Şekil 2.7:** Kareye iki dikdörtgenin eklenmesi

Çok iyi Zeynep. Artık Harizmi'nin yöntemini uygulayabiliriz. Önce $x$ kenarlı kareye, kenar uzunlukları $x$ ve $\frac{b}{2a}$ olan iki dikdörtgeni ekleyelim (Şekil 2.7). Sonra, bu şekle alanı $\frac{b}{2a} \times \frac{b}{2a} = (\frac{b}{2a})^2$ olan kareyi ekleyelim.




Böylece kenar uzunluğu $x + \frac{b}{2a}$ olan kareye tamamlamış oluruz. Bu karenin alanı ise,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Hocam, eşitlikte sol taraf bir tam kare olduğu için her iki tarafın karekökünü alırsak $x$ değerlerini bulabiliriz.

Evet, ama dikkatli olmamız gerekiyor. Bunun için $x^2+1=0$ denklemi üzerinde tartışalım. Bu denklemin köklerini sorsam ne dersiniz?

$x = \mp\sqrt{-1}$ değil mi hocam?

Negatif gerçel sayıların karakökü olmaz. Çünkü karesi $-1$ olan gerçel sayı yoktur.

Hocam o zaman bazı ikinci dereceden denklemlerin çözümü yoktur.

Arkadaşlar, demek ki bir sayının karekökünü alırken sayının işaretine dikkat edeceğiz.

Artık, eşitliğimize geri dönüp, yarım kalan işimizi bitirebiliriz. Elde ettiğimiz eşitlikte, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ve $4a^2 > 0$ olduğundan,

$$x + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

yazabiliriz. Gördüğünüz gibi, denklemin çözümleri ya da kökleri karakök içinde bulunan $b^2-4ac$ nin işaretine bağlıdır. Bu değer, diskriminant olarak isimlendirilir ve $\Delta$ $(Delta)$ ile gösterilir.

Şimdi,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

nin işaretine göre denklemin köklerini bulalım.

- $b^2-4ac>0$ ise denklemin,

$$
\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a}&=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &,\quad x+\frac{b}{2a}&=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x_1&=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &,\quad x_2&=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x_1&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &,\quad x_2&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x_1&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} &,\quad x_2&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}
$$

  şeklinde iki tane çözümü vardır.

- $b^2-4ac=0$ ise $\sqrt{\Delta}=0$ olacağından,

$$
\begin{aligned}
x_1&=\frac{-b+0}{2a} &,\quad x_2&=\frac{-b-0}{2a}\\
x_1&=\frac{-b}{2a} &,\quad x_2&=\frac{-b}{2a}
\end{aligned}
$$

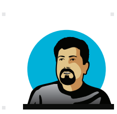
  denklemin kökleri eşit olur. Bu durumda denklemin tek kökü vardır ya da iki kat kökü vardır diyebiliriz.

- $b^2-4ac<0$ ise $x^2=-1$ örneğinde bahsettiğim gibi denklemin gerçel kökü yoktur.

**Tanım** $a,b,c\in\mathbb{R}$ ve $a\neq 0$ ikinci dereceden denkleminde $\Delta=b^2-4ac$ olmak üzere,

- $\Delta>0$ ise iki kök var. $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta=0$ ise tek kök var. $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta<0$ ise gerçel kök yoktur.

Demek ki $\Delta$ nın üç durumuna göre verilen denklemlerin çözümlerini belirleyebiliriz.



Artık, ikinci dereceden bir denklemin çözümünü veren formülü kullanarak,

$$2x^2-3x+1=0$$

denkleminin köklerini bulabilirsiniz.

Bunu ben çözmek istiyorum. Önce $\Delta$ yı bulacağım.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 9-8\\ &= 1\end{aligned}$$

$\Delta$ pozitif olduğu için iki gerçel kökü vardır. Bunlar,

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3+1}{4} = 1\\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olup Ç$=\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ dir.

Zeynep doğru yaptın. Denklemde önce $x$ yerine 1, sonra $\frac{1}{2}$ yi yazarsak:

$$\begin{aligned}2\times(1)^2-3\times(1)+1 &= 0\\ 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(\frac{1}{2}\right)+1 &= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece, $x_1=1$ ve $x_2=\frac{1}{2}$ nin verilen denklemin çözümü olduğunu görmüş oluruz.

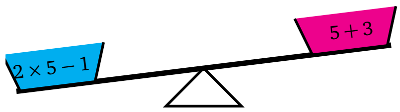
## Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Hocam terazimizin dengesini bozalım artık.

O zaman terazinin bir kefesi aşağıda bir kefesi yukarıda olacak.

Aslında terazinin dengesini korumak zor, bozmak çok kolaydır. Pınar Hocanızın daha önce verdiği $2x-1=x+3$ denklemini tekrar ele alalım. Hatırlarsanız, bu denklemin çözümü olan $x=4$ ü denklemde yerine koyduğumuzda terazi dengede kalmıştı (Şekil 2.4). Söyleyin bakalım $x=5$ olduğunda, $2x-1$ ile $x+3$ ifadelerini kefelere yerleştirdiğimizde, terazinin durumu ne olur?

$x=5$ için $2x-1$ ifadesi 9 değerini ve $x+3$ ifadesi ise 8 değerini alır. $x=5$ için $2x-1>x+3$ olur. Dolayısıyla terazinin durumu Şekil 2.8'de olduğu gibidir.

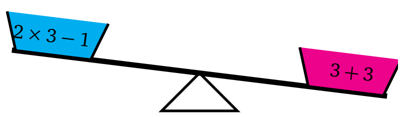



**Şekil 2.8:** Terazideki Eşitsizlik Durumu

Acaba terazinin yönünü değiştirebilir miyiz?

Sen de bu sefer $x=3$ için dene bakalım.

$x=3$ için $2x-1$ ifadesi 5 değerini ve $x+3$ ifadesi ise 6 değerini alır. $x=3$ için $2x-1<x+3$ olur. Dolayısıyla terazinin durumu Şekil 2.9 da olduğu gibidir.




**Şekil 2.9:** Terazideki Eşitsizlik Durumu

Terazinin dengesini bir bozdunuz ki tahterevalli gibi oldu.

Evet, kendi ağırlığının 2 katı olan birisiyle, ya da çok zayıf birisiyle tahterevalliye binmene benziyor.

Öyle bir tahterevalliye binmek, çok sıkıcı olurdu.

**Tanım** $a, b$ $a \neq 0$ iki gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} ax+b &> 0 \\ ax+b &\geq 0 \\ ax+b &< 0 \\ ax+b &\leq 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilen bir eşitsizliğe birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir.

Dengede olmayan terazide, Selçuğun sıkıcı bulduğu tahterevallide olduğu gibi bir eşitsizlik durumu söz konusudur. Böyle eşitsizliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Denklemlerin çözümünde olduğu gibi, eşitsizliklerin çözümünde de eşitsizliklerle ilgili bazı özellikler kullanılır. Bunlar,

- Bir eşitsizliğin iki tarafının aynı sayı ile toplanması veya çıkarılması durumunda eşitsizlik bozulmaz.
- Bir eşitsizliğin iki tarafının pozitif bir sayı ile çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitsizlik bozulmaz.
- Bir eşitsizliğin iki tarafının negatif bir sayı ile çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitsizlik yön değiştirir.

Negatif sayılarla karşılaştığım zaman kafam karışıyor. Eşitsizliğin son bahsettiğiniz özelliğini anlayabilmem için örnek verebilir misiniz?

Gökçe, $-3 < -1$ olduğunu biliyorsun. Her iki tarafı $-2$ ile çarparsan,

$$\begin{aligned} (-2)(-3) &> (-2)(-1) \\ 6 &> 2 \end{aligned}$$

olur.

**Örnek**

$$\begin{aligned} 6x - 18 &\leq 0 \\ 6x - 18 + 18 &\leq 0 + 18 \\ \frac{6x}{6} &\leq \frac{18}{6} \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 3]$ aralığıdır.


Şimdi $ax + b > 0$ eşitşizliğinin çözüm kümesini araştıralım.

$$ax + b > 0$$

eşitşizliğinde her iki tarafa $-b$ eklersek,

$$\begin{aligned} ax + b - b &> 0 - b \\ ax &> -b \end{aligned}$$

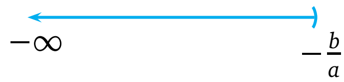
$x$ i aradığımıza göre her iki tarafı $a$ ya böleriz.

Dur bakalım. Bu bir denklem değil. Eşitsizliğin bölme ile ilgili özelliğini dikkate almamız gerekmiyor mu?

Doğru. $a$ nın pozitif veya negatif olmasına göre eşitsizliğin çözüm kümesi farklı olur.

- $a > 0$ ise $x > -\frac{b}{a}$. Bu ise $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -\frac{b}{a}\}$ aralığıdır (Şekil 2.10).
- $a < 0$ ise $x < -\frac{b}{a}$. Bu ise $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -\frac{b}{a}\}$ aralığıdır (Şekil 2.11).


**Şekil 2.10:** $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ aralığı




**Şekil 2.11:** $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ aralığı

Hocam, bir örnek verirseniz daha iyi anlayacağım.

**Örnek** $-5x + 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} -5x + 3 &> 0 \\ -5x + 3 - 3 &> 0 - 3 \\ -5x &> -3 \end{aligned}$$

$-5$ negatif olduğundan, $-5$ ile böldüğümüzde eşitsizlik yön değiştirecek.

$$\begin{aligned} \frac{-5x}{-5} &< \frac{-3}{-5} \\ x &< \frac{3}{5} \end{aligned}$$

buluruz. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$ aralığıdır.


Diğer eşitsizliklerin çözüm kümeleri de benzer şekilde bulabiliriz. İkinci dereceden eşitsizliklerle başlamadan bir ara verelim.

Arkadaşlar bugün çaylar benden.

Hepimize çay ısmarlayabilecek misin?

50 TL param var. Ama 30 TL sine kitap alacağım. Bir bardak çay 75 kuruş olduğuna göre, kaç kişiye ısmarlayabilirim? Onu da siz bulun?

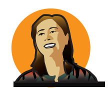
Bize bir eşitsizlik problemi sordun farkında mısın?

Eşitsizlik konusunu yeni öğrendik. Ben bunu çözebilirim. 75 kuruş $\frac{3}{4}$ TL eder. $x$ kişi sayısı ise,

$$\begin{aligned} 30+\frac{3}{4}x &\leq 50 \\ 30+\frac{3}{4}x-30 &\leq 50-30 \\ \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}x &\leq 20\cdot\frac{4}{3} \\ x &\leq 26,\bar{6} \end{aligned}$$

Yani sen en fazla 26 kişiye ısmarlayabilirsin.

O zaman gelsin çaylar!



Pınar hocaya söyleyelim. Ders arasında bile eşitsizlik problemi çözdük.

## İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b, c$ $(a \neq 0)$ gerçel sayılar ve $x$ herhangi bir gerçel sayı olmak üzere, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \geq 0$ veya $ax^2+bx+c \leq 0$ şeklinde yazılabilen bir eşitsizliğe ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir. Böyle bir eşitsizliği sağlayan $x$ değerlerinin kümesine de bu eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Arkadaşlar, $x^2-x-2>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini birlikte bulmaya çalışalım. Önce $x^2-x-2$ ifadesini sıfır yapan değerleri bulalım. Yani; $x^2-x-2=0$ denklemini çözelim. Bu değerler $x=-1$ ve $x=2$ dir. Bu sayılar sayı doğrusunu üç aralığa ayırır. Bunlar; $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ ve $(2,\infty)$ aralıklarıdır. Bu aralıkların her birinde, $x^2-x-2$ ifadesi ya hep pozitif ya da hep negatif değer alır. Söyle bakalım Zeynep, $x^2-x-2$ ifadesi hangi aralık ya da aralıklarda pozitif değer alır?

$x^2-x-2=0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 &= \frac{1+\sqrt{1+8}}{2}=2 \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{1+8}}{2}=-1 \end{aligned}$$

Ç=$\{-1,2\}$


Belirlediğimiz mavi, yeşil, turuncu renkli aralıklarından bir değer alıp, $x^2 - x - 2$ ifadesinde yerine koyup bulabilirim. Örneğin;

- Mavi aralıktan $-2$ yi seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$$

- Yeşil aralıktan 1 i seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (1)^2 - (1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$

- Turuncu aralıktan 3 ü seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (3)^2 - (3) - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

Mavi ve turuncu aralıklarda $x^2 - x - 2$ ifadesi pozitif değer alır.

Zeynep bize, $x^2 - x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmuş oldu. Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi: Ç=$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.



**Şekil 2.12:** $[-1, 2]$ kapalı aralığı

O zaman, yeşil aralık da $x^2 - x - 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir diyebilirmiyiz?

Yeşil aralığa $-1$ ve 2 değerlerini de dahil edersen evet derim.

O zaman $x^2 - x - 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-1, 2]$ olur (Şekil 2.12).

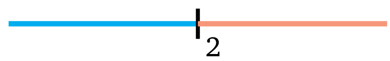
Bu sefer $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğini çözelim. Gökçe sen $x^2 - 4x + 4$ ifadesini sıfır yapan değerleri bulabilirsin.

Formülden hemen bulurum. $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$\Delta = 0$ olduğu için $x_1 = x_2 = 2$ dir.

2 değeri sayı doğrusunu ikiye ayırır.




$x^2 - 4x + 4 = 0$ ifadesi,
mavi aralıktan $x = 1$ i seçersem $1-4+4 = 1 > 0$ olur. Turuncu aralıktan $x = 3$ ü seçersem $9 - 12 + 4 = 1 > 0$ olur. Her ikisinde de pozitif değer alır.

Ne olacak şimdi?

$x^2 - 4x + 4 = 0$ ifadesi, hiç bir noktada negatif değil ama $x = 2$ de sıfırdır. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi Ç=$\{2\}$ olur.

## Özet

Bu ünitede, günlük hayatımızda karşılaştığımız problemlerin çoğunun çözümünde kullandığımız denklemler ya da eşitsizlik konusu üzerinde durduk. Denklemlerle ilgili olarak, birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve çözümlerinden bahsettik. Eşitsizliklerle ilgili olarak, birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri ve çözümlerini örneklerle tartıştık.

## Okuma Parçası

*İskenderiye'li Diophantos*

*Ne zaman yaşamış olduğu kesin belli değildir. Diophantos, Bombelli'ye göre Antoninus Pius (M.S. 150), Ebülfarac'a göre Mürted Julianus (M.S. 350) zamanında yaşamıştır. Fakat Psellus'a göre, 270 yılında Laodikea piskoposu olan İskenderiye'li Anatolios adlı bir bilgin Diophantos'a bir kitap ithaf etmiştir. Bundan dolayı çok defa Diophantos'un M.S. 250 civarında yaşadığı kabul edilir.*

*Anthologia Palatina'da raslanan bir cebirsel bilmece-şiirinde Diophantos'un hayatı şöyle anlatılmaktadır:*

***Şu mezar Diophantos'u örtmektedir. Mucizeye bak! Mezar taşı ölenin sanatı sayesinde onun hayat hikayesini öğretiyor. Ömrünün altıda birini ona Allah çocukluk çağı için verdi; ömrünün onikide biri daha geçince yüzünde sakallar bitti; hayatının yedide biri daha geçtikten sonra evlilik bağını kurdu; beş yıl sonra da bu birleşmeden bir oğlu oldu.***
***Yazık ki çok sevdiği çocuğunun babanın yarı ömrü kadar yaşadıktan sonra ölmesi mukadderdi.***
***Ondan sonra dört yıl büyüklüklerle uğraşmak suretiyle acısını unutmaya çalışarak en sonunda o da her faninin hedefine ulaştı.***

*Diophantos'un esas eseri olan*

*Arithmetika*

*"çok muhterem Dionysios" a ithaf edilmiştir. Bu şahşın 247 civarında İskenderiye piskoposu olan Aziz Dionysios olması muhtemeldir. Girişinde eserin 13 kitap olacağı bildirilmektedir, ama bunlardan ancak altısı zamanımıza gelebilmiştir. Bu altı kitap çözümleriyle birlikte 189 problemi kapsamaktadır.*

*Diophantos'un mezar taşında yazılı olan bilmeceye göre; Diophantos kaç yıl yaşamıştır?*
*Bu bilmeceye karşılık gelen denklem:* $x$ *, Diophantos'un yaşamış olduğu yılı göstermek üzere,*

$$x=\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4$$

*olur. Bir bilinmeyenli birinci dereceden olan bu denklem çözülürse, çözümün* $x=84$ *olduğu görülür. Buna göre, Diophantos* $84$ *yıl yaşamıştır.*

**Kaynak: Bilimin Uyanışı Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan Matematiği (s. 460), B.L. Van Der Waerden, Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1994.**

## Çıkarın Kağıtları

**1.** Bir öğrenci parasının $\frac{3}{5}$ ünü harcadıktan sonra 20 lirası kalıyor. Bu öğrencinin harcama yapmadan önceki parası aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100 B) 60 C) 50 D) 40 E) 30

**2.** $2(x+3)+3(x-1)=x+7$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B)1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E)3

**3.** Bir annenin yaşı oğlunun yaşının 5 katıdır. 3 yıl önce annenin yaşı oğlunun yaşının 8 katı olduğuna göre, çocuğun yaşı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

**4.** $x^2-3x+4=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{1\}$ D) $\{2\}$ E)$\emptyset$

**5.** Gökçe odasına dikdörtgen şeklinde olan $6m^2$ bir halı aldı. Bu halının uzun kenarı, kısa kenarından 1 metre fazla olduğuna göre kısa kenar uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**6.** $x^2+2x+1=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3\}$ B) $\{2\}$ C) $\{1\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{-2\}$

**7.** Kelebeklerin ömrünün 1 gün olduğu biliniyor. Buna göre, 10 saat yaşayan bir kelebeğin en fazla yaşayabileceği saat aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

**8.** $3(x-1)+2>x+5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3,\infty)$ B) $(4,\infty)$ C) $(-\infty,3)$
D) $(-\infty,4)$ E) $(-3,\infty)$

**9.** Yarısının 8 fazlası 11 den büyük olan sayıların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,3)$ B) $(-\infty,6)$ C)$(6,\infty)$
D) $(3,\infty)$ E) $\{6\}$

**10.** $x^2+5x-6<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-6,1)$ B) $(-\infty,-6)$ C) $(1,\infty)$
D) $(-6,1)$ E) $(-6,1]$

## Çözümler

**1.** $x$ öğrencinin harcama yapmadan önceki parası olsun. Problem

$$x = \frac{3}{5}x + 20$$

denklemi ile çözülür.

$$\begin{aligned} \underset{(5)}{\frac{x}{1}} - \underset{(1)}{\frac{3}{5}}x &= 20 \\ \frac{5x-3x}{5} &= 20 \\ \frac{2x}{5} &= 20 \\ x &= 50 \text{ TL} \end{aligned}$$

Doğru cevap **C)** şıkkıdır.

**2.**

$$\begin{aligned} 2(x+3)+3(x-1) &= x+7 \\ 2x+6+3x-3 &= x+7 \\ 5x+3 &= x+7 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Doğru cevap **B)** şıkkıdır.

**3.** Çocuğun bugünkü yaşına $x$ dersek annesinin yaşı $5x$ olur. 3 yıl önce ise bunlar $x-3$ ve $5x-3$ olur. Buna göre,

$$5x - 3 = 8(x-3)$$

denklemi uygun olur. Bu denklem çözülürse,

$$\begin{aligned} 5x-3 &= 8(x-3) \\ 3x &= 21 \\ x &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Doğru cevap **A)** şıkkıdır.

**4.**

$$-x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 3^2 - 4(-1)(-4) \\ &= 9 - 16 = -7 \end{aligned}$$

$\Delta = -7$ negatif olduğundan gerçel çözüm yoktur.
Doğru cevap **E)** şıkkıdır.

**5.** Halının kısa kenarına $x$ dersek uzun kenarı $x+1$ olur. Halı dikdörtgen şeklinde olduğundan denklem

$$x(x+1) = 6$$

olur. $x^2 + x - 6 = 0$ ikinci dereceden denklem olup $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-6) = 1 + 24 = 25$ dir.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1+\sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1+5}{2} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1-\sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1-5}{2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$x_1 = 2$ ve $x_2 = -3$ dir. Uzunluk negatif olamayacağından $x = 2m$ halının kısa kenarının uzunluğudur.
Doğru cevap **B)** şıkkıdır.

**6.**

$$x^2+2x+1=0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 4-4\cdot1\cdot1\\ &= 4-4=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-2\mp\sqrt{0}}{2}\\ &= \frac{-2}{2}\\ &= -1\end{aligned}$$

Doğru cevap **D)** şıkkıdır.

**7.** Kelebeğin kalan ömrü $x$ saat olsun. 1 gün 24 saat olduğuna göre,

$$x+10\leq 24$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik çözümü,

$$\begin{aligned}x+10-10 &\leq 24-10\\ x &\leq 14\end{aligned}$$

Kelebek en fazla 14 saat yaşayabir.
Doğru cevap **E)** şıkkıdır.

**8.**

$$\begin{aligned}3(x-1)+2 &> x+5\\ 3x-3+2 &> x+5\\ 3x-1 &> x+5\\ 2x &> 6\\ \frac{2x}{2} &> \frac{6}{2}\\ x &> 3\end{aligned}$$

Ç=$(3,\infty)$ aralığıdır.
Doğru cevap **A)** şıkkıdır.

**9.**

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}+8 &> 11\\ \frac{x}{2}+8-8 &> 11-8\\ \frac{x}{2} &> 3\\ x &> 6\end{aligned}$$

Ç=$(6,\infty)$ aralığıdır.
Doğru cevap **C)** şıkkıdır.

**10.** $x^2+5x-6<0$ eşitsizliğinin çözümü için,
$x^2+5x-6=0$ kökleri bulunur.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-5\mp\sqrt{25-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}\\ &= \frac{-5\mp7}{2}\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$
$$x_2=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1$$


$-6$ ile $1$ arasında bulunan $x$ değerleri için $x^2+5x-6$ ifadesi negatif olur. Ç=$(-6,1)$ aralığıdır.
Doğru cevap **D)** şıkkıdır.