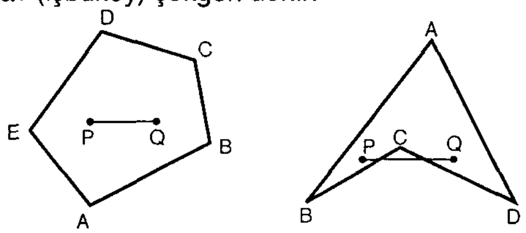
ÇOKGEN ve DÖRTGENLER

BÖLÜM 2

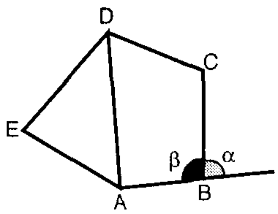
ÇOKGEN VE DÖRTGENLERDE GENEL ÖZELİKLER

ÇOKGENLER

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan üç ya da daha fazla noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşan kapalı geometrik şekillere çokgen denir.
Çokgenler kenar sayılarına göre adlandırılırlar. Üçgen, dörtgen, beşgen..... gibi.
Bir çokgenin iç bölgesindeki herhangi iki nokta birleştirildiğinde meydana gelen doğru parçası daima çokgenin iç bölgesinde kalıyorsa böyle çokgenlere konveks (dışbükey), konveks olmayan çokgenlere ise konkav (içbükey) çokgen denir.

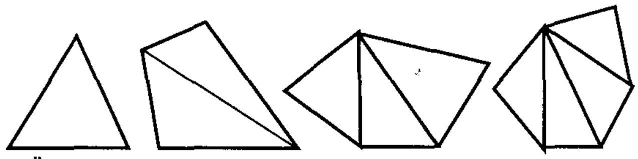


Konveks çokgen (Dışbükey)   Konkav çokgen (içbükey)



α : Dış açı
β : İç açı
[AD] : Köşegen

Köşegen : Çokgende komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına köşegen denir.
Bir konveks çokgenin herbir içaçısı 180° den küçüktür.

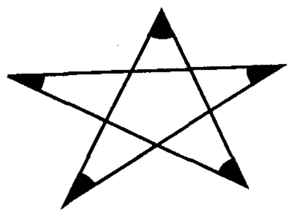


Üçgen   Dörtgen   Beşgen   Altıgen

Kenar sayısı	Bir köşeden geçen köşegen sayısı	Oluşan üçgen sayısı
3	0	1
4	1	2
5	2	3
6	3	4
......	......	......
n	(n–3)	(n–2)

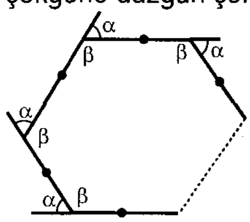
n kenarlı konveks bir çokgende;

1. İç açılar toplamı (n–2) 180° dir.
   İçaçılar toplamı = üçgen sayısı x 180° dir.
2. Dış açılar toplamı sabit olup 360° dir.
3. Tüm iç ve dış açılar toplamı : n . 180° dir.
4. Köşegen sayısı :
   $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ dir.
5. Bir köşeden (n–3) köşegen çizilir. Bunlar (n–2) tane üçgen oluşturur.
6. n kenarlı bir çokgenin belirli olabilmesi için (2n–3) tane elemanının bilinmesi gerekir. Bunlardan enaz (n–2) tanesi uzunluk, ençok (n–1) tanesi açıdır.
7. n > 4 olmak üzere n köşeli yıldızıl çokgenin köşelerindeki açılar toplamı; (n–4) . 180° dir.



DÜZGÜN ÇOKGEN

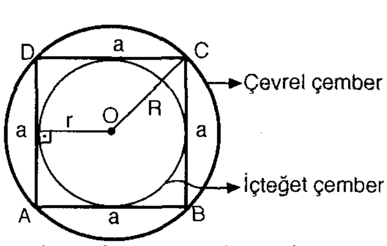
Tüm kenarları ve tüm açıları eş olan dış bükey çokgene düzgün çokgen denir.



"n kenarlı düzgün çokgen"

n kenarlı düzgün çokgenin

1. Bir dış açısı : $\alpha = \dfrac{360°}{n}$ dir.
2. Bir iç açısı : $\beta = \dfrac{(n-2).180°}{n}$ dir.
3.



Düzgün çokgenin çevresi bir kenarı ile kenar sayısının çarpımına eşittir.
Ç = n . a dır.

4. Düzgün çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapına Apotemi denir.

5. Düzgün çokgenin alanı, kenar sayısı, bir kenarı ve apoteminin çarpımının yarısına eşittir.

$$S = \frac{\overbrace{n.a}^{Ç}.r}{2} = \frac{Ç.r}{2} = \frac{2u.r}{2} = u.r \text{ dir.}$$

6. Düzgün çokgenin alanı $S = \frac{n}{2}.R^2.\sin\frac{360}{n}$ dir.

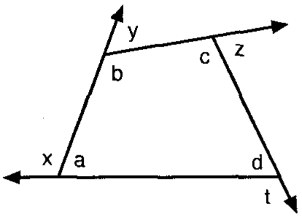
7. Düzgün bir çokgenin çevrel çemberinin ve içteğet çemberinin merkezi aynıdır.

DÖRTGENLERİN GENEL ÖZELİKLERİ

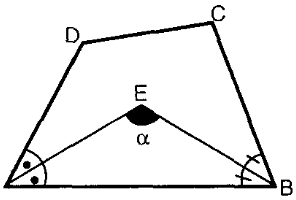
1. Bir dörtgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

$a + b + c + d = 360°$

$x + y + z + t = 360°$



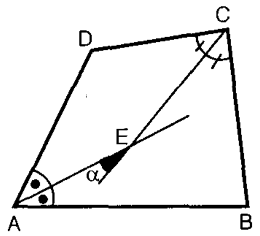
2. Bir dörtgende ardışık iki açının açıortayları arasında oluşan açı, diğer iki açının toplamlarının yarısına eşittir.



$$m(\hat{\alpha}) = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2}$$

dir.

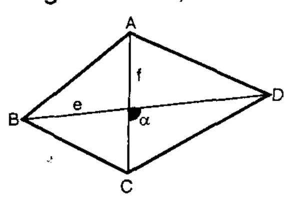
3. Bir dörtgende karşılıklı iki açının açıortayları arasında oluşan daraçı, diğer iki açının mutlak farkının yarısına eşittir.



$$m(\hat{\alpha}) = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{D})|}{2}$$

dir.

4. Köşegen uzunlukları e, f, köşegenleri arasındaki açısı α olan bir konveks dörtgenin alanı;

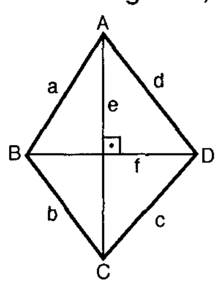


$$A(ABCD) = \frac{e.f.\sin\alpha}{2} \text{ dir.}$$

5. Köşegenleri dik kesişen bir konveks dörtgende;

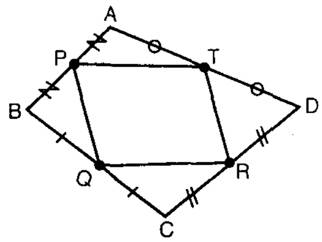
i) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

ii) $A(ABCD) = \frac{e.f}{2}$ dir.



6. Bir konveks dörtgende kenarların orta noktaları

P, Q, R, T ise;



i) PQRT dörtgeni paralelkenardır.

ii) $A(PQRT) = \frac{A(ABCD)}{2}$ dir.

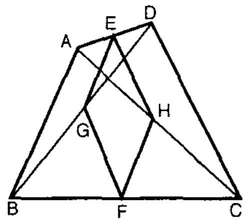
iii) ABCD dörtgeninde köşegenler eşit ise PQRT eşkenar dörtgendir.

iv) ABCD dörtgeninde köşegenler dik ise PQRT dikdörtgendir.

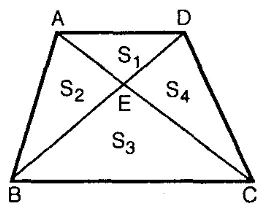
v) ABCD dörtgeninde köşegenler hem eşit ve hem de dik ise PQRT karedir.

7. Köşegenleri birbirini ortalamayan dörtgenlerde köşegenlerin orta noktaları ile karşı kenarların orta noktalarını birleştiren dörtgen paralelkenardır.

E, F, G, H üzerinde bulundukları doğru parçalarının orta noktaları ise EGFH bir paralelkenardır.



8.

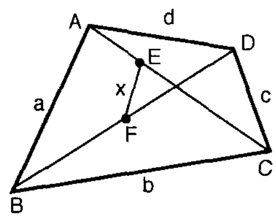


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{|AE|}{|EC|} \\ \dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{|AE|}{|EC|} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1.S_3 = S_2.S_4$$

olur.

Köşegenlerin meydana getirdiği alanların karşılıklı çarpımları eşittir.

9. Bir konveks dörtgende kenar uzunlukları a, b, c, d köşegen uzunlukları e, f, köşegenlerin orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu x olmak üzere;

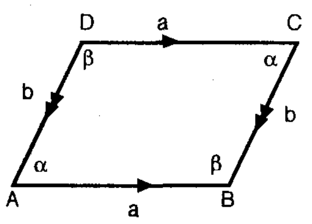


$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4x^2 \text{ dir.}$$

PARALELKENAR

Karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan dörtgene paralelkenar denir.

1. i) Karşılıklı açıları eşittir.



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = \alpha$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = \beta$ dır.

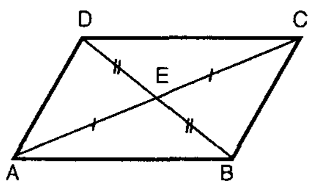
ii) Komşu açıları bütünlerdir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = \alpha + \beta = 180°$

$m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = \alpha + \beta = 180°$ dir.

iii) Çevre (ABCD) = 2(a + b) dir.

2. Köşegenler birbirlerini ortalarlar.



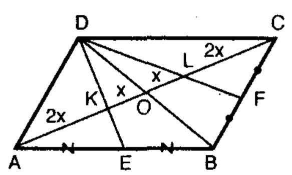
$|AE| = |CE|$

$|BE| = |DE|$ dir.

3. Bir paralelkenarda bir köşeyi karşı iki kenarın orta noktalarına birleştiren doğru parçaları köşegeni uzunlukça üç eş parçaya bölerler.

$|AK| = |KL| = |LC| = \dfrac{|AC|}{3}$

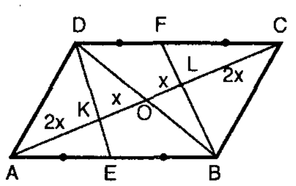
$|OK| = |OL| = \dfrac{|AC|}{6}$ dır.



4. Bir paralelkenarda karşı iki köşeyi karşı iki eş kenarın orta noktalarına birleştiren doğru parçaları köşegeni uzunlukça üç eş parçaya bölerler.

$|AK| = |KL| = |LC| = \dfrac{|AC|}{3}$

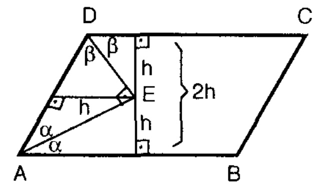
$|OK| = |OL| = \dfrac{|AC|}{6}$ dır.



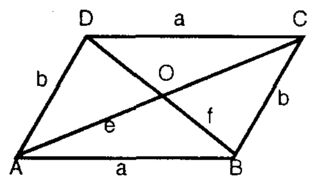
5. Komşu iki açının açıortayları birbirine diktir.

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$ dir.



6. Bir paralelkenarda kenar uzunlukları ile köşegen uzunlukları arasında;

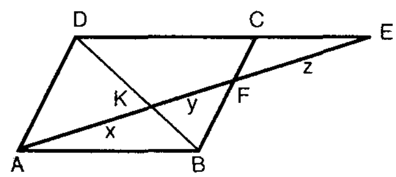


$|AC| = e$,

$|BD| = f$ ise

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ bağıntısı vardır.

7.



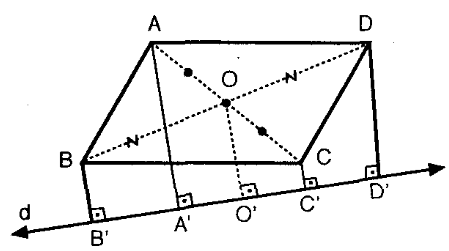
$\overset{\triangle}{AKB} \sim \overset{\triangle}{EKD}$

$\overset{\triangle}{BKF} \sim \overset{\triangle}{DKA}$ benzerliklerinden

$|AK|^2 = |KF| \cdot |KE|$

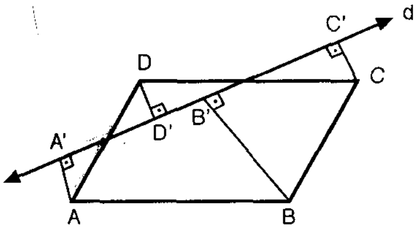
$x^2 = y\,(y + z)$ bağıntısı elde edilir.

8. Bir paralelkenarın düzleminde alınacak olan bir doğruya karşılıklı köşelerden inilen dikmelerin uzunlukça toplamları aralarında eşittir.



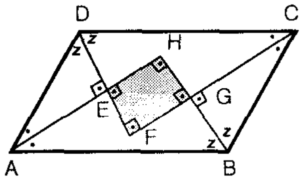
$|AA'| + |CC'| = |BB'| + |DD'| = 2|OO'|$ dür.

9.

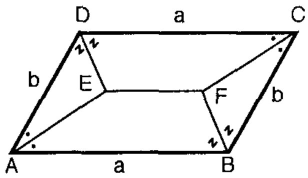


d doğrusu paralelkenarı kesiyorsa;
|AA'| + |CC'| = |BB'| – |DD'| dür.

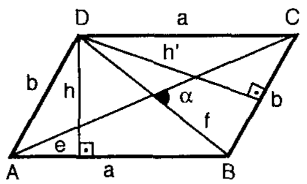
10. Açıortaylar arasında kalan EFGH bir dikdörtgendir.



11. [AE], [DE] [CF] ve [BF] açıortaylar ise |EF| = a – b dir.



12. PARALELKENARDA ALAN:

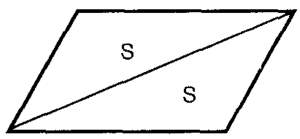


$A(ABCD) = a \cdot h = b \cdot h'$ dır.

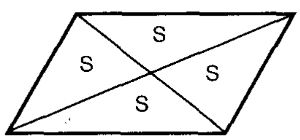
$A(ABCD) = a \cdot b \cdot Sin\hat{A} = a \cdot b \cdot Sin\hat{B}$ dir.

$A(ABCD) = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\alpha}{2}$ dir.

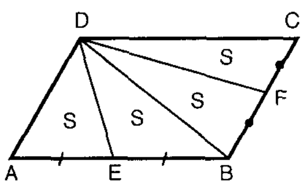
i) Köşegen alanı iki eşit parçaya böler.



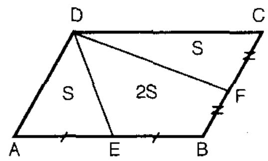
ii) Köşegenler alanı dört eşit parçaya bölerler.



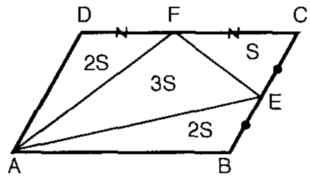
iii) E ile F orta noktalar ise alan dört eşit parçaya bölünür.



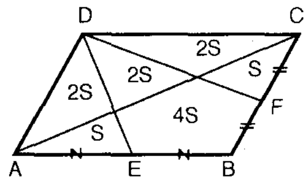
iv) A(ABCD)=2A(DEBF)



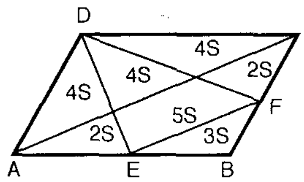
v) E ile F orta noktalar



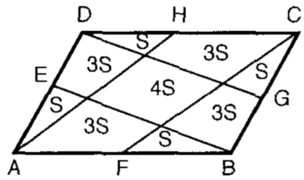
vi) E ile F orta noktalar



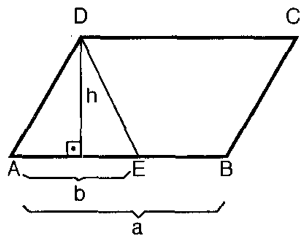
vii) E ile F orta noktalar



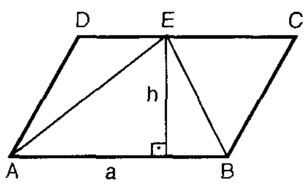
viii) E, F, G, H orta noktalar



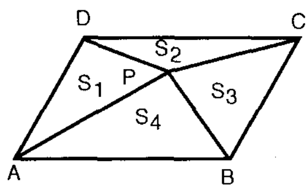
ix) $\dfrac{A(ADE)}{A(ABCD)} = \dfrac{b}{2a}$ dır.



x) $\dfrac{A(AEB)}{A(ABCD)} = \dfrac{1}{2}$

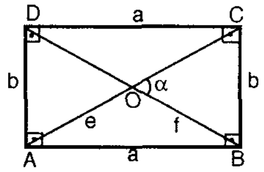


xi) P paralelkenarın içerisinde herhangi bir nokta ise $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ dir.



DİKDÖRTGEN

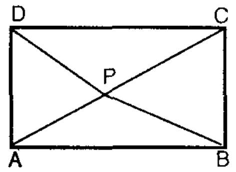
Karşılıklı kenarları eşit ve açıları dik olan paralelkenara dikdörtgen denir.



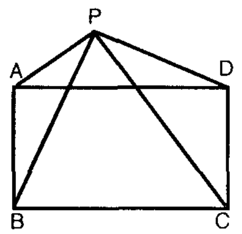
1. Paralelkenarın bütün özelliklerini taşır.
2. $A(ABCD) = a.b$

   $A(ABCD) = \frac{1}{2} e.f.\sin\alpha$

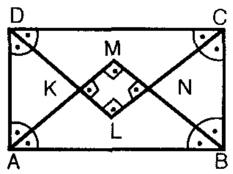
   $Ç(ABCD) = 2(a + b)$
3. $|AC| = |BD| = e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.
4. Dikdörtgenin iç bölgesinde bir nokta P ise; $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$ dir.



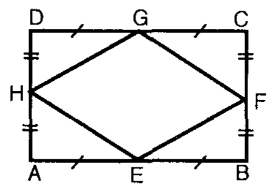
5. Dikdörtgenin dış bölgesinde bir nokta P ise; $|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2$ dir.



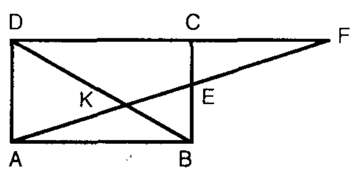
6. Bir dikdörtgende açıortayların kesim noktaları bir karenin köşeleridir. $|KN| = |ML| = a - b$



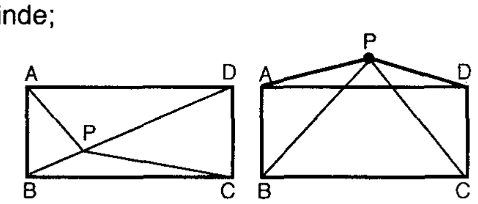
7. E, F, G, H kenarların orta noktaları ise EFGH eşkenar dörtgendir.



8. $|AK|^2 = |KE| . |KF|$ dir.

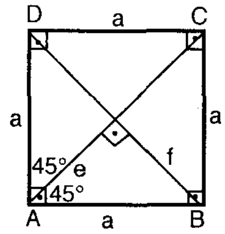


9. Dikdörtgen bir kirişler dörtgenidir.
10. Dikdörtgensel bir bölge içinde veya dışında alınan bir nokta dikdörtgenin köşeleriyle birleştirildiğinde;



$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$ dir.

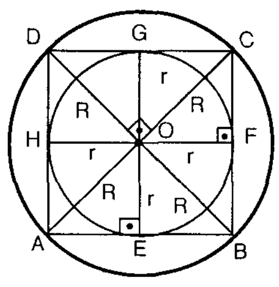
KARE



Kenarları eşit ve açıları dik olan bir dikdörtgendir.

1. Paralelkenar ve dikdörtgenin bütün özeliklerini taşır.
2. $|AC| = |BD| = e = f = a\sqrt{2}$ dir.
3. $A(ABCD) = a^2$ veya

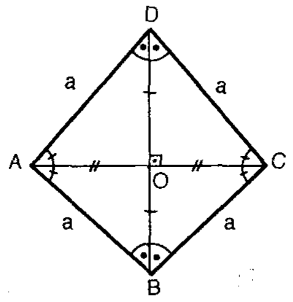
   $A(ABCD) = \frac{e^2}{2}$ dir.
4. $Ç(ABCD) = 4a$ dır.
5. Köşegenler birbirine eşittirler.
6. Köşegenler birbirini dik ortalarlar.
7. Köşegenler aynı zamanda açıortaydırlar.
8. Kenarların orta noktaları ikişer ikişer birleştirilirse meydana gelen konveks dörtgen karedir.
9.



Karenin köşegenlerinin O kesim noktası, hem içteğet, hem de çevrel çemberin merkezidir. İçteğet çemberin yarıçapı $r = \frac{a}{2}$ ve çevrel çemberin yarıçapı $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ olur.

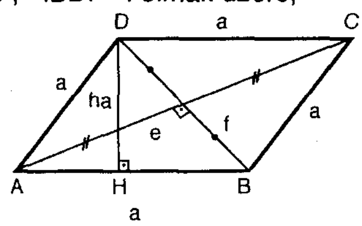
10. Kare hem kirişler dörtgeni ve hem de teğetler dörtgenidir.

EŞKENAR DÖRTGEN



Kenar uzunlukları eşit olan bir paralelkenardır.

1. Paralelkenarın bütün özelliklerini taşır.
2. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortalar.
   [AC] $\perp$ [BD]
   |OA| = |OC| ve
   |OB| = |OD| dir.
3. Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaylardır.
4. |AC| = e , |BD| = f olmak üzere,



$A(ABCD) = a.h_a$ dır.

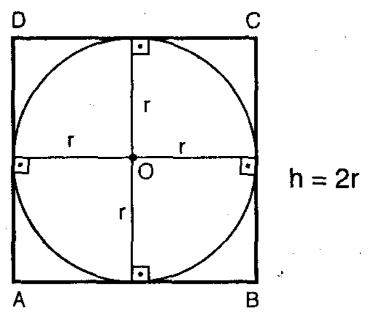
$A(ABCD) = \dfrac{e.f}{2}$ dir.

$A(ABCD) = a^2 . \sin(\widehat{DAB})$ dir.

$Ç(ABCD) = 4a$ dır.

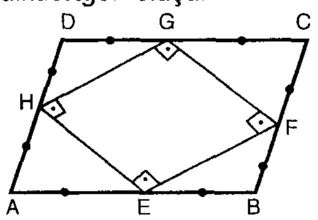
$e^2 + f^2 = 4a^2$ dir.

5. Eşkenar dörtgen bir teğetler dörtgenidir.



h = 2r

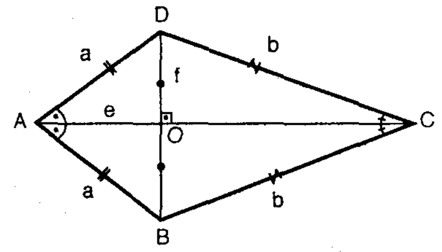
6. Eşkenar dörtgende kenarların orta noktaları birleştirilirse dikdörtgen oluşur.



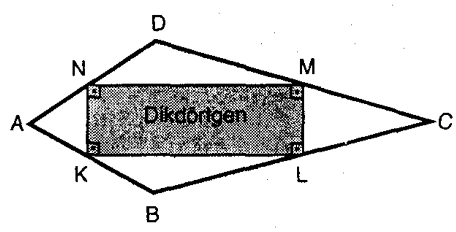
7. Bir eşkenar dörtgenin iç bölgesinde alınacak olan isteksel bir noktanın, tüm kenarlara olan uzaklıklarının toplamı yüksekliğin iki katı kadardır.

DELTOİT

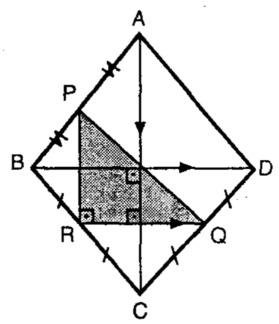
Tabanları ortak olan farklı iki ikizkenar üçgenden meydana gelen konveks dörtgendir.



1. |AB| = |AD|
   |BC| = |DC| dir.
2. Köşegenler birbirine diktir.
   [AC] $\perp$ [BD]
   $e \perp f$ dir.
3. [AC] köşegeni açıortay ve |OB| = |OD| dir.
4. $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC})$ dir.
5. $A(ABCD) = \dfrac{e.f}{2}$ dir.
6. Deltoitte kenarların orta noktaları ikişer ikişer birleştirilirse meydana gelen konveks dörtgen dikdörtgendir.



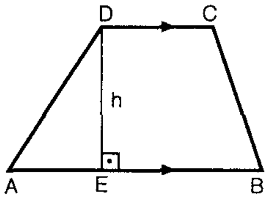
7. ABCD deltoitinde
   |AC| = 16 cm ve
   |BD| = 12 cm ise
   |PQ| kaç cm dir?



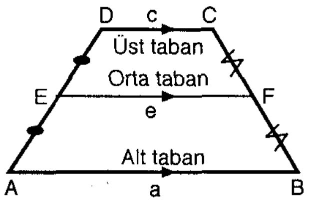
Deltoitte köşegenler birbirine diktir. [BC]'nin ortası R ise
[QR] // [BD] ve
$|QR| = \dfrac{|BD|}{2}$ olacağından
|QR| = 6 cm dir.
[PR] // [AC] ve
$|PR| = \dfrac{|AC|}{2} = 8$ cm dir. Köşegenlerin dikliği paralelliklerle taşındığında $m(\widehat{PRQ}) = 90°$ olurki PRQ dik üçgeninden
|PQ| = 10 cm elde edilir.

YAMUK

Karşılıklı iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk denir. [AB] // [CD] dir. Paralel olan kenarlara tabanlar, diğerlerine de yan kenarlar denir.



Yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına orta taban denir.



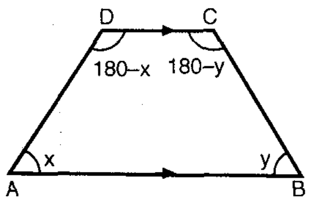
Orta taban alt ve üst tabanlara paraleldir.
[EF] // [AB] // [CD] dir.

1. Yamukta
[AB] // [CD]
olduğundan

$m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$

$m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

dir.



2. Yamukta orta taban yüksekliği ve köşegenleri ortalar.

|DH'| = |HH'|,

|AK| = |KC| ve

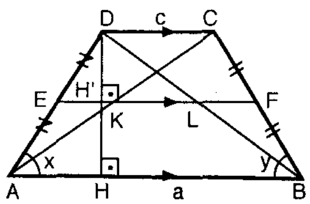
|BL| = |DL| dir.

$|EK| = |LF| = \frac{c}{2}$ dir.

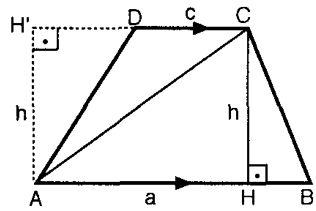
$|EF| = \frac{a+c}{2}$ dir.

$|KL| = \frac{|a-c|}{2}$ dir.

$|EL| = |FK| = \frac{a}{2}$ dir.



3.



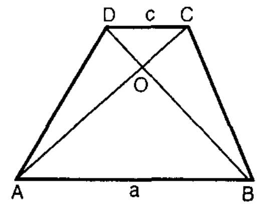
$A(ABCD) = A(\overset{\Delta}{ABC}) + A(\overset{\Delta}{ACD})$

$A(ABCD) = \frac{a.h}{2} + \frac{c.h}{2} = \frac{(a+c).h}{2} = |EF|.h$ dır.

4. Köşegenler birbirini tabanları oranında böler.

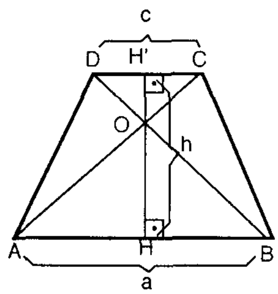
$\overset{\Delta}{DOC} \sim \overset{\Delta}{BOA}$ olup

$\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|} = \frac{c}{a}$ dır.



5. $|OH'| = \frac{c.h}{a+c}$

ve $|OH| = \frac{a.h}{a+c}$ dir.



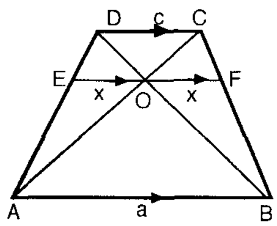
6. [EF] // [AB] // [CD]

$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

$x = \frac{a.c}{a+c}$

$|EF| = 2x = \frac{2ac}{a+c}$ dir.

(Harmonik orta)



7. $A(\overset{\Delta}{ADB}) = A(\overset{\Delta}{ACB})$

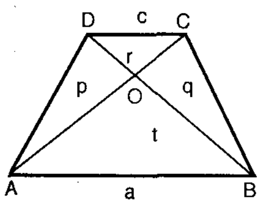
$p + t = q + t \Rightarrow p = q$ dur.

p.q = r.t olup

$p = q = \sqrt{rt}$ dir.

$A(ABCD) = \left(\sqrt{r} + \sqrt{t}\right)^2$

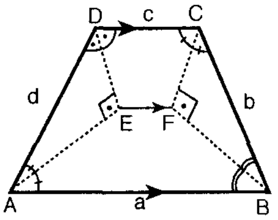
dir.



8. Bir yamukta dört açıortay orta taban üzerinde dik kesişir.

$|EF| = \dfrac{(a+c)-(b+d)}{2}$

dir.

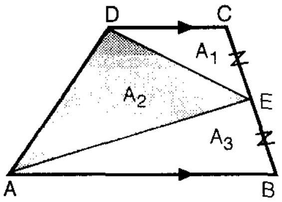


9. $|CE| = |EB|$ ise

$A(\overset{\Delta}{ADE}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$

dir.

$A_1 + A_3 = A_2$ dir.

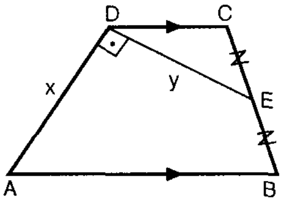


10. $|CE| = |EB|$,

$|AD| = x$ ve

$|DE| = y$ ise

$A(ABCD) = x \cdot y$ dir.



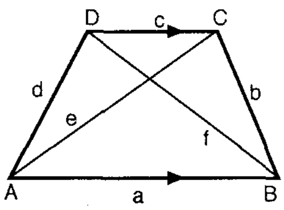
11. ABCD yamuğunda

$|AC| = e$ ve

$|BD| = f$ ise

$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$

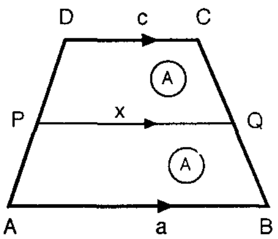
dir.



12. [PQ], tabanlara paralel ve yamuğun alanını iki eşit parçaya ayırıyorsa,

$|PQ| = x$ alındığında

$2x^2 = a^2 + c^2$ olur.

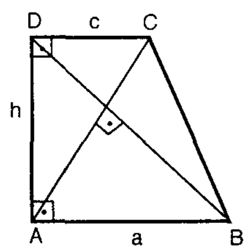


DİK YAMUK

Alt ve üst tabanları yan kenarlarından birine dik olan yamuğa dik yamuk denir.

Köşegenleri dik olan bir dik yamukta yükseklik, alt ve üst tabanın geometrik ortasıdır.

$h^2 = a.c$ dir.



İKİZKENAR YAMUK

Yan kenarları eşit olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

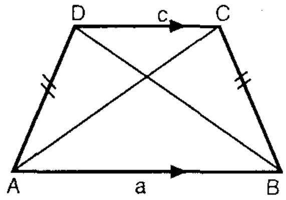
1. $|AD| = |BC|$

$m(\hat{A}) = m(\hat{B})$

$m(\hat{C}) = m(\hat{D})$

$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$

dir.



2. Köşegenler birbirine eşittir.

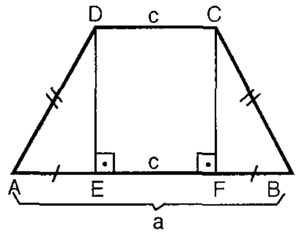
$|AC| = |BD|$ dir.

3. İkizkenar yamukta

$\overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{BCF}$ dir.

$|AE| = |BF| = \dfrac{a-c}{2}$

dir.



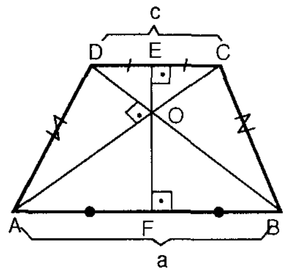
4. İkizkenar yamukta köşegenler dik ise

$([AC] \perp [BD])$

$|OE| = \dfrac{c}{2}$, $|OF| = \dfrac{a}{2}$,

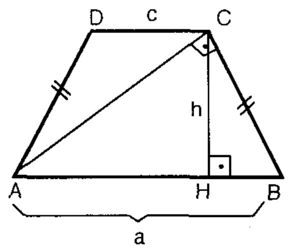
$h = \dfrac{a+c}{2}$ ve

$A(ABCD) = h^2$ dir.



5. İkizkenar yamukta köşegenler yan kenarlara dik ise;

$h = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ dir.



6. Bir ikizkenar yamukta kenarların orta noktaları ikişer ikişer birleştirilirse eşkenar dörtgen meydana gelir.

7. İkizkenar yamuk teğetler dörtgeni ise

$a + c = 2b$ dir.