Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Üslü-Köklü İfadeler

Bazen yeri gelir 100 tane 2'yi çarpmamız gerekir, bunu 2'yi 100 kere yazıp çarparak gösterecek halimiz yok tabii ki. Daha genel olarak n tane a sayısının çarpımını yazmak için de farklı bir gösterime ihtiyaç duyarız. Mesela 1'den n'ye kadar olan ardışık sayıların çarpımını n'nin yanına bir ''!'' işareti koyarak kolayca gösterebiliyorduk. Adına da faktöryel diyorduk, bitiyordu. İşte böyle birden çok aynı sayının çarpımını kısaca yazmak için üslü ifadeleri kullanırız. n tane a'nın çarpımını da a^n yazarak gösteririz.

$$a = a^1$$
$$a \cdot a = a^2$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$\underbrace{a.a.a.......a}_{n\ tane} = a^n$$

Burada a'ya **taban**, n'ye **üs** denir. Yani *taban* neyi devamlı çarptığımızı gösterir, *üs* de o sayıdan kaç tanesini çarptığımızı. Aslında her sayı kendi başına bir üslü ifadedir. Zira bir sayının üssü 1 ise üssünü yazmayız. Aynı, her sayının 10 tabanında olduğunu ancak taban 10 olunca bunu taban olarak yazmayacağımızı söylediğimiz gibi.

Teorem. *Tabanları aynı olan iki üslü ifade çarpılırsa, üsler toplanarak o tabana üs olur. Yani*; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Kanıt: a^m demek m tane a'nın çarpımı demek, a^n demek de n tane a'nın çarpımı demek olduğundan bu iki ifade çarpılırsa m+n tane a çarpılmış olur. Bu da tanım gereği a^{m+n} olarak gösterilir.

$$a^m.a^n = \overbrace{\underbrace{a.a.a.......a}_{m\ tane}.\underbrace{a.a.a.......a}_{n\ tane}}^{m+n\ tane} = a^{m+n}$$

Teorem. *Tabanları aynı olan ve sıfır olmayan iki üslü ifade bölünürse, bölünenin üssünden bölenin üssü çıkarılarak aynı tabana üs olur.*

Yani;

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Kanıt: $m > n$ olduğunu farzedelim. a^m demek m tane a'nın çarpımı demek, a^n demek de n tane a'nın çarpımı demek olduğundan bu iki ifade bölünürse, $m > n$ olduğundan paydadaki tüm a'lar paydaki a'larla sadeleşir. Payda sadeleşmeyen $m - n$ tane a kalır. $m - n$ tane a çarpımı da tanım gereği a^{m-n} olarak yazılır.

Şimdi $m < n$ olduğunu farzedelim. Paydaki tüm a'lar paydadaki tüm a'larla sadeleşir, paydada sadeleşmeyen $n - m$ tane a kalır. Bu da paydada a^{n-m} kalmasına yol açar. Buradan da $\frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$ eşitliğine erişiriz. Demek ki bir üslü ifadede üssün (–) ile çarpılması bizi bu sayının çarpmaya göre tersine götürüyor. Bunu not ediniz.

Buradan çok farklı sonuçlara da yelken açabileceğiz. Birbirine eşit iki sayının birbirine bölümünün 1 olduğunu biliyoruz değil mi? Bu birbirine eşit ve her ikisi de sıfırdan farklı iki sayının ikisinin de birer üslü sayı olduğunu düşünelim ve birbirlerine bölelim bakalım:

$$1 = \frac{a^b}{a^b} = a^{b-b} = a^0.$$

Çıkan sonucu fark ettiniz değil mi? 1 çıkması gerekirken a^0 çıktı. Peki, yanlış mı yaptık? Hayır. Sıfırdan farklı bir sayının 0'ıncı kuvvetinin 1 olduğunu öğrenmiş ve kanıtlamış olduk. Unutmayınız ki; 0'ın 0'ıncı kuvveti alınamaz, böyle bir ifade belirsizdir.

Teorem. *Üslü bir sayının üssü alınırsa, üsler çarpılarak eski tabana yeni üs olur.*

Yani;

$$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b \cdot c}.$$

Kanıt: Nasıl ki a^b ifadesi b tane a'nın çarpımı demek, $(a^b)^c$ ifadesi de c tane a^b'nin çarpımı demektir. O halde ortalıkta çarpılmayı bekleyen $b \cdot c$ tane a var. Bu da tanım gereği $a^{b \cdot c}$ demektir.

Uyarı. $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$ olduğundan a^{b^c} ifadesini parantezsiz kullanmayın, işte böyle belirsiz olur!

Teorem. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
Kanıt: $(a \cdot b)^c = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)$ [c tane]
$= (a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)$
$= a^c \cdot b^c$

Teorem. $(\frac{a}{b})^c = \frac{a^c}{b^c}$

Kanıt: $(\frac{a}{b})^c = (\frac{a}{b}) \cdot (\frac{a}{b}) \cdot (\frac{a}{b}) \cdot \ldots \cdot (\frac{a}{b})$ [c tane]

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^c}{b^c}$$

Teorem. *$a \neq \{-1, 0, 1\}$ iken $a^m = a^n$ ise $m = n$.*
Kanıt: Tanımdan kaynaklanır. m tane a'nın çarpımı, n tane a'nın çarpımına eşitse tane sayıları eşit demektir. O halde $m = n$. Diğer yandan $(-1)^4 = (-1)^6$, $0^3 = 0^7$ ve $1^{123} = 1^{47}$ gibi eşitlikler de doğru olduğundan, bu sayıları atmalıyız.

Teorem. *m tamsayı iken, $a^{2m-1} = b^{2m-1}$ eşitliği ancak $a = b$ durumunda mümkündür.*
Kanıt: Yine tanımdan kaynaklanır.

Teorem. *m tamsayı iken $a^{2m} = b^{2m}$ ise $|a| = |b|$.*
Kanıt: $(a^2)^m = (b^2)^m$ olduğundan $a^2 = b^2$ olur. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) = 0$ olduğundan $a = b$ veya $a = -b$'dir. O halde $|a| = |b|$.

Örnek. *4^{20}'nin yarısı kaçtır?*
Çözüm: $\frac{4^{20}}{2} = \frac{(2^2)^{20}}{2} = \frac{2^{40}}{2^1} = 2^{40-1} = 2^{39}$.

Örnek. *$7^x = 21$ ve $49^y = 21$ ise $\frac{x+y}{x-y}$ oranı kaçtır?*
Çözüm: Sakın x ve y'yi bulmaya kalkmayın. $7^x = 49^y = 7^{2y}$ olduğundan $x = 2y$'dir.

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{2y+y}{2y-y} = \frac{3y}{y} = 3.$$

Örnek. *9^9 sayısının 9'uncu kuvveti 3'ün kaçıncı kuvvetine eşittir?*

Çözüm: $(9^9)^9 = (3^{18})^9 = 3^{162}$ olduğundan cevap 162'dir.

Örnek. *$2^x = m$ ve $3^x = n$ ise 144^{x-1} sayısı m ve n cinsinden neye eşit olur?*
Çözüm: $144^{x-1} = \frac{144^x}{144} = \frac{(2^4 \cdot 3^2)^x}{144} = \frac{2^{4x} \cdot 3^{2x}}{144}$

$$= \frac{(2^x)^4 \cdot (3^x)^2}{144} = \frac{m^4 \cdot n^2}{144}.$$

Örnek. *m ve n doğal sayıdır. $8^m \cdot 25^n$ çarpımı 13 basamaklı en küçük doğal sayıya eşitse $m + n$ kaçtır?*
Çözüm: 13 basamaklı en küçük doğal sayı 10^{12} olduğundan,

$$8^m \cdot 25^n = 10^{12}$$
$$2^{3m} \cdot 5^{2n} = (2 \cdot 5)^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12} = 2^{12}$$

eşitliğinden $m = 4$ ve $n = 6$ bulunduğundan $m + n = 4 + 6 = 10$.

Örnek. *a, b, c birer sayma sayısıdır.*

$$32^a \cdot 125^b = 10^c$$

eşitliğini sağlayan $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?
Çözüm: $32^a \cdot 125^b = 10^c$

$$2^{5a} \cdot 5^{3b} = 2^c \cdot 5^c$$

Buradan $5a = 3b = c$ eşitliğini bulduk ve eğer $a + b + c$ toplamının en küçük olmasını istiyorsak, $a = 3$, $b = 5$ ve $c = 15$ almalıyız, o halde cevap 23.

Örnek. *$x \cdot y \cdot z \neq 0$ olmak üzere,*

$$x + (y + z)^2,$$
$$(x + y)^2 + z^2,$$
$$x^2 - y^4 + z^6,$$
$$(x + y + z)^2,$$
$$x^2 + y^4 - z^6$$

sayılarından kaç tanesinin değeri hiçbir zaman sıfır olamaz?

Çözüm: $x \cdot y \cdot z \neq 0$ ise x, y, z sayılarının hepsi sıfırdan farklıdır.
$x + (y + z)^2$ sayısını x'e $(y + z)^2$'nin değerinin ters işaretlisini vererek sıfır yapabiliriz.
$(x + y)^2 + z^2$ sayısı sıfırdan farklı iki kare toplamı olduğundan hiçbir zaman sıfır olamaz.
$x^2 - y^4 + z^6$ ve $x^2 + y^4 - z^6$ sayıları sırasıyla $y^4 = x^2 + z^6$ ve $x^2 + y^4 = z^6$ olduğu zaman sıfıra eşit kılınabilirler.
$(x + y + z)^2$ sayısı değişkenlerden biri diğerlerinin toplamının ters işaretlisi olduğu zaman sıfır olur.
O halde sadece ikinci ifade sıfıra eşit olabilir.

Örnek. $2^x = 27$ *ve* $3^y = 16$ *eşitliklerinden* $x{\cdot}y$ *çarpımını bulunuz.*
Çözüm: İlk eşitlikten 3'ü çekip, ikinci eşitlikte yerine yazacağız. $2^x = 27 = 3^3$ olduğundan $2^{\frac{x}{3}} = 3$ olur. $3^y = 16 = 2^4 = (2^{\frac{x}{3}})^y = 2^{\frac{x\cdot y}{3}}$ olduğundan $\frac{x\cdot y}{3} = 4$ olur ki $x{\cdot}y = 12$.

Örnek. *n bir sayma sayısı ise* $\dfrac{27^{n^2+1}}{3^{3n^2+2}} = ?$

Çözüm: $\dfrac{27^{n^2+1}}{3^{3n^2+2}} = \dfrac{3^{3n^2+3}}{3^{3n^2+2}} = 3^1 = 3.$

Örnek. *x ve m birer reel sayı iken*

$$(0,\overline{3})^{2x+1} = (0,\overline{9})^{17m+16}$$

eşitliği sağlanıyorsa x kaçtır?
Çözüm: $0,\overline{9} = 1$ olduğunu hatırlarsak, eşitliğin sağ tarafının 1 olduğunu anlarız. O halde sol tarafın üssü 0 olmalıdır. $2x + 1 = 0$ ise $x = -\frac{1}{2}$.

Örnek. $3^{a-1} = 9^b$ ve $7^{b+1} = 49^a$ *olduğuna göre, b kaçtır?*
Çözüm: İlk eşitlikten $a - 1 = 2b$, ikinci eşitlikten de $b + 1 = 2a$ bulunur. İlk denklemden a'yı çekip, ikinci denklemde yerine koyacağız.
$b + 1 = 2(2b + 1)$ olduğundan $b = -\frac{1}{3}$.

Örnek. $\dfrac{3^{103} - 3^{102}}{9^{52}}$ *sayısı kaça eşittir?*

Çözüm: $\dfrac{3^{103} - 3^{102}}{9^{52}} = \dfrac{3^{102}(3^1 - 1)}{3^{104}} = \dfrac{2}{9}$.

Örnek. $30^{x-1} - 6^x = 0$ *ise* 25^x *kaçtır?*

Çözüm: $30^{x-1} - 6^x = \dfrac{30^x}{30} - 6^x = \dfrac{5^x \cdot 6^x}{30} - 6^x$

$$= 6^x \cdot (\frac{5^x}{30} - 1) = 0$$

olur. 6^x sayısı hiçbir x değeri 0 olamayacağından parantez içi 0'dır.

$$\frac{5^x}{30} - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 30 \Rightarrow 25^x = 30^2 = 900.$$

Örnek. $a = 1 - 2^n$ *ve* $b = 2 + 4^n$ *ise b'yi a cinsinden yazınız.*
Çözüm: 4^n sayısının 2^n'nin karesi olduğunu görerek, ilk eşitlikten 2^n'yi çekip, ikinci eşitlikte yerine yazacağız.

$a = 1 - 2^n$ ise $2^n = 1 - a$ olur. $b = 2 + 4^n = 2 + (1 - a)^2 = 2 + 1 - 2a + a^2 = a^2 - 2a + 3$.

Örnek. $3^n = 2$ *ve* $48^x = 64$ *ise n'nin x cinsinden değeri nedir?*
Çözüm: $2^6 = 64$ olduğundan $48^x = 3^{6n}$ yani $2^{4x}.3^x = 3^{6n}$ olur. Tüm tabanları aynı yapmak amacıyla, $2 = 3^n$ olduğundan $3^{4nx}{\cdot}3^x = 3^{6n}$ olur. $4nx + x = 6n$ olduğundan $x = 6n - 4nx = n(6 - 4x)$ olur. Buradan $n = \dfrac{x}{6-4x}$ bulunur.

Örnek. $(5x + 12)^{14} = (13x - 4)^{14}$ *eşitliğini sağlayan farklı reel kökleri bulunuz.*
Çözüm: Üsler hem aynı hem de çift sayı olduğundan hem $5x + 12 = 13x - 4$ diyeceğiz, hem de $5x + 12 = 4 - 13x$.
İlkinden $x = 2$, ikincisinden $x = -\frac{4}{9}$.

Örnek. *x ve y reel sayıları için* $(x - 4)$ *sayısının* $(y + 2)$*'nci kuvveti belirsizse* $x + y$ *toplamı kaçtır?*
Çözüm: Sıfırın sıfırıncı kuvveti de belirsiz olduğundan $x - 4$ ve $y + 2$ sayıları 0'a eşittir. O halde $x + y = 4 + (-2) = 2$.

Örnek. $3^n = 2$ *ve* $24^x = 32$ *ise x'in n cinsinden eşiti nedir?*
Çözüm: $2^5 = 32$ olduğundan $24^x = 3^{5n}$ yani $2^{3x}{\cdot}3^x = 3^{5n}$ olur. Tabanları aynı yapmak amacıyla, 2 yerine 3^n yazacağız. $3^{3nx}{\cdot}3^x = 3^{5n}$ eşitliğiyle karşılaşırız. $3nx + x = 5n$ olduğundan $x{\cdot}(3n + 1) = 5n$ olur ki $x = \dfrac{5n}{3n+1}$.

Örnek. *x ve y birer sayma sayısı ve* $y - x \neq 1$ *olmak üzere;* $(x - 2)^{y-3} = (y - 3)^{x-2}$ *ise* $x + y$ *kaçtır?*
Çözüm: a ve b birer sayma sayısı olup, $a \neq b$ iken $a^b = b^a$ eşitliği ancak $2^4 = 4^2$ ile mümkündür. O halde $x - 2 = 2$ ve $y - 3 = 4$ eşitliğinden $x + y = 4 + 7 = 11$ bulunur. $x - 2 = 4$ ve $y - 3 = 2$ alsaydık da $x + y = 6 + 5 = 11$ olacaktı.

Örnek. $p \neq 0$ olmak üzere, $p^3.r = 1$, $p^2 = q$ *ve* $q^n = r$ *eşitliklerinden n'nin değerini bulunuz.*
Çözüm: Üçünü eşitlikte q yerine p^2 yazalım. $p^{2n} = r$ olur. Bunu da birinci eşitlikte yerine yazalım. $p^3{\cdot}p^{2n} = 1 = p^0$ olduğundan $2n + 3 = 0$ yani $n = -3/2$ bulunur.

Örnek. $(-a)^7.(-a^4).(-a)^{-2}.(-a^{-3}) = ?$

Çözüm: Önce a'nın sıfırdan farklı olduğunu düşünerek, sayının pozitif mi negatif mi olacağını bulalım. $a = 1$ işimizi kolaylaştırır. Buna göre sayı negatif çıkıyor. Sonra üsleri olduğu gibi toplayıp, a'nın üssüne yazıyoruz. Cevap : $-a^6$.

Örnek. *a, b, c sayıları 1'den büyük reel sayılar iken $a^{4/3} = b^{5/2} = c^{7/4}$ eşitliği sağlanıyorsa, a, b, c sayılarını boy sırasına diziniz.*

Çözüm: Önce $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$ sayılarını sıraya dizelim. $\frac{4}{3} < \frac{7}{4} < \frac{5}{2}$. Böyle bir eşitlikte kimin üssü küçükse o büyük, kimin üssü büyükse o küçüktür. O halde $b < c < a$. Eğer a, b, c değerleri (0, 1) aralığında olsaydı, tam tersi olurdu. Çünkü bu aralıkta sayıların üsleri büyüdükçe kendileri küçülürler.

Örnek. $3^x + 3^{x-2} = 30$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

Çözüm: $3^{x-2} = A$ olsun. $3^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} = 9A$ olur. O halde $3^x + 3^{x-2} = 10A = 30$ olduğundan $A = 3$'tür. $A = 3^{x-2} = 3$ olduğundan $x = 3$.

Örnek. $x^{x^2-2x} = 1$ *eşitliğini sağlayan tüm x'lerin toplamı kaçtır?*

Çözüm: Tabanı 0 yapmadığı sürece üssü 0 yapan değerler iş görür. $x^2 - 2x = x\cdot(x - 2) = 0$ eşitliğinden $x = 0$ veya $x = 2$ bulunur, ama $x = 0$ tabanı 0 yaptığından alamayız. Ayrıca tabanın 1 olduğu durum var: $x = 1$. Son olarak tabanı -1 yapan değer üssü çift yapıyorsa da alınmalı. Yapmıyor. O halde eşitliği sağlayan x değerleri 1 ve 2 olduğundan cevap $1 + 2 = 3$'tür.

Örnek. *x ve y birer sayma sayısı iken*

$$\frac{x^y + x^y + x^y + x^y}{x^{2y}} = \frac{1}{16}$$

eşitliğini sağlayan x ve y sayılarının toplamının en büyük ve en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $\frac{4\cdot x^y}{x^y\cdot x^y} = \frac{1}{16}$ olduğundan $x^y = 64$ olur. Sağlayan durumlar $4^3 = 2^6 = 8^2 = 64^1$ olduğundan min $(x + y) = 4 + 3 = 7$ ve max $(x + y) = 64 + 1 = 65$ olur.

Örnek. $\frac{5^{1,1}}{125^{-0,3}} + \frac{9^{0,4}}{9^{-0,1}}$ *toplamı kaçtır?*

Çözüm: $\frac{5^{1,1}}{5^{-0,9}} + \frac{3^{0,8}}{3^{-0,2}} = 5^2 + 3^1 = 28$.

Örnek. $3^x + 3^{-x} = p$ *ise* $9^x + 9^{-x} = ?$

Çözüm: Verilen ifadenin karesini aldığımızda sorulan ifadeyi içinde barındıracağını öngörüyoruz. $9^x + 9^{-x} + 2\cdot 3^x\cdot 3^{-x} = p^2$ olduğundan $9^x + 9^{-x} = p^2 - 2$ olur.

Örnek. $\frac{3\cdot 2^{2n-1} - 6\cdot 2^{2n-3}}{3\cdot 2^{2n+1}} = 2^n$ *ise n kaçtır?*

Çözüm: Hem payı hem de paydayı 2^{2n-3} ortak parantezine alalım.

$$\frac{2^{2n-3}\cdot(3\cdot 2^2 - 6\cdot 1)}{2^{2n-3}\cdot(3\cdot 2^4)} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 2^n$$

olduğundan $n = -3$ olur.

Örnek. $3^{n-2} = a$ ve $5^{n+1} = b$ *iken* 75^n *kaçtır?*

Çözüm: $75^n = 3^n\cdot(5^n)^2$ olduğundan 3^n ve 5^n değerlerini bulup, yerlerine yazdık mı çözüm tamamlanacak.

$3^{n-2} = a$ diye $3^n = 9a$ ve $5^{n+1} = b$ diye $5^n = \frac{b}{5}$.

$75^n = 3^n\cdot(5^n)^2 = 9a\cdot(\frac{b}{5})^2 = \frac{9ab^2}{25}$.

Örnek. $3\cdot 4^x - 5\cdot 6^x + 2\cdot 9^x = 0$ *eşitliğini sağlayan tüm x'leri bulunuz.*

Çözüm: $2^x = a$ ve $3^x = b$ olsun. Eşitlik

$$3a^2 - 5ab + 2b^2 = (3a - 2b)\cdot(a - b) = 0$$

halini alır. Ya $3a = 2b$ ya da $a = b$'dir.

$3\cdot 2^x = 2\cdot 3^x$ olduğundan $2^{x-1} = 3^{x-1}$ ve $x = 1$,

$2^x = 3^x$ diye de $x = 0$ bulunur. Yani cevap: {0, 1}.

Alıştırmalar

Aşağıdaki x'e bağlı üstel denklemlerin köklerini bulunuz.

1.

$$8^{\frac{2(x-1)}{x}} = \sqrt{4^{x-1}}$$

2.

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

3.

$$0,125\cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$$

4.

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 448$$

5.
$3^{2x+1} + 3^{2x} - 3^{2x-2} = 315$

6.
$2^{2x+3} \cdot 3^{x} + 2 \cdot 4^{x} \cdot 3^{x+2} = \dfrac{13}{72}$

7.
$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

8.
$5^{2x} - 7^{x} - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$

9.
$4^{x} - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$

10.
$4^{x} - 12 \cdot 2^{x} = 64$

11.
$4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 1$

12.
$2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$

13.
$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x} + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x} = 6$

14.
$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} = 4$

15.
$2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^{x}$

16.
$(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1$

17.
$|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1$

18.
$\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$

19.
$8 \cdot 9^{x} + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^{x}$

20.
$2 \cdot 16^{\cos x} - 20^{\cos x} = 3 \cdot 25^{\cos x}$

21.
$x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$

22.
$2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|}$

23.
$5^{3x} + 5^{3(1-x)} + 15 \cdot (5^{x} + 5^{1-x}) = 216$

24.
$4^{x} + 3^{x} = 91^{x/3}$

25.
$5^{x} \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$

26.
$(x+1) \cdot 9^{x-3} + 4x \cdot 3^{x-3} - 16 = 0$

27.
$7^{6-x} = x + 2$

28.
$x^2 - x + 1 = 2 \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}$

Köklü sayılar

Üs alma işleminin tersine matematikte **kök alma** denir. x sayısının n'ninci kuvveti x^n olarak gösteriliyordu ya, x sayısının n'ninci dereceden kökü de $\sqrt[n]{x}$ olarak gösterilir. Burada n'ye **kök derecesi** denir. Özel olarak $n = 2$ durumunda kök derecesi yazılmaz, $n > 2$ içinse yazılması zorunludur. Peki, bu kök almanın manası ne demek? Örneklerle açıklayalım:

$$4^2 = 16 \text{ diye } \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4,$$
$$2^3 = 8 \text{ diye } \sqrt[3]{8} = 2,$$
$$3^4 = 81 \text{ diye } \sqrt[4]{81} = 3.$$

İşte bu yüzden $a^b = c$ diye $\sqrt[b]{c} = a$ olur. Son verdiğimiz örnek, kök alma işlemlerinde geneli teşkil eder. Aslında buradan anlamamız gereken şey şudur: Her köklü ifade, üslü ifadeye çevrilebileceği için üslü sayıları tam anlamıyla idrak etmiş bir kişinin köklü sayılarda zorlanması için herhangi bir sebep olamaz. Benim kök alma çubuğuna küçüklükten beri alerjim var diyorsa, onu bilemem.

Genel olarak, $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$ 'dir. Uzun lafın kısası, $\sqrt[b]{c}$ sayısı, b'ninci kuvveti c'ye eşit olan sayı demektir. 5'inci kuvveti 7 eden sayı da $\sqrt[5]{7}$ 'dir. Örnekleri artırabilirsiniz.
Her sayının 1'inci dereceden kuvveti kendisine eşit olduğu gibi, her sayının 1'inci dereceden kökü de kendisine eşittir. Nasıl ki x^1 yerine x yazmayı tercih ediyor ve anlaşabiliyoruz, $\sqrt[1]{x}$ yerine de x yazacağız ve yine anlaşabileceğiz.

Tanımlı olma şartı. Hiçbir reel sayının çift gücü (kuvveti) negatif olmayacağından, negatif bir sayının çift dereceden kökü de reel değildir. Fakat negatif sayıların tek dereceden kökleri alınabilir. Örnekleri inceleyiniz.

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R} \qquad \sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$$
$$\sqrt[3]{-7} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt[4]{0} = 0 \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt[6]{(-2)^4} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}$$

Örnek. $\sqrt[4]{x-3}$ *ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x hangi aralıkta olmalıdır?*
Çözüm: Kök derecesi çift sayı olduğundan kök içi negatif olmamalıdır. Dikkat ederseniz, pozitif olmalı demedik, negatif olmamalı dedik, çünkü $\sqrt[4]{0}$ sayısı tanımlı olup, 0'a eşittir. O halde; $x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinden $x \geq 3$ olmalıdır.

Örnek. $\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x-3}}{1-\sqrt{5-x}}$ *ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x'in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?*
Çözüm: Dikkat etmemiz gereken iki farklı durum var: Kök derecesi çift olan ifadelerin kök içinin negatif olmaması lazım ve kesirli ifadenin paydasının 0 olmaması lazım. Kök derecesi tek olan ifade herhangi bir tehlike arz etmediğinden incelemeye dahi alınmayacak.
$x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinden $x \geq 3$ <u>olmalıdır.</u>
$5 - x \geq 0$ eşitsizliğinden $x \leq 5$ <u>olmalıdır.</u>
Ayrıca $1 - \sqrt{5-x}$ ifadesi 0 <u>olmamalıdır.</u> Yani $\sqrt{5-x}$ sayısı 1 <u>olmamalıdır</u>, o halde x sayısı 4 <u>olmamalıdır.</u>
Bu üç sonuçtan x'in alabileceği tamsayı değerlerinin {3, 5} olduğu çıkar ki, cevap 3 + 5 = 8'dir.

Örnek. *a ve b gerçel sayılar ve b≠1 olmak üzere;*

$$A = \frac{10a+\sqrt[4]{3b-5a+2}+10b+\sqrt[6]{5a-3b-2}}{-10a-10b+5}$$

sayısı reel ise A kaçtır?
Çözüm: A sayısı reel ise çift dereceden köklerin içi negatif olmamalı, yani $3b - 5a \geq -2$ ve $5a - 3b \geq 2$ olmalı. O halde $5a - 3b = 2$'dir. $5a$ gördüğümüz her yere $3b + 2$ yazarsak, $A = -1$ bulunur.

Kök derecesini büyültme/küçültme. $\sqrt[a]{x^b}$ sayısının $x^{\frac{b}{a}}$'ya eşit olduğunu öğrendik. $\frac{b}{a}$ nihayetinde bir kesir olduğundan, bu kesrin hem pay hem de paydası sıfırdan farklı bir sayıyla çarpıldığında ya da bölündüğünde kesrin değerinin değişmeyeceğini biliyoruz. O halde şöyle yazmak çok doğal:

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}} = x^{\frac{bc}{ac}} = \sqrt[ac]{x^{bc}}$$

Yukarda $c > 1$ ise işleme *kök derecesini büyültme*, $0 < c < 1$ ise *kök derecesini küçültme* denir. Zaten anlattığımız üzere $c \leq 0$ olamaz.

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[\frac{6}{3}]{2^{\frac{3}{3}}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}\,,$$
$$\sqrt[8]{9} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[\frac{8}{2}]{3^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[4]{3^1} = \sqrt[4]{3}\,.$$

Köklü ifadelerde dört işlem. Üslü ifadelerde dört işlemi yapabilen herkesin rahatlıkla anlayabileceği kurallar vereceğiz. Lütfen üslü ifadelerde eksiği olan bir vatandaş bu satırları okuyorsa, derhal okumayı bırakıp, üslü ifadeleri çalışıp gelsin.
Köklü ifadelerde toplama ve çıkarma yapabilmek için toplanan ifadelerin hem kök dereceleri hem de kök içindeki sayılarının eşit olması lazım. Eğer öyle değilse de öyle yapmaya çalışılmalı. Bunu nasıl yapacağımızı ilerde göstereceğiz.

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Nasıl ki, üslü ifadelerde çarpma/bölme yapabilmek için tabanların eşit olması gerekirdi, köklü ifadeleri çarpabilmek/bölebilmek için de kök derecelerinin eşit olması gerekir. Zaten köklü ifadeyi üslüye çevirdiğiniz zaman o çarpımı/bölümü yapıp yapamayacağınızı anlarsınız. Çarpmayla/bölmeyle ilgili teoremi verelim, ardından bir örnekle süsleyelim.

Teorem. *Uygun değerler için* $\sqrt[a]{x}.\sqrt[a]{y} = \sqrt[a]{x.y}$.
Kanıt: Teoremin söylediği şu: Çarpılacak olan iki köklü ifadenin kök dereceleri aynı ise kök derecesini aynı bırakarak sadece kök içlerini çarpabilir-

siniz. Bunu kanıtlamak için çarpılan ifadeleri üslü ifadelere çevirelim:

$$\sqrt[a]{x}.\sqrt[a]{y} = x^{\frac{1}{a}}.y^{\frac{1}{a}} = (x.y)^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x.y}$$

Örnek. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$,
$\sqrt{12}.\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$,
$4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=4\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=8\sqrt{6}$.
Şimdi de çarpımları istenen ifadelerin kök derecelerinin eşit olmadığı duruma göz atalım:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}.$$

Aynı soruyu üslü ifadelerle ilgili teoremlerden yardım alarak daha rahat da yapabilirdik:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{32}.$$

Örnek. *a, b, c birer reel sayıdır.*

$$a\cdot b\cdot\sqrt{c}=48$$
$$a\cdot c\cdot\sqrt{b}=144$$
$$b\cdot c\cdot\sqrt{a}=36$$

olduğuna göre a kaçtır?
Çözüm: Bu üç ifadeyi de birbiriyle çarpalım.
$a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}=48\cdot 36\cdot 144$
$(a\cdot b\cdot c)^{5/2}=2^{10}\cdot 3^5$
$(a\cdot b\cdot c)^5=2^{20}\cdot 3^{10}$
$a\cdot b\cdot c=2^4\cdot 3^2=144$
$\dfrac{a\cdot b\cdot c}{b\cdot c\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{144}{36}=4=\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$
olduğundan $a = 16$ olarak bulunur.

Teorem. *Uygun değerler için* $\dfrac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}}=\sqrt[a]{\dfrac{x}{y}}$.
Kanıt: Çarpma teoremine yaptığımız kanıtın aynısını yapacağız: $\dfrac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}}=\dfrac{x^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{a}}}=(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{a}}=\sqrt[a]{\dfrac{x}{y}}$.

Örnek. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$ sayısını hesaplayalım. Çarpma işlemine verdiğimiz örneğin nerdeyse aynısını yapacağız:

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[2]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[6]{3^9}}{\sqrt[6]{3^4}}=\sqrt[6]{\frac{3^9}{3^4}}=\sqrt[6]{3^5}=\sqrt[6]{243}.$$

Örnek. $3\cdot\sqrt{0,64}+8\cdot\sqrt{0,49}$ *sayısı kaçtır?*
Çözüm: $3\cdot\sqrt{\dfrac{64}{100}}+8\cdot\sqrt{\dfrac{49}{100}}=3\cdot\dfrac{8}{10}+8\cdot\dfrac{7}{10}=\dfrac{80}{10}=8.$

Örnek. *aa ve bb iki basamaklı sayılar olup, a > b veriliyor.*

$$\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{13}{6}$$

ise b – a farkı kaçtır?
Çözüm: *aa* ve *bb* iki basamaklı sayılarının değerleri sırasıyla 11.*a* ve 11.*b*'dir.
$\dfrac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}}=\dfrac{\sqrt{11\cdot a}}{\sqrt{11\cdot b}}=\sqrt{\dfrac{11\cdot a}{11\cdot b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ olur.
$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=x$ ise $\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{1}{x}$ olduğundan $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6}$ eşitliği çözülürse $x=\dfrac{2}{3}$ veya $x=\dfrac{3}{2}$ bulunur. $b > a$ verildiğinden $x=\dfrac{2}{3}$ alınır, buradan $b = 9$ ve $a = 4$ bulunacağından $b - a = 5$ olur.

Teorem. *Uygun değerler için* $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}}=\sqrt[a\cdot b]{x}$.
Kanıt: Anlatılmak istenen şu: Nasıl ki, üslü bir sayının üssü alındığında üsleri çarpardık, köklü bir sayının kökü alınırsa da kök dereceleri çarpılır.

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}}=(x^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{a}}=x^{\frac{1}{a\cdot b}}=\sqrt[a\cdot b]{x}.$$

Örnek. $a=\sqrt[3]{3}$ *iken* $\sqrt[6]{243}$ *sayısı a cinsinden neye eşit olur?*
Çözüm: $\sqrt[6]{243}=\sqrt[6]{3^5}=(\sqrt[6]{3})^5=(\sqrt{\sqrt[3]{3}})^5=\sqrt{a^5}$

Örnek. $\sqrt[3]{2}=x$, $\sqrt{3}=y$ *iken* $\sqrt[12]{108}$ *sayısı x ve y cinsinden neye eşit olur?*
Çözüm: $\sqrt[12]{108}=\sqrt[12]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[12]{2^2}\cdot\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$.

Örnek. $\dfrac{2\sqrt{3}-16}{\sqrt[4]{12}+4}+4$ *sayısı kaça eşittir?*
Çözüm: $\sqrt[4]{12}=\sqrt{\sqrt{12}}=\sqrt{2\sqrt{3}}=t$ olsun.

$$\frac{2\sqrt{3}-16}{\sqrt[4]{12}+4}+4=\frac{t^2-16}{t+4}+4=(t-4)+4=t=\sqrt[4]{12}.$$

Kök içine almak. Bazen köklü bir ifadede kökün katsayısını kök içine alma gereksinimi duyarız. Dışarıdaki sayıyı içeri almanın kuralları var. Şimdi onu öğreneceğiz. Aslında yapacağımız çarpma kuralından başka bir şey değil. Kural şu:

$$k\cdot\sqrt[a]{x}=\sqrt[a]{k^a\cdot x}$$

Köklü ifadelerde çarpma yapabilmek için kök derecelerinin eşit olması lazım demiştik ya, onun için dışarıdaki *k* sayısını *a*'nıncı dereceden köklü yazacağız. Sonra da kök dereceleri aynı olduğundan çarpma yapacağız:

$$k\cdot\sqrt[a]{x}=\sqrt[a]{k^a}\cdot\sqrt[a]{x}=\sqrt[a]{k^a\cdot x}$$

Tabii ki burada eğer a çiftse, k'nın pozitif olduğunu düşündük burada. Çünkü k negatifse ilk verilen ifade negatif olur ama bulduğumuz ifade her halükarda pozitiftir. Bundan dolayı eğer a çiftken k negatifse, bulduğumuz ifadenin önüne – işareti koymayı unutmamalıyız. Örneğe bakın:

$$2\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{32},$$

$$-2\cdot\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=-\sqrt[4]{32}.$$

Kök dışına çıkarmak. Yukardaki işlemin tersini yapacağız. Kural şu:

$$\sqrt[a]{k^a\cdot x}=k\cdot\sqrt[a]{x}$$

Kanıtı yine aynı yerden:

$$\sqrt[a]{k^a\cdot x}=\sqrt[a]{k^a}\cdot\sqrt[a]{x}=k\cdot\sqrt[a]{x}.$$

Örnek. $\sqrt{45}-10\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{80}-\sqrt[4]{25}=$ **?**

Çözüm: $3\sqrt{5}-\frac{10}{\sqrt{5}}+4\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{25}}=3\sqrt{5}-\frac{10\sqrt{5}}{5}+4\sqrt{5}-\sqrt{5}=4\sqrt{5}$**.**

Örnek. $\sqrt{24}$ *sayısının yaklaşık değerinin hesaplanabilmesi için yaklaşık değerinin bilinmesi gereken bir sayı yazınız.*

Çözüm: $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ olduğundan $\sqrt{6}$ sayısının yaklaşık değerinin bilinmesi yeter.

Bir sayının karesinin karekökü. ''E, tabii ki kendisi olur'' diyenler dikkatle okusun. Her sayının karesinin karekökü kendisi değildir. Çünkü bir sayının karekökü her daim pozitiftir. Eğer ilk aldığımız sayı negatifse, karesini aldığımız vakit çıkan sayının karekökü hiçbir zaman ilk alınan negatif sayıya eşit olamayacaktır. Ama hepten de değişik bir sayı değil, ilk alınan negatif sayının pozitifi olacaktır. Bundan dolayı bir sayının karesinin karekökü kendisi değil, mutlak değeridir.
Sorunlar çift dereceden kök olduğunda ortaya çıkıyor. Sadece karekökte değil, tüm çift dereceden köklerde benzer durum var:

$$n \text{ tek sayı ise } \sqrt[n]{x^n}=x,$$

$$n \text{ çift sayı ise } \sqrt[n]{x^n}=|x|,$$

$$\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3|,$$

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=x+1.$$

Örnek. $x>\frac{1}{2}$ *olmak üzere;*
$\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}\cdot\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$ *çarpımı kaçtır?*

Çözüm: Kök içlerinin birbirlerinin eşlenikleri olduğuna dikkat ediniz.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}\cdot\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}&=\sqrt{4x^2-(4x-1)}\\&=\sqrt{4x^2-4x+1}\\&=\sqrt{(2x-1)^2}\\&=|2x-1|\\&=2x-1.\end{aligned}$$

İrrasyonel paydayı rasyonel yapmak. Matematikçiler bir ifadenin mümkün olduğunca basit görünmesinden yanadırlar. Matematikle haşır neşir olmamış birinin $\sqrt{2}$'yi anlaması bile zorken, bir sayının $\sqrt{2}$'ye bölünmesini anlamasını beklememiz hayal gibi. Bu amaçla kesirli ifadelerin paydalarını irrasyonel sayılardan kurtarmayı hedef edineceğiz. Kurtaramasak n'olur? Hiçbirşey… Zaten belki de hiç kurtulamayacak bir ifadedir, kimbilir… Ama biz yine de kurtarabileceğimizi kurtaralım.

İrrasyonel bir sayıyı, başka bir sayıyla çarptığımızda sonuç rasyonel sayı oluyorsa, o başka sayıya ilk sayının **eşleniği** denir.[1] Bir sayının 1'den çok eşleniği olabilir, genelde rasyonel bir ifade elde etmek için en küçük pozitif eşlenik tercih edilir. Neden durduk yere daha büyük sayılarla uğraşalım ki?
$\sqrt{2}$'nin eşleniği yine $\sqrt{2}$'dir. Zira bu iki sayı çarpılırsa sonuç rasyonel bir sayı olan 2 çıkar. Uygun koşullar altında tüm $\sqrt{x}$'lerin eşleniği $\sqrt{x}$ olur. $-\sqrt{x}$ sayısının eşleniği de $\sqrt{x}$'dir. Bazen payda pozitif olsun diye $-\sqrt{x}$ sayısının eşleniği $-\sqrt{x}$ olarak alınır. Sorun değil. Sonuç rasyonel çıksın da, n'olursa olsun.

Peki, $\sqrt[3]{2}$ sayısının eşleniği nedir? Çarpılınca rasyonel olması lazım, unutmayın. Diğer yandan çarpma yapabilmek için kök derecelerinin aynı olması gerekirdi. Demek ki bunun eşleniği, her nasıl bir sayıysa, 3'üncü dereceden köklü bir sayı olması lazım. Aynı zamanda kök derecesiyle üs aynı ise bunların birbirini götüreceğini biliyoruz, o

[1] Bu ''köklü sayılarda eşlenik'' tanımı benim uydurmam, gerçek ''eşlenik'' ile karıştırmayın.

halde çarpılması gerek sayı $\sqrt[3]{2^2}$ olmalıdır. Ama başka bir eşlenik de olabilir, unutmayın. Genelleyelim: $\sqrt[a]{x}$ sayısının eşleniği de $\sqrt[a]{x^{a-1}}$ olur.

Şimdi önemli bir tanesine geldik: $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ gibi bir sayının eşleniği de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ olur. Benzer şekilde $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ gibi bir sayının eşleniği de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ olur. Çünkü;

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x-y.$$

Bir de paydayı rasyonel yapmakla ilgili değil de eşlenikle ilgili bir soru tipi var, onla da bir örnek çözelim:

Örnek. $\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3} = a$ *ise* $\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-8}$ *toplamı a cinsinden neye eşittir?*

Çözüm: Sorulan ifadeyi eşleniği ile çarpıp bölelim:

$$(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-8}).\frac{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}$$

$$= \frac{2x^2-8-(2x^2+3)}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}} = \frac{-8-3}{a} = \frac{-11}{a}.$$

İç içe kökler. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}}$ gibi basit görünen tipleri değil de $\sqrt[a]{x.\sqrt[b]{y.\sqrt[c]{z}}}$ gibi karmaşık görünen köklü ifadeleri tek kök işaretinin altında toplamayı öğreneceğiz. Bunun için, daha önce yaptığımız gibi, köklü sayıları üslü sayılara çevirmek yeterli olacak.

$$\begin{aligned}\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[b]{y\cdot\sqrt[c]{z}}} &= (x\cdot(y\cdot z^{\frac{1}{c}})^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{a}}\\ &= (x\cdot(y^{\frac{1}{b}}\cdot z^{\frac{1}{bc}}))^{\frac{1}{a}}\\ &= x^{\frac{1}{a}}\cdot y^{\frac{1}{ab}}\cdot z^{\frac{1}{abc}}\\ &= x^{\frac{bc}{abc}}\cdot y^{\frac{c}{abc}}\cdot z^{\frac{1}{abc}}\\ &= \sqrt[abc]{x^{bc}}\cdot\sqrt[abc]{y^{c}}\cdot\sqrt[abc]{z}\\ &= \sqrt[abc]{x^{bc}\cdot y^{c}\cdot z}\end{aligned}$$

Yani, böyle ifadeleri tek kök altında toplamak için önce görünen tüm köklü ifadelerin derecelerini çarpıp, onu kök derecesi olarak yazıp, kök içindeki her sayının üssüne kendinden sonra gelen köklü ifadelerin derecelerinin çarpımını yazacakmışız. Örneklerle daha iyi anlayacaksınız.

Örnek. $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}} = 2^x$ *ise x kaçtır?*

Çözüm: $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[18]{4^6\cdot 8^3\cdot 2} = \sqrt[18]{2^{12}\cdot 2^9\cdot 2} = \sqrt[18]{2^{22}} = 2^{\frac{22}{18}}$ olduğundan $x = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$.

Örnek. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}\sqrt[3]{8\sqrt{16^{-2}}}} = (\frac{1}{4})^a$ *ise a kaçtır?*

Çözüm: Eşitliğin sağ tarafı 2^{-2a}, sol tarafı ise

$\sqrt[24]{(2^{-1})^6\cdot(2^3)^2\cdot(2^4)^{-2}} = \sqrt[24]{2^{-6}\cdot 2^6\cdot 2^{-8}} = 2^{\frac{-1}{3}}$ olur.

$-2a = -\frac{1}{3}$ olduğundan $a = \frac{1}{6}$ olarak bulunur.

Bu kuralla çokça sorulan bazı soru tiplerini formülleştirmek de mümkün, aşağıda bunların birkaçını bulacaksınız ama sakın aldırış etmeyin.

$$\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots\cdot\sqrt{x}}}} = \sqrt[2^n]{x^{2^n-1}}$$

$$\sqrt[n]{x^{n-1}\cdot\sqrt[m]{x^{m-1}\cdot\sqrt[r]{x^{r-1}}}} = \sqrt[mnr]{x^{mnr-1}}$$

Kök içinin sonsuza gitmesi. Bu kısımda vereceğimiz teoremleri kolay anlamanız açısından başka bir örnekle konuya girecek ve eğer bilmiyorsanız mutlaka bilmeniz gereken bir olguyu anlatacağım.

(Basit görünen) Soru. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = x$
$2 + 3 + 4 + \ldots = y$
olsun. Bu halde x mi büyüktür, y mi?

(Beklenmeyen) Cevap: Ne x, y'den büyüktür, ne de y, x'ten! Çünkü x ile y eşittir. Bunun neden böyle kabul edildiğini sezmişsinizdir: Toplanan sayıların sonunun belli olmaması. Pardon, yanlış söyledim, sonunun belli olmaması değil, sonunun olmaması. Limit konusunda detaylı işleyeceğiz. Biz de bundan sonra aynı belli kuralla ilerleyen ama ikisi de sonlanmayan ifadeleri eşit kabul edeceğiz. Aşağıdaki teoremin kanıtında olduğu gibi:

Teorem. $\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\ldots}}}} = \sqrt[a-1]{x}$.

Kanıt: $\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\ldots}}}} = p$ olsun. En büyük kök işaretinin içinde sonsuza uzayan ifade de yukarda anlattığımız üzere p'ye eşittir. Eşitlik şu hali alır ve şöyle çözüme kavuşur:

$\sqrt[a]{x\cdot p} = p$

$x\cdot p = p^a$ (Her iki tarafın a'nıncı kuvvetini aldık)

$x = p^{a-1}$ (Her iki tarafı p'ye böldük)

$\sqrt[a-1]{x} = p$ (Her iki tarafın $(a-1)$'inci dereceden kökünü aldık)

Böylelikle teorem kanıtlanmış oldu.

Teorem. $\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:....}}}} = \sqrt[a+1]{x}$.

Kanıt: Aynen bir önceki kanıtta yaptığımız gibi $\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:....}}}}$ sayısına p diyeceğiz.

$\sqrt[a]{x:p} = p$

$x : p = p^a$ (Her iki tarafın a'nıncı kuvvetini aldık)

$x = p^{a+1}$ (Her iki tarafı p'yle çarptık)

$\sqrt[a+1]{x} = p$ (Her iki tarafın (a+1)'inci dereceden kökünü aldık)

Böylelikle bu teorem de kanıtlanmış oldu.

Teorem. $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}} = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Kanıt: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}} = p$ olsun. $\sqrt{a+p} = p$ olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $a + p = p^2$ olur ki, düzenlenirse $p^2 - p - a = 0$ gibi ikinci dereceden bir denklem bulunur. Bunu çözmek için de ikinci dereceden denklemlerin köklerini veren formülden yardım isteyeceğiz. Bilmeyenler meraklanmasın, ilerde göstereceğiz.

$$p = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot a}}{2\cdot 1}$$

eşitliğinden p'nin pozitif olan değerini seçersek, soru çözülmüş olacak. O halde;

$$p = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Uyarı. $p^2 - p - a = 0$ eşitliğine yapacağımız şu yoruma ve elde edeceğimiz sonuca azami ilgi istiyoruz. Zira uygun değerler altında oldukça pratik bir çözüm sağlatır. Üzülerek söylüyorum ki, yorumumuzu yine ikinci dereceden denklemlerle haşır neşir olmuş arkadaşlar anlayabilecek. Denklemimizin kökler çarpımı $-a$, kökler toplamı ise 1. O halde köklere, toplamı 1 olacak şekilde, t ve $1 - t$ diyelim. $t.(1 - t) = -a$ olduğunu da biliyoruz. O halde $t.(t - 1) = a$. Bu ne demek? Cevap a'nın ardışık çarpanlarından biri demek. Peki, hangisi? Cevabımızın daima pozitif olması gerektiğinden t. Yani ardışık köklerden büyük olanı.

Örnek. $\sqrt{x:\sqrt{x:\sqrt{x:...}}} + \sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot...}}} = 12$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

Çözüm: Yukarda öğrendiğimiz sadeleştirmeler uygulanırsa $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$ eşitliğiyle karşılaşırız. x yerine t^6 yazarsak, $t^2 + t^3 = 12$ bulunur ki, $t = 2$ olduğundan $x = 64$'tür.

Teorem. $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}} = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Kanıt: $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}} = p$ olsun. $\sqrt{a-p} = p$ olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $a - p = p^2$ olur ki, düzenlenirse $p^2 + p - a = 0$ gibi ikinci dereceden bir denklem bulunur. Köklerden pozitif olanı seçilirse;

$$p = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

olarak bulunur ki kanıt tamamlanmış olur.

Uyarmadı demeyin. $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}}$ sayısı, eğer a'nın ardışık iki çarpanı varsa, onlardan küçük olanına eşittir.

$\sqrt{A+2\sqrt{B}}$ şeklindeki ifadelerin sadeleştirilmesi. Köklü sayılar dersinde en önemle üstünde durmanız gereken konuya geldik. Aşağıdaki işlemleri dikkatlice inceleyin. Anlamayan tekrar tekrar okusun lütfen.

$T = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ olsun. $T^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$ olur.

Her iki tarafın da karekökü alınırsa;

$$|T| = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$$

bulunur ki, $x + y = A$ ve $xy = B$ denilirse

$$\sqrt{A+2\sqrt{B}} = |\sqrt{x}+\sqrt{y}|$$

eşitliğine erişilmiş olur. Anlatılmak istenen şudur: $\sqrt{A+2\sqrt{B}}$ şeklinde bir ifadenin sadeleşmiş halini arıyorsan, toplamları A'yı ve çarpımları B'yi veren x ve y sayıları bul, aradığın şey $|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$'dir, daha ne desin!

Örnek. $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6}+1$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

Örnek. $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ *sayısını sadeleştiriniz.*

Çözüm: $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2\sqrt{18}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$.

Örnek. $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$ *sayısını sadeleştiriniz.*

Çözüm: $\sqrt{7-3\sqrt{5}} = \sqrt{7-\sqrt{45}} = \sqrt{\dfrac{14-2\sqrt{45}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$$

Örnek. $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$ *kaça eşittir?*

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{11}}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{12-2\sqrt{11}}}{\sqrt{2}}=$

$\dfrac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

Örnek. $A=\sqrt[3]{49.\sqrt[3]{49.\sqrt[3]{49...}}}$

$B=\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-...}}}$

$C=\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27:...}}}$

iken $\sqrt{A-B\sqrt{C}}$ *kaça eşittir?*

Çözüm: A = 7, B = 4 ve C = 3 olduğundan $\sqrt{A-B\sqrt{C}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}$.

Örnek. $\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=?$

Çözüm: Çarpılan ifadelerden önce ilkini bir ele alalım.

$\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Şimdi ilk sayıyla son sayıyı çarpalım. – $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\,.\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}$

$-\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\,.\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}=-\sqrt[3]{25-24}=-1.$

Örnek. $\sqrt[8]{13-\sqrt{48}}\cdot\sqrt[4]{1+\sqrt{12}}$ *sayısı kaça eşittir?*

Çözüm: Önce ilk ifadeyi ele alacağız.

$\sqrt[8]{13-\sqrt{48}}=\sqrt[4]{\sqrt{13-2\sqrt{12}}}=\sqrt[4]{\sqrt{12}-1}$

Bu sayıyla ikinci sayıyı çarpacağız.

$$\sqrt[4]{\sqrt{12}-1}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{12}+1}=\sqrt[4]{12-1}=\sqrt[4]{11}.$$

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ **biçimindeki ifadeler.** Eğer yukarda-ki gibi 2 ile çarpıp böldüğümüzde uygun değerler çıkıyorsa, ifadeyi derhal 2 ile çarpıp bölmeliyiz. Eğer böyle değilse aşağıda vereceğim formülü kullanın:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$$

Örnek. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$ *ise x kaçtır?*

Çözüm: Bu saçmasapan formülü kullanacağımı sanmayın. Eşitliğin her iki yanının karesini alırız.

$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-2\sqrt{x^2-x}=x,$

$x=2\sqrt{x^2-x}$,

$x^2=4x^2-4x,$

$3x^2-4x=x(3x-4)=0,$

$x=0$ veya $x=\dfrac{4}{3}$.

Köklü sayılarda sıralama. Sıralama yapılabilmesi için kök derecelerinin birbirlerine eşit hale getirilmesi lazım. Kök derecelerini büyütme/küçültme başlığında bunu anlatmıştık. Bu halde, kimin içi daha büyükse o daha büyük, kimin içi daha küçükse o daha küçüktür.

Köklü ifade içeren denklemler. Bu konuyu ikinci dereceden denklemler başlığı altında daha detaylı inceleyeceğiz. Genel itibariyle köklü ifade içeren denklemlerde köklerden kurtulmak için ifadede köklü ifadeyi yalnız bırakıp, kök derecesi kadar üssünü alırız. Böylelikle denklem kök işaretinden arınmış olur, gerisini bildiğimiz üzere yaparız. Bazen köklü ifadeye başka bir değişken vererek de sorunu ortadan kaldırabiliriz. Şimdi bunlara birer örnek verelim:

Örnek. $4^{\sqrt{x+1}}-2^{\sqrt{x+1}+2}=0$ *eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.*

Çözüm: $4^{\sqrt{x+1}}-2^{\sqrt{x+1}+2}=0$,

$2^{2\sqrt{x+1}}-2^{\sqrt{x+1}+2}=0$,

$2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}+2,$

$\sqrt{x+1}=2,$

$x+1=4,$

$x=3.$

Örnek. $\sqrt{1-x-2\sqrt{-x}}=3$ *ise x kaçtır?*

Çözüm-1: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$1-x-2\sqrt{-x}=9$

$-8-x=2\sqrt{-x}$

$x^2+16x+64=-4x$ (Yine kare aldık)

$x^2+20x+64=0$

$(x+16)(x+4)=0$

$x=-16$ veya $x=-4$ olur. Fakat $-8-x\geq 0$ eşitsizliğinden sadece $x=-16$'nın sağladığı görülür.

Çözüm-2: Verilen eşitlik $\sqrt{A-2\sqrt{C}}$ halinde olduğundan toplamları $1-x$, çarpımları $-x$ olan iki sayı aranır. Bu sayılar 1 ve $-x$'dir. O halde $\sqrt{-x}-1=3$ eşitliğinden $x=-16$ bulunur.

Alıştırmalar

1.
$\sqrt[3]{(\frac{1}{4})^{x-5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ ise **x kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.
$\sqrt[3]{(-27)^2} + \sqrt[5]{(-32)^3} - \sqrt{0,25} = ?$

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) 3/2 E) 2

3.
$\frac{\sqrt{32}^{-32}.\sqrt[3]{2}^{6}}{\sqrt{32}^{-29}.\sqrt{128}} = 8^n$ ise **n kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

4.
$\sqrt[3]{0,\overline{4}.\sqrt[3]{0,\overline{4}.\sqrt[3]{0,\overline{4}...}}} = ?$

A) 2/5 B) 2/3 C) 3/2 D) 5/2 E) 2

5.
$(\frac{1}{5+\sqrt{3}} + \frac{1}{5-\sqrt{3}}).\frac{22}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = ?$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

6.
$\frac{\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}} = ?$

A) 2/5 B) 2/3 C) 3/2 D) 5/2 E) 2

7.
$\sqrt{2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sqrt{128}}} = 2^n$ ise **n kaçtır?**

A) 2/5 B) 2/3 C) 3/4 D) 5/2 E) 2

8.
$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{8} = ?$

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

9.
$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{20} = ?$

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

10.
$(\sqrt{12} - \sqrt{8})(\sqrt{5+2\sqrt{6}}) = ?$

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 2

11.
$A = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ise **A^2 kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12.
$\frac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} = ?$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13.
$\sqrt[6]{8^{a+b}} : \sqrt{4^{\frac{a}{2}+1}} = 32$ ise **b kaçtır?**

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

14.
$\frac{6-\sqrt{45}}{2\sqrt{3}-\sqrt{15}} = ?$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

15.
$x^{\frac{-5}{2}} = 32$ ise $\sqrt[4]{x} = ?$

A) $\sqrt{3}/2$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}/2$ D) $\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

16.
$(1 + \sqrt{2})^{-2} = a + b\sqrt{2}$ ise **$a.b$ çarpımı kaçtır?**

A) –6 B) –3 C) –1 D) 0 E) 6

17.
$\sqrt{2} : (\sqrt{0,9} - \sqrt{0,1}) = ?$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

18.
$\sqrt{5} < \sqrt[3]{a}$ eşitsizliğini sağlayan **en küçük *a* doğal sayısı kaçtır?**

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

19.
$a = \sqrt[6]{\dfrac{4}{\sqrt{2}}}$ ise a^2, a^3, a^4, a^5 ve a^6 sayılarından **hangisi tamsayıdır?**

A) a B) a^2 C) a^3 D) a^4 E) a^5

20.
$\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2} + \sqrt{(-5)^2} + \sqrt{2} = ?$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

21.
$\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{3}} = ?$

A) –6 B) –3 C) –1 D) 0 E) 6

22.
$\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}} = 27^{\frac{1}{2}}$ ise ***x* kaçtır?**

A) 3 B) 9 C) 27 D) 54 E) 81

23.
$(0,04)^{-0,5}.\sqrt{(0,25)^{-1}} = ?$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

24.
$3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} =$ **?**

A) $\sqrt{2}/2$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

25.
$\sqrt[3]{-125}.\sqrt{0,09} =$ **?**

A) –5/3 B) –3/2 C) –1 D) 1 E) –5

26.
$\sqrt{4x+12} + 3\sqrt{25x+75} = 51$ ise ***x* kaçtır?**

A) –6 B) –3 C) –1 D) 0 E) 6

27.
$\sqrt[3]{5^{1-x}} = 0,2$ ise ***x* kaçtır?**

A) –6 B) –3 C) –1 D) 4 E) 6

28. $a < b < 0$ iken
$\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2-b^2}} = ?$

A) $-b\sqrt{2}$ B) $b\sqrt{2}$ C) $-b\sqrt{3}$ D) $b\sqrt{3}$ E) $-b$

29.
$(\sqrt{5}-1).(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{3\sqrt{5}}{5}) = ?$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

30.
$\sqrt{27-\sqrt{1+\sqrt{13-\sqrt{16}}}} = ?$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

31.
$\sqrt[3]{x.\sqrt[3]{x.\sqrt[3]{x...}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}$ ise ***x* = ?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

32.
$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+...}}} = ?$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

33.
$a = 3^{1/2}$, $b = 4^{1/3}$ ve $c = \sqrt[6]{20}$ olduğuna göre a, b, c değerlerinin küçükten büyüğe sıralamasını yapınız.

A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < a < c$
D) $b < c < a$ E) $c < a < b$

34.
$$\frac{4+\sqrt{12}+\sqrt{8}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}} = ?$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

35.
$$\frac{\sqrt{x-3a}+\sqrt{3a-x}+a}{x-a}$$ reel sayısı **kaçtır?**

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) 3/2 E) 2

36.
$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-3.\sqrt[6]{9} = ?$$

A) 2 B) $\sqrt[3]{3}$ C) $2\sqrt[3]{3}$ D) $3\sqrt[3]{3}$ E) $4\sqrt[3]{3}$

37.
$$\sqrt{2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sqrt{x}}} = 2^{\frac{3}{4}}$$ ise ***x*** **kaçtır?**

A) 128 B) 64 C) 32 D) 16 E) 8

38.
$0 < b < a$ iken $\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = ?$

A) $b-a$ B) $b-2a$ C) a D) b E) $a-b$

39.
$$\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt[4]{64}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = ?$$

A) $\sqrt{3}/2$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}/2$ D) $\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

40.
a ve b birer tamsayı iken
$$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$$ ise $\boldsymbol{a+b=?}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Cevaplar. **1.**B **2.**B **3.**A **4.**B **5.**B **6.**B **7.**C **8.**D **9.**D **10.**E **11.**B **12.**A **13.**A **14.**A **15.**C **16.**A **17.**E **18.**A **19.**D **20.**B **21.**D **22.**E **23.**B **24.**D **25.**B **26.**E **27.**D **28.**A **29.**B **30.**C **31.**E **32.**B **33.**D **34.**B **35.**B **36.**C **37.**A **38.**E **39.**D **40.**C