

Geometri ile Trigonometri Sorusu Yazma Tekniği

Eyüp Kamil Yeşilyurt – Mustafa Yağcı

Bu yazımızda, geometri yardımıyla trigonometri sorularının, nasıl çözüleceği olmasa da nasıl hazırlanabileceğine örnekler vermek istiyoruz. Anlatmaya çalışacağımız bu yöntemle soru yazmak, bize daha eğlenceli geliyor, umarız sizlerin de hoşuna gider.

Sinüs Teoremi. *ABC bir üçgen olsun. Açılara sırasıyla A, B, C diyelim. O zaman*

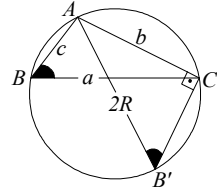
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, eğer üçgenin köşelerinden geçen çember R yarıçaplı ise, bu değerler 2R'ye eşittir.

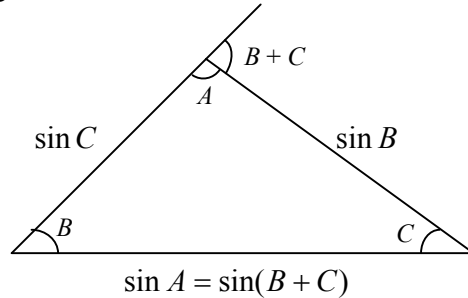
Kanıt: A köşesinden geçen çap çemberi B' noktasında kessin.

$m(\angle ACB') = 90^\circ$ ve $m(\angle AB'C) = m(\angle ABC)$ olur. $\sin B = \sin B' = \frac{b}{2R}$ oldu-

ğundan eşitliğin biri gösterilmiş olur. Diğerleri de simetrik şekilde kanıtlanabilir.

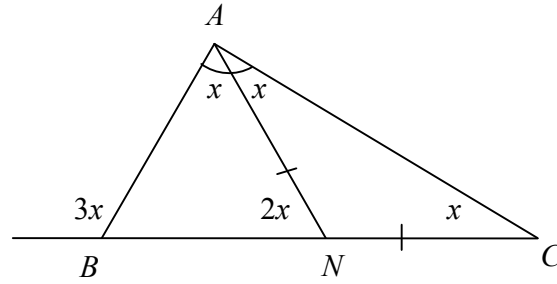


Sinüs Teoremi'nin anlatmak istediği, kenarların karşısındaki açılarının sinüsleriyle doğru orantılı olduğudur. O halde $A + B + C = \pi$ olmak üzere her zaman kenarları $\sin A$, $\sin B$ ve $\sin C$ olan bir ABC üçgeni vardır.

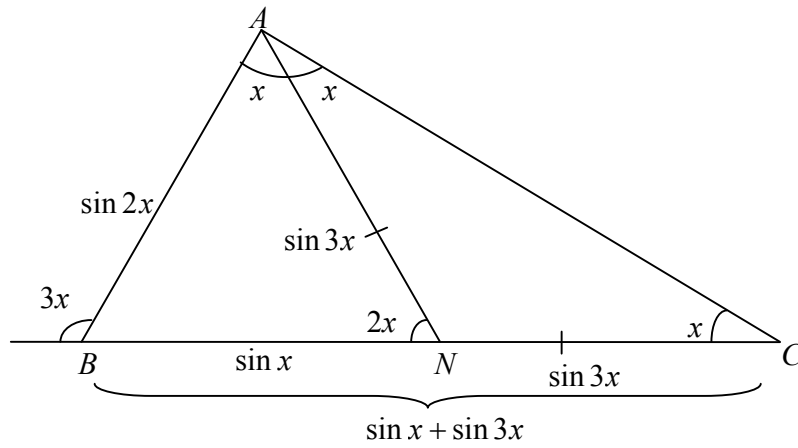


Bütünler iki açının sinüsleri eşit olduğundan, ABC üçgenin kenar uzunluklarına $\sin(B+C)$, $\sin B$ ve $\sin C$ diyebiliriz. Bunu örneklerimizde sıkça kullanacağız.

Örnek 1.



Yukarıdaki üçgenin açı ve kenarlarını sinüs teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.



ABN üçgeninden başlayarak sinüs teoremi uyguladık. Şimdi ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulayalım:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x}$$

Bu eşitlik üzerinde trigonometri kurallarını kullanarak da değişiklik yapmak mümkün ama biz sadece $\sin 3x$ 'i yalnız bırakmayı tercih ettik ve ilk sorumuzu hazırladık.

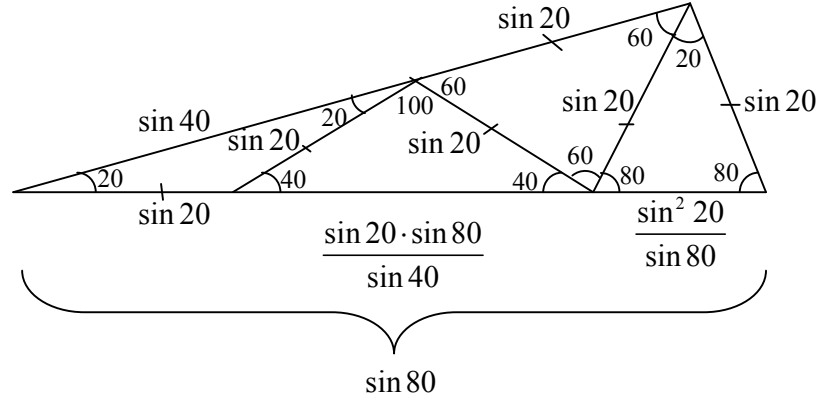
Soru 1. $\frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\sin x}$ ifadesini sadeleştiriniz. (Cevap: $\sin 3x$)

Okur, yarım açı, iki kare farkı veya $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gibi eşitlikler kullanarak değişik biçimlerde soru hazırlayabilir.

Açılar tekniği kullanılarak ilginç soru veya kurallar yazılabilmektedir.¹ Aslında bu yöntemi daha önceden cege mail grubumuzda gündeme getirmiş ve güzel örnek de göndermiştik. Aynı örneği tekrar vermeden değişik örnekler yazalım.

¹ Ardışık açılar tekniği için <http://www.geocities.com/eyupkamilyesilyurt/proje2/ana.htm>

Örnek 2. Langley üçgenini (20° , 80° , 80°) ele alıp, kenarları sinüs teoremi yardımıyla belirleyelim.



Şekilden de görüldüğü üzere

$$\sin 20^\circ + \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin^2 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \sin 80^\circ$$

diye bir eşitlik varmış. Bunu kullanarak bir soru yazalım ama yazdığımız sorunun cevabının da hoş olmasını istiyorsak üzerinde oynama yapmamız gerekecek.

Sol yanı $\sin 20^\circ$ ortak parantezine alalım:

$$\sin 20^\circ \cdot \left(1 + \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \right) = \sin 80^\circ$$

Eşitliğin her iki yanını $\sin 20^\circ$ 'ye bölelim:

$$1 + \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Düzenleme yapılırsa:

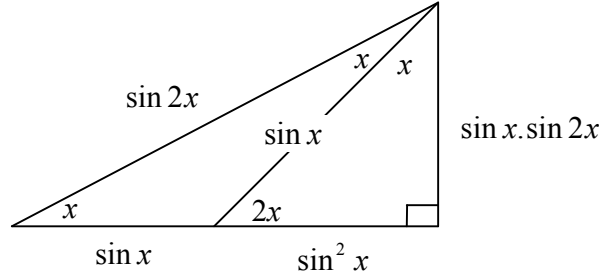
$$\begin{aligned}\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} - \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} &= -1 \\ \frac{\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} - \frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} &= -1\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Soru 2. $\frac{\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} - \frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}$ ifadesi kaçta eşittir? (Cevap: -1)

Şimdi de trigonometrik denklemlerle ilgili basitçe bir soru hazırlayalım.

Örnek 3. Aşağıdaki şekilde $x = 30^\circ$ olduğu zaten görülmektedir.



Geniş açılı üçgenin kenar uzunluklarını yerleştirerek işe başlıyoruz. Sonra açıortay uzunluk formülünü uygulayarak bir eşitlik elde etmeyi planlıyoruz. Bakalım planımız ne kadar işe yarayacak?

$$\begin{aligned}
 \sin^2 x &= \sin x \cdot \sin^2 2x - \sin^3 x \\
 \sin x &= \sin^2 2x - \sin^2 x \\
 \sin^2 x &= \sin x \cdot (\sin^2 2x - \sin^2 x) \\
 \sin x + \sin^2 x &= \sin^2 2x \\
 \sin x + \sin^2 x &= 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\
 \sin x \cdot (1 + \sin x) &= 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\
 1 + \sin x &= 4 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \\
 \frac{1 + \sin x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} &= 4 \\
 (1 + \sec x) \cdot (1 + \tan x) &= 4
 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi elde edilen eşitlikler birçok alternatifle değişik şekillerde ifade edilebilmektedir. Biz elde ettiğimiz son eşitlikten sorumuzu soralım.

Soru 3. $(1 + \sec x) \cdot (1 + \tan x) = 4$ denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki kökü kaçtır? (Cevap: $\frac{\pi}{6}$)

Şimdi de Ptolemy Teoremi'ni kullanarak bir soru hazırlayacağız, önce hatırlayalım:

Ptolemy Teoremi. Bir kiriş dörtgeninde karşılıklı kenar uzunluklarının çarpımlarının toplamı, köşegen uzunluklarının çarpımlarına eşittir.

Kanıt: Herhangi bir $ABCD$ kiriş dörtgeni çizelim. $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ ve köşegenlerin uzunlukları e ve f olsun. Genelliği bozmadan $m(\angle DAC) > m(\angle BAC)$ farzedelim.

BD üzerinde öyle bir F noktası alalım ki $m(\angle DAF) = m(\angle CAB)$ olsun. $m(\angle ADB) = m(\angle ACB)$ ve $m(\angle ABD) = m(\angle ACD)$ olduğundan ADF ile ACB üçgenleri benzerdir. Eşleme yapılırsa $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{FD}$ yani

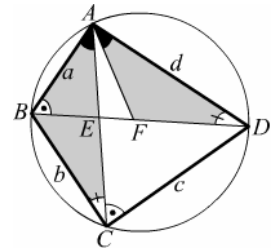
$$AD \times BC = AC \times FD$$

bulunur. Diğer yandan ABF ile ACD üçgenlerinin benzerliğinden de

$$AB \times CD = BF \times AC$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$AB \times CD + AD \times BC = BF \times AC + FD \times AC = (BF + FD) \times AC = BD \times AC.$$



Yani; $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.

Bu teorem Türkçe kaynaklarda **Batlamyüs Teoremi** diye geçer.

Örnek 4. e çap olacak şekilde rastgele açılar alınabilir, ben hazırladığım sorunun test sınavına uygun olmasını istediğim için açılar 30° , 60° , 90° olarak seçiyorum,

$$e = \sin 90^\circ = 1,$$

$$f = \sin 70^\circ \text{ oluyor.}$$

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \text{ olduğundan,}$$

$$1 \cdot \sin 70^\circ = \sin 60^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ$$

$$\sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 40^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sin 50^\circ$$

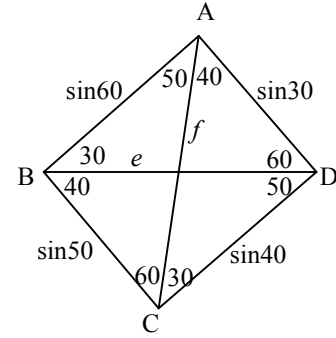
$$2 \cdot \sin 70^\circ = \sqrt{3} \cdot \sin 40^\circ + \sin 50^\circ$$

$$\frac{2 \cdot \sin 70^\circ - \sin 50^\circ}{\sin 40^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2 \cdot \cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2 \cdot \cos 20^\circ}{2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 20^\circ - \cot 40^\circ = \sqrt{3}$$



Soru 4. $\operatorname{cosec} 20^\circ - \cot 40^\circ$ işleminin değeri kaçtır?

Dördüncü örnekte 30° yerine x , 40° yerine y alarak aynı işlemleri yaptığımızda

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

açılımı elde edilebiliyor.

Soru 5. $2 \cdot \sin 15^\circ - \sqrt{3}$ işleminin değeri kaçtır?

Sonsöz. Öğrenciyken, bu soruları nasıl yazıyorlar da tertemiz sonuçlar çıkıyor diye hiç merak etmediniz mi? ☺

EKY & MY – 2005

www.geometri.ogretmeni.com

www.mustafayagci.com

www.matematik.kulubu.com