

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İkinci Dereceden Denklemler

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

biçiminde yazılan ifadeler n doğal sayı ve a 'lar reel sayı olduğu sürece polinom dendiğini söylemiştik.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

biçiminde yazılan denklemlere de **polinom denklemler** denir. Bu konuyu işlerken tüm derdimiz, böyle denklemleri sağlayan x 'leri bulmak olacak, ki bu x 'lere denklemin **kökleri** denir. Kökleri bulmanın metotları da, denklemlerin adları da n değiştikçe değişir. $a_n \neq 0$ ise denkleme **n -inci dereceden denklem** denir. n -inci dereceden denklemlerin n tane kökü vardır. Bu kanıtlanabilir elbet. Merak etmeyin, derecesi kaç olursa olsun, tüm polinom denklemlerin sırrını çözeceğiz. Bunu bazen denklemi çözerek yapacağız, bazen çözemeyeceğimizi göstererek...

I. Birinci Dereceden Denklemler. Birinci dereceden denklemleri bugün artık ilkökul çocukları bile çözebiliyor.

$$ax + b = 0 \text{ ise } x = -\frac{b}{a}.$$

a 'nın sıfır olmadığını bildiğimizden a 'ya bölmekte bir sıkıntı yaşamayacağız. Fazla detaya girmemizin elbet bir sebebi var. Hala birinci dereceden denklemleri çözerken problem yaşayan veya daha da öte, ne olduğunu bile bilmeyen bir kimse iseniz elinizdeki bu sayfaları derhal bırakıp, gidip bu konuya çalışmanızı şiddetle önermekteyiz. Aksi takdirde bu notları da anlayamayacak, üstüne üstlük belki de bize çamur atacaksınız☺

II. İkinci Dereceden Denklemler. $a \neq 0$ iken

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki denklemlere ikinci dereceden denklemler denir. Bu notların başrol oyuncusu bu denklemler olacak. İkinci dereceden denklemleri çözmeyi, yani bu denklemleri sağlayan x 'leri bulmayı MÖ 400 yıllarında Babililer üç aşağı beş yukarı biliyordu. Şimdi biz de öğreneceğiz. Tabii ki üç aşağı beş yukarı değil, dört dört-lük!

Önce anlatacaklarımızı daha iyi anlamamız amacıyla, yani genel formülümüzü bulmadan önce, sayısal verilerle, o formülü bulurken kullanacağımız metotla, birkaç örnek çözelim:

Soru. $x^2 - 2x - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Bu ilk örneğimiz olduğundan birkaç değişik çözüm göstereceğiz. Sonraki sorularda içlerinden en beğendiğinizi veya en kısa süreni seçerek onu kullanabilirsiniz.

Birinci yol. Bu yolu çarpanlara ayırma dersinde detaylı işlemiştik. Verilen ikinci dereceden denklemi çarpanlarına ayıracağız.

$$0 = x^2 - 2x - 8 = (x - 4) \cdot (x + 2)$$

olduğundan denklemi sağlayan x değeri 4 veya -2 'dir.

İkinci yol. Bu yolu da ikinci dereceden fonksiyonların terslerini bulurken öğrenmiştik. İkinci dereceden denklemlerin tamkareye getirilmelerinden bahsediyorum. Hatırlayın, başkatsayısı 1 iken, sabit terimi, x 'li teriminin katsayısının yarısının karesi olan ikinci dereceden denklemler bir kare idi. Böyle olmayan denklemleri bu hale getireceğiz.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 8 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 9 \\ &= (x - 1)^2 - 9 \\ &= (x - 1)^2 - 3^2 \\ &= (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) \\ &= (x - 4)(x + 2) \end{aligned}$$

olduğundan denklemi sağlayan x değeri 4 veya -2 'dir.

$(x - 1)^2 - 9 = 0$ eşitliğinden başka yola da sapılabilir: $(x - 1)^2 = 9$ olduğundan $x - 1 = \pm 3$ denebilir, ki denmelidir, bu yol daha kısadır.

Üçüncü yol. Baştan uyarırız, her denklem bu yola her zaman bu kadar kolay izin vermez. Eğer sağlayan bir x değerini kafadan bulabilirseniz, mesela 4 olsun, o halde bu denklemin $(x - 4)$ diye bir çarpanı vardır. Denklemi $(x - 4)$ 'e bölersek, diğer çarpanı bulabiliriz. Bu çarpanı da 0'a eşitlersek diğer kökü bulabiliriz.

Soru. $x^2 - 3x - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Biz ikinci yolun sapağından çözümlere devam edeceğiz.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 3x - 8 \\ &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{41}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{41}{4} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{41}{4}, \text{dir.} \end{aligned}$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{41}}{2} \text{ olduğundan } x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Soru. $2x^2 - 12x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Yine denklemleri tamkareye çevireceğiz ama tamkare olma şartlarında başkatsayının 1 olması vardı, bu sebeple eşitliğin her iki yanını 2'ye bölelim.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x - 1 &= 0 \\ x^2 - 6x - 1/2 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 - 19/2 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 19/2 \\ |x - 3| &= \sqrt{19/2} \\ x &= 3 \pm \sqrt{19/2} \end{aligned}$$

Artık genel formülü bulabilecek kıvama gelmiş olmamız lazım. Başlıyoruz. İyi takip edin! Önce, yine tamkare yapmak amacıyla denklemleri a parantezine alıyoruz ki, başkatsayı 1 olsun.

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

olduğundan ve $a \neq 0$ olduğunu bildiğimizden

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

çıkar. Bundan da

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

çıkar. Umudunu kesme, devam! Her iki tarafın karekökünü alalım:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olur. x 'i yalnız bırakırsak mutlu sona erişeceğiz:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

çıkar. Nihayet!. Biri artılı diğeri eksili olmak üzere iki çözüm bulduk. Bundan böyle birinin adı " x_1 ", diğerin " x_2 " olsun. x_1 ile x_2 arasındaki ilişkileri daha sonra göreceğiz.

Şimdi yukarıda çözümlerini yaptığımız soruları da bir de formülümüzle çözelim:

Soru. $x^2 - 2x - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Denkleminizde $a = 1$, $b = -2$ ve $c = -8$ olduğundan;

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

olur. O halde, $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ ve $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

bulunur.

Soru. $x^2 - 3x - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Denkleminizde $a = 1$, $b = -3$ ve $c = -8$ olduğundan;

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} \end{aligned}$$

olur. O halde, $x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{2}$ ve $x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{2}$ bulunur.

Soru. $2x^2 - 12x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Denkleminizde $a = 2$, $b = -12$ ve $c = -1$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{12 \pm \sqrt{152}}{4} = \frac{12 \pm 2\sqrt{38}}{4} = 3 \pm \frac{\sqrt{38}}{2}
\end{aligned}$$

olur. O halde, $x_1 = 3 + \frac{\sqrt{38}}{2}$ ve $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{38}}{2}$ bulunur.

Köklerin formülünde beliren köklü ifadenin içindeki $b^2 - 4ac$ değeri ikinci dereceden denklemlerde çok büyük önem arz eder. Bu ifadeye denklemin **diskriminantı** denir, Δ sembolü ile gösterilir ve kısaca “delta” diye okunur.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğunu hatırlatalım. Δ ifadesi karekökün içinde bulunduğundan, denklemin köklerinin reel sayı olması için Δ negatif olmamalıdır. Peki, Δ sıfır olursa n’olur, bir düşünün bakalım. Düşünmeye ne

gerek var, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ olur. Yani denklemin iki

kökü birbirine eşit olur, bu durumda iki tane değil, tek kökü var deriz. Ki tek kökü olan ikinci dereceden denklemler de bildiğiniz üzere tamkare olurlar. Geldik Δ ’nın negatif olma durumuna. Karekökün içi negatif olursa, o sayının reel olmadığını, olamayacağını biliyoruz. O halde “ $\Delta < 0$ durumunda, denklemin reel kökü yoktur” deriz. Dikkat edin, kökü yoktur demiyoruz, reel kökü yoktur diyoruz. Zira bir ikinci dereceden denklemin her zaman iki tane kökü vardır ama bazen burada olduğu gibi kökler reel değil de karmaşık sayı olurlar.

Uyarı. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a ile c ters işaretliyse, kesinlikle farklı iki reel kök vardır. Çünkü farklı iki reel kök olabilmesi için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olması yeter. Verilene göre $-4ac > 0$ ve b ’nin her değeri için $b^2 \geq 0$ olduğundan $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ eşitsizliği kanıtlanmış olur. Fakat buradan “ a ile c aynı işaretliyse, denklemin iki farklı reel kökü olamaz” anlaşılmamalıdır. Biz sadece “ a ile c ters işaretliyse kesin böyledir” diyoruz.

Soru. $x^2 + 4x + 5 = 0$ denkleminin \mathbb{R} ’de çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Eğer a ile c ters işaretli olsaydı, farklı iki reel kökün varlığını bilerek, hemen a , b , c değerlerinin eşitlerini köklerin formülünde yerlerine yazar ve çözüm kümesini bulurduk. Burada a ile c aynı işaretli olduğundan önce Δ ’nın işaretini tayin etmekte fayda var.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

olduğundan hiç işlem yapmaya gerek yok, kökleri reel değildir. Dolayısıyla \mathbb{R} ’de çözüm kümesi boştur. Aklınıza “Acaba Δ ’nın işaretini incelemeden bunu bulamaz mıyız?” diye bir soru geldiyse cevaplayalım: Bulabiliriz!

$x^2 + 4x + \omega$ ifadesinde ω sayısı, ifadeyi tamkare yapan ω_1 değerinden büyükse kökler reel değildir, eşitse zaten tamkaredir, küçükse de kesinlikle iki farklı reel kök vardır! Bunun kanıtını siz yapmaya çalışınız. Çok kolay olduğunu söyleyelim de “Kim uğraşacak şimdi?” demeyin...

Soru. $x^2 + 2x + (8 - m) = 0$ denkleminin iki farklı reel kökü olduğu biliniyorsa, m ’nin bulunması gereken aralığı bulunuz.

Çözüm: $x^2 + 2x + \omega$ ifadesini tamkare yapan ω_1 sayısı 1’dir. $(8 - m)$ değeri 1’den küçük olursa denklemin iki farklı reel kökü olur. $8 - m < 1$ ise $m > 7$ olmalıdır.

İkinci dereceden denklemler hiç ummadık yerde karşımıza çıkmalarıyla meşhurdur. Abartmayalım ama geometrinin bile ilerlemesinde çokça katkıları olmuştur. Geometri problemleri çözerken çoğu zaman karşınıza çıktığını hatırlıyor olmalısınız. Hatırlamıyorsanız, ya çok az geometri sorusu çözmüşsünüzdür ya da hafızanızda bir problem vardır! ☺ Birazdan bunlara da sayfa sayımız elverdiğince örnekler vereceğiz. Köklü ifadelerin oluşturduğu denklemlerin çözümlerinde de ikinci dereceden denklemlere sıkça rastlanır. Karekökten kurtulmak isteyen biri eşitliğin her iki tarafının karesini aldığını çoğu zaman karşısında böyle bir denklem bulur. Paydasında birinci dereceden denklem içeren kesirli ifadelerin paydalarını eşitlediğinizde de rastlaşmışsınızdır. Ne bileyim, ikinci dereceden bir denklemi çözmesini bilmeyen biri Pisagor, Öklid, Tales gibi teoremlerden ne kadar faydalanabilir? Benim size önerim, üniversite giriş imtihanında bir tane bile ikinci dereceden denklem sorusunun çıkmayacağı garanti edilse bile, çok iyi bilinmesi ve çalışılması gereken bir konudur. Gelim, sana söylüyorum!

Soru. $\sqrt{2-x} + 3 = 2x$ eşitliğini sağlayan x reel sayısı kaçtır?

Çözüm: Eşitliği $\sqrt{2-x} = 2x - 3$ biçiminde düzenleyelim. Her iki tarafın karesini alarak karekökten kurtulmadan önce bir kenara $3/2 \leq x \leq 2$ olması gerektiğini de not edelim.

$$\begin{aligned}\sqrt{2-x} &= 2x - 3 \\ 2 - x &= 4x^2 - 12x + 9 \\ 0 &= 4x^2 - 11x + 7\end{aligned}$$

Köklerin formülünde değerleri yerine yazarsak $x_1 = 1$ ve $x_2 = 7/4$ bulunur. $3/2 \leq x \leq 2$ olması gerektiğinden eşitliği sağlayan tek x değeri $7/4$ 'tür.

Soru. $(x+1)^2 - 3(x+1) - 4 = 0$ denklemini sağlayan x 'lerin toplamı kaçtır?

Çözüm: İstersek, parantezleri açarak, karşımıza çıkacak olan ikinci dereceden denklemi çözeriz. Ama öyle çok soru çözdük. Başka bir teknik görelim.

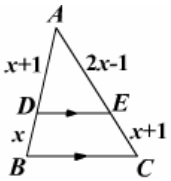
$x+1 = t$ olsun. Denkleminiz $t^2 - 3t - 4 = 0$ halini alır. $t^2 - 3t - 4 = (t-4) \cdot (t+1) = 0$ olduğundan $t = 4$ veya $t = -1$ olur. Şimdi geri dönüşüm yapalım: $x+1 = 4$ veya $x+1 = -1$ olur. O halde x 'in alabileceği değerler 3 ve -2 olduğundan toplamı 1 olur.

Soru. $\frac{x+2}{x^2-9} + \frac{4}{x-3} = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözüm: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ olduğundan toplamın ikinci ifadenin paydasını $(x+3)$ ile genişletelim:

$$\frac{x+2}{x^2-9} + \frac{4(x+3)}{x^2-9} = \frac{5x+14}{x^2-9} = 0$$

olduğundan $x = -14/5$ olur. Eğer $x = 3$ veya $x = -3$ bulsaydık, bu değerler, bize verilen eşitliği tanımsız yapacağından cevabımız boşküme olacaktı. Yani kesirli ifadelerde, bulduğumuz değerlerin paydayı sıfır yapıp yapmadığını incelemeyi unutmamalıyız. Benzer incelemeleri köklü ifadelerde de yapın!



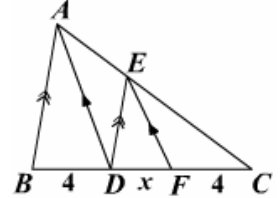
Soru. ABC üçgeninde $DE \parallel BC$ veriliyor. $|AD| = x+1$, $|DB| = x$, $|AE| = 2x-1$ ve $|EC| = x+1$ olduğuna göre x kaçtır?

Çözüm: Tales Teoremi'nden $|AD|/|DB| = |AE|/|EC|$ olduğunu biliyoruz. Kuralım orantımızı.

$\frac{x+1}{x} = \frac{2x-1}{x+1}$ olduğundan $2x^2 - x = x^2 + 2x + 1$ olur. Düzenlenirse $x^2 - 3x - 1 = 0$ çıkar. Denklem

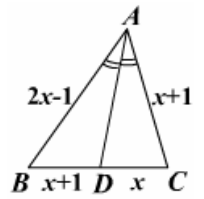
çözülürse $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ olur. Fakat uzunluklar negatif olamayacağından $x > 1/2$ olmalı, yani x , denklemin pozitif olan kökü olmalıdır. O halde $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Soru. Yandaki ABC üçgeninde $DE \parallel AB$ ve $AD \parallel EF$ veriliyor. $|BD| = |FC| = 4$ ise $|DF| = x$ kaçtır?



Çözüm: Yine Tales Teoremi'ni kullanacağız. $|CF|/|FD| = |CE|/|EA| = |CD|/|DB|$ olduğundan $\frac{4}{x} = \frac{x+4}{4}$ olmalıdır. $x^2 + 4x = 16$ denklemini düzenlenirse $x^2 + 4x - 16 = 0$ halini alır. Burada dikkat etmemiz gereken nokta x 'in pozitif olma şartıdır. O halde iki kökten pozitif olanı alacağız. Ben aldım: $x = 2 + 2\sqrt{5}$.

Soru. ABC üçgeninde AD iç açıortaydır. Uzunluklar şekilde verildiği gibi ise AB kenarının boyu kaçtır?

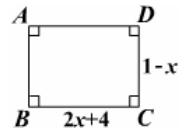


Çözüm: İçaçıortay Teoremi'nden $|AC|/|CD| = |AB|/|BD|$ olduğunu biliyoruz.

Orantımızı kurarsak $\frac{x+1}{x} = \frac{2x-1}{x+1}$ çıkar ki bunu

daha önceki sorularda çözmüş ve $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ bulmuştuk. Bu şartlar altında $|AB| = 2x - 1 = 2 + \sqrt{13}$ olur.

Soru. $ABCD$ dikdörtgeninin kenar uzunlukları şekilde verildiği gibidir. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç olabilir?



Çözüm: Dikdörtgenin alanı eni ile boyunun çarpımı olduğundan

$$\begin{aligned}\text{Alan}(ABCD) &= (2x+4)(1-x) \\ &= -2x^2 - 2x + 4 \\ &= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

olur. Buradan da $x = -\frac{1}{2}$ için alanın en çok $\frac{9}{2}$ olabileceğini anlarız.

‘‘Hocam, x nasıl negatif olabilir ki?’’ demeyin. x değil, uzunluk negatif olamaz. Yani $-2 < x < 1$ olduğu sürece uzunluklar negatif olmaz. Bu soruyu, ilerde, parabol dersinde daha kısa yoldan çöz-meyi öğreneceğiz.

Alıştırmalar.

Aşağıdaki soruları aksi iddia edilmedikçe x için ve \mathbb{R} kümesinde çözünüz.

1.
 $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2.
 $x^2 - 7x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3.
 $x^2 + 32x + 56 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

4.
 $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5.
 $5x^2 - 99x + 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6.
 $3x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7.
 $ax^2 - (a^2b + b)x + ab^2 = 0$ denkleminin x için çözüm kümesini bulunuz.

8.
 $34x^2 - 41x - 15 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9.
 $7x^2 - 23x - 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10.
 $(x - 1)^2 - 4(x - 1) - 32 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

11.
 $(x + 2)^2 + 15(x + 2) - 54 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

12.
 $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

13.
 $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

14.
 $x^4 + 18x^2 + 32 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

15.
 $m^4 - 16m^2 + 28 = 0$ denkleminin m için çözüm kümesini bulunuz.

16.
 $2x^2 + 15xy + 7y^2 = 0$ denkleminin x ve y için çözüm kümesini bulunuz.

17.
 $7x^2 - 20xy - 3y^2 = 0$ denkleminin x ve y için çözüm kümesini bulunuz.

18.
 $x^2 - y^2 - 4 + 4y = 0$ denkleminin x ve y için çözüm kümesini bulunuz.

19.
 $100 \cdot x^{10} + 20 \cdot x^5 + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

20.
 $\sqrt{3-x} - x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

21.
 $\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

22.
 $\sqrt{2x+13} + x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

23.

$x \cdot |x - 2| = 2 - x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

24.

$xy + 3x = 4$ ve $xy - x = -4$ denklem sistemini sağlayan x ve y kaçtır?

25.

$x^2y - x^2 = 1$ ve $xy = 2$ denklem sistemini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

26.

$\frac{x^2}{2x+3} = -3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

27.

$x - 4 + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{x} + \frac{1}{x+1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

28.

$\frac{x+5}{x+3} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

29.

$\frac{x^2+1}{x-1} + x^2 = 1 + \frac{x^2+1}{x-1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

30.

$\frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}} = -\frac{x+1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

31.

$\frac{1}{3 - \sqrt{9 - \sqrt{x}}} - \frac{1}{3 + \sqrt{9 - \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

32.

$\sqrt{3x+10} = 2x - 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

33.

$\frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

34.

$\frac{-2x}{x^2+6x} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

35.

$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Kökler Toplamını ve Kökler Çarpımını Kökleri Bulmadan Bulmak. Bana hiç öyle bakmayın, bu mümkün! Hatta inanamayacağınız kadar da basit.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğunu bildiğimizden bu iki ifadeyi toplarsak kökler toplamını, çarparsak kökler çarpımını, çıkartırsak da kökler farkını buluruz. Yalnız, ben canım öyle istedi diye eksili köke " x_1 ", artılı köke " x_2 " dedim. Anlayacağınız bunlar yer değiştirebilirler. Bundan dolayı kökler farkına bulduğumuz formül, diğer türlü düşünüldüğünde işaret değiştirmelidir. Bunun için sorularda ya bir kökün diğerinden büyük olduğunu belirtir veya kökler farkının pozitif değerini filan sorar. Siz de buna dikkat edin. İşini garantiye almak isteyen kökler farkı formülünü mutlak değer içinde düşünebilir. Şimdi söylediklerimizi sırasıyla yapalım:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|. \end{aligned}$$

Böyle daha nice formül bulmak mümkün. Yukarıda iki kökün toplamını, çarpımını ve farkını veren formüller bulduk. Aynı formülleri, köklerin

kendisi için değil de çarpmaya göre tersleri için, kareleri için, küpleri için ve aklınıza gelen herhangi durumlar için de bulabiliriz. Bulun! Aynı aşadaki soruda yaptığımız gibi yapın.

Soru. $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. $x_1 < x_2$ farzederek kökler toplamını, kökler çarpımını, diskriminantı, kökler farkını, köklerin kareler farkını, köklerin kareleri toplamını, köklerin küpleri farkını, köklerin çarpmaya göre tersleri toplamını, köklerin çarpmaya göre terslerinin kareleri toplamını ve kökleri ayrı ayrı hesaplayınız.

Çözüm: Denkleminde $a = 1$, $b = -2$ ve $c = -4$ olduğunu not edelim.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2,$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20,$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-\sqrt{20}}{1} = -2\sqrt{5}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -2\sqrt{5} \cdot 2 = -4\sqrt{5},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2^2 - 2(-4) = 12,$$

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1 x_2 (x_1 - x_2) = (-2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot (-4) \cdot (-2\sqrt{5}) = -40\sqrt{5} + 24\sqrt{5} = -16\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-b/a}{c/a} = \frac{-b}{c} = \frac{-1}{2},$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$

Kökleri formülleri kullanmadan bulmak içinse $x_1 + x_2 = 2$ ve $x_1 - x_2 = -2\sqrt{5}$ eşitliklerini taraf tarafa toplayacağız.

$$x_1 = 1 - \sqrt{5} \text{ ve } x_2 = 1 + \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

Soru. $(3m - 2)x^2 + (2 - 4m)x + 5m - 6 = 0$ denkleminin kökler çarpımı 2 ise kökler toplamı kaçtır?

Çözüm: Kökler çarpımının formülü $\frac{c}{a}$ olduğundan $\frac{5m - 6}{3m - 2} = 2$ olmalı. $5m - 6 = 6m - 4$ eşitliğinden $m = -2$ bulunur. O halde denklem $-8x^2 + 10x - 16 = 0$ halini alır ki kökler toplamı da $-b/a$ formülünden $5/4$ olarak bulunur.

Soru. $2x^2 - 10x + m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 - 2x_2 = -10$ olduğuna göre $x_1 x_2 + m$ toplamı kaçtır?

Çözüm: x_1 ve x_2 'ye bağlı iki bilinmeyenli bir denkleminiz var. Aynı şeylere bağlı ikinci bir denklem daha bulabilirsek, ki bundan kolay ne var, soru çözülmüş sayılır.

$x_1 - 2x_2 = -10$ ve $x_1 + x_2 = 5$ denklemleri ortak çözümlürse $x_1 = 0$ ve $x_2 = 5$ olarak bulunur. Herhangi birini denklemden yerine yazıp (sağlaması gerekir), $m = 2$ olduğu anlaşılır. O halde $x_1 x_2 + m = 2$ 'dir.

Soru. $x^2 - 9x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ toplamı kaçtır?

Çözüm: $x_1 + x_2 = 9$ ve $x_1 x_2 = 4$ eşitliklerini kenarda bekletiyoruz. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = T$ olsun. Eşitliğin her iki yanının karesini alalım. $(x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2} = T^2 = 9 + 2 \cdot 2 = 13$ olur. Buradan $T = \sqrt{13}$ 'e ulaşmak hiç de zor olmasa gerek. Niye pozitif karekökünü aldık bir düşünün ama.

Soru. $5^{2x} - 6 \cdot 5^{x+1} + 125 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

Çözüm: "İkinci dereceden denklemlerin arasında bu denklemin işi ne?" dediğinizi duymayayım sakın!. $5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$ olduğundan $0 = 5^{2x} - 6 \cdot 5^{x+1} + 125 = 5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125$ olur. 5^x değerine A dersek; $A^2 - 30A + 125 = 0$ denkleminde ulaşırız ki, alın size ikinci dereceden bir denklem, çözün çözebildiğiniz kadar!. $0 = A^2 - 30A + 125 = (A - 5)(A - 25)$ olduğundan $A = 5$ veya $A = 25$ 'dir. Tabii bize A 'yı soran yok. A bizim hayali kahramanımız. Gerçek olan 5^x 'dir. $5^x = 5$ ve $5^x = 25$ eşitliklerinden $x = 1$ veya $x = 2$ bulunur, o halde bu x değerlerinin çarpımı 2'dir.

Alıştırma.

36.

$x^2 + 5x - 2 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

37.

$x^2 - 3x - 6 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

38.

$2x^2 + 5x - 8 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

39.

$3x^2 - 6x + 11 = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

40.

$(\frac{3x+2}{x})^2 - (\frac{3x+2}{x}) - 6 = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

41.

$|x^2 - 9| - |x - 3| = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

42.

$|x^2 - 7x + 12| - |4x - 16| = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

43.

$\frac{x-1}{x-3} + \frac{x+1}{x+5} = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

44.

$(2-x)^2 - 5|x-2| + 6 = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

45.

$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

46.

$(3m-2)x^2 + (2-4m)x + 5m-6 = 0$ denkleminin kökler çarpımı $\frac{2}{3}$ ise m kaçtır?

47.

$(2m+1)x^2 - (3m+3)x + 4m-3 = 0$ denkleminin kökler toplamı $-\frac{1}{2}$ ise $m=?$

48.

$2x^2 - 8x + m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 - 2x_2 = -5$ olduğuna göre m kaçtır?

49.

$x^2 - 8x + 2m - 2 = 0$ denkleminin köklerinden biri, diğerinin 3 katı ise m kaçtır?

50.

$(2a-3)x^2 - (2a+2)x + 3a-2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1 x_2$ olduğuna göre a kaçtır?

51.

$3x^2 - (m+1)x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \frac{4}{9}$ ise m kaçtır?

52.

$m > 0$ ve $x^2 - mx + 16 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 = x_2^3$ ise $x_1 + x_2$ kaçtır?

53.

$(m-2)x^2 - (m+1)x + m+2 = 0$ denkleminin köklerinin x_1 ve x_2 olduğu biliniyor. $(3x_1-2) \cdot (3x_2-2) = 0$ ise m kaçtır?

54.

$x^2 + (p-3)x + 2q = 0$ denkleminin kökleri p ve q ise $2q - 3p = ?$

55.

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}$ ise m kaçtır?

56.

$x^2 + (2-a-a^2)x - a^2 = 0$ denkleminin kökler toplamı 0 ise, bu denklemin sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

57.

$x^2 - mx + n - mx = 0$ ve $x^2 + nx + m + nx = 0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması 4 olduğuna göre $m - n$ farkı kaçtır?

58.

$(2m+3)x^2 - (2m+4)x + m = 0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması -1 ise karelerinin toplamı kaçtır?

59.

$(2p+1)x^2 - (p-1)x + 2p-2 = 0$ denkleminin köklerinin geometrik ortalaması 4 ise köklerin aritmetik ortalaması kaçtır?

60.

$|x^2 + 2x - 3| = |x^2 - 3x + 2|$ denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

61.

$\sqrt[5]{5 - \sqrt{10x - x^2}} = 1$ denkleminin köklerinin çarpımına göre terslerinin karelerinin toplamı kaçtır?

62.

$-qx^2 + x - 4p = 0$ denkleminin kökleri p ve q ise $\sqrt{p^2 + q^2} = ?$

63.

$x^2 - 12x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ kaçtır?

64.

$x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1 > x_2$ iken $x_1^4 - x_2^4 = ?$

Ortak kökler. Bazen bir veya daha çok sayı, iki veya daha çok denklemi birden sağlar. O durumda birden fazla denklemin kökü olmuş olurlar. Bu yüzden de "ortak" sıfatıyla anılırlar. Hatta tüm kökleri ortak olan ama birbirlerine görünüşte hiç benzemeyen denklemler de yazmak mümkündür. $2^x = 16$ ile $x - 4 = 0$ denklemlerini düşünün. Her ikisinin de tek kökü vardır, 4. İşte 4, bu iki denklemin ortak köküdür.

Soru. $x^2 + 2x - 5 + a = 0$
 $x^2 + 4x - 7 + a = 0$

denklemlerinin birer kökü ortak ise a kaçtır?

Çözüm: Ortak olan köke m diyelim. O halde m değeri her iki denklemi birden sağlamalıdır.

$$m^2 + 2m - 5 + a = 0$$

$$m^2 + 4m - 7 + a = 0$$

eşitliklerinden m 'yi bulmak amacıyla denklemleri eşitleyelim:

$$m^2 + 2m - 5 + a = m^2 + 4m - 7 + a$$

eşitliğinden $2m - 5 = 4m - 7$ yani $m = 1$ bulunur. Ortak kökü bulduk. Şimdi bu kökü canımızın istediği denklemde yerine koyacak ve sağlamasını bekleyeceğiz. Bunu yapınca $a = 2$ olduğunu görürüz.

Soru. $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 3, $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin bir kökü -5 'tir.

Bu iki denklemin diğer kökleri ortak ise $a - c$ farkı kaçtır?

Çözüm: Ortak olan kök yine m olsun. O halde ilk denklemin kökleri 3 ve m , ikinci denklemin kökleri -5 ve m olur. Diğer yandan kökler toplamının formülü gereği $3 + m = -a$ ve $-5 + m = -c$ 'dir.

$$a - c = (-3 - m) - (-5 - m) = -8 \text{ bulunur.}$$

Bu soruda a ve c ile alakalı şeyler sorduğundan kökler toplamından gittik, eğer b ve d ile alakalı bir soru gelseydi, kökler çarpımından gitmek daha mantıklı olurdu.

Kökleri bilinen ikinci dereceden denklemlerin yazılması. Şu ana kadar bize verilen her türlü ikinci dereceden denklemin köklerini bulmayı öğrendik, sadece bunla da kalmadık, toplamlarını, farklarını, çarpımlarını bile bulduk. Şimdi de bize denklemin köklerini verip, kökleri bu olan denklem veya denklemleri bulun diyecek.

Yine kolay anlamanız amacıyla ilk örneğimizi sayısal verilerle çözelim:

Soru. Kökleri 3 ve 4 olan ikinci dereceden bir denklem yazınız.

Çözüm: Kök ne demektir? Denklemi sağlayan değer. Yani 3 ve 4 bu denklemi sağlıyormuş. Polinomlar dersinden hatırlarsınız, bir $P(x)$ polinomu $(x - 3)$ ile bölünebiliyorsa $P(3) = 0$ idi. Yani $P(x)$ polinomunda x görülen yere 3 yazılırsa, denklem sağlanıyordu. Burada da hem 3 hem de 4 yazılınca sağlanıyor olmalı. O halde denklemimiz hem $(x - 3)$ 'e hem de $(x - 4)$ 'e bölünüyor olmalı, yani bunları birer çarpan olarak içermeli. Yalnız bunları çarpan olarak içeren sonsuz tane ikinci dereceden denklem vardır. Mesela $2(x - 3)(x - 4)$, $3(x - 3)(x - 4)$ veya $4(x - 3)(x - 4)$. Daha da yazabileceğimizi anlamışsınızdır. Dolayısıyla biz bu mealde sorulan soruları "başkatsayısı 1 olan" anlamında cevaplayacağız. Şimdi genel formülü bulabiliriz:

Soru. Başkatsayısı 1 olup, kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

Çözüm: $(x - x_1)$ ve $(x - x_2)$ çarpanlarını içereceğini artık biliyoruz. Başkatsayısı da 1 olduğundan bu denklem kesinlikle $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ olmalı. Durmayalım, parantezleri açalım bakalım: $x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$ yani $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ olur. $x_1 + x_2$ toplamını T , x_1x_2 çarpımını da $\Ç$ ile gösterirsek, genel formülümüz

$$x^2 - Tx + \Ç = 0$$

halini alır. Eğer başkatsayısı 1 değil de k olanı bulun deseydi, bulduğumuz bu denklemi k ile çarpmamız yeterdi,

$$k(x^2 - Tx + \zeta) = kx^2 - kTx + k\zeta = 0$$

gibi yani.

Soru. Kökleri $1 + \sqrt{2}$ ve $1 - \sqrt{2}$ olup, başkatsayısı 3 olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

Çözüm: $k = 3$, $T = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ ve $\zeta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$ olduğundan $k(x^2 - Tx + \zeta) = 3(x^2 - 2x + (-1)) = 3x^2 - 6x - 3 = 0$ olmalıdır.

Soru. Başkatsayısı -3 olup, köklerinden biri $5 - \sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazınız.

Çözüm: İkinci dereceden denklemlerin köklerinin formülünü hatırlayınız.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

idi. Buradan şöyle bir mantık yürütmekte mahzur görmüyoruz. Eğer köklerinden biri irrasyonel ise diğeri de irrasyoneldir. Çünkü denklemin diskriminantı yani Δ 'sı tamkare değilmiş ki ilk kök irrasyonel çıktı, e aynı köklü ifade diğerkökün formülünde de var. O halde irrasyonel olması kaçınılmaz. Diğer yandan katsayıların rasyonel olması bize diğerkökün sadece irrasyonel olmakla kalmayıp, ilk kökün eşleniği olması gerekliliğini de anlatır. Eşleniği olmasaydı hem kökler çarpımı rasyonel olmazdı hem de belki kökler toplamı. Ki köklerin formüllerine ayrı ayrı bakarsanız, bunların birbirlerinin eşleniği olması gerektiğini zaten anlarsınız. Bu sebeple bir kök $5 - \sqrt{2}$ ise diğerkök $5 + \sqrt{2}$ olmalıdır. Bu yüzden kökler toplamı 10 ve kökler çarpımı 23'tür. Bunları formülümüzde yerine yazarsak; $k(x^2 - Tx + \zeta) = -3(x^2 - 10x + 23) = -3x^2 + 30x - 69 = 0$ buluruz.

Alıştırmalar.

65.

Kökleri 2 ve 3 olup, başkatsayısı 1 olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

66.

Kökleri 3 ve -5 olup, başkatsayısı -2 olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

67.

Kökleri -2 ve -4 olup, başkatsayısı $1/2$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

68.

Kökleri $1/2$ ve $-1/3$ olup, başkatsayısı 1 olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

69.

Başkatsayısı 3 olup, köklerinden biri $4 - \sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazınız.

Şimdi de iki veya daha çok ikinci dereceden denklemin köklerinin birbirleri arasındaki bazı ilişkileri inceleyeceğiz. Örneğin, önümüzde duran bir ikinci dereceden denklemin köklerini bulmadan, öyle bir denklem yazacağız ki, kökleri, önümüzdeki denklemin köklerinin ikiye katı, yarısı, bazen de karesi olacak. Olmayacak bir şey yok. Yeter ki iste! Nasıl yapacağımızı aşağıdaki sorunun çözümünde detaylı olarak anlattım.

Soru. Öyle bir ikinci dereceden denklem yazınız ki, kökleri $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin ikiye katı olsun.

Çözüm: Yok daha neler! Aslında uzun ama insanın aklına önce şöyle bir yol geliyor: Bana vermiş olduğu denklemin köklerini bulsam, bu köklerin herbirini 2 ile çarpsam, daha sonra da bu köklere sahip ikinci dereceden denklemi yazsam... Bravo, doğru, ama çok uzun olur. Hatta sırf bu yoldan gittiğine veya kısa yolunu bilmediğine pişman ol diye verdiği denklemin kökleri rasyonel olmaz, aynen bu sorudaki gibi. Bazen reel sayı bile değildir, bir sonra sorulacak soruda olacağı gibi. Onun için siz aşağıda yaptığımız çözüme kulak kabartın: $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin köklerine a ve b diyelim. Köklerin toplamı ve çarpımı formüllerinden $a + b = 3$ ve $ab = 1$ olduğunu biliyoruz, not edelim. Kökleri $2a$ ve $2b$ olan ikinci dereceden denklemi arıyoruz. E, biz bunu bulmayı öğrenmiştik.

$x^2 - Tx + \zeta = x^2 - (2a + 2b)x + (2a \cdot 2b) = 0$ olur. $a + b$ ve ab değerleri yerlerine yazılırsa $x^2 - 6x + 4 = 0$ bulunur.

Soru. $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerinin karelerini kök kabul eden ikinci dereceden bir denklem yazınız.

Çözüm: $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerine a ve b diyelim. $a + b = 2$ ve $ab = 5$ olduğunu bili-

yoruz. Birazdan kökleri a^2 ve b^2 olan ikinci dereceden denklemi yazacağımızdan $a^2 + b^2$ ve a^2b^2 değerlerini hemen bulalım. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2^2 - 2 \cdot 5 = -6$ ve $a^2b^2 = 25$ olduğundan aranan denklem $x^2 + 6x + 25 = 0$ denklemdir.

Alıştırmalar.

70.

$x^2 - 2x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $(x_1 - 2)$ ve $(x_2 - 2)$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

71.

$x^2 - x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $2x_1$ ve $2x_2$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

72.

$x^2 + x - 7 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $(3x_1 + 1)$ ve $(3x_2 + 1)$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

73.

$x^2 + 2x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

74.

$x^2 + 3x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri x_1^2 ve x_2^2 olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

75.

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $(\frac{1}{x_1})^2$ ve $(\frac{1}{x_2})^2$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

76.

$x^2 + 3x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $(x_1 + \frac{1}{x_2})$ ve $(x_2 + \frac{1}{x_1})$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

77.

$x^2 - x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $x_1^2 \cdot x_2$ ve $x_2^2 \cdot x_1$ olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

78.

$x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri x_1^3 ve x_2^3 olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.

III. Üçüncü Dereceden Denklemler. İkinci dereceden denklemleri bu kadar iyi çalıştıktan sonra, “Yok mu bunun daha büyük dereceden olanları?” dediğinizi duyar gibiyim. İnsanın iştahı kabarıyor. a sıfırdan farklı olmak üzere $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ biçimindeki denklemlere **üçüncü dereceden denklemler** denir. Böyle denklemlerin “ x_1 ”, “ x_2 ” ve “ x_3 ” diye adlandıracağımız üç kökü vardır. Tabi, bu kökleri bulmak birinci ve ikinci dereceden denklemlerde olduğu kadar kolay değil. Ama bu köklerin nasıl bulunduğunu merak edenler için yazının ilerleyen kısımlarında bu metodu açıkladım. Sadece üçüncü değil, dördüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmaya yarayan metodu da yazdım.

Keşke benim de sizler gibi daha lisede okurken bu metotları öğrenebilme şansım olsaydı. ☺

Üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak çok karışık olsa da kökleri arasında çok basit ilişkiler vardır. Bunları kanıtsız vereceğiz:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}.$$

Ayrıca, belki sırası değil ama, bir denklem kaçınıcı dereceden olursa olsun, köklerinin toplamı $-\frac{b}{a}$ ’dır. Ne demek istediğimizi anlamışsınızdır. x^{n-1} ’li terimin katsayısının x^n ’li terimin katsayısına oranının ters işaretlisi. Şimdi biraz bu formülleri kullanacağımız sorular çözeceğiz. Yalnız bu tip sorularda sıkça görülen ortalamaları tekrar hatırlamakta fayda var:

1. Aritmetik ortalama. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ reel sayılarının aritmetik ortalaması (ortası)

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanır.

a ve b gibi iki reel sayının aritmetik ortası

$\frac{a+b}{2}$ ve a, b, c gibi üç reel sayının aritmetik

ortası ise $\frac{a+b+c}{3}$ olur.

2. Geometrik ortalama. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pozitif reel sayılarının geometrik ortalaması (ortası)

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

şeklinde tanımlanır. Geometrik ortanın diğer bir adı ise **orta orantıdır**.

a ve b gibi iki pozitif reel sayının orta orantısı

\sqrt{ab} ve a, b, c gibi üç pozitif sayının geometrik ortası ise $\sqrt[3]{abc}$ olur.

3. Harmonik ortalama. Sıfırdan farklı $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ reel sayılarının harmonik ortalaması (ortası)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

şeklinde tanımlanır.

a ve b gibi sıfırdan farklı iki reel sayının

harmonik ortası $\frac{2ab}{a+b}$ ve a, b, c gibi sıfırdan

farklı üç reel sayının harmonik ortası ise

$\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ olur.

4. Aritmetik dizi. Ardışık iki teriminin farkları sabit olan dizilerdir.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ gibi bir aritmetik dizide herhangi bir terim kendisine eşit uzaklıkta bulunan komşularının aritmetik ortasıdır. Örneğin,

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}.$$

5. Geometrik dizi. Ardışık iki teriminin oranı sabit olan dizilerdir.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ gibi bir geometrik dizide herhangi bir terim kendisine eşit uzaklıkta bulunan komşularının geometrik ortasıdır. Örneğin,

$$x_2 = \sqrt{x_1 x_3}.$$

Soru. $x^3 - 3x^2 - mx - 64 = 0$ denkleminin köklerinin aritmetik ve geometrik ortasının toplamı kaçtır?

Çözüm: Denkleminin köklerinin aritmetik orta-

sı $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$, diğer yandan geometrik

ortası $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = \sqrt[3]{64} = 4$ olduğundan cevabımız 5 olmalıdır.

Soru. $2x^3 - (3m + 4)x^2 - 4m + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun. $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ olduğuna göre $m + x_1 x_2 x_3$ toplamı kaçtır?

Çözüm: $5 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{3m+4}{2}$ olduğun-

dan $3m + 4 = 10$, dolayısıyla $m = 2$ bulunur. Bu

durumda denkleminiz $2x^3 - 10x^2 - 7 = 0$ halini

aldığından $x_1 x_2 x_3 = \frac{-d}{a} = \frac{7}{2}$ olur. O halde sorulan

$m + x_1 x_2 x_3$ toplamı $2 + 7/2 = 11/2$ olur.

Soru. $x^3 + 3x^2 - mx + 15 = 0$ denkleminin kökleri

x_1, x_2 ve x_3 ise $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3}$ kaçtır?

Çözüm: $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1 x_2 x_3}$
 $= \frac{-b/a}{-d/a} = \frac{b}{d} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ olur.

Soru. $x^3 + wx^2 - 3x + 15 = 0$ denkleminin köklerinin harmonik ortası kaçtır?

Çözüm: Kökler her zamanki gibi x_1, x_2 ve x_3 olsun. Harmonik ortanın formülü gereği

$$\frac{2x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3} = \frac{2(-d/a)}{c/a} = \frac{-2d}{c} = 10$$

bulunur.

Soru. $x^3 + kx - 12 = 0$ denkleminin tüm köklerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = 0$ olduğundan üç kö-

kün üçü de pozitif veya üçü de negatif olamaz, çünkü toplamı sıfır olamazdı. O halde ya ikisi pozitif biri negatif, ya da ikisi negatif biri pozitifdir. Hangisi olduğuna da kökler çarpımından karar vereceğiz.

$x_1 x_2 x_3 = \frac{-d}{a} = 12$ olduğundan iki kökü negatiftir.

Eğer tek kökü negatif olsaydı kökler çarpımı da negatif çıkardı. Umarım anlamışsınızdır.

Alıştırma

79.

$5x^3 - (3m + 4)x^2 - 3m + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ çarpımı kaçtır?

80.

$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

81.

$x^3 + x^2 + 2x - 5 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

82.

$x^8 + x^5 - x + 2 = 0$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

83.

$x^{17} - x^{16} + 2x - 3 = 0$ denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

84.

$x^3 + mx^2 - 7x + 15 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 'tür.

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{1}{3}$$

ise m kaçtır?

85.

$x^3 - 3x^2 + (m + 2)x + m - 2 = 0$ denkleminin kökünün aritmetik ortalaması, üçüncü köke eşit olduğuna göre m kaçtır?

86.

$2x^3 + 6x^2 + (2m - 1)x + m + 1 = 0$ denkleminin kökleri, aritmetik dizi oluşturuyorsa m kaçtır?

87.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamı kaçtır?

88.

Başkatsayısı 2 olup, kökleri 1, 2, 3 olan üçüncü dereceden denklemi yazınız.

89.

Başkatsayısı -1 olup, kökleri 2, -3 , 4 olan üçüncü dereceden denklemi yazınız.

90.

Başkatsayısı 1 olup, köklerinden biri 1 diğeri $1 - \sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklemi yazınız.

91.

İki kökü 3 ve $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ olup, başkatsayısı 2 olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklemin köklerinin çarpımı kaçtır?

92.

Bir kökü $7 - \sqrt{2}$, bir diğeri -3 olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklemin köklerinin toplamı kaçtır?

93.

$x^3 - qx^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerinin harmonik ortası kaçtır?

94.

$x^3 - 6x^2 + ax + 2 = 0$ denkleminin köklerinden biri diğer iki kökün toplamı ise a kaçtır?

95.

$x^3 + bx - 8 = 0$ denkleminin üç kökü de reel sayıdır. Bu köklerden kaçının pozitif, kaçının negatif olduğunu bulunuz.

96.

Başkatsayısı 1 ve kökleri hem aritmetik dizi, hem de geometrik dizi oluşturan üç ardışık sayı olan üçüncü dereceden denklemi bulunuz.

Bir yol. Bazı üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak için illa da bir formül veya ilerde açıklayacağımız metodu bilmeye gerek yoktur. Örneğin, $x^3 = 8$ denklemini hepimiz çözebiliriz. Bu kadar basit olmasa da bazen başka yollar vardır. Bunlardan birincisi, kökler toplamı, köklerin ikiye ikiye çarpımlarının toplamı ve köklerin çarpımının formüllerini bildiğimizden üç bilinmeyenli üç denklem çözülebilir. Ama bu çözüm çoğu zaman kabus gibidir.

İkinci yol ise verilen üçüncü dereceden denklemi çarpanlarına ayırmaktır. Becerebilirsek tabii ki... Üçüncü yol ise en mantıklısı, ama tekrar hatırlatalım, buna her denklem izin vermez. Şöyle:

Kökler çarpımının $-\frac{d}{a}$ olduğunu hatırlayın. O

halde köklerin hepsi bu $-\frac{d}{a}$ sayısının bölenleridir. Dua edelim ki tam bölünen olsunlar. Tam bölenleri sağlamasa bile deneme yanılma yoluyla tüm derdimiz sadece bir kökü bulmak olacak. İşte böyle bir kök bulabilirsek, örneğin bulduk ve o kök 1 olsun, o halde denklem $(x - 1)$ ile tam bölünebilmeli diyerek, denklemi $(x - 1)$ 'e böleceğiz. Bölümde çıkan ikinci dereceden denklem de bize diğer iki kökü altın tepside sunacak. Hemen bir örnek çözeyim:

Soru. $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$ denkleminin tüm reel köklerini bulunuz.

Çözüm: 2'nin bölenlerini, tek tek, sağlıyor mu diye deneyeceğiz. Ben denedim, "1" sağladı. Hemen denklemi $(x - 1)$ 'e bölelim.

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 4x + 2 \quad | \quad x - 1 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 4x + 2 \\ - 2x^2 - 2x \\ \hline -2x + 2 \\ - -2x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^2 + 2x - 2 = 0$ denklemini çözerek de diğer iki kökü merak ediyorsanız bulabilirsiniz.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x + 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

olduğundan $x + 1 = \pm\sqrt{3}$ olur. Buradan da diğer iki kök $-1 - \sqrt{3}$ ve $-1 + \sqrt{3}$ bulunur.

Alıştırma

Aşağıda verilen üçüncü dereceden denklemlerin reel köklerini bulunuz.

97.

$$x^3 - 4x = 0$$

98.

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0$$

99.

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

100.

$$3x^3 - 3xy^3 = 0$$

101.

$$8x^3 - y^3 = 0$$

102.

$$x^3y^3 - 1 = 0$$

103.

$$64 - 27a^3 = 0$$

104.

$$2x^3 + 7x^2 + 5x = 0$$

105.

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$$

106.

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

107.

$$x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$$

108.

$$2x^3 - x^2 - 5x - 30 = 0$$

109.

$$3x^3 - x - 188 = 0$$

110.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

111.

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

Eşitsizlikler

Sayılar dersinin sonunda bu dersin başını görmüş-tük hatırlarsanız. O zamanlar adına sadece birinci dereceden denklemleri içeren manasında "Basit Eşitsizlikler" demiştik. Şimdi de daha büyük dereceden denklemleri içeren "Zor Eşitsizlikler"e geldik☺

Eşitsizlik çözmek, kaba tabirle, bir f_x fonksiyonunun hangi x değerleri için pozitif, hangi x değerleri için negatif ve hangi x değerleri için sıfır olduğunu bulma işlemidir.

Kuralı birinci dereceden bir polinom olan fonksiyonlar için eşitsizlik çözmeyi öğrenmiştik. Şimdi de daha büyük dereceden fonksiyonlar için öğreneceğiz. Önce birinci dereceden olanları nasıl çözdüğümüzü hatırlayalım:

Örnek. $f(x) = 4x - 8 < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı aralığı bulalım.

Çözüm: İstemediğiniz kadar çok yol var. Biz iki tanesini vereceğiz. Siz bu tip soruları birinci yoldan çözeceksiniz ama ikinci yol daha büyük dereceden eşitsizlikleri çözerken kullanacağımız yol olacak, ona da bakın, alıştırmaya olsun.

Birinci yol. Aynı eşitlikmiş gibi davranacağız:

$$\begin{aligned} 4x - 8 &< 0, \\ 4x &< 8, \\ x &< 2. \end{aligned}$$

İkinci yol. $f(x) = 4x - 8 = 0$ denkleminin kökünü, yani 2'yi bir kenara yazın. Bir sayı doğrusu çizip üzerinde işaretleyebilirsiniz de, size kalmış. Sonra fonksiyonun kuralının başkatsayısının işaretini 2'nin sağına yazın, zıt işaretlisini de soluna. Şöyle yani:

$$- \quad 2 \quad +$$

Bizden $f(x)$ 'in sıfırdan küçük olduğu yani negatif olduğu yerler sorulduğundan, bu da bizim tasvirimizde 2'nin solunda bulunduğundan, çözüm aralığının 2'den küçük sayılar olduğunu anlarız. Bunu $x < 2$ şeklinde gösterebileceğimiz gibi, $(-\infty, 2)$ şeklinde de gösterebiliriz.

Birinci dereceden eşitsizlikleri çözerken bu metoda hiç gerek yok ama daha büyük dereceden eşitsizlikler de ilaç gibi geliyor.

Hemen mertebeyi yükseltiyoruz. Konu anlatımını soruyu çözerken yapayım:

Örnek.

$$(x - 2) \cdot (x + 5) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Bu sefer eşitsizliğimiz ikinci dereceden olduğundan 2 kökümüz var. Hem de birbirinden farklı iki kök. Hemen bunları bir kenara boy sırasına göre diziyoruz, küçükten büyüğe:

$$-5 \quad 2$$

Bu iki sayı, üzerine işaretlediğiniz sayı doğrusunu üç parçaya ayırır. -5'in solu, -5 ile 2 arası ve 2'nin sağı diye. İşte o 2'nin sağına fonksiyonun başkatsayısının işaretinin yazacağız. Eğer fonksiyonun kuralı çarpanlarına ayrılmış halde bize verilmişse, fonksiyonu oluşturan çarpanların başkatsayılarının işaretlerinin çarpımını en sağa yazarsanız, ki burada bu "+" oluyor, sonra sola doğru bir zıt işareti, bir aynı işareti yazacağız:

$$+ \quad -5 \quad - \quad 2 \quad +$$

Bize soruda fonksiyonun sıfırdan küçük yani negatif olduğu yerler sorulduğundan, bu da tasvirimizde -5 ile 2 arasında görüldüğünden cevabımız $(-5, 2)$ olmalıdır.

Örnek.

$$(x - 2) \cdot (x + 5) \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Bu sefer bir önceki örneğe göre köklerin değişmeyeceğini görürüz. Sadece önceden -5 ve 2 eşitsizliği sağlamıyordu, şimdi sağlıyorlar, o halde bu kökleri de çözüme dahil edeceğiz:

Ç.A.: $[-5, 2]$.

Örnek.

$$\frac{x - 2}{x + 5} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Yine kökler aynı, bu yüzden ilk çözümle bir farkı yok, cevap: $(-5, 2)$.

Örnek.

$$\frac{x - 2}{x + 5} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Hatırlarsanız, çarpanlar çarpım durumundayken "< 0" yerine "<= 0" dediğinde her iki kökü de almıştık. Şimdi de öyle yapmamız gerekir ama bu sefer $x + 5$ çarpanı payda da olduğundan -5 eşitsizliği sağlamaz. O halde cevap olarak $(-5, 2]$ demeliyiz. Unutmayın ki, kaçınıcı dereceden olursa olsun, hiçbir zaman paydanın köklerini çözüme dahil edemeyiz.

Pratik yol. Bu çözümlerden sonra, ikinci dereceden eşitsizliklerin çözümünüyle ilgili şöyle bir genelleme yapabiliriz:

Başkatsayı "+" iken,

"< 0" denmişse kökler arası,

"> 0" denmişse köklerin dışı çözüm olur.

Başkatsayı "-" iken,

"< 0" denmişse kökler dışı,

"> 0" denmişse kökler arası çözüm olur.

Kökleri çözüm aralığına dahil edip etmeyeceğimiz, eşitliğin verilip verilmediğiyle ilgilidir, bir de ifadenin payda mı paydada mı olduğuyla.

3 ve daha büyük dereceden eşitsizlik çözümleri.

Buradaki yolun, birinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız ikinci yoldan ve ikinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız tüm yollardan hiç farkı yok. Sadece burada kök sayısı bazen daha fazla oluyor, ama teknik değişmiyor.

Örnek.

$$(x + 5) \cdot (x - 2) \cdot x \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x 'lerin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm: Derhal üç kökü de yazalım:

$$-5 \quad 0 \quad 2$$

Üç çarpanın üçünün de başkatsayıları pozitif, o halde üç pozitifin çarpımı da pozitif olacağından en sağa "+" yazacağız. Bir zıttı, bir kendisi, bir zıttı, bir kendisi diye sola doğru ilerleyeceğiz:

$$- \quad -5 \quad + \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$$

Eşitsizlik " ≥ 0 " durumunda olduğundan hem "+" yazan aralıkları hem de kökleri alacağız. O halde cevabımız: $[-5, 0] \cup [2, \infty)$.

Sonsuza giden ifadelerin her zaman açık parantezle gösterildiğini de tekrar hatırlatalım.

Örnek.

$$\frac{-x + 3}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x 'lerin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm: Kökleri yazacağız ama payda çarpanlarına ayrılmış durumda olmadığından kökler bir bakışta görünmüyor. Hemen paydayı da çarpanlarına ayırıyoruz:

$$\frac{-x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{-x + 3}{(x - 2)(x + 1)} \geq 0$$

Derhal üç kökü de yazalım:

$$-1 \quad 2 \quad 3$$

Üç çarpanın başkatsayılarının işaretlerinin çarpımı negatif olduğundan en sağa "-" yazıyoruz, gerisi bildiğiniz gibi:

$$+ \quad -1 \quad - \quad 2 \quad + \quad 3 \quad -$$

Sıfırdan büyük veya eşit olduğu yerler sorulduğundan "+" yazan yerleri alacağız, eşitlik olduğundan kökleri de alacağız ama paydada olanları değil, payda olanları.

Ç.A.: $(-\infty, -1) \cup (2, 3]$.

Bir de daha daha büyük dereceden bir eşitsizlik çözelim ki hepsinin çocuk oynacağı olduğuna ikna olun:

Örnek.

$$\frac{x \cdot (-x + 3) \cdot (4 - x)}{(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (-x - 5)} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Kökler sırtıyor, hemen kaydedelim:

$$-5 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

Çarpanların başkatsayıları üç pozitif, üç negatif sayıdan olduğundan çarpımları negatif olur, en sağa "-" yazıp, sola doğru ilerleyin.

$$- \quad -5 \quad + \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad + \quad 4 \quad -$$

Sıfırdan küçük veya eşit olduğu yerler sorulduğundan, "-" yazan yerleri alacağız, eşitlik de verildiğinden payın köklerini de. O halde,

Ç.A.: $(-\infty, -5) \cup (-1, 0] \cup (2, 3] \cup [4, \infty)$

Aşağıdaki soruyu çözebilmek buraya kadar anlatılan her şeyi süper anlamış olmak demektir. Lütfen çözüme bakmadan önce kendi başınıza çözmeyi deneyiniz.

Örnek. $a^4 < a$ ve $b < |b|$ iken

$$\frac{(2x - a)bx}{ax - 1} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: a 'nın pozitif basit kesir, b 'nin de negatif olduğu gizli kapaklı verilmiş, hemen onu gördük, şimdi sorunun çözümüne geçiyoruz:

Kökler $\frac{a}{2}$, 0 ve $\frac{1}{a}$ olduğunu not edelim ama bun-

ları küçükten büyüğe sıraya dizmek gerekecek. a pozitif basit kesir olduğundan küçükten büyüğe sıra şudur:

$$0 \quad \frac{a}{2} \quad \frac{1}{a}$$

Çarpanların başkatsayıları 2, b ve a olduğundan başkatsayılar çarpımı $2ab$, yani negatiftir, o zaman en sağa "-" yazacağız:

$$+ \quad 0 \quad - \quad \frac{a}{2} \quad + \quad \frac{1}{a} \quad -$$

Sıfırdan büyük olan yerler sorulduğundan çözüm aralığımız $(-\infty, 0) \cup (\frac{a}{2}, \frac{1}{a})$ olmalıdır.

Temizlik yapıyoruz. Şimdi olaylar biraz alengirli olmaya başlıyor. İfadenin içinde reel kökü olmayan ikinci dereceden çarpanlar verilirse, olmayan kökü nereye ve nasıl yazacağız sorusuna cevap arayacağız, her zamanki gibi bulacağız.

Pozitif bir ifadeyi bir başka pozitifle çarparsanız cevap pozitif, negatifle çarparsanız cevap negatif olur. Anlayacağınız ilk pozitif sayının çarpılan ikinci ifadeye etkisi olmuyor. O halde denklemde ne duruyor ki o, atalım! Bu hakkın nerden alıyoruz peki? Hemen yazayım: Bir ikinci dereceden ifadenin daima pozitif olduğunu nereden anlarız? Grafiğinin karşımızda durduğunu düşünün, her noktası x ekseninin üst bölgesindedir değil mi? Yani or-

dinatlari pozitif olan noktaların bulunduğu bölgelerde. Ve x eksenini de kesmiyordur, çünkü kesseydi daima pozitif demezdik ki. Peki bir fonksiyon grafiği, x eksenini hiç kesmeden, hep üst bölgesindeyse, bu durum onun diskriminantı negatif olduğundan değil midir? Peki diskriminantın negatif olması bize ne anlatmak isterdi? İfadenin reel kökünün olmadığını. O halde böyle ifadeler gördük mü hemen atacağız, zaten kökü de olmadığından ilerde karşımıza dikilmez “Beni niye attın?” diye.

İkinci dereceden bir ifadenin ne zaman daima pozitif olduğunu grafiğinden değil ama denkleminin anlama metodunu da geçen dersimizde öğrenmiştik. Örneğin, eşitsizliğin sol tarafında $x^2 + 6x + 10$, $x^2 + 4x + 9$, $x^2 - 2x + 3$, $x^2 + 1$, $(x - 1)^2 + 2$, 8, 17, 156 gibi ifadeleri gördünüz mü gözlerinin yaşına bakmayın, atın! Tabi, illa ikinci dereceden olacak diye bir şart yok, bizim aradığımız özellik ifadenin daima pozitif olmasıdır. Yani, $|x| + 1$, $|x - 8| + 3$, 2^x , $\sqrt{x} + 4$, $\sqrt[4]{x-2} + 1$ gibi ifadeleri görürseniz de acımayın!

Uyarı. Şimdi söyleyeceğime çok dikkat edin. Bir ifade daima pozitif değil ama hiç negatif olmayan bir ifadeyse de atın! Hiç negatif olmayan derken neyi kastettiğimizi anlamışsınızdır, bazen sıfır da olabilen x^2 , $(x - 5)^4$, $|x|$, $|x - 2|$, \sqrt{x} ve $\sqrt[4]{x-2}$ gibi ifadelerden bahsediyorum. Yalnız bunları ilerde hatırlamak üzere atın, çünkü bu ifadelerin kökleri vardır, o kökler eşitsizliği sağlıyor da olabilir sağlamıyor da olabilir, bunları incelemek lazım.

Attığınız ifadenin kökü, geri kalanların çözümünde var ama eşitsizliği sağlamıyorsa onu çözümünden atın. Benzer şekilde attığınız ifadenin kökü, geri kalanların çözümünde yok ama eşitsizliği sağlıyorsa onu da çözüme ekleyin.

Bir de burada gösterdiğimiz metotta, eğer sadeleşmesi gereken bir ifade varken sadeleştirmediyseniz de yandınız! Çünkü sadeleştirmeme durumunda yazmamanız gereken bir kökü diğer köklerin arasına bir yere sıkıştırdınız demektir, bizim metotta pay ve paydada kökleri aynı olan iki çarpan varsa derhal onları atarız! Şaşıracaksınız ama payda $2^x - 8$ payda da $x - 3$ varsa gene bunları sadeleştirin! Derdimiz ifadenin aynı olması değil, köklerin aynı olması.

Aşağıdaki örnekleri incerseniz ne demek istediğimi daha rahat anlarsınız.

Örnek.

$$x^2 \cdot (x - 5) < 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı aralığı bulalım.

Çözüm: x^2 negatif olamayacak bir ifade olduğundan atın gitsin. $x - 5 < 0$ eşitsizliğinin çözümü $x < 5$ 'dir. Bu noktada sakın gidip $(-\infty, 5)$ aralığının bulunduğu şıkkını işaretlemeyin. Çünkü attığınız ifadenin kökünü daha incelemeyiniz. İnceleyelim: x^2 'yi sıfır yapan değer 0'dır, peki bu 0 değeri verilen eşitsizliği sağlıyor mu? Hayır, o halde çözümünden atmalıyız bunu. Cevap $(-\infty, 5) - \{0\}$ olmalıdır, bunu $(-\infty, 0) \cup (0, 5)$ diye de yazabilirsiniz. Eğer soru $x^2 \cdot (x - 5) \leq 0$ şeklinde sorulsaydı, “0 zaten çözüm aralığında var” deyip, bir şeye dokunmayacaktık.

Örnek.

$$x^2 \cdot (x - 5) \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı aralığı bulalım.

Çözüm: x^2 negatif olamayacak bir ifade olduğundan atın gitsin. Geriye kalanın çözümü $x \geq 5$ olur. Ama dikkat edin, 0 da sağlar ama bu çözümde yok, o zaman derhal 0'ı da ekleyin çözüme.

$$\text{Ç.A.: } [5, \infty) \cup \{0\}.$$

Eğer soru $x^2 \cdot (x - 5) > 0$ şeklinde sorulsaydı, “0 eşitsizliği sağlamıyor, zaten benim bulduğum çözümde de yok” deyip, etliye sütlüye karışmayacaktık.

Örnek.

$$\frac{16 - x^4}{-x^2 + x - 3} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

Çözüm: $16 - x^4$ ifadesinin iki kare farkı olduğunu görelim ve ona göre açalım.

$$\frac{16 - x^4}{-x^2 + x - 3} \leq 0$$

$$\frac{(4 - x^2)(4 + x^2)}{-(x^2 - x + 3)} \leq 0$$

$4 + x^2$ ve $x^2 - x + 3$ ifadeleri her x reel sayısı için daima pozitif olacağından bunları atalım. Reel kökleri olmadığından ilerde dönüp incelememize gerek yok, ardınıza bakmadan atın. Geriye kalanları çözelim:

$$-(2 - x)(2 + x) \leq 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \leq 0$$

olduğundan çözüm aralığı $[-2, 2]$ olur. Bu aralıkta $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere sağlayan 5 tamsayı vardır.

Örnek.

$$\frac{(x^3 + 27)^{2006}}{x^2 - 4} \leq 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

Çözüm: Paydaki ifadeyi ilerde kökünü hatırlamak üzere atalım. Paydayı da çarpanlarına ayıralım.

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(-2, 2)$ olmalıdır. Ama $x = -3$ de eşitsizliği sağlarken bizim çözümümüzde çıkmadı, o zaman hemen ekleyelim. Son cevabımız $(-2, 2) \cup \{-3\}$.

Örnek.

$$\frac{(2^x - 64)(3^x + 5)}{x^2 - 16x + 48} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

Çözüm: $3^x + 5$ daima pozitif olduğundan hemen onu atıp, paydayı da çarpanlarına ayıralım:

$$\frac{(2^x - 64)}{(x-12)(x-4)} < 0$$

Kökler 4, 6, 12 olduğundan gerekli işlemler yapılırsa, çözüm aralığı $(-\infty, 4) \cup (6, 12)$ olarak bulunur.

Örnek.

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 7}{\sqrt{3-x}} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

Çözüm: Payın katsayıları sırasıyla 1, 6, 12, 8 olsaydı, $(x+2)^3$ olmaz mıydı? O halde paya $(x+2)^3 - 1$ diyeceğiz. Payda da negatif olamayacak bir ifade olduğundan hemen kökünü hatırlamak üzere atacağız.

$$(x+2)^3 - 1 \geq 0$$

$$(x+2)^3 - 1^3 \geq 0$$

$$(x+1)(x^2 + 5x + 7) \geq 0$$

$x^2 + 5x + 7$ her reel x değeri için daima pozitif olduğundan atabiliriz, kalanı çözelim:

$x + 1 \geq 0$ olduğundan $x \geq -1$ çözüm kümesidir. Fakat paydanın tanımsız olmaması için $x \leq 3$ olmalıdır. Kesirli ifadenin paydası sıfır olamayacağından $x \neq 3$ olmalıdır. Sonuç olarak $\{-1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere eşitsizliği sağlayan 4 tamsayı vardır.

Örnek. $x^{2006} < 1$ için

$$\frac{m^2 - 4m - 12}{x^2 - 1} > 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen m tamsayı değerlerinden en büyüğü ile en küçüğüün toplamı kaçtır?

Çözüm: $x^{2006} < 1$ eşitsizliğinden x 'in basit kesir olduğunu anlarız, yani $-1 < x < 1$. O halde ifadenin paydası daima negatif olur, paydayı "-" parantezine alarak daima pozitif olan $1 - x^2$ sayısını atabiliriz. Payda da tek başına kalan "-" işaretini de atarak eşitsizliğin yönünü değiştirsek bir şey olmaz. O halde son durum da eşitsizlik şu hale gelir:

$$m^2 - 4m - 12 < 0$$

$$(m-6)(m+2) < 0$$

olduğundan m için çözüm aralığı $(-2, 6)$ 'dır. O halde m 'nin alabileceği en büyük tamsayı değeri 5, en küçük tamsayı değeri de -1 olur. Toplamları da 4'tür.

Her şeyi bir tarafta topluyoruz. Bazen, gıcıklık parayla değil ya, eşitsizliği $f(x) < 0$ şeklinde değil de, örneğin $f(x) < 2$ şeklinde verir. Böyle durumlarda hemen canımızın istediği bir tanesini diğerinin yanına yollayıp, eşitliğin bir tarafını 0 yapma gayretine gireceğiz, $f(x) - 2 < 0$ gibi... Gerisi bilginiz gibi...

Örnek. Hangi sayıların kareleri kendilerinden küçüktür?

Çözüm: Kareleri kendilerinden küçük olan sayılara x diyelim. O halde $x^2 < x$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin sorulduğunu anlıyoruz. Hemen eşitsizliğin bir tarafını sıfır yapalım:

$$x^2 < x$$

$$x^2 - x < 0$$

$$x \cdot (x-1) < 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(0, 1)$ aralığıdır.

Örnek. Hangi sayıların küpleri kendilerinden büyüktür?

Çözüm: Küpleri kendilerinden büyük olan sayılara x diyelim. O halde $x^3 > x$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin sorulduğunu anlıyoruz. Hemen eşitsizliğin bir tarafını sıfır yapalım:

$$x^3 > x$$

$$x^3 - x > 0$$

$$x \cdot (x^2 - 1) > 0$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x+1) > 0$$

olduğundan hemen kökleri yazıp, işaretleri yerleştirelim:

$$- \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$$

diye çözüm aralığı $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ aralığıdır.

Örnek.

$$\frac{x}{2} \leq \frac{2}{x}$$

eşitsizliğin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm: Hemen sağdakini sola alalım.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &\leq \frac{2}{x}, \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{x} &\leq 0, \\ \frac{x^2 - 4}{2x} &\leq 0, \\ \frac{(x-2)(x+2)}{2 \cdot x} &\leq 0. \end{aligned}$$

Derhal gerekenler yapılsa çözüm aralığının $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$ olduğu görülür.

Örnek.

$$x^3 - 4 \geq 4x - x^2$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Hepsini bir tarafa toplayalım:

$$\begin{aligned} x^3 - 4 &\geq 4x - x^2 \\ x^3 + x^2 - 4x - 4 &\geq 0 \\ x^2 \cdot (x+1) - 4 \cdot (x+1) &\geq 0 \\ (x+1) \cdot (x^2 - 4) &\geq 0 \\ (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) &\geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $[-2, -1] \cup [2, \infty)$ 'dur.

Örnek. $a > 0 > b$ iken

$$\frac{x^2 - a(b+1)x + a^2b}{-ax^2 + bx^2} > 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Pay ve paydaları çarpanlarına ayıralım da böyle korkunç görünmeye devam etmesin. Toplamları $-ab - a$, çarpımları a^2b olan sayıları arıyoruz. Ben sizin yerinize aradım buldum: $-ab$ ve $-a$ sayıları. O halde eşitsizliği tekrar yazalım:

$$\frac{(x-ab)(x-a)}{(b-a)x^2} > 0$$

Köklerin ab , a ve 0 olduğunu zannetmeyin. x^2 'yi cehenneme yollamayı unutmayın ama ilerde kökünü incelemeyi de. Dolayısıyla kökler ab ve a 'dır. $a > 0 > b$ verildiğinden bu değerlerin küçükten büyüğe sıralaması

$$ab \quad a$$

şeklinde olur. Diğer yandan $b - a$ sayısının da verilenlere göre negatif olduğu görülürse, çarpanların başkatsayılarının işaretleri çarpımı $''-''$ olur.

$$- \quad ab \quad + \quad a \quad -$$

Sıfırdan büyük olan yerler sorulduğundan çözüm aralığı $[ab, a]$ bulunur. Ama 0 değeri ifadeyi tanımsız yaptığından atılmalıdır, son ve değişmez cevabımız: $[ab, a] - \{0\}$.

Örnek.

$$\frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x-2}} < 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Bir saniye bile durmadan paydaları eşitleyelim:

$$\frac{x^4 - 1}{x^2} = \frac{(x^4 - 1)(x-2)}{(x^3 - 1)x^2} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)x^2}$$

olduğundan $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$ ve x^2 değerlerini atalım, $x - 1$ değerlerini de sadeleştirelim. Geriye şu kalır:

$$(x+1)(x-2) < 0$$

O halde çözüm aralığı şimdilik $(-1, 2)$ 'dir. Hatırlamamız gerekenleri hatırlatalım: $\{1\}$ ve $\{0\}$ değerleri ifadeyi tanımsız yapıyor, onu atalım. O halde son cevap: $(-1, 2) - \{0, 1\}$.

Örnek.

$$\frac{\frac{x}{x-2} - \frac{x+\frac{2}{x}}{x}}{\frac{x}{x-2}} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan x 'ler hangi aralıktadır?

Çözüm: Yine paydaları eşitleyerek işe başlayalım:

$$\frac{\frac{x}{x-2} - \frac{x+\frac{2}{x}}{x}}{\frac{x}{x-2}} = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} - \frac{x^2 + 2}{x^2} = \frac{x^4 - (x^2 - 4)}{x^2(x^2 - 2)}$$

olduğundan ifade

$$\frac{4}{x^2(x^2 - 2)} < 0$$

haline dönüşür. x^2 ve 4 'ü hiç negatif olamıyorlar diye atarız, geriye kalanı da çarpanlarına ayırırız.

$$\frac{1}{x^2 - 2} = \frac{1}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} < 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ olur. Ama 0 ifadeyi tanımsız yaptığından acımadan atılmalıdır, son cevap: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$.

Örnek.

$$x-1\sqrt{2^{x^2+5x}} \geq 4^x$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

Çözüm: $x - 1$ ifadesi kök derecesi olduğundan x 'in sadece 1'den büyük sayma sayısı olabileceğini unutmayalım.

$$2^{\frac{x^2+5x}{x-1}} \geq 2^{2x}$$

$$\frac{x^2+5x}{x-1} \geq 2x$$

$$\frac{x^2+5x}{x-1} - 2x \geq 0$$

$$\frac{x^2+5x-2x^2+2x}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+7x}{x-1} \geq 0$$

Bu noktada $x - 1$ 'in pozitif olduğunu bildiğimizden bunu atabiliriz. Geriye kalanı çözssek yeter.

$$-x^2+7x \geq 0$$

$$-x(x-7) \geq 0$$

$$x(x-7) \leq 0$$

olduğundan x için çözüm aralığı $[0, 7]$ çıkar. Düştüğümüz ilk notla birlikte düşünersek x 'in sadece $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ değerlerini alabileceğini görürüz. Yani cevabımız: 6.

Eşitsizlik sistemleri. 1'den çok eşitsizliğin bir arada olmasına eşitsizlik sistemi diyoruz. Eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı da sistemde bulunan tüm eşitsizliklerin hepsini birden sağlayan aralıktır. Bu da sistemdeki tüm eşitsizliklerin çözüm aralıklarının kesişimidir.

Örnek.

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 < 0 \end{cases}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde kaç tamsayı vardır?

Çözüm: Her iki eşitsizliği ayrı ayrı çözecek, daha sonra çözümlerin kesişimini alacağız. Geriye sadece içindeki tamsayıları saymak kalacak.

$$x^2 - x - 12 \geq 0$$

$$(x-4)(x+3) \geq 0$$

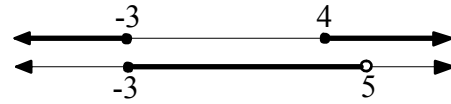
olduğundan ilk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$ 'dur. Sıra ikinci de:

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$(x-5)(x+3) < 0$$

olduğundan ikinci eşitsizliğin çözüm aralığı da $(-3, 5)$ aralığıdır.

Her iki eşitsizliği de aşağıdaki gibi sayı doğrusu üzerinde kesiştirirsek,

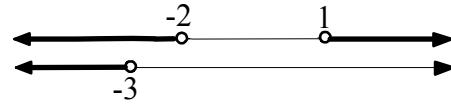


her ikisinde de bulunan aralığın, yani kesişimin $[4, 5)$ aralığı olduğu görülür. O halde eşitsizlik sistemini tek tamsayı sağlar, o da $\{4\}$ 'tür.

Örnek.

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} > 0 \\ \frac{1}{x-3} \leq 0 \end{cases} \text{ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığını bulalım.}$$

Çözüm: İlk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ olup, ikincisinin ise $(-\infty, -3)$ 'tür. Hemen her iki aralığı da çizip kesişimini alalım:



O halde cevabımız $(-\infty, -3)$ olmalıdır.

Örnek. $-1 < \frac{x^2-5}{x-1} < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: Bu da aslında gizli kapaklı bir eşitsizlik sistemidir. Çünkü 1 tane değil 2 tane eşitsizliğin birden sağlanması gerekiyor. Sakın her tarafı $x - 1$ ile çarpalım demeyin de gerisi sorun değil.

$\frac{x^2-5}{x-1} > -1$ ve $\frac{x^2-5}{x-1} < 2$ eşitsizliklerini çözüp, kesişimlerini alacağız, bitecek.

$$\frac{x^2-5}{x-1} > -1$$

$$\frac{x^2-5}{x-1} + 1 > 0$$

$$\frac{x^2+x-6}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-1} > 0$$

olduğundan ilk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-3, 1) \cup (2, \infty)$ 'dur. Şimdi ikincisine bakalım.

$$\frac{x^2-5}{x-1} < 2$$

$$\frac{x^2-5}{x-1} - 2 < 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} < 0$$

$$\frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 1} < 0$$

olduğundan ikinci eşitliğin çözüm aralığı da $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ 'tür. Her iki aralığın kesişimi olan $(-3, -1) \cup (2, 3)$ aralığı da cevap olur o zaman.

Örnek. $(m^2 + 1)x^2 + mx + 1 > 0$ eşitsizliğinin daima doğru olabilmesi m 'nin hangi aralıkta olmasıyla mümkündür?

Çözüm: Bir fonksiyonun daima pozitif olma şartını vermiştik. Başkatsayısı pozitif olup, diskriminantı negatif olacaktı. Yani iki eşitsizlik birden sağlanacaktı. Bu da bir eşitsizlik sistemidir işte. Bu fonksiyonda zaten her reel m değeri için başkatsayı olan $m^2 + 1$ değeri hep pozitif olacağından sadece diskriminantı negatif tutarsak yeter.

$$\Delta = m^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 1 < 0$$

$$m^2 - 4m^2 - 4 < 0$$

$$-3m^2 - 4 < 0$$

$$3m^2 + 4 > 0$$

Bu eşitsizlik her m değeri için sağlanacağından çözüm kümemiz \mathbb{R} olmalıdır.

Örnek. $mx^2 + (2m - 2)x + m - 1 < 0$ eşitsizliğinin daima doğru olabilmesi m 'nin hangi aralıkta olmasıyla mümkündür?

Çözüm: İster eşitsizliğin her iki tarafını "-" ile çarpıp, eşitsizliğin de yönünü değiştirip bir önceki örnekteki gibi çözüm yaparız, istersek de bir fonksiyonun daima negatif olması için hangi şartların sağlanması gerektiğini düşünürüz. İkincisinden yapalım:

Bir fonksiyonun daima negatif olması, yani grafiğinin x ekseninin alt tarafında kalması, hem başkatsayısının hem de diskriminantının negatif olmasıyla mümkündür. İkisini birlikte düşünüp kesiştireceğiz.

İlk eşitsizliğimiz $m < 0$.

Diğerine bakalım:

$$\Delta = (2m - 2)^2 - 4 \cdot m \cdot (m - 1) < 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 4m < 0$$

$$-4m + 4 < 0$$

$$-4m < -4$$

$$m > 1$$

$m < 0$ ve $m > 1$ eşitsizliklerinin kesişimi \emptyset olduğundan bizim cevabımız da \emptyset 'dir.

Örnek. $4^{x^2-2x} - 7 \cdot 2^{x^2-2x} - 8 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: 4^{x^2-2x} sayısının 2^{x^2-2x} sayısının karesi olduğuna dikkat ediniz. Hemen küçük olanına t diyelim:

$$t^2 - 7t - 8 < 0$$

$$(t - 8)(t + 1) < 0$$

diye $-1 < t < 8$ olduğunu buluruz. t yerine değerini yazarsak,

$$-1 < 2^{x^2-2x} < 8$$

Bu da bir eşitsizlik sistemidir. Dikkat ederseniz iki eşitsizlik var. İkisini de çözmek gerekir.

2'nin hiçbir kuvveti negatif olamayacağından eşitsizliklerin sadece sağdakini incelesek yeter.

$$2^{x^2-2x} < 8$$

$$2^{x^2-2x} < 2^3$$

$$x^2 - 2x < 3$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x - 3)(x + 1) < 0$$

olduğundan x için çözüm aralığı $(-1, 3)$ bulunur.

Alıştırmalar

112.

$\frac{3x-4}{6} - \frac{3+x}{3} < \frac{x+5}{9}$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayı değeri kaçtır?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

113.

$x^2 < x + 12$ eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 10 E) 7

114.

$x^2 > x^3$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x < 1$ B) $x < 1$ ve $x \neq 0$ C) $x < -1$
C) $-1 < x < 1$ ve $x \neq 0$ D) $0 < x < 1$

115.

Aşağıdakilerden hangisi $(x - x^2) \cdot (x^2 - 3x) < 0$ eşitsizliğinin **çözüm aralığının bir altkümesidir?**

- A) $1 < x < 3$ B) $1 < x < 2$ C) $x < 3$
 D) $-3 < x < -1$ E) $0 < x < 3$

116.

$(3x - 2)^2 - (x + 4)^2 < 0$ eşitsizliğinin **çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $(-\frac{1}{2}, 2)$ B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ C) $(\frac{1}{2}, 3)$
 D) $(-3, \frac{1}{2})$ E) $(-1, \frac{1}{2})$

117.

$x^3 + 1 > x^2 + x$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi nedir?**

- A) $x > -1$ ve $x \neq 1$ B) $x > 0$ C) $x < 1$
 D) $-1 < x < 1$ E) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

118.

$x^2 \cdot (3x - 4) < x \cdot (2x - 5)$ eşitsizliğinin **çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $x > 1$ B) $-1 < x < 0$ C) $x < 0$
 D) $0 < x < 3$ E) $3 < x < 5$

119.

$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2} \leq 0$ eşitsizliğinin **tamsayılardaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?**

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

120.

$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \leq 0$ eşitsizliğini **doğrulayan kaç tamsayı vardır?**

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

121. $\frac{x^2(3-x)}{(5-x)^3} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan **kaç tamsayı vardır?**

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

122.

$\frac{x^2 + x - 11}{(x-2)^2} < 1$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $x > 3$ B) $x < 3$ C) $x < 2$
 D) $x < 3$ ve $x \neq 2$ E) $-2 < x < 2$

123.

$\frac{(3-x)(x^2 - 2x + 3)}{x^2(x^2 - 4)} > 0$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $-2 < x < 0$ B) $x > 3$ C) $0 < x < 3$
 D) $x < -2, 0 < x < 2$ E) $x < -2, 2 < x < 3$

124.

$\frac{(x+2)^2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$ eşitsizliğini doğrulayan **tamsayıların toplamı kaçtır?**

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

125.

$\frac{x-2}{x+2} \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan **x'ler hangi aralıktadır?**

- A) $x > -2$ B) $x > 2$ C) $x < -2$
 D) $x < 2$ E) $-2 < x < 2$

126.

$\frac{x^2}{x-2} \geq x+4$ eşitsizliğini sağlayan **kaç tamsayı vardır?**

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CEVAP ANAHTARI									
112	A	113	A	114	B	115	D	116	B
117	A	118	C	119	C	120	B	121	C
122	D	123	E	124	B	125	C	126	B

127.

$\frac{(-x^2 - 4)(2x - 6)}{(2 + x)} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

128.

$\frac{(x-1)^3(x+1)^3}{x^4(x-2)^2} \leq 0$ eşitsizliğini doğrulayan tamsayıların toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -3 C) 0 D) 2 E) 3

129.

$\frac{2}{x} > \frac{1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

- A) $x < 6$ B) $x > 6$ C) $0 < x < 6$
D) $x < 0$ veya $x > 6$ E) $-6 < x < 0$

130.

$\frac{9}{x} \leq x$ eşitsizliğinin sağlandığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(0, 3]$ B) $(-\infty, -3]$ C) $[-3, 3)$
D) $(-\infty, 0)$ E) $[-3, 0) \cup [3, \infty)$

131.

$2 - \frac{x}{x^2 - 1} \leq \frac{2x - 2}{x - 1}$ eşitsizliğine göre, aşağıdakilerden hangisi çözüm kümesinin bir altkümesidir?

- A) $-1 < x < 0$ B) $x < 0$ C) $x < -1$
D) $0 < x < 1$ E) $x > -1$

132. $\frac{x^2 - x - 12}{1 - x^3} \geq 0$ eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

133.

$\frac{-x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x < 2$ B) $x < 3$ C) $-\infty < x < \infty$
D) $-1 < x < 0$ E) $x < -3$

134.

$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2(1 - x)} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x > 1 \cup x < 0$ B) $x \leq 0 \cup x > 1$
C) $x < 1, x \neq 0$ D) $-1 < x < 0$ E) $1 < x < 2$

135.

$\frac{(1 - x^2)^2}{x + 2} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, -2) \cup \{-1, 1\}$ B) $(-1, 1)$ C) $(1, \infty)$
D) $(1, 2) \cup \{0\}$ E) $(-2, -1)$

136.

$\frac{x(x^2 + 3x - 10)}{x + 5} < 0$ eşitsizliğinin tamsayılarındaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

137.

$\begin{cases} -x^2 + x > 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, 0)$ B) $(-1, 0)$ C) $(0, 2)$
D) $(0, 1)$ E) $(-1, 1)$

138. $\left. \begin{array}{l} x^2 - x - 12 > 0 \\ x^2 - 2x - 24 < 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesinde kaç tamsayı vardır?**

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

139.

$\left. \begin{array}{l} x^2 + 3x < 4 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{array} \right\}$ eşitsizliğini gerçekleyen **bütün x**

değerleri hangi aralıktadır?

- A) $x > 1$ B) $x < -4$ C) $-4 < x < 0$
D) $-4 < x < 1$ E) $0 < x < 1$

140.

$\left. \begin{array}{l} x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 - 16 \leq 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminin **çözüm aralığı**

ğı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-2, 4)$ B) $(-4, 4)$ C) $[-4, 4]$
D) $(-\infty, \infty)$ E) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

141.

$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{1}{x-1} < 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminin **çözüm aralığı**

aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x \leq -1$ B) $x < -1$ C) $x \neq 1$
D) $-1 < x < 1$ E) $1 < x < 3$

CEVAP ANAHTARI									
127	B	128	C	129	C	130	D	131	A
132	E	133	C	134	C	135	A	136	A
137	D	138	A	139	C	140	C	141	B

142.

$\frac{|x^2 - 2| - 2}{-x^2 + x - 2} \geq 0$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi nedir?**

- A) $[-2, 2]$ B) $(-2, 2)$ C) $[-2, 2)$
D) $(-2, 2]$ E) $[-2, 2] - \{0\}$

143.

$\sqrt{4 - x^2} - \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} > 0$ eşitsizliğini sağlayan **x'ler** **hangi aralıktadır?**

- A) $[-1, 1]$ B) $(-1, 1)$ C) $[-1, 2)$
D) $(-1, 1]$ E) $[-1, 1] - \{0\}$

144.

$\frac{x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m + 2}{x^2 - 4} < 0$ eşitsizliğini **sağlayan kaç tamsayı vardır?**

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

145.

$-x^2 + 2x - 5 < |x^2 - 4| < x + 2$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi nedir?**

- A) $[1, 3]$ B) $(1, 3)$ C) $[1, 3)$
D) $(1, 3)$ E) $[1, 3] - \{0\}$

146.

$x < |x| < \frac{2-x}{|x|}$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi nedir?**

- A) $[-2, 0]$ B) $(-2, 0]$ C) $(2, 0)$
D) $[2, 0]$ E) $(-2, 0)$

147.

$\frac{1}{2x - \sqrt{x-2}} + \frac{1}{2x + \sqrt{x-2}} < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan **x'ler** **hangi aralıktadır?**

- A) $[-2, \infty)$ B) $(-2, \infty)$ C) $(2, \infty)$
D) $(-\infty, 2]$ E) $[2, \infty)$

148.

$\frac{x-1}{2} < \frac{1}{x}$ eşitsizliğini sağlayan **x'ler** **hangi aralıktadır?**

- A) $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ B) $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$
C) $(1, 2) \cup (4, 7)$ D) $\mathbb{R}^- \cup (1, 2)$ E) $(-\infty, 2)$

149.

$\frac{x+5}{x^3+8} - \frac{x}{x^2-2x+4} + \frac{1}{x+2} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan tamsayılar hangi şıkta verilmiştir?

- A) $\{-1, 2\}$ B) $\{2, 3\}$ C) $\{1, 2, 3\}$
D) $\{0, 1, 2, 3\}$ E) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

150.

$\frac{-x^2+2x-3}{x^2+1} < x^2+x+1 < \frac{7}{x-1}$ eşitsizliğini sağlayan x 'ler hangi aralıktadır?

- A) $(-2, 1)$ B) $(-1, 2)$ C) $(1, 2)$
D) $(1, 3)$ E) $[1, 2] - \{0\}$

151.

$|x^2+x-5| > 2x+1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

- A) $(1, 3)$ B) $(-1, 3)$ C) $(-3, 1)$
D) $x > 1$ veya $x > 3$ E) $(-3, 3)$

152.

$|x-2| - |x+1| - x + 2 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

- A) $x > 1$ B) $x \leq 1$ C) $-1 < x \leq 3$
D) $(-2, 3)$ E) $x \geq 1$

153.

$x+2 > \sqrt{x^2-16}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

- A) $x > 4$ B) $x > -4$ C) $x \leq 4$
D) $x \leq -4$ E) $x \geq 4$

154.

$\frac{\sqrt{x+3} \cdot (x^2-16)}{|-x^2+x+2|} < 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

155.

$\frac{x(7-x)^2}{(4-x)(x^2-3x+3)} \geq 0$ eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

156.

$\frac{2x-1}{x-3} \leq \frac{x+2}{x+1}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?

- A) $(-1, 3)$ B) $[-1, 3]$ C) $(1, 2)$
D) $(2, 4)$ E) $(-1, 3]$

CEVAP ANAHTARI

142	A	143	B	144	D	145	D	146	E
147	C	148	A	149	E	150	C	151	D
152	A	153	E	154	C	155	E	156	A

İkinci dereceden bir denklemin köklerini bir α sayısı ile kıyaslanması. Bu konu aslında ikinci dereceden denklemler başlıklı ders notuna yakışır ama eşitsizlik çözme bilgisi gerektirdiği için, o derste veremedik. Şu an bunları anlamaya ve kendi kendimize çözmeye hazırız.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri her zamanki gibi x_1 ve x_2 olsun. x_1 ve x_2 sayılarının bir α sayısına göre durumlarını inceleyeceğiz. Genel olarak şu sorulara cevap arayacağız:

$x_1 < x_2 < \alpha$ ise yani her iki kök de α 'dan küçükse ne yapmamız gerekir?

$\alpha < x_1 < x_2$ ise yani her iki kök de α 'dan büyükse ne yapmamız gerekir?

$x_1 < \alpha < x_2$ ise yani α , köklerin birinden küçük ama diğerinden büyükse ne yapmamız gerekir?

$\alpha = 0$ durumu. En kolay olan şık bu. Birinin öğretmesine gerek bile yok. Evinin yolunu bulabilen herkes, kendi kendine ne yapması gerektiğini bulabilir.

Kökleri x_1 ve x_2 olan $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için,

$x_1 < x_2 < 0$ ise. Bu eşitsizliklerinin anlatmak istediği, her iki kök de negatif olduğundan köklerin toplamının negatif, köklerin çarpımının pozitif olduğudur:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

$0 < x_1 < x_2$ ise. Burada da her iki kök pozitif olduğundan hem kökler toplamı hem de kökler çarpımı pozitif olmalıdır.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

$x_1 < 0 < x_2$ ise. Köklerin biri pozitif biri de negatif olduğundan çıkarılabilecek tek sonuç kökler çarpımının negatif olduğudur. Büyüklükleri net olarak bilinmediğinden kökler toplamı için bir şey söyleyemeyiz.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Kökler toplamı hakkında da bir şeyler söyleyebilmek için köklerin büyüklüğünü gösteren şıklar da ekleyelim:

$x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < x_2$ ise. Önce yorumlayalım. Sonra yorumumuzun doğruluğunu matematik olarak da kanıtlayalım:

Negatif olan x_1 sayısının mutlak değerinin bile x_2 'den küçük olması, x_2 'nin işaretli değerinin x_1 'in işaretli değerinden de büyük olduğunu anlatır. O halde bu iki sayının toplamı, pozitif olan rakamca daha büyük olduğundan pozitiftir. Doğru mu bir bakalım:

$|x_1| < x_2$ ise $|x_1| - x_2 < 0$ 'dır. $x_1 < 0$ olduğundan $|x_1| = -x_1$ olur. O halde $|x_1| - x_2 = -x_1 - x_2 < 0$ yani $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ demektir. Doğruymuş.

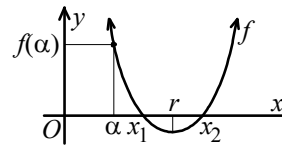
$x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ ise. Bu sefer negatif olanın mutlak değeri, yani işaretli değeri, pozitif olandan büyük, o halde bunlar toplanırsa negatifin rakamı daha büyük olduğundan, ağır basacak ve toplam negatif olacaktır. İşlemlerle de göstereyim:

$x_2 < |x_1|$ ise $x_2 - |x_1| < 0$ 'dır. $x_1 < 0$ olduğundan $|x_1| = -x_1$ olur. O halde $x_2 - |x_1| = x_2 - (-x_1) < 0$ yani $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ demektir.

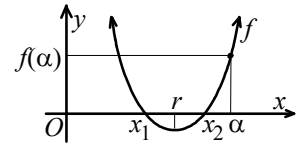
Buraya kadar olanlar dediğimiz gibi kolaydı zaten. Şimdi α 'nın 0'dan farklı olduğu durumlara göz atacağız. Bunlar küçük de olsa maharet istiyor.

$\alpha \neq 0$ durumu. $\alpha = 0$ sayı doğrusu üzerinde kritik bir nokta olduğundan yorum yapmak kolay oluyordu. Sağı pozitif, solu negatif diyorduk bitiyordu. Ama örneğin $\alpha = 2$ olsa, α 'nın solundaki iki sayının ne toplamı ne de çarpımı hakkında kesin hükümler veremeyiz. Her iki sayı da pozitif olabileceği gibi, her ikisi negatif de olabilir hatta biri pozitif biri negatif de.

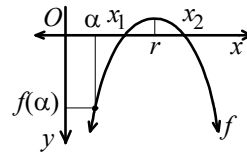
$\alpha < x_1 < x_2$ ve $x_1 < x_2 < \alpha$ ise. Olası durumları düşünelim. Bir kere α sayısı her iki kökten de büyük veya küçük verilmiş. Demek ki köklerin varlığı kesin. Demek ki fonksiyonun grafiği x eksenini iki yerde kesiyor. Bu durum iki şekilde mümkün: Ya kollar yukarı doğru, ya da aşağı doğru. Kollar yukarı doğruysa $a > 0$ ve $f(\alpha) > 0$ 'dır. Kollar aşağı doğruysa $a < 0$ ve $f(\alpha) < 0$ 'dır. Demek ki her iki durumda da $a \cdot f(\alpha) > 0$ olmalıdır.



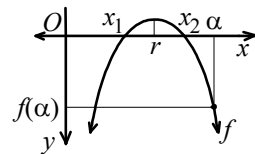
$\alpha < x_1 < x_2$ durumu ($a > 0$)



$x_1 < x_2 < \alpha$ durumu ($a > 0$)



$\alpha < x_1 < x_2$ durumu ($a < 0$)



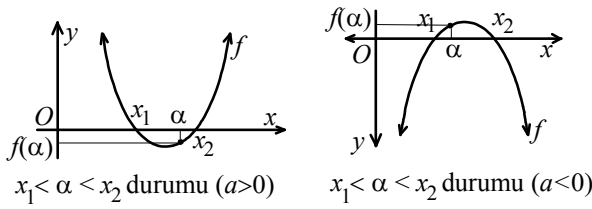
$x_1 < x_2 < \alpha$ durumu ($a < 0$)

Peki o zaman, $\alpha < x_1 < x_2$ ve $x_1 < x_2 < \alpha$ durumlarının ikisinde de $a \cdot f(\alpha) > 0$ ise bu durumları birbirinden nasıl ayırt edeceğiz? Dikkat ederseniz $\alpha < x_1 < x_2$ durumunda (soldaki iki şekil), α sayısı parabolün tepe noktasının apsisinden (r diyelim) yani kökler toplamının yarısından küçüktür. $x_1 < x_2 < \alpha$ durumunda ise (sağdaki iki şekil), α sayısı kökler toplamının yarısından yani r 'den büyük. Toparlayalım:

$$\alpha < x_1 < x_2 \text{ ise } a \cdot f(\alpha) > 0 \text{ ve } \alpha < -\frac{b}{2a},$$

$$x_1 < x_2 < \alpha \text{ ise } a \cdot f(\alpha) > 0 \text{ ve } -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

$x_1 < \alpha < x_2$ ise. Olası durumlar yine iki tane. Ya kollar yukarı doğrudur ya da aşağı doğru. Yukarı doğru olursa $a > 0$ ama $f(\alpha) < 0$, kollar aşağı doğru olursa da $a < 0$ ama $f(\alpha) > 0$. Anlayacağınız her iki durumda da a ile $f(\alpha)$ değerleri zıt işaretlidir.



O halde $x_1 < \alpha < x_2$ ise $a \cdot f(\alpha) < 0$ 'dır.

Alıştırma

157.

$x^2 + (2m - 1)x + m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ ise m hangi aralıkta olmalıdır?

158.

$x^2 + (m + 3)x + m + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ ise m kaçtır?

159.

$mx^2 + (m + 2)x - m + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 > |x_1|$ ise m sayısı hangi aralıktadır?

160.

$x^2 + (6 - m)x - 2m + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_2 < 0 < x_1$ ve $|x_2| > x_1$ ise m kaçtır?

161.

$x^2 - mx + m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

162.

$x^2 + mx + m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < x_2 < 0$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

163.

$(m - 3)x^2 + (m + 2)x + m + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < x_2$ ve $2 < m < 3$ olduğuna göre x_1 ve x_2 'nin işaretleri nelerdir?

164.

$d < a < 0 < b$ iken $(ax + b)(dx + a) < 0$ ise x için çözüm aralığı nedir?

165.

$a^2 > |a| > a$ olduğuna göre $x^2 + 2x + 3 - a = 0$ denkleminin köklerinin durumunu inceleyiniz.

166.

$-mx^2 + (2m + 6)x - 4m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < -2 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

167.

$mx^2 - (2m + 4)x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < x_2 < 1$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

168.

$(m + 1)x^2 - (2m - 4)x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 1 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

169.

$mx^2 + (m - 2)x - 4 = 0$ denkleminin köklerinden biri 1'den büyük, diğeri ise 1'den küçüktür. Buna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

170.

$(m + 2)x^2 - 4mx + 2m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 2 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

171.

$x^2 - (m + 4)x + 2m + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 3 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

172.

$x^2 - (a + 4)x + 2a + 5 = 0$ denkleminin her iki kökü de 1'den küçükse a hangi aralıkta olmalıdır?

173.

$mx^2 + 3mx + m + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_2 < -2 < x_1$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

174.

$f(x) = x^2 + mx - m - 2 = 0$ fonksiyonu için $f(3) < 0$ ise x_1 ve x_2 köklerinin 3 sayısına göre durumlarını inceleyiniz.

175.

$x^2 + (a + 3)x + a = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_2 < a < x_1$ olduğuna göre a kaçtır?

176.

$(m + 5)x^2 - (2m + 6)x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < 0 < x_1 < 2$ ise m hangi aralıktadır?

177.

$(3m + 2)x^2 + mx + 2m - 5 = 0$ denkleminin kökleri ters işaretliyse, m 'nin alabileceği tamsayı değerlerin toplamı kaçtır?

178.

$(m - 2)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$ denkleminin iki farklı pozitif kökünün olabilmesi için m 'nin alabileceği değerler hangi aralıktadır?

179.

$f(x) = (m - 2)x^2 + 2mx + m - 1$ fonksiyonunun her x reel sayısı için daima negatif olabilmesi için m hangi aralıkta olmalıdır?

180.

$(m - 1)x^2 + (2m - 2)x + m + 2 = 0$ denkleminin kökleri aynı işaretli ise m hangi aralıkta olmalıdır?

181.

$(p - 2)x^2 + (2p - 24)x + 2 = 0$ denklemini veriliyor. Hangi p tamsayısı için bu denklemin reel kökü yoktur?

182.

$(5 - 4m)x^2 - (3m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ denkleminin köklerinin birbirlerine dik olan iki doğrunun eğimleri olabilmesi için m kaç olmalıdır?

183.

$x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ denkleminin bir tamkare olması için m 'nin alabileceği değerler nelerdir?

184.

$(p + 3)x^2 - 3px + p - 1 = 0$ denkleminin zıt işaretli iki reel kökü varsa p hangi aralıktadır?

185.

$px^2 - 5x + 2p = (4p - 1)x - 17$ denkleminin iki kökü çakışıkça p 'nin alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

186.

$x^2 + (3 - m)x + 2m - 1 = 0$ denkleminin kökleri pozitifse m hangi aralıkta olmalıdır?

Cevaplar.

157. $(\frac{1}{2}, 3)$ 172. $(-\infty, -2)$
 158. $(-3, -2)$ 173. $(3, \infty)$
 159. $(1, 2)$ 174. $0 < x_1 < 3 < x_2$
 160. $(2, 6)$ 175. $-2 < a < 0$
 161. $m < 1$ 176. $(-5, \infty)$
 162. $m > 0$ 177. -3
 163. $x_1 < 0, x_2 > 0$ 178. $(-\infty, -5) \cup (2, \frac{10}{3})$
 164. $(-\frac{a}{d}, -\frac{b}{a})$ 179. $(-\infty, \frac{2}{3})$
 165. Reel kök yoktur 180. $(-\infty, -2)$
 166. $(-\frac{5}{4}, 0)$ 181. \emptyset
 167. $(-1, 0)$ 182. -2
 168. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ 183. $\{2, -1\}$
 169. $(0, 3)$ 184. $(-3, 1)$
 170. $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ 185. 2
 171. $(2, \infty)$ 186. $(\frac{1}{2}, 1)$

Karma Test**187.**

$2x + \sqrt{x} - 6 = 0$ denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

188.

$\sqrt{2x+3} - 2x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

189.

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

190.

$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

191.

$mx^2 - 3mx + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $3 \cdot x_1 - x_2 = 5$ ise m kaçtır?

192.

Bir dikdörtgenin alanı 23 br^2 , çevre uzunluğu ise 20 br veriliyor. Bu dikdörtgenin kısa kenar uzunluğunu bulunuz.

193.

$x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^6 + x_2^6$ toplamı kaçtır?

194.

$mx^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesinin boşküme olması için m hangi aralıkta olmalıdır?

195.

$2x^3 - 3x + 1 = 0$ denkleminin negatif olan kökünü bulunuz.

196.

$x^3 + x^2 - 3x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 iken $x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 = 3$ ise m kaçtır?

197.

$3x^2 + (5m + 1)x + 2m^2 + m = 0$ denkleminin iki kat kökü olması için m kaç olmalıdır?

198.

$x^2 + mx - m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1 < -1 < x_2 < 2$ ise m hangi aralıkta olmalıdır?

199.

$x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin köklerinin çarpıma göre terslerinin toplamı kaçtır?

200.

$m < 0 < n$ iken $-x^2 + mx + n^2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. x_1, x_2, m, n sayılarını küçükten büyüğe doğru sıraya diziniz.

201.

$x^3 - 4x - 1 = 0$ denkleminin hangi iki ardışık sayı arasında bir reel kökü kesinlikle vardır?

Cevaplar

187. $\frac{9}{4}$

194. $(-\infty, -2)$

188. $\frac{1}{2}$

195. $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

189. \emptyset

196. 1

190. $\{1\}$

197. 1

191. $\frac{1}{2}$

198. $m > 0$

192. $5 - \sqrt{2}$

199. $\frac{4}{3}$

193. 154

200. $x_1 < m < x_2 < n$

201. $(2, 3)$

Üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak [MD]. Birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini zaten büyük ihtimalle sizler de yapabiliyordunuz. Ama daha büyük dereceden denklemlerin çözümlerini bulmak insanlık tarihinin nerdeyse 2000 yılını aldı. Üçüncü dereceden denklemler, 1525 yılı dolaylarında İtalyan matematikçi Scipione del Ferro tarafından çözülmüştür. Ama kısım. Tam olarak çözen yine bir İtalyan olan Niccolo Fontana Tartaglia'dır. 2000 yıllık bir uğraşı burada tek sayfada toparlayabileceğimiz için çok şanslı olduğumuzu söyle-yebiliriz. Burada yazdıklarımızın ÖSS ile ilgisinin olmadığı konusunda da uyara-lım. Başlıyoruz:



Denklemimiz $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ olsun. a 'nın sıfırdan farklı olduğunu bir kez daha hatırlatırız. Aynı ikinci dereceden denklemlere uyguladığımız gibi eşitliğin her iki tarafını a 'ya bölelim.

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

çıkar. Hem işlem kolaylığı hem de anlaşılabilirlik adına $\frac{b}{a} = B$, $\frac{c}{a} = C$ ve $\frac{d}{a} = D$ eşitliklerini kullanarak

denklemimizi $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ biçimine getirelim. Eğer bu denklemi çözebilirsek, baştaki denklemi de çözebileceğimizi çoktan anlamış olmalısınız. Amacımız sadece karışıklığa meydan vermemek üzere denklemleri mümkün olduğunca sadeleştirmek. Yine aynı amaçla denklemdeki x^2 terimini yok ederek denklemin daha da sadeleşmesini sağlamak istiyoruz. x yerine $y - t$ yazarak denklemi düzenlediğimizde oluşan x^2 'li terimin $t = B/3$ olduğu zaman 0 olacağını anlıyoruz. Bu amaçla x yerine $y - B/3$ yazacağız. İşlemleri yapınca y^2 'lerin sadeleşerek kaybolacağı artık sürpriz değil! Geriye $y^3 + Ey + F = 0$ gibi bir denklem kalır. Burada E ve F değerlerini merak eden bunları B, C, D dolayısıyla a, b, c, d cinsinden yazabilir, biz bunu yapmayacağız. Şimdi tüm marifetimizi $y^3 + Ey + F = 0$ denklemini çözmeye harcayacağız.

Eğer E sıfırsa sorun yok, çünkü o zaman eşitlik $y^3 + F = 0$ halini alır ki buradan $y = \sqrt[3]{-F}$ olduğunu bulmayan zaten ne buraya kadar anlattıklarımızı anlamıştır, ne de bundan sonra anlatacaklarımızı anlar! Bundan böyle E 'nin sıfır olmadığını düşünelim.

Şimdi bir süre için çarpanlara ayırma dersine dönelim.

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

olduğunu biliyoruz. Hepsini bir tarafta toplayalım:

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) + v^3 - u^3 = 0.$$

Bir şeyler sezdimiz mi? $y^3 + Ey + F = 0$ denklemine ne kadar da benziyor değil mi? O halde hemen

$$y = u - v$$

$$E = 3uv$$

$$F = v^3 - u^3$$

olsun diyelim. Buradan $u - v$ değerini bulan y 'yi çoktan bulmuş olacak!

E 'nin eşitinden v 'yi çekip, F 'nin eşitinde yerine yazacağız. $v = E/(3u)$ olduğundan $F = v^3 - u^3 = E^3/(27u^3) - u^3$ olur. Düzenlenirse;

$$27u^6 + 27Fu^3 - E^3 = 0$$

ya da

$$u^6 + Fu^3 - E^3/27 = 0$$

olur. Denklemdeki u^3 yerine w yazarsak,

$$w^2 + Fw - E^3/27 = 0$$

biçiminde ikinci dereceden bir denklem buluruz ki, böyle soruları çözmeyi bildiğimizden mutlu sona ulaşmış oluruz. Şimdi geriye sadece yaptığımız dönüşümlerde ters işlemler yaparak a, b, c, d değerlerine ulaşmak kalıyor. Nasıl mı? w 'yi bulduğumuzdan w 'nin üçüncü dereceden kökünü alarak u 'ya ulaşırız. $v = E/(3u)$ eşitliğinde bunu yerine yazarak v 'ye ulaşırız. Ardından $y = u - v$ eşitliğinden de y 'yi buluruz. Çözümlerden birini bulunca diğerlerini bulmak çocuk oyuncağı gibi bir şeydir. Denklemi sağlayan y değerlerinden bulduğumuz y_0 diyelim. Madem y_0 diye bir kökü var, o halde bu polinom $(y - y_0)$ ile tam bölünür diyerek, polinomu $(y - y_0)$ 'a böleceğiz. Çıkan ikinci dereceden denklemin iki kökü de üçüncü dereceden

denklemin y_0 'dan farklı olan diğer iki kökünü verecektir. Sonuç olarak, denklemin (ille de birbirlerinden farklı olmaları gerekmeyen) üç kökü de bulunmuş olur.

IV. Dördüncü Dereceden Denklemler. Bir, iki, üç derken dörde kadar geldik. Nereye kadar gideceğimizi (daha doğrusu gidebileceğimizi) merak ediyorsanız, okumaya devam! Dördüncü dereceden denklemler ilk olarak Girolamo Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari tarafından 1540'larda çözülmüştür.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ denklemiyle ve her zamanki gibi bu denklemin her iki tarafını a 'ya bölerek başlıyoruz.

$$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

gibi bir denklem elde ediyoruz, aynı üçüncü dereceden denklemlere uyguladığımız gibi $x = y - B/4$ alıp

$$y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$$

biçiminde yazılan daha basit bir denkleme varıyoruz. Amacımız bu denklemi y cinsinden çözmek.

Önce $y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$ denklemini aşağıdaki gibi kareye tamamlayalım:

$$y^4 + 2Fy^2 + F^2 = Fy^2 + F^2 - Gy - H$$

yani

$$(y^2 + F)^2 = Fy^2 - Gy + F^2 - H.$$

Şimdi biraz zeki olup, her z için,

$$\begin{aligned} (y^2 + F + z)^2 &= (y^2 + F)^2 + 2z(y^2 + F) + z^2 \\ &= Fy^2 + F^2 - Gy - H + 2zy^2 + 2zF + z^2 \\ &= (F + 2z)y^2 - Gy + (F^2 - H + 2zF + z^2) \end{aligned}$$

eşitliklerinin, daha doğrusu sadece

$$(y^2 + F + z)^2 = (F + 2z)y^2 - Gy + (F^2 - H + 2zF + z^2)$$

eşitliğinin ayırımına varmalıyız. Sağ taraf y cinsinden ikinci dereceden denklem olduğundan, z 'yi sağ taraf bir kare olacak şekilde seçebiliriz; bunun için z 'yi sağ tarafın diskriminantını, yani

$$G^2 - 4(F + 2z)(F^2 - H + 2zF + z^2)$$

sayısını 0 olacak biçimde seçmeliyiz, ki bu da z cinsinden üçüncü dereceden bir denklem olduğundan çözülebilmesi her zaman mümkündür. Bundan böyle z 'yi öyle seçelim. Demek ki belli bir $\partial \geq 0$ için,

$$(y^2 + F + z)^2 = \partial^2.$$

Şimdi $(y^2 + F + z)$ 'yi ∂ biçiminde seçersek; $y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$ denkleminin çözümlerinden birini buluruz. Birini bulduk mu diğerleri kolay zaten.

Tartaglia, sen çok yaşı!

V. Beşinci ve Daha Yüksek Dereceden Denklemler. Beşinci dereceden genel denklemler yukardaki gibi cebirsel olarak, yani dört işlemle ve kök alarak çözülemezler. Çözülmesi bilinmiyor değil, çözülemezler. Hiç kimse, hiçbir zaman çözemez. Bu, matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Bugün hala daha bazıları beşinci dereceden denklemleri çözmeye çalışır, hatta çözdüğünü iddia eder. Buldukları çözüm kesinlikle doğru olamaz, bir yerde hata yapmışlardır mutlaka.

Her denklem çözülemez demek istemiyoruz. Örneğin, $x^5 + a = 0$ türünden denklemler çözülebilir. Çözülebilecek daha karmaşık denklem aileleri de vardır elbet. Ama cebirsel yöntemlerle çözülemeyecek beşinci dereceden denklemler vardır, hatta bunlar çoğunluktadır. Bu imkansızlık çok genç yaşlarında ölen Norveçli Niels Henrik Abel (1802-1829) tarafından 1824'te kanıtlanmıştır.



Niels Henrik ABEL



Evariste GALOIS

Bu sadece $n = 5$ için değil, eğer $n \geq 5$ ise n . dereceden denklemlerin tümü için geçerlidir. Bu da matematik tarihinin en romantik figürü olan Fransız Evariste Galois (1811-1832) tarafından kanıtlanmıştır.

Çözülemez diye kollarımızı kavuşturmayacağız herhalde. Ayrıca kim söyledi çözülemeyeceğini? Sadece cebirsel çözümün bulunamayacağını söyledik, analize dayanan yöntemler bulunabilir, neden bulunmasın? Onların yeri tabii ki burası değil, matematik bölümünü kazandıktan sonra gelin yanıma, olur mu?☺