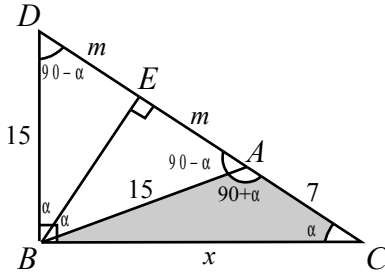


1.  $ABC$  bir üçgen  $m(\angle ACB) = \alpha$ ,  $m(\angle BAC) = 90^\circ + \alpha$ ,  $|AB| = 15$  br,  $|AC| = 7$  br, olduğuna göre  $|BC| = x$  kaç br dir?



**Çözüm:**  $B'$ 'den  $BC'$ 'ye çıkılan dikmenin  $AC$  doğrusunu kestiği nokta  $D$  olsun.  $DBC$  bir dik üçgen ve  $DBA$  bir ikizkenar üçgen olur. O halde  $|DB| = 15$  br dir. Diğer Yandan  $B'$ 'den  $DC'$ 'ye inilen dikme ayağında  $E$  diyelim.  $|DE| = |EA| = m$  br olsun. Öklid Teoremi gereği  $15^2 = m \cdot (2m + 7)$  olur, denklem çözülürse  $m = 9$  bulunur ki, buradan  $x = 20$  olduğu anlaşılır.

2.  $ABC$  üçgeninde  $\check{A} = 2\check{B}$  ise  $a^2 = b^2 + bc$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $BA'$ 'nın uzantısı üzerinde  $AC = AD$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınırsa  $\check{B} = \check{D} = \check{ACD}$  olup  $AC = AD = b$  ve  $CB = CD = a$  olur.  $\angle ADC : \angle CBD$  olduğundan  $\frac{b}{a} = \frac{a}{b+c}$  olup  $b^2 + bc$  olur.

3.  $ABC$  üçgeninde  $\check{A} = 2\check{B} = 2\alpha$  olmak üzere  $C$  noktasının  $A$  noktasına uzaklığı ile  $AB'$ 'nin orta dikmesine olan uzaklığının oranının  $\alpha$  değerinden bağımsız olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $AB'$ 'nin orta dikmesi  $BC'$ 'yi  $S$  noktasında kessin.  $C'$ 'den orta dikmeye inilen dikme ayağı  $Q$  ve  $CQ \cap AS = R$  olsun. Bu durumda  $\check{SCR} = \check{SBA} = \check{SAB} = \check{SAC} = \alpha$  olup  $\check{CRA} = \check{SAB} = \alpha$  olduğundan  $CR = CA'$ 'dır. Ayrıca  $QC = QR$  olacağından  $CQ : CA = 1 : 2$  olur. Bu değer sabit olup  $\alpha$  değerine bağlı değildir.

4. Dar açılı  $ABC$  üçgeninde  $2\check{A} = \check{ACB}$  dir.  $BC$  kenarı üzerinde alınan bir  $D$  noktası için  $2\check{BAD} = \check{ABC}$  ise  $\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $BC$  kenarı üzerinde  $BE = AE$  olacak şekilde bir  $E$  noktası alınırsa  $BE = AE = AC$  ve  $BAE$  üçgeninde  $AD$  açıortay olur. Bu durumda  $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DE} = \frac{BD}{AC - BD}$  olup  $AB \cdot AC - AB \cdot BD = AC \cdot BD$   $\checkmark$   $AB \cdot AC = BD(AB + AC)$   $\checkmark$   $\frac{1}{BD} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$  olur.

5.  $ABC$  üçgeninde  $3\check{A} + 2\check{B} = \pi$  ise  $a^2 + bc = c^2$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $\check{A} + \check{B} = 90^\circ - \frac{\check{C}}{2}$  ve  $\check{C} = 90^\circ + \frac{\check{A}}{2}$  olur.  $AB$  kenarı üzerinde  $AD = AC$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınırsa  $\angle ABC : \angle CBD$  olacağından  $BC : BD = BA : BC$  olup  $\frac{a}{c-b} = \frac{c}{a}$  eşitliğinden  $a^2 + bc = c^2$  olur.

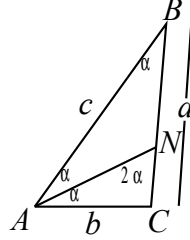
6.  $ABC$  üçgeninde  $4.m(C) = 2.m(B) = m(A)$  ise  $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  olduğunu gösteriniz.

7.  $ABC$  üçgeninde  $BC = 2.AC - 2.AB$  dir.  $BC$  kenarı üzerinde alınan bir  $D$  noktası için  $2.m(ADB) = m(ABD)$  olması için gerek ve yeter şartın  $BD = 3CD$  olduğunu gösteriniz.

8. ABC üçgeninde  $\angle A = 3\angle B$  ise  $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$  olduğunu gösteriniz

9. ABC üçgeninde A'nın karşısındaki dış çember merkezi O ve üçgenin çevrel çemberinin AC yayının orta noktası M olsun.  $MO \cap BC = P$  olmak üzere  $m(\angle BAC) = 2.m(\angle ACB)$  ise  $AB = BP$  olduğunu gösteriniz.

10. C açısı geniş ve A açısı B açısının 2 katı olan kenarları tamsayılı çevre en küçük üçgen (28, 16, 33) kenarlarına sahiptir. Kanıtlayınız.



**Çözüm:** Şartları sağlayan çevre en küçük üçgen yan şekilde verilen ABC üçgeni olsun. A iç açıortayı BC'yi N'de kessin.

$$a^2 = b \cdot (b + c)$$

olduğunu biliyoruz. Burada  $b$  ile  $b + c$  aralarında asal olmalıdır. Değilse, 1'den farklı bir  $d$  ortak böleni bulunurdu ve bu ortak bölen  $a$ 'yı da bölerdi. Kenarları  $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$  olan üçgen hem ABC'ye benzer hem de daha küçük çevreli olurdu. Bu ise ABC üçgeninin seçilişine uymaz. Buradan böylece aralarında asal  $b$  ve  $b + c$  sayılarının tamkare olduklarını çıkarıyoruz.

$b = m^2, b + c = n^2, a = mn$  ( $m, n \in \mathbb{N}^+$ ) olsun. ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği  $c < a + b$ 'yi, C açısının geniş olması da  $c^2 > a^2 + b^2$ 'yi veriyor. Bu eşitsizlikleri  $m$  ve  $n$  türünden yazdığımızda

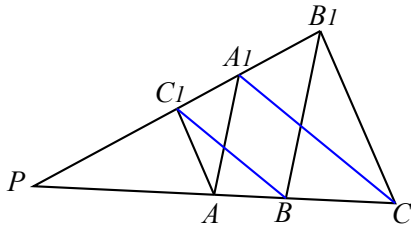
$$\sqrt{3} < n/m < 2$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Bu eşitsizlikler  $m = 1, 2, 3$  olduğunda hiçbir  $n$  değeri için sağlanmazlar. Buna göre  $m \geq 4$  ve  $n^2 \geq 3m^2 \geq 48$  olur, o halde  $n \geq 7$  olmalıdır, dolayısıyla da

$$a + b + c = m \cdot n + n^2 \geq 4 \cdot 7 + 7^2 = 77$$

olmalıdır. Sonuçta da bahsi geçen en küçük çevreyi 77 ve buna bağlı olarak  $(a, b, c)$  değerlerini (28, 16, 33) olarak buluruz.

11. Bir doğru üzerinde A, B, C ve başka bir doğru üzerinde A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> noktaları verilsin. Eğer AB<sub>1</sub> // BA<sub>1</sub>, AC<sub>1</sub> // CA<sub>1</sub> ise BC<sub>1</sub> // CB<sub>1</sub> olduğunu gösteriniz.



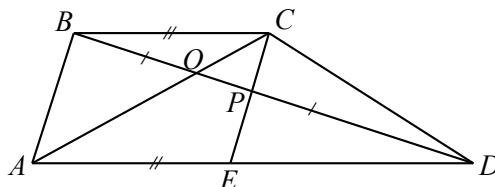
**Çözüm:** Eğer doğrular paralel ise  $BC = C_1B_1$  olup  $BCB_1C_1$  paralelkenar olur. Buradan  $BC_1 \parallel CB_1$  olur.

Doğrular paralel olmayıp kesim noktaları P olsun. Bu durumda

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB_1}{PA_1} \quad \text{ve} \quad \frac{PC}{PA} = \frac{PA_1}{PC_1} \quad \text{olup taraf tarafa çarparsak} \quad \frac{PC}{PB} = \frac{PB_1}{PC_1}$$

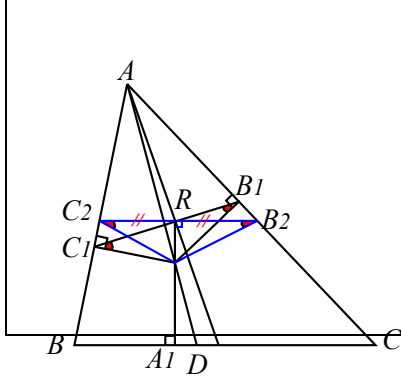
orantısı elde edilir. Bu ise  $BC_1 \parallel CB_1$  olduğunu gösterir.

12. ABCD dörtgeninde  $AD \parallel BC$  olmak üzere  $[AD]$  üzerinde alınan bir E noktası için  $AE = BC$  olsun. AC ve CE, BD'yi sırasıyla O ve P'de kessin.  $BO = PD$  ise  $AD^2 = BC + AD \cdot BC$  olduğunu gösteriniz.



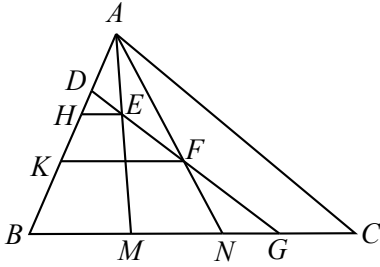
**Çözüm:**  $BO = PD$  olduğundan  $\frac{BO}{OD} = \frac{PD}{DP} = \frac{1}{k}$  olsun. Kolaylık olması açısından  $BC = 1$  alalım. Bu durumda  $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{k}$  ve  $\frac{ED}{BC} = \frac{PD}{OB} = \frac{PD}{OD} = \frac{1}{k}$  olduğundan  $AD = k$  ve  $ED = \frac{1}{k}$  olur. Buradan  $k = 1 + \frac{1}{k}$  yani  $k^2 = k + 1$  olur.  $AD = k^2$  ve  $BC + AD \cdot BC = 1 + k$  olduğundan  $AD^2 = BC + AD \cdot BC$  olur.

**13.**  $ABC$  üçgeninin  $[AD]$  açıortayı üzerinde alınan bir  $P$  noktasının  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  kenarları üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ 'dir.  $PA_1$  ile  $B_1C_1$ 'in kesim noktası  $R$  ise  $AR$ 'nin  $BC$ 'yi ortaladığını gösteriniz.



**Çözüm:**  $AD$  açıortay olduğundan  $m(\angle PC_1B_1) = m(\angle PB_1C_1)$ 'dir.  $R$ 'den geçen  $BC$ 'ye paralel doğru  $AB$  ve  $AC$ 'yi sırasıyla  $C_2$  ve  $B_2$ 'de kessin. Bu durumda  $C_2B_2 \parallel BC$  olur.  $m(\angle PC_1C_2) = m(\angle PRC_2) = 90^\circ$  olduğundan  $m(\angle PC_2B_2) = m(\angle PB_2R) = m(\angle PC_1R) = m(\angle PC_1B_1)$  olur.  $m(\angle PB_1C) = m(\angle PRB_2) = 90^\circ$  olduğundan  $m(\angle PB_1C_1) = m(\angle PB_1R) = m(\angle PB_2R) = m(\angle PB_2C_2)$  olur. Bu durumda  $(PB_2R) = m(\angle PC_2R)$  olup  $C_2PB_2$  ikizkenardır.  $PR \perp B_2C_2$  olduğundan  $C_2R = B_2R$ 'dir.  $C_2B_2 \parallel BC$  olduğu göz önüne alınırsa  $AR$ ,  $BC$ 'yi ortalır.

**14.** Bir  $d$  doğrusu üzerinde verilen sırada  $B, M, N, C$  noktaları için  $BM = MN = NC$  olsun.  $D$  doğrusu üzerinde olmayan bir  $A$  noktası alalım.  $AC$ 'ye paralel bir doğru  $[AB]$ ,  $[AM]$ ,  $[AN]$ 'yi sırasıyla  $D, E, F$ 'de kessin.  $EF = 3 \cdot DE$  olduğunu gösteriniz.



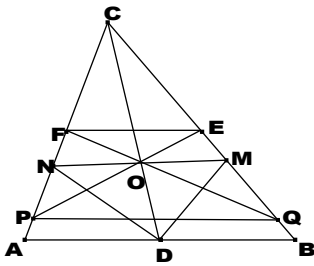
**Çözüm:**  $E$  ve  $F$ 'den geçen  $BC$ 'ye paralel doğrular  $AB$ 'yi sırasıyla  $H$  ve  $K$ 'de kessin. Ayrıca  $DF$ ,  $NC$ 'yi  $G$ 'de kessin. Bu durumda

$$\frac{GC}{NC} = \frac{FA}{NA} = \frac{KF}{BN} = \frac{KF}{2 \cdot NC} \quad \text{olup} \quad KF = 2 \cdot GC \quad \text{olur.}$$

$$\frac{EH}{MB} = \frac{AE}{AM} = \frac{GC}{MC} = \frac{GC}{2 \cdot MB} \quad \text{olduğundan} \quad GC = 2 \cdot EH \quad \text{olup} \quad KF = 4 \cdot EH$$

olur.  $HE \parallel KF$  olduğundan  $\frac{DE}{DF} = \frac{HE}{KF} = \frac{1}{4}$  olduğundan  $EF = 3 \cdot DE$ 'dir.

**15.**  $ABC$  üçgeninin  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $D, E, F$ 'dir.  $BDC$  açısının açıortayı  $BC$ 'yi  $M$ 'de,  $ADC$  açısının açıortayı  $AC$ 'yi  $N$ 'de kessin.  $MN \cap CD = O$ ,  $EO \cap AC = P$  ve  $FO \cap BC = Q$  ise  $CD = PQ$  olduğunu gösteriniz.



**Çözüm:**  $DM$  ve  $DN$  açıortay olduğundan  $\frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DC} = \frac{AD}{DC} = \frac{NA}{NC}$  olduğundan  $MN \parallel AB$ 'dir. Bu durumda  $\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{MC}{BC}$ 'dir. Ayrıca

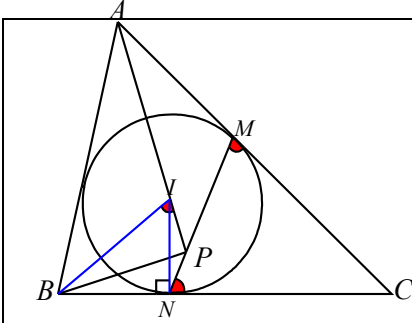
$$\frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DC} \quad \text{ise} \quad \frac{MB + MC}{MC} = \frac{DB + DC}{DC} = \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{MN} \quad \text{olur. Diğer taraftan} \quad FE =$$

$$AB:2 = DB \quad \text{olduğundan} \quad \frac{FE + DC}{DC} = \frac{2 \cdot FE}{NM} \quad \text{olup} \quad \frac{1}{FE} + \frac{1}{DC} = \frac{2}{MN} (*) \quad \text{olur.}$$

Ayrıca  $MN \parallel AB$  ve  $AD = DB$  olduğundan  $OM = ON$  olup  $CMN$  üçgeninde  $PE$  ve  $QF$  kesenlerine göre Menaleus teoreminden  $\frac{CP}{PN} = \frac{CE}{ME}$  ve  $\frac{CQ}{QM} = \frac{FC}{FN}$  olur.  $FE \parallel MN$  olduğundan  $\frac{CE}{ME} = \frac{FC}{FN}$  olup  $\frac{CQ}{QM} = \frac{CP}{PN}$

olur. Bu durumda  $EF \parallel QP'$  dir.  $AQEF$  yamuğunda  $\frac{1}{FE} + \frac{1}{PQ} = \frac{2}{MN}$  olur. (\*) eşitliği göz önüne alınırsa  $CD = PQ$  olur.

**16.**  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $AC$  ve  $BC$  kenarlarına  $M$  ve  $N$ 'de teğet olup merkezi  $I$ 'dir.  $AI \cap MN = P$  ise  $AP \perp BP$  olduğunu gösteriniz.

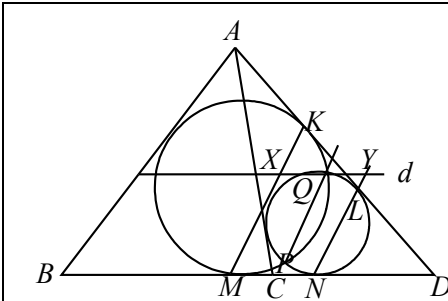


**Çözüm:**  $CM = CN$  olduğundan  $m(CNM) = 90^\circ - m(C) / 2$  olur. Ayrıca  $m(AIB) = 90^\circ + m(C) / 2$  olduğundan  $m(BIP) = 90^\circ - m(C) / 2$  dir.  $m(CNM) = m(BIP)$  eşitliği  $BIPN$ 'nin kiriş dörtgeni olduğunu gösterir. Dolaysı ile  $m(BPI) = m(BNI) = 90^\circ$  olup  $AP \perp BP$ 'dir.

**17.**  $ABC$  üçgeninin iç çember merkezi  $I$  olup  $BC$  ve  $CA$ 'ya  $D$  sırasıyla  $D$  ve  $E$ 'de teğettir.  $AB$  ve  $AC$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $K$  ve  $L$  olsun.  $BI$ 'nin  $DE$  ile  $KL$ 'nin kesim noktasından geçtiğini gösteriniz.

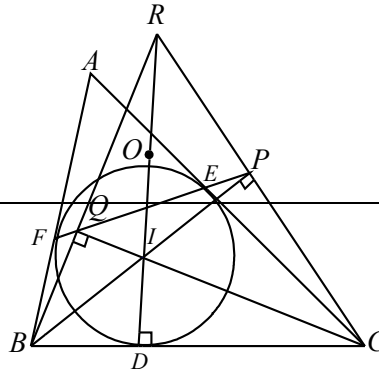
**Çözüm:**  $BI \cap DE = P$  olsun. **P-16'den**  $m(BPA) = 90$  olup  $AK = KB$  olduğundan  $AK = KB = KP$  olur. Bu durumda  $m(PBD) = m(PBK) = m(BPK)$  olup  $PK \parallel PC$ 'dir.  $KL \parallel BC$  olduğu göz önüne alınırsa  $P$  noktası  $KL$  ile  $DE$ 'nin kesim noktası olmalıdır.

**18.**  $ABC$  bir üçgen olmak üzere  $BC$  üzerinde bir  $D$  noktası alınsın  $C, B$  ile  $D$  arasında olmak üzere  $ABD$  ve  $ACD$  üçgenlerinin iç çemberlerinin kesim noktaları  $P$  ve  $Q$  olsun.  $PQ$ 'nun sabit bir noktadan geçtiğini gösteriniz.



**Çözüm:**  $ABD$  ve  $ACD$ 'nin iç çemberleri  $BD$ 'ye  $M$  ve  $N$ 'de,,  $AD$ 'ye  $K$  ve  $L$ 'de teğet olsun. Bu durumda  $KM \parallel PQ \parallel LN$  olup  $PQ$ 'nın  $KM$  ve  $LN$ 'ye uzaklıkları eşittir. (\*).  $AB, AC, AD$ 'nin orta noktalarını birleştiren doğruya  $d$  diyelim.  $KM \cap d = X$  ve  $LN \cap d = Y$  olsun. p-16'den  $X$  ve  $Y$  noktaları  $ABC$  ve  $ACD$  açılarının açıortaylarının  $d$ 'yi kestiği noktalardır. (\*)'dan dolayı  $PQ, XY$ 'nin orta noktasından geçer.

**19.**  $ABC$  üçgeninin iç çemberinin olduğu noktalar sırasıyla  $D, E, F$  ve  $EF$ 'yi sırasıyla  $P$  ve  $Q$ 'da kessin. merkezi  $O$  ise  $O, I, D$  noktalarının

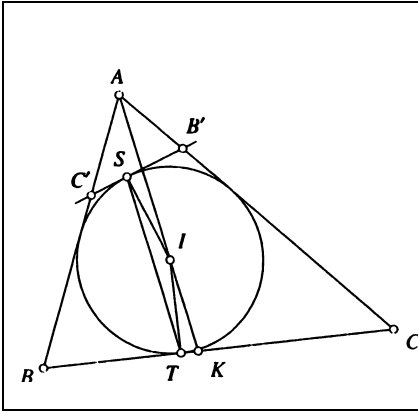


$BC, CA, AB$  kenarlarına teğet çemberin merkezi  $I$  olsun.  $BI$  ve  $CI, PIQ$  üçgeninin çevrel çemberinin doğrusal olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $BQ \cap CP = R$  olsun. **p-** olur. Bu durumda  $I$  noktası  $BRC \perp BC$  olur.  $ID \perp BC$  olduğundan  $PIQ$  üçgeninin çevrel çember noktası olduğundan  $O, I, D$  noktaları doğrusaldır.

**16'den**  $BR \perp CQ$  ve  $CR \perp BP$  üçgeninin diklik merkezi olup  $RI, D$  noktasında geçer. Ayrıca merkezi  $O$  noktası  $RI$ 'nin orta

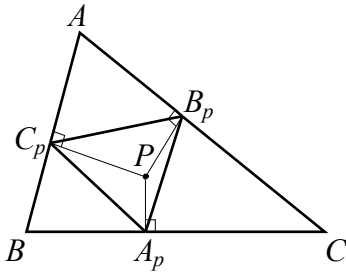
**20.** ABC üçgeninin iç çemberinin merkezi I olup iç çember BC kenarına T’de teğettir. T’den geçen IA’ya paralel doğru iç çemberi S’de kessin. İç çemberin S’deki teğeti AB ve AC kenarlarını sırasıyla C<sub>1</sub> ve B<sub>1</sub>’de kestiğine göre ABC üçgeni ile AB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> üçgenlerinin benzer olduğunu gösteriniz.



**Çözüm:** AI ile BC’nin kesim noktası K olmak üzere  $m(\angle STB) = m(\angle AKB) = m(\angle C) + \frac{m(\angle A)}{2}$ ’dir. Ayrıca  $m(\angle STB) = m(\angle TSC_1)$ ’dir.

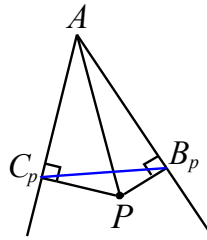
BTSC<sub>1</sub> dörtgeninde  $m(\angle SC_1B) = 360 - (m(\angle B) + m(\angle BTS) + m(\angle TSC_1))$  olup  $m(\angle SC_1B) = 180 - m(\angle C)$  olup  $m(\angle AB_1C_1) = m(\angle C)$  olur. Benzer şekilde  $m(\angle AB_1C_1) = m(\angle B)$  olduğu gösterilebilir.

**21.** Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan herhangi bir P noktasından, üçgenin kenarlarına birer dikme indirilsin. BC, CA, AB üzerindeki dikme ayakları sırasıyla A<sub>p</sub>, B<sub>p</sub>, C<sub>p</sub> olsun. A<sub>p</sub>B<sub>p</sub>C<sub>p</sub> üçgenine P noktasının pedal üçgeni denir. ABC üçgenine de A<sub>p</sub>B<sub>p</sub>C<sub>p</sub> üçgeninin ters pedal üçgeni denir.



ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktasının pedal üçgeni A<sub>p</sub>B<sub>p</sub>C<sub>p</sub> olsun.  $B_pC_p = PA \cdot \sin A$ ,  $C_pA_p = PB \cdot \sin B$ ,  $A_pB_p = PC \cdot \sin C$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** PB<sub>p</sub>AC<sub>p</sub>, PC<sub>p</sub>BA<sub>p</sub> ve PA<sub>p</sub>CB<sub>p</sub> dörtgenlerinin birer kiriş dörtgeni olduğunu görüyoruz.



$$\frac{B_pC_p}{\sin A} = \frac{B_pC_p}{\sin B_pPC_p} = \frac{C_pP}{\sin C_pB_pP} = \frac{C_pP}{\sin C_pAP} = PA$$

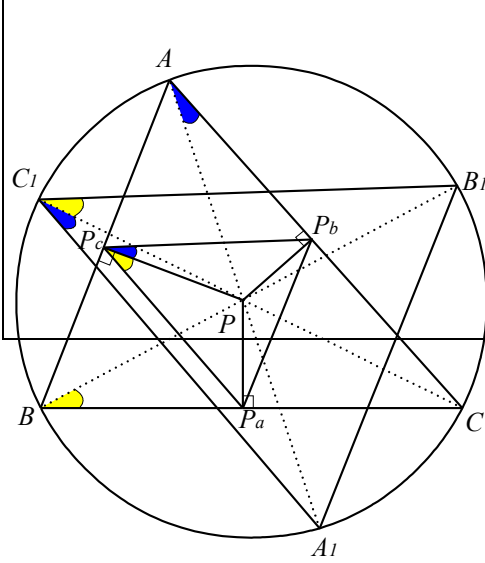
olduğundan ilk eşitlik kanıtlanmış olur. Diğerleri de PC<sub>p</sub>BA<sub>p</sub> ve PA<sub>p</sub>CB<sub>p</sub> kiriş dörtgenlerinden faydalananak benzer şekilde kanıtlanır.

**23.** ABC üçgeninin P noktasına nazaran pedal üçgeni P<sub>a</sub>P<sub>b</sub>P<sub>c</sub> olsun. AP ile P<sub>c</sub>P<sub>b</sub>’nin orta noktasından geçen doğruya d<sub>a</sub> diyelim. Benzer şekilde d<sub>b</sub> ve d<sub>c</sub> doğruları tanımlansın. Bu üç doğru noktadaştır.

**Çözüm:** AP<sub>c</sub>PP<sub>b</sub> kirişler dörtgeni olup AP’nin orta noktası çevrel çemberin merkezi olduğundan d<sub>a</sub> doğrusu P<sub>c</sub>P<sub>b</sub>’nin orta dikmesidir. Benzer şekilde d<sub>b</sub> ve d<sub>c</sub> doğruları da sırasıyla P<sub>a</sub>P<sub>c</sub> ve P<sub>a</sub>P<sub>b</sub>’nin orta

dikmesi olup bir üçgenin kenar orta dikmeleri noktadaş olduğundan bu üç doğru noktadaş olup kesim noktaları da  $P_aP_bP_c$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

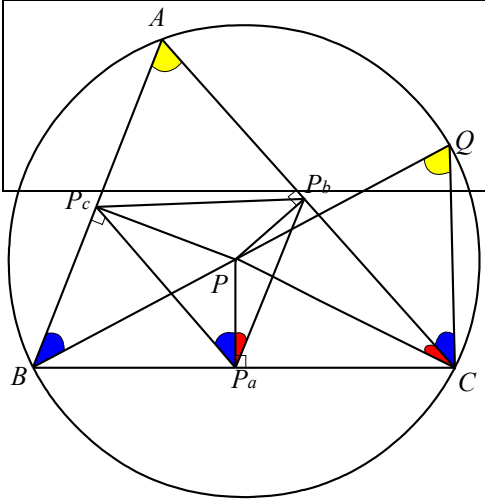
**22.**  $ABC$  üçgeninin  $P$  noktasına nazaran pedal üçgeni  $P_aP_bP_c$  ve  $AP, BP, CP$ 'nin  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberini kestiği noktalar sırasıyla  $A_1, B_1, C_1$  olsun.  $P_aP_bP_c \sim A_1B_1C_1$ 'dir.



**Kanıt:**  $AP_cPP_b$  ve  $BP_aPP_c$  kirişler dörtgeni olduğundan  $m(PAP_b) = m(PP_cP_b)$  ve  $m(PBP_a) = m(PP_cP_a)$  olup ayrıca  $m(PAP_b) = m(CC_1A_1)$  ve  $m(PBP_a) = m(CC_1B_1)$  olduğundan  $m(P_c) = m(C_1)$ 'dir.

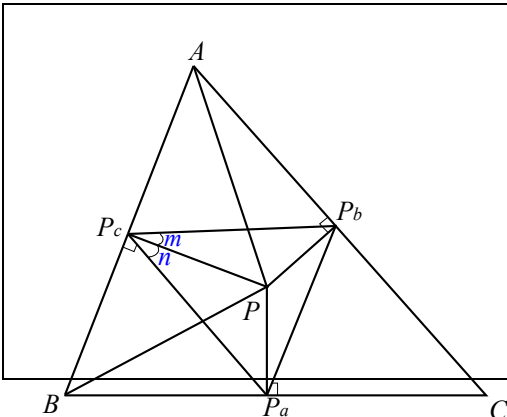
Benzer şekilde  $m(P_b) = m(B_1)$  ve  $m(P_a) = m(A_1)$  olacağından  $P_aP_bP_c \sim A_1B_1C_1$ 'dir.

**24.**  $ABC$  üçgeninin  $P$  noktasına nazaran pedal üçgeni  $P_aP_bP_c$  olsun.  $BP$ ,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberini  $Q$  noktasında kessin.  $m(P_aP_bP_c) = m(QCP)$ 'dir.



**Çözüm:**  $m(ABQ) = m(ACQ)$  ve  $BP_cPP_a$  ve  $CP_aPP_b$  kirişler dörtgeni olduğundan  $m(ABQ) = m(P_cP_aP)$  ve  $m(P_cP_aP) = m(P_bCP)$  olup  $m(QCP) = m(ACQ) + m(P_bCP) = m(P_cP_aP) + m(P_cP_aP) = m(P_aP_bP_c)$ 'dir.

**25[IMO–1996].**  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde bir  $P$  noktası alınsın.  $APB$  ve  $APC$  üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktaları olsun. Eğer  $m(APB) - m(ACB) = m(APC) - m(ABC)$  ise  $AP, CE$  ve  $BD$ 'nin noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

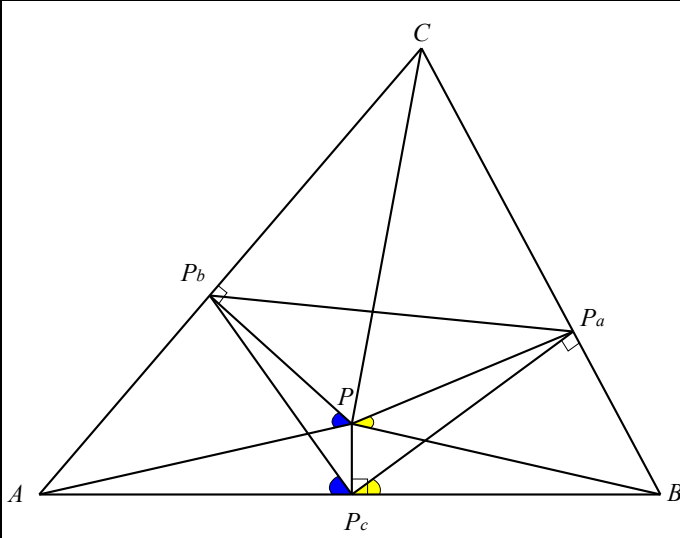


**Kanıt:**  $m(APB) - m(ACB) = m(APC) - m(ABC) = x$  ve  $P$  noktasının pedal üçgeni  $P_aP_bP_c$  olmak üzere  $m(P_bP_cP) = m$   $m(P_aP_cP) = n$  olsun.

Bu durumda  $m(P_aPB) = 90 - n$ ,  $m(P_bPA) = 90 - m$  ve  $m(P_aPP_b) = 180 - m(ACB)$  olduğundan  $90 - m + 90 - n + 180 - C + C + x = 360$  olduğundan  $m(P_aP_cP_b) = m + n = x$  olup benzer mantıkla  $m(P_aP_bP_c) = x$  olur. Yani  $P_aP_c = P_aP_b$

dir. p-21'den  $PB \cdot \sin B = PC \cdot \sin C$  olup  $\frac{PB}{PC} = \frac{\sin C}{\sin B}$  ve  $ABC$  üçgeninde sinüs teoreminden  $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$  olduğundan  $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$ 'dir. Bu ise  $APB$  ve  $ACP$  açılarının açıortaylarının  $AP$  üzerinde kesiştiğini gösterir. Yani  $AP$ ,  $CE$  ve  $BD$  noktadaştır.

**26.**  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde  $AC$ .  $BP=AP$ .  $BC$  olacak şekilde bir  $D$  noktası verilsin. Eğer  $m(APB) = 90^\circ + m(ACB)$  ise  $\frac{AB \cdot CP}{AC \cdot BP} = ?$



**Çözüm:**  $P$  noktasının pedal üçgeni  $P_aP_bP_c$  olsun.

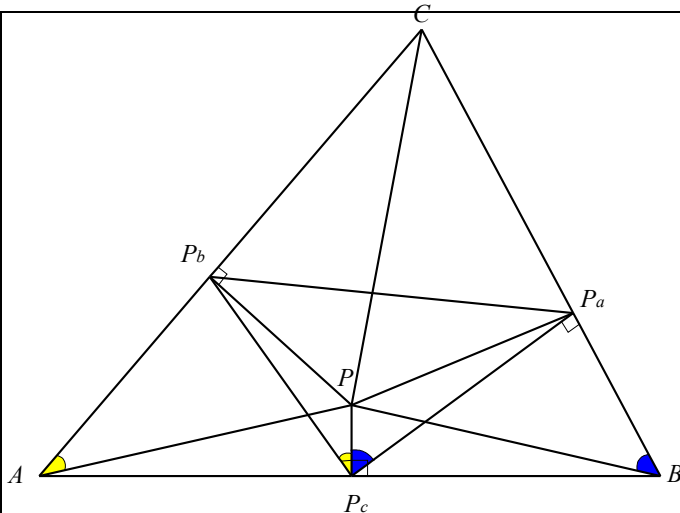
$m(P_bPP_a) = 180^\circ - m(ACB)$  ve  $m(APB) = 90^\circ + m(ACB)$  olduğundan  $m(APP_b) + m(BPP_a) = 90^\circ$  olup  $m(P_bP_cP_a) = 90^\circ$  olmalıdır.  $ABC$  üçgeninde sinüs teoreminden

$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin A}{\sin B}$  ve  $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}$  olduğundan  $\frac{AP}{BP} = \frac{\sin A}{\sin B}$  olur. Ayrıca Önsav 1'den  $AP = \frac{P_cP_b}{\sin A}$  ve  $BP = \frac{P_cP_a}{\sin B}$  olup  $\frac{AP}{BP} = 1$  yani  $AP = BP$  olur. Dolayısı ile

$P_aP_b = \sqrt{2} \cdot P_cP_b = \sqrt{2} \cdot P_cP_a$  yazılabilir. Yine p-21'den  $CP = \frac{P_aP_b}{\sin C}$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{AB \cdot CP}{AC \cdot BP} = \frac{\sin C \cdot \frac{P_aP_b}{\sin C}}{\sin B \cdot \frac{P_cP_a}{\sin B}} \text{ olup } \frac{P_aP_b}{P_cP_a} = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

**27[BMO–1993].**  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde alına bir  $P$  noktası için  $m(BPC) - m(BAC) = \alpha$ ,  $m(CPA) - m(CBA) = \beta$ ,  $m(APB) - m(ACB) = \gamma$  ise  $PA \cdot \frac{\sin BAC}{\sin \alpha} = PB \cdot \frac{\sin CBA}{\sin \beta} = PC \cdot \frac{\sin ACB}{\sin \gamma}$  olduğunu kanıtlayınız.



**Kanıt:**  $P$  noktasından kenarlara indirilen dikme ayakları  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  olsun. Önsav-1'den  $m(PAP_b) = m(PP_cP_b)$  ve  $m(PBP_a) = m(PP_cP_a)$  olup  $m(PAP_b) + m(PBP_a) + m(ACB) = m(APB)$  olur. Bu durumda  $m(P_bP_cP_a) = \gamma$  olacaktır. Benzer şekilde  $m(P_bP_aP_c) = \alpha$  ve  $m(P_aP_bP_c) = \beta$  yazılabilir.  $P_aP_bP_c$  üçgeninde sinüs teoreminden  $\frac{P_aP_b}{\sin \gamma} = \frac{P_bP_c}{\sin \alpha} = \frac{P_cP_a}{\sin \beta}$ 'dir. (1)

Önsav-1 den  $P_bP_c = PA \cdot \sin BAC$ ,  $P_cP_a = PB \cdot \sin ABC$  ve  $P_aP_b = PC \cdot \sin ACB$  olup bu eşitlikler (1)'de yerine yazılırsa istenen Kanıtlanmış olur.