

# Trigonometrik Fonksiyonlar

Yazar

Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

ÜNİTE

6

## Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- açi kavramını hatırlayacak,
- açiların derece ölçümünü radyan ölçümüne ve tersine çevirebilecek,
- trigonometrik fonksiyonların tanımını, özelliklerini ve grafiklerini görecektir,
- trigonometrik özdeşlikler ve trigonometrik denklemleri hatırlayacaksınız.

## İçindekiler

- |   |     |
|---|-----|
| • Giriş                                   | 157 |
| • Açı Kavramı, Sinüs ve Kosinüs           | 157 |
| • Tanjant ve Kotanjant                    | 166 |
| • Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri | 170 |
| • Değerlendirme Soruları                  | 175 |

---

## Çalışma Önerileri

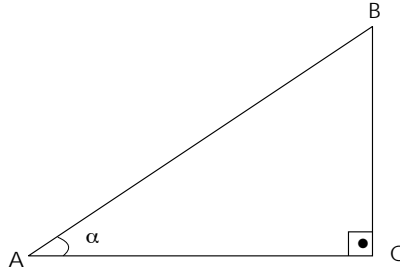
- Ünite 1, 2 ve 3 ü okumadan bu üniteyi okumayınız
- Bir açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjantını hesap makinesi ile bulmaya çalışınız
- Trigonometrik özdeşlikleri iyi öğreniniz
- Herhangi bir trigonometrik fonksiyon yazıp grafiğini çizmeye çalışınız.

## 1. Giriş

Bilindiği gibi ABC dik üçgeninde  $\alpha$  açısının sinüsü, kosinüsü, tanjant ve kotanjantı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}, \quad \cot \alpha = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



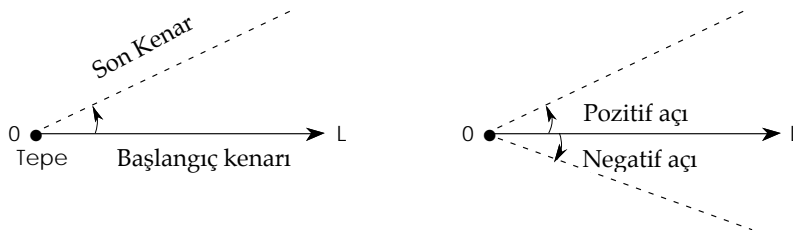
Şekil 6.1

Bu tanımlamalarda  $\alpha$  açısı dar açıdır. Ancak dar açı olmayan herhangi  $\alpha$  açısının ve bir gerçel sayının da sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjantı tanımlanabilir. Buna göre  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  ve  $\cot x$  fonksiyonlarından sözedilebilir. Bu bölümde bu fonksiyonların özellikleri ve grafikleri ele alınacaktır.

## 2. Açı Kavramı, Sinüs ve Kosinüs

**Açı**, sabit bir noktadan çıkan bir L yarı doğrusunun bu sabit nokta etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir açıklıktır. Sabit noktaya açının **tepe noktası**, L yarı doğrusuna açının **başlangıç kenarı**, dönmeden sonra elde edilen yarı doğruya ise açının **son kenarı** (bitim kenarı) denir. Eğer dönme saat ibresinin ters yönünde ise açı pozitif, saat ibresi yönünde ise açı negatiftir.

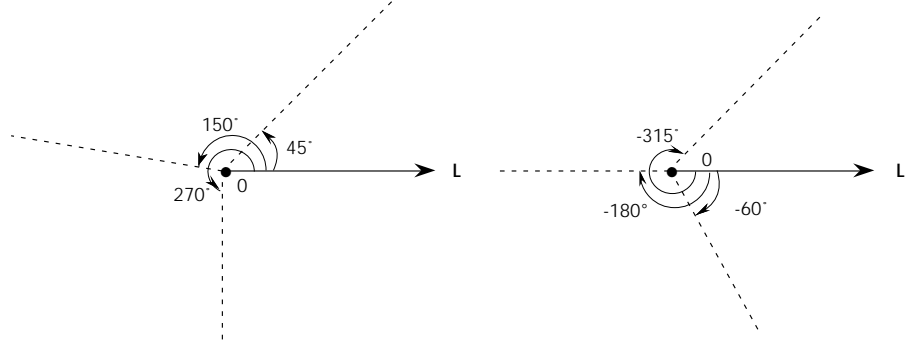
Eğer kartezyen koordinat sisteminin başlangıç noktasını açının tepe noktası, x-ekseninin pozitif yarı eksenini ise L doğrusu olarak alırsak bir açının belirlenmesi için O noktasından çıkan bir yarıdoğrunun verilmesi yeterlidir.



Şekil 6.2

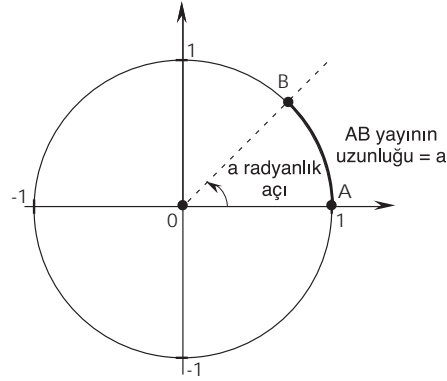
Açıların ölçümü için derece, dakika, saniye ve radyan gibi birimler kullanılır. Eğer L yarıdoğrusu O noktası etrafında tam bir devir yaparsa elde edilen açının başlangıç kenarı ile son kenarı çakışmış olur. Böyle elde edilen açığa 360 derecelik açı denir ve  $360^\circ$  ile gösterilir. Tam devrin  $1/360$  i ile elde edilen açının ölçüsü  $1^\circ$  (1 derece) olur. 1 derecenin altmışta birine  $1'$  (1 dakika), 1 dakikanın altmışta birine  $1''$  (1 saniye) denir.

**Örnek:**  $45^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-180^\circ$ ,  $-315^\circ$  gibi açıları gösteriniz.



Şekil 6.3

Şimdi, açıların radyan ölçü birimini tanımlamak için merkezi koordinat başlangıcında, yarıçapı bir birim olan bir çember düşünelim. Şekildeki açının başlangıç kenarı olan x-ekseninin çemberle kesişim noktası A, son kenarının kesişim noktası B, AB yayının uzunluğu ise  $a$  birim olsun. Bu durumda AOB açısına  **$a$  radyanlık açı** denir. Bu tanıma göre 1 radyanlık açı için AB yayının uzunluğu 1 birim, 2 radyanlık açı için 2 birim,  $\pi$  radyanlık açı için  $\pi$  birim olmalıdır.



Şekil 6.4

Eğer açının başlangıç kenarından son kenarına olan hareketi saat ibresinin ters yönünde ise radyan ölçüm pozitif, aynı yönde ise negatif olur.

Aynı bir açının derece ölçümü ile radyan ölçümü arasındaki bağıntıyı bulmak için tam bir devir ile elde edilen  $360^\circ$  lik açıyı gözönüne alalım. Bu açının radyan ölçümü = birim çemberin uzunluğu =  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$  radyandır. Böylece

$$360 \text{ derece} = 2\pi \text{ radyan} ,$$

$$1 \text{ radyan} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 18' ,$$

$$1 \text{ derece} = \frac{\pi}{180} \text{ radyan}$$

elde edilir ( $\pi$  irrasyonel sayısının yaklaşık değerinin 3,1416 olduğunu hatırlayalım).

Bir açının ölçümü  $a$  ise bazen bu açığa  $a$  açısı da denir.

**Örnek:**  $30^\circ = \left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$  radyan  $= \frac{\pi}{6}$  radyan,

$$45^\circ = \left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \text{ radyan} = \frac{\pi}{4} \text{ radyan},$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radyan}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ radyan}, \quad 180^\circ = \pi \text{ radyan vs.}$$

1)  $150^\circ$  ve  $270^\circ$  yi radyana çeviriniz.

2)  $-1/2$  radyan ve 3 radyanı dereceye çeviriniz.

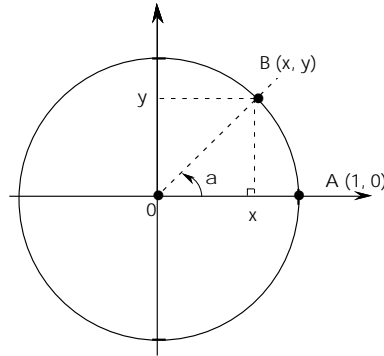
?

Cevaplarınız 1)  $\frac{5\pi}{6}$  ve  $\frac{3\pi}{2}$  2)  $-28^\circ 39'$  ve  $171^\circ 54'$  olmalıdır

Merkezi başlangıç noktasında, yarıçapı 1 olan çember ve tepesi başlangıçta olan  $a$  açısını alalım (burada  $a$ , açının derece veya radyan ölçümüdür).  $a$  açısı çember üzerinde bir B noktasını belirlemiş olur. B noktasının ordinatına  $a$  açısının **sinüsü**, apsisine ise **kosinüsü** denir. Böylece  $\sin a = y$ ,  $\cos a = x$  olur.  $y$  nin  $x$  e oranına  $a$  açısının **tanjantı**,  $x$  in  $y$  ye oranına ise **kotanjantı** denir:

$$\sin a = y, \quad \cos a = x$$

$$\tan a = \frac{y}{x}, \quad \cot a = \frac{x}{y}$$



Şekil 6.5

Bundan başka  $\frac{1}{x}$  e  $a$  açısının **sekantı**,  $\frac{1}{y}$  ye ise **kosekantı** denir.

$$\sec a = \frac{1}{x}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{y}$$

Görüldüğü gibi  $x=0$  için tanjant ve sekant,  $y=0$  için kotanjant ve kosekant tanımsızdır.

Eğer  $a$  açısının ölçü birimi derece ise  $\sin a^\circ$ ,  $\cos a^\circ$ ,  $\tan a^\circ$ ,  $\cot a^\circ$ ,  $\sec a^\circ$  ve  $\operatorname{cosec} a^\circ$  yazılır.  $a$  açısının ölçü birimi radyan ise  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\tan a$ ,  $\cot a$ ,  $\sec a$ ,  $\operatorname{cosec} a$  yazılır. Buna göre  $\sin 30^\circ$ ,  $30^\circ$  lik açının sinüsünü,  $\sin 30$  ise 30 radyanlık açının sinüsünü gösterir. Bu iki sayı birbirinden çok farklıdır.



**$\sin a^\circ$  ile  $\sin a$  yı,  $\cos a^\circ$  ile  $\cos a$  yı karıştırmayınız.**

Birim çemberin üzerindeki tüm noktaların apsisi ve ordinatları  $(-1)$  den küçük ve  $1$  den büyük olmadığına göre her  $a$  açısı için

$$-1 \leq \sin a \leq 1, \quad -1 \leq \cos a \leq 1$$

yazılabilir.

$a$  açısının son kenarının koordinat sisteminde bulunduğu bölgeye göre,  $a$  açısı I., II., III. veya IV. bölgededir denilebilir.  $a$  açısının bulunduğu bölgeye bağlı olarak sinüs ve kosinüsün işaretleri aşağıdaki gibi değişir.

	I. Bölge	II. Bölge	III. Bölge	IV. Bölge
$\sin a$	+	+	-	-
$\cos a$	+	-	-	+

**Örnek:**  $\sin 580^\circ$  ve  $\cos (-5)$  in işaretlerini belirleyiniz.

**Çözüm:**  $580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$ ,  $(-5)$  radyan  $= (-5) \cdot \frac{180}{\pi}$  derece  $\approx -286^\circ 30'$

gibi yazarsak  $580^\circ$  açının III. bölgede,  $(-5)$  radyanlık açının ise I. bölgede olduğunu görebiliriz. Yukarıdaki tabloya göre  $\sin 580^\circ$  nin işareti "-",  $\cos (-5)$  ninki ise "+" olur.

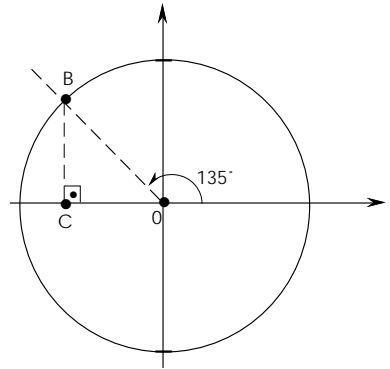
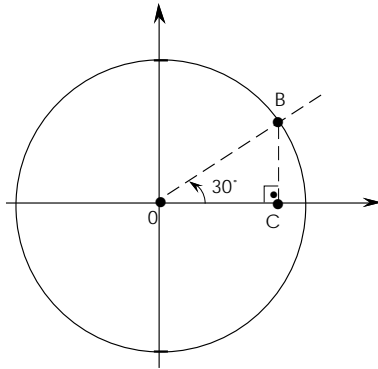


**$\sin 9$  ve  $\cos 1000^\circ$  nin işaretlerini belirleyiniz.**

Cevaplarınız "+" ve "-" olmalıdır.

**Örnek:**  $\sin 30^\circ$  ve  $\cos 135^\circ$  yi hesaplayınız.

**Çözüm:** Aşağıdaki birinci şekilde COB dik üçgeninde  $30^\circ$  lik açı karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısıdır.  $|OB| = 1$  olduğundan  $|CB| = 1/2$  olur. Buna göre  $\sin 30^\circ = 1/2$  olur.



Şekil 6.6

İkinci şekle baktığımızda OB doğrusunun III. bölgenin açıortayı olduğunu görebiliriz. Buna göre OBC dik üçgeni ikizkenardır. Pisagor teoremine göre

$$|OC|^2 + |CB|^2 = |OB|^2, \quad 2|OC|^2 = 1, \quad |OC| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

B noktasının apsisinin negatif olması gerektiğinden  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  olur.

Bahsettiğimiz bu yöntemle  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$  vb. eşitlikler elde edilebilir. Bu eşitlikle-

ri açının radyan ölçümü ile de ifade edebiliriz:  $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  vs.

$120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, \dots$  gibi açılarının da sinüs ve kosinüsleri yukarıdaki yöntemle hesaplanabilir. Fakat herhangi açının (ister derece isterse radyanla ifade edilsin) sinüs ve kosinüsleri tablo veya hesap makinesi yardımı ile hesaplanır.

Açıların tanımından görüldüğü gibi bir a açısına birim çember üzerinde B noktası karşı geliyorsa

$$a + 360^\circ, \quad a + 2 \cdot 360^\circ, \quad a + 3 \cdot 360^\circ, \dots$$

ve

$$a - 360^\circ, \quad a - 2 \cdot 360^\circ, \quad a + 3 \cdot 360^\circ, \dots$$

gibi açılara da aynı B noktası karşı gelir. Buna göre herhangi tam sayı olmak üzere

$$\sin(a^\circ + 360^\circ \cdot k) = \sin a^\circ, \quad \cos(a^\circ + 360^\circ \cdot k) = \cos a^\circ$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer a açısı radyanla verilmişse bu eşitlikleri

$$\sin(a + 2\pi \cdot k) = \sin a, \quad \cos(a + 2\pi \cdot k) = \cos a$$

gibi yazabiliriz.

Sinüs ve kosinüsün yukarıdaki eşitliklerle ifade edilmiş özelliklerine **periyo-**  
**diklik** özelliği,  $360^\circ (=2\pi)$  ye ise sinüs ve kosinüsün **periyodu** (en küçük periyodu) denir.

**Örnek:**  $\sin 780^\circ$  ve  $\cos 1170^\circ$  yi hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\sin 780^\circ = \sin (60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,

$$\cos 1170^\circ = \cos (90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

**Örnek:**  $\sin \left( \frac{121}{6} \pi \right)$  ve  $\cos \left( \frac{9}{4} \pi \right)$  yi hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\sin \left( \frac{121}{6} \pi \right) = \sin \left( 20 \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  ,

$$\cos \left( \frac{9}{4} \pi \right) = \cos \left( 2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

**Not:** Sinüs, kosinüs ve bunlara benzer diğer fonksiyonlarda  $\sin^2 a = (\sin a)^2$  ,  $\cos^2 a = (\cos a)^2$  , ... dır.

Açıların sinüs ve kosinüslerini içeren çok sayıda özdeşlikler mevcuttur. Aşağıda bunlardan çok kullanışlı olanları sıralanmıştır.

- 1)  $\sin (-a) = -\sin a$  ,  $\cos (-a) = \cos a$
- 2)  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- 3)  $\sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right) = \cos a$  ,  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - a \right) = \sin a$   
 $\sin \left( \frac{\pi}{2} + a \right) = \cos a$  ,  $\cos \left( \frac{\pi}{2} + a \right) = -\sin a$   
 $\sin(\pi - a) = \sin a$  ,  $\cos(\pi - a) = -\cos a$
- 4)  $\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- 5)  $\sin (a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
- 6)  $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- 7)  $\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- 8)  $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$  ,  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- 9)  $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$
- 10)  $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$
- 11)  $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$
- 12)  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$



$$13) \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$14) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

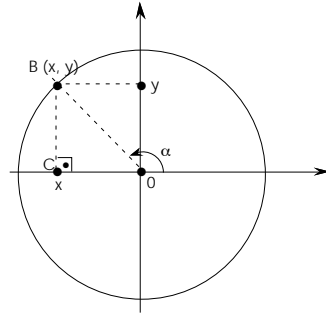
$$15) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$16) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad , \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Bu özdeşliklerde a ve b açıları ya derece, ya da radyanla ifade edilmiş açılardır.

3). özdeşlikte ise a açısı radyanla ifade edilmiş kabul edilir.

Bu özdeşlikler sinüs ve kosinüsün tanımından yararlanarak belli işlemlerle ispatlanabilir.



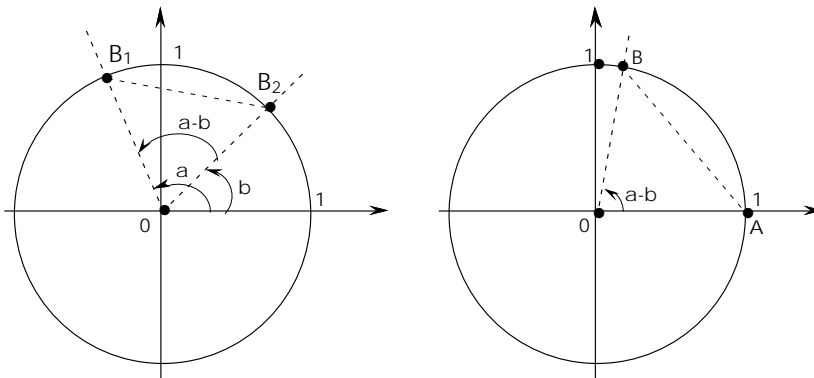
Şekil 6.7

1) ve 3) özdeşlikleri tanımdan çıkar. 2) yi ispatlamak için Şekil 6.7 de OBC dik üçgeninde Pisagor teoremine göre  $|OB|^2 = |OC|^2 + |CB|^2$  dir.  $|CB| = y = \sin a$  ,  $|OC| = -x = -\cos a$  olduğundan

$$(\sin a)^2 + (-\cos a)^2 = 1 \quad \text{veya}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

elde edilir. 7) yi ispatlamak için Şekil 6.8 i gözönüne alalım.  $OB_1B_2$  üçgeni OBA üçgenine eştir (Her iki çemberin birim çember olduğunu hatırlayalım).



Şekil 6.8

Buna göre,

$$|B_1 B_2| = |AB|.$$

Analitik geometriden bilinen ve Pisagor teoreminden elde edilen iki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanalım. Bunun için  $B_1$  in koordinatlarının  $(\cos a, \sin a)$ ,  $B_2$  nin koordinatlarının  $(\cos b, \sin b)$ ,  $B$  nin koordinatlarının  $(\cos(a-b), \sin(a-b))$  ve  $A$  noktasının koordinatlarının ise  $(1, 0)$  olduğunu gözönüne alalım. O zaman

$$\begin{aligned} |B_1 B_2|^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \\ &= \cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2\sin a \cdot \sin b + \sin^2 b \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) \\ &= 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= [\cos(a-b) - 1]^2 + [\sin(a-b) - 0]^2 \\ &= \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \sin^2(a-b) \\ &= [\cos^2(a-b) + \sin^2(a-b)] + 1 - 2\cos(a-b) \\ &= 2 - 2\cos(a-b) \end{aligned}$$

yazabiliriz.  $|B_1 B_2|^2$  ve  $|AB|^2$  nin son ifadelerini eşitlersek 7) yi elde ederiz.

4), 5), 6) her hangi birisi 7) den 1) ve 3) ü kullanmakla elde edilebilir. Örneğin 4) ü ispatlamak için

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b \\ &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

yazabiliriz.

?

1) - 16) özdeşliklerini ispatlayınız.

?

- 1)  $\frac{\sin 3a}{\sin a} + \frac{\cos 3a}{\cos a} - 4 \cos 2a = ?$
- 2)  $\frac{\cos^3 a + \sin^3 a}{\cos a + \sin a} + \frac{1}{2} \sin 2a = ?$

Cevaplarınız 0 ve 1 olmalıdır.

**Örnek:** Hesap makinesi kullanmadan aşağıdakileri hesaplayınız.

- 1)  $\left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}\right)^2$
- 2)  $\cos 75^\circ$

**Çözüm:**  $\left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}$   

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) + \sin \frac{2\pi}{8} = 1 + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Hesap makinesi kullanmadan aşağıdakileri hesaplayınız.**

- 1)  $(\sin 75^\circ - \cos 75^\circ)^2$
- 2)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$



Cevaplarınız  $\frac{1}{2}$  ve  $\sqrt{1,5}$  olmalıdır.

Her hangi  $x \in \mathbb{R}$  verilsin. **x radyanlık açının sinüsü ve kosinüsüne x sayısının sinüsü ve kosinüsü denir.** Buna göre,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$$

fonksiyonları tanımlanabilir.

Yukarıda bahsedilen özelliklere dayalı olarak aşağıda bu fonksiyonların bir kaç önemli özellikleri sıralanmıştır:

- 1) Her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

- 2) Her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

- 3) Her  $x \in \mathbb{R}$  için ve her  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x$$

4)  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  ,  $f(x) = \sin x$  fonksiyonu bire-bir, kesin artan ve örten fonksiyondur. Bu nedenle  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  aralığında  $y = \sin x$  fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyon  $y = \mathbf{Arcsin\ x}$  şeklinde gösterilir.

5)  $g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ,  $g(x) = \cos x$  fonksiyonu bire-bir, kesin azalan ve örten fonksiyondur. Bu nedenle  $[0, \pi]$  aralığında  $y = \cos x$  fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır ve bu ters fonksiyon  $y = \mathbf{Arccos\ x}$  şeklinde gösterilir.

**Örnek:**  $f(x) = \sin x$  ,  $g(x) = \cos(x)$  olduğuna göre,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{13}{3}\pi\right) \cdot g(\pi) \text{ sayısını hesaplayınız.}$$

**Çözüm:**

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ,$$

$$f\left(-\frac{13}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{13}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{13}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

$$g(\pi) = \cos \pi = -1$$

olduğundan

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{13}{3}\pi\right) \cdot g(\pi) = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

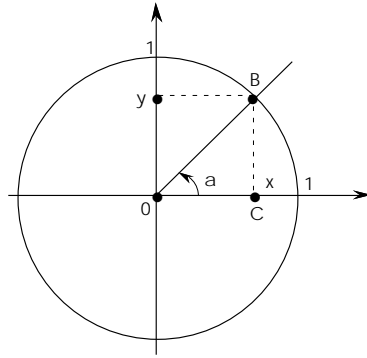
olur.

### 3. Tanjant ve Kotanjant

Köşesi koordinat sisteminin başlangıç noktasında olan bir  $a$  açısının son kenarının birim çemberi kestiği noktaya  $B$  diyelim. Daha önce,  $B$  noktasının ordinatının apsisine oranına  $a$  açısının tanjantı,  $B$  noktasının apsisinin ordinatına oranına da  $a$  açısının kotanjantı demiştik. Buna göre,

$$\tan a = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad , \quad \cot a = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \quad .$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{ve} \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad \text{olduğu açıktır.}$$



Şekil 6.9

Tanımdan görüldüğü gibi  $a$  açısının

$$\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

gibi değerlerinde tanjant tanımsızdır. Çünkü bu açılar için B noktasının apsisi sıfır olur. Benzer nedenden  $a$  açısının

$$0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

gibi değerlerinde kotanjant tanımsızdır. Tanjantın tanımsız olduğu  $a$  açıları genel olarak

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

gibi, kotanjantın tanımsız olduğu  $a$  açıları ise

$$k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanjant ve kotanjantın işaret tablosunun aşağıdaki gibi olduğu kolayca görülebilir.

	I. Bölge	II. Bölge	III. Bölge	IV. Bölge
$\tan a$	+	-	+	-
$\cot a$	+	-	+	-

Sinüs ve kosinüsten farklı olarak tanjant ve kotanjantın alabileceği değer herhangi bir gerçel sayı olabilir: Her  $b \in \mathbb{R}$  sayısı için öyle  $a_1$  ve  $a_2$  açıları vardır ki

$$\tan a_1 = b, \quad \cot a_2 = b$$

dir.

**Örnek:**  $\tan 30^\circ$  ,  $\cot \frac{\pi}{3}$  ,  $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$  ,  $\cot(-1)$  ,  $\tan 150^\circ$  hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ,  $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ,

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\cos \frac{\pi}{4}}{-\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 ,$$

$$\cot(-1) = \frac{\cos(-1)}{\sin(-1)} = \frac{\cos 1}{-\sin 1} \approx -0,642 ,$$

$$\tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 60^\circ)}{\cos(90^\circ + 60^\circ)} = \frac{\cos 60^\circ}{-\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Eğer  $a$  açısına birim çember üzerinde B noktası karşı geliyorsa ve bu noktanın koordinatları  $(x, y)$  ise

$$a \pm \pi , a \pm 3\pi , a \pm 5\pi , \dots$$

gibi açılara karşı gelen C noktasının koordinatları  $(-x, -y)$  ve

$$a \pm 2\pi , a \pm 4\pi , a \pm 6\pi , \dots$$

gibi açılara karşı gelen noktanın koordinatları yine  $(x, y)$  olduğundan bu açıların tanjant ve kotanjantları yine  $y/x$  ve  $x/y$  olur. Buna göre her  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$\tan(a + k\pi) = \tan a , \quad \cot(a + k\pi) = \cot a$$

yazılabilir. Bu eşitlikler tanjant ve kotanjantın periyodik olduğunu ve en küçük periyodunun  $\pi$  olduğunu gösterir.

**Örnek:**  $\tan 210^\circ$  ,  $\tan 4$  ,  $\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  ,  $\cot 585^\circ$  hesaplayınız.

**Çözüm:** Tanjant ve kotanjantın periyodikliğini kullanırsak

$$\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

$$\tan 4 = \tan\left(4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx \tan(4 \cdot 57^\circ 18') = \tan 229^\circ 12' = \tan 49^\circ 12' \approx 1,15 ,$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} ,$$

$$\cot 585^\circ = \cot (540^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = 1$$

elde ederiz.

Tanjant ve kotanjantla ilgili aşağıdaki özdeşlikler verilebilir:

$$1) \quad \tan (-a) = -\tan a \quad , \quad \cot (-a) = -\cot a$$

$$2) \quad \tan a \cdot \cot a = 1$$

$$3) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$$

$$\tan(\pi - a) = -\tan a \quad , \quad \cot(\pi - a) = -\cot a$$

$$4) \quad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \quad , \quad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$5) \quad \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad , \quad \cot(a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad , \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} .$$

Bu özdeşlikler, tanımlardan ve sinüs, kosinüs için geçerli olan özdeşliklerden elde edilebilir.

**Yukarıdaki 1) - 5) özdeşliklerini ispatlayınız.**

?

$x \in \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  olmak üzere,  $x$  radyanlık açının tanjantına  $x$  sayısının tanjantı denir. Buna göre,

$$h : \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} , h(x) = \tan x$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir. Benzer şekilde,  $x \in \mathbb{R} - \{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \}$  olmak üzere  $x$  radyanlık açının kotanjantına  $x$  sayısının kotanjantı,

$$l: \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \cot x$$

fonksiyonuna da **kotanjant fonksiyonu** denir.

**$h(x) = \tan x, l(x) = \cot x$  olmak üzere,**

$$1) h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot l\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 h\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$$

$$2) h(2) \cdot l(2) = ?$$

$$3) \sin 1 \approx 0,84, \quad \cos 1 \approx 0,54 \text{ olduğuna göre}$$

$$\frac{h(2)}{l(1)} = ?$$

$$4) h\left(\frac{\pi}{12}\right) + l\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$$

Cevaplarınız 1)  $-\frac{5}{3}\sqrt{3}$  2) 1 3)  $-3,38$  4) 4 olmalıdır.

?

## 4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Her bir  $x$  gerçel sayısı için  $\sin x$  ve  $\cos x$  değerleri hesaplanabiliyor. Aynı zamanda  $x$  bir gerçel sayı olmak üzere  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$  ise  $\tan x$  ve  $x \neq n\pi, (n \in \mathbb{Z})$  ise  $\cot x$  değerleri de hesaplanabilir.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad g(x) = \cos x$$

$$h: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \tan x$$

$$l: \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(x) = \cot x$$

fonksiyonlarına **trigonometrik fonksiyonlar** denir.

$$\textbf{Örnek: } 1) y = \tan \frac{x}{4} \quad 2) y = \cot \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.



**Çözüm:** 1)  $\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; buradan  $x = 2\pi + 4\pi \cdot k$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ), değerleri  $y = \tan \frac{x}{4}$  ün

tanımsız olduğu değerlerdir. Buna göre, tanım kümesi  $\mathbb{R} - \{2\pi + 4\pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  olur.

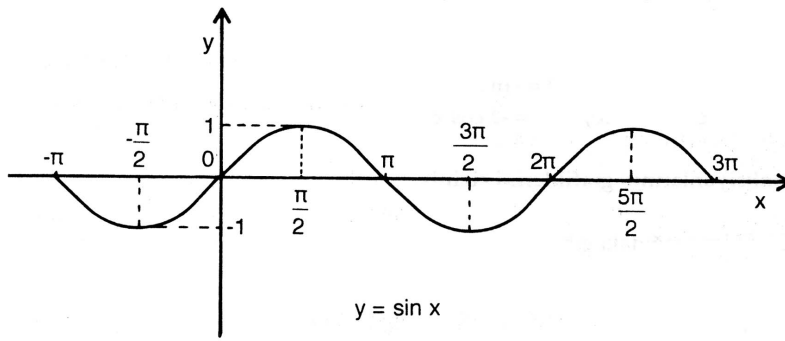
2)  $x + \frac{\pi}{6} = k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  değerleri,  $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  nin tanımsız olduğu değer-

lerdir. Buna göre tanım kümesi  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  olur.

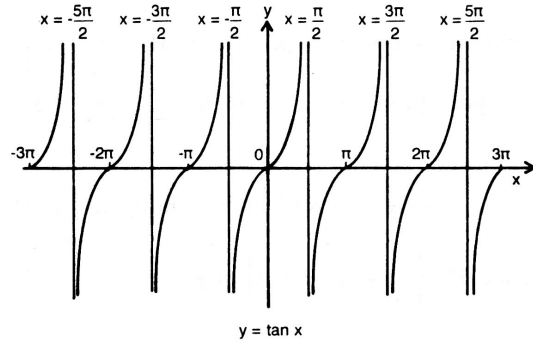
Trigonometrik fonksiyonların da grafikleri değerler tablosu yardımı ile çizilir. Bu fonksiyonların periyodikliği grafik çizimini kolaylaştırır. Öyle ki  $y = \sin x$  ve  $y = \cos x$  in grafiklerini  $[0, 2\pi]$  aralığında çizip, bu grafikleri sağa ve sola (paralel) kaydırarak tüm  $\mathbb{R}$  üzerinde grafik çizilmiş olur.

$y = \tan x$  ve  $y = \cot x$  fonksiyonları da  $\pi$  periyodlu olduklarından  $y = \tan x$  in grafiğini  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  aralığında,  $y = \cot x$  in grafiğini ise  $(0, \pi)$  de çizip sağa ve sola kaydırma ile grafikler tüm tanım kümelerinde belirlenmiş olur.

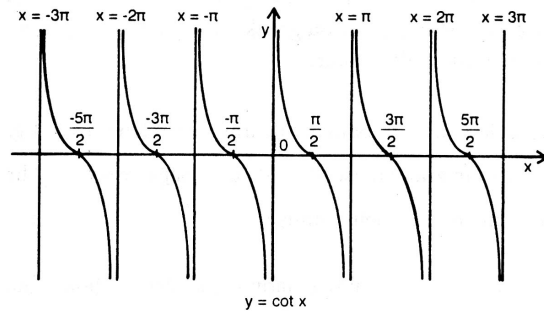
$y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  ve  $y = \cot x$  fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.10



Şekil 6.12



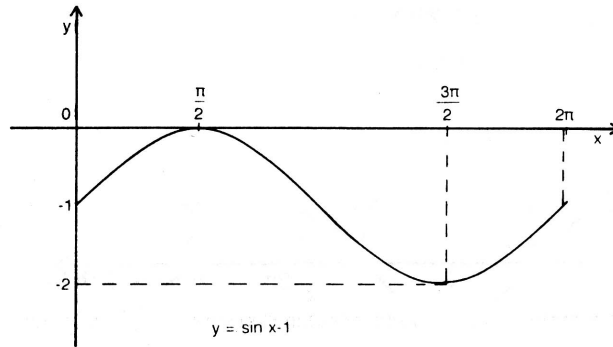
Şekil 6.13



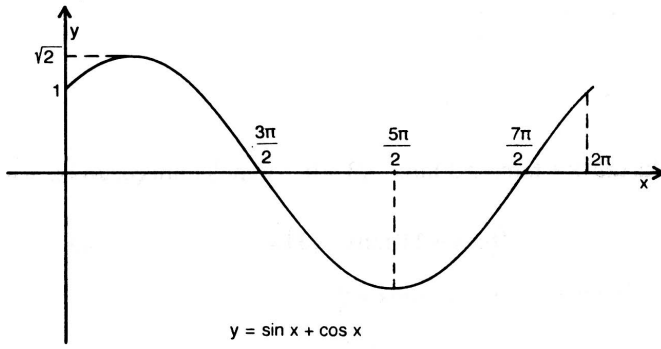
- 1)  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x - 1$
- 2)  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x + \cos x$
- 3)  $h: [-\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2 \cos x$

fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

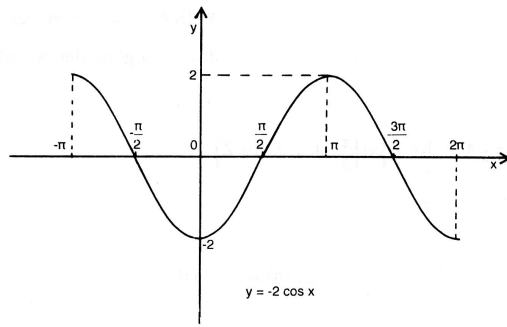
Grafikler aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 6.14



Şekil 6.15



Şekil 6.16

Eğer bir denklemde bilinmeyen, trigonometrik fonksiyon işareti altında ise bu denkleme **trigonometrik denklem** denir. Şimdi bir kaç trigonometrik denklem çözümünü ele alalım.

**Örnek:**  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  denklemini çözünüz

**Çözüm:** Bir açının sinüsünün  $\sqrt{3}/2$  olması için bu açı,  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) veya  $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) şeklinde olmalıdır. Buradan denklemin çözüm kümesi

$$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ olur.}$$

**Örnek:**  $\cos x + \sin x \cos x = 0$  denklemini çözünüz.

**Çözüm:** Denklemi  $\cos x(1 + \sin x) = 0$  gibi yazarsak,  $\cos x = 0$  veya  $1 + \sin x = 0$  elde ederiz.  $\cos x = 0$  denkleminin çözümü  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) değerleridir ( $y = \cos x$  in grafiğini gözönüne getiriniz). İkinci denklemden  $\sin x = -1$  çıkar. Bunun çözümü ise  $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) değerleridir. Buna göre denklemin çözüm kümesi

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir.

**Örnek:**  $\tan^2 x + \tan x - \sqrt{3} \tan x - \sqrt{3} = 0$  denklemini çözünüz.

**Çözüm:** Denklemi  $(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$  gibi yazarsak

$$\tan x = -1 \quad \text{veya} \quad \tan x = \sqrt{3}$$

elde ederiz.  $\tan x = -1$  in çözümü  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) değerleri,  $\tan x = \sqrt{3}$  ün çözümü  $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) değerleridir. Buna göre, denklemin çözüm kümesi

$$\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir.

**Örnek:**  $\cot^2 x = 1$  denkleminin  $(0, 2\pi)$  aralığına düşen tüm çözümlerini bulunuz.

**Çözüm:**  $\cot^2 x = 1$  ise o zaman  
 $\cot x = 1$  veya  $\cot x = -1$

olmalıdır.  $(0, 2\pi)$  aralığında  $\cot x = 1$  i sağlayan değerler  $x = \frac{\pi}{4}$  ve  $x = \frac{5\pi}{4}$ ;  $\cot x = -1$  i sağlayan değerler ise  $x = \frac{3\pi}{4}$  ve  $x = \frac{7\pi}{4}$  dir. Buna göre çözüm kümesi  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$  dir.

**Örnek:**  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  denkleminin  $(0, 2\pi)$  aralığına düşen tüm çözümlerini bulunuz.

**Çözüm:**  $\cos 2x = 1/2$  olması için  $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) veya  $2x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

( $n \in \mathbb{Z}$ ) olmalıdır. Bu  $x$  lerden  $(0, 2\pi)$  aralığına düşenler  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$  ve  $\frac{11\pi}{6}$

değerleridir. Buna göre denklemin çözüm kümesi  $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$  dir.

## Değerlendirme Soruları

1.  $40^\circ$  lik açının radyan türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
  - A.  $\frac{\pi}{40}$
  - B.  $\frac{\pi}{20}$
  - C.  $\frac{\pi}{9}$
  - D.  $\frac{2\pi}{9}$
  - E.  $\frac{4\pi}{9}$
2.  $\sin (-225^\circ) \cdot \cos (315^\circ) + \tan 150^\circ \cdot \cot 150^\circ + \sin 150^\circ$  aşağıdakilerden hangisidir?
  - A.  $-\sqrt{2}$
  - B.  $-1$
  - C.  $0$
  - D.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
  - E.  $2$
3.  $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$  ve  $\sin a = \frac{1}{3}$  ise  $\sin 4a$  aşağıdakilerden hangisidir?
  - A.  $\frac{56\sqrt{2}}{81}$
  - B.  $\frac{14\sqrt{2}}{27}$
  - C.  $\frac{\sqrt{2}}{9}$
  - D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - E.  $\frac{1}{2}$

4.  $\cot a = 3$  ise  $\cot(-2a)$  aşağıdakilerden hangisidir?
- A. 1  
B.  $\frac{3}{4}$   
C. 0  
D.  $-\frac{4}{3}$   
E. -3
5.  $\tan 2010^\circ$  sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\sqrt{3}$   
B. 1  
C.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$   
D.  $\frac{1}{2}$   
E.  $\frac{1}{3}$
6. Aşağıdakilerden hangisi  $\sin 1$  sayısının en iyi yaklaşık değeridir?
- A. 0  
B. 0,01  
C. 0,5  
D. 0,7  
E. 0,8
7.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + \cos^2 x)$  fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\mathbb{R}$   
B.  $[0, 1]$   
C.  $[0, \ln 2]$   
D.  $[0, 2]$   
E.  $(0, \ln 4)$
8.  $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\sin 2x}$  ifadesinin sadeleşmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $2 \sin x$   
B.  $2 \cos x$   
C. 0  
D.  $\sin x$   
E.  $\cos x$

9.  $\frac{1}{1 + \tan^2 x}$  ifadesinin özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\sin^2 x$   
B.  $\cos^2 x$   
C.  $\frac{1}{\sin^2 x}$   
D.  $\frac{1}{\cos^2 x}$   
E.  $\cot^2 x$
10.  $y = \tan 3x$  fonksiyonu aşağıdaki noktaların hangisinde tanımlı değildir?
- A.  $\frac{\pi}{9}$   
B.  $\frac{\pi}{12}$   
C.  $-\frac{\pi}{12}$   
D.  $-\frac{\pi}{6}$   
E.  $-\frac{\pi}{3}$
11. Aşağıdakilerden hangisi  $y = \cot x$  fonksiyonunun grafiğinin bir asimptotudur?
- A.  $x = 0$   
B.  $y = 0$   
C.  $x = \frac{\pi}{2}$   
D.  $y = \frac{\pi}{2}$   
E.  $x = \frac{3\pi}{2}$
12.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ise  $\cos x$  aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $-\frac{1}{2}$   
B.  $0$   
C.  $\frac{1}{2}$   
D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
E.  $1$

13.  $\sin x = \sqrt{3} \cos x$  denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- B.  $\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- C.  $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- D.  $\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- E.  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
14.  $\sqrt{2} (\sin x + \cos x) = 1$  denkleminin  $[0, \pi]$  aralığındaki çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\frac{\pi}{4}$
- B.  $\frac{5\pi}{12}$
- C.  $\frac{7\pi}{12}$
- D.  $\frac{9\pi}{12}$
- E.  $\frac{11\pi}{12}$
15.  $2 \cos 2x = 1$  denkleminin  $[0, \pi]$  aralığındaki çözümlerinden birisi aşağıdakilerden hangisidir?
- A.  $\frac{\pi}{18}$
- B.  $\frac{\pi}{9}$
- C.  $\frac{\pi}{6}$
- D.  $\frac{\pi}{3}$
- E.  $\frac{2\pi}{3}$

## Değerlendirme Sorularının Yanıtları

- |       |       |       |       |       |      |      |      |      |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|-------|
| 1. D  | 2. E  | 3. A  | 4. D  | 5. C  | 6. E | 7. C | 8. A | 9. B | 10. D |
| 11. A | 12. D | 13. D | 14. C | 15. C |      |      |      |      |       |