

Trigonometrik Dönüşümlerin Fiziksel Yorumu

Giriş

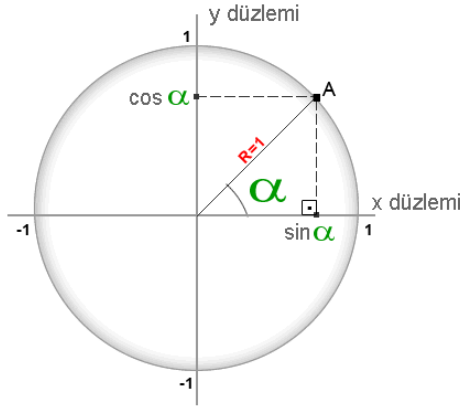
Çoğumuz, trigonometrik dönüşüm formüllerini aklımızda tutmakta güçlük çekiyoruz. Ancak her şeyin bir kolay yolu var. Trigonometrik dönüşüm formüllerini ezberlemek yerine istediğiniz her zaman kolaylıkla formülleri kendiniz de çıkarabilirsiniz.

Oakroadsystems.com sitesinden Türkçeye çevirdiğim bu yazı, dönüşüm formüllerinin mantığını ve basit bir şekilde nasıl çıkarıldığını anlatıyor.

İngilizce kaynakta anlatılanlara göre dönüşüm formüllerine farklı bir bakış açısı getiren *W.W. Sawyer*, kitabının *Mathematician's Delight* (1943; 1991 Basım Penguin Books) 15inci bölümünde olayı açıklamıştır.

Önemli Uyarı: Orijinal metinlerin yazdırılabilir formata dönüştürülerek ya da pdf dosyası oluşturularak ve referans belirtilmeden paylaşılması, yazar tarafından telif hakkını ihlal olarak nitelendirilmiştir. Ancak, elinizdeki bu dosya bir çeviri niteliği taşıdığından ve orijinal metinlerin sayfası, kaynakçada referans olarak gösterildiğinden bu dosya için telif hakkı benim tarafımdan serbest bırakılmıştır. Türkçe metinler kopyalanabilir, paylaşılabilir, yazdırabilir.

Birim Çemberin Yorumu



İlk önce birim çemberden başlayalım.

Birim çemberin yarıçapının 1 birim olduğunu düşünürsek, çember üzerinde seçilen A noktasının x eksenindeki iz düşümü $x=\cos(\alpha)$ ve y eksenindeki iz düşümü ise $y=\sin(\alpha)$ olacaktır. Pisagor teoremini hatırlarsak: bir dik üçgende birbirine dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir. O halde;

$$R^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

bağıntısı yardımıyla $R=1$ olduğunu göz önünde bulundurarak;

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

olduğunu buluruz. Buradan istediğimizi çekerek farklı varyasyonlar elde edebiliriz.

Bu denkleme numara vermiyorum çünkü aşağıda bu formülü kullanmayacağız, ancak bu formülü çıkaramayanı işe almazlar söylemiş olayım :)

Toplam ve Fark Formülleri

Sinüs ve Cosinüs:

Simge listemizi de verdikten sonra cebirin temeli sayılan üstel ifadelerin özelliklerini hatırlayalım.

$$x^a x^b = x^{a+b} \quad (1)$$

$$(x^a)^b = x^{a.b} \quad (2)$$

Euler dönüşümü, lise eğitiminde gösterilmediğinden ve Euler özelliği çok uzun olduğundan yalnızca aşağıdaki formülün bilinmesi yeterlidir. Buna göre e^x exponansiyel bir ifadeyi temsil eder ve değeri yaklaşık olarak 2,718281828 dir. Bu değeri ve e^x 'li ifadelerin çözümünü bu konu çerçevesinde bilmeye gerek yok. e^x ifadesine ait bilmemiz gereken tek şey aşağıdaki denklem ile ifade edilebiliyor olmasıdır. Bunun dışında bu ifadeyi sabit bir sayı olarak ele alıp üstel ifadelerin özelliklerini uyguladığımızda ulaşmak istediğimiz sonuca zorlanmadan erişmiş oluruz.

$$\cos x + i \sin x = e^{-ix} \quad (3)$$

Bu denklemde i kompleks sayının imajiner yani sanal eksenini gösteriyor. Bu ifadenin aşağıdaki ifadeye eşit olduğunu unutmayın.

$$i^2 = -1 \quad (4)$$

Bu bilgiler zor diye düşünmeyin; zaten bunları kullanmayacağımızı, sadece üstel ifadelerin ve karmaşık (kompleks) sayıların özellikleri ile Euler denklemini bilmemiz gerektiğini söylemiştim. Şimdi başlayalım.

3 numaralı denklemde $x=A+B$ yazarsak denklem aşağıdaki forma gelir:

$$\cos(A + B) + i \sin(A + B) = e^{i(A+B)}$$

Bundan sonra 1 numaralı özelliği kullanarak $e^{i(A+B)}$ ifadesini çarpım biçimde ayırırsak ($e^{iA} e^{iB}$) ve her çarpanı 3 numaralı denklem özelliğinden faydalanarak kompleks sayı olarak yazarsak:

$$e^{iA+iB} = e^{iA} \cdot e^{iB} = (\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B)$$

açılımını elde ederiz. Bu açılımda birinci parantez e^{iA} ifadesinin, ikinci parantez ise e^{iB} ifadesinin Euler özelliği kullanılarak karmaşık sayılarda gösterimidir. Denklemleri toparlayarak tek bir satırda görmek istersek;

$$\cos(A + B) + i \sin(A + B) = [\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B] + i [\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B]$$

Reel (Gerçek) kısımları reel kısımlar ile, sanal (imajiner) kısımları sanal kısımlar ile eşitleyecek olursak (örneğin: $a+bi=7-9i$ eşitliğinde $a=7$ ve $b=-9$ dur) aşağıdaki denklem takımlarını elde ederiz.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (5)$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (6)$$

Benzer yol izlenerek $x=A-B$ yazılarak çözüme gidilirse aşağıdaki fark formülleri elde edilir.

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (7)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (8)$$

Tanjant:

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \quad (9)$$

Eşitliğini hatırlarsak buradan tanjant toplam ve fark denklemlerini elde edebiliriz. Az önce bulduğumuz $\sin(A+B)$ ve $\cos(A+B)$ eşitliklerini bu denklemde yerine koyar ve gerekli işlemleri yaparsak;

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \quad (10)$$

Benzer yol ile

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} \quad (11)$$

hesaplanabilir.

Yarım Açı Formülleri

5, 6 ve 10 numaralı denklemlerde $B=A$ yazılırsa sırasıyla;

$$\cos(2.A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 2.\cos^2 A - 1 = 1 - 2.\sin^2 A$$

$$\sin(2.A) = 2.\sin A.\cos A$$

$$\tan(2.A) = \frac{2.\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Bu konu üzerinde fazla durmayacağım, çünkü bu sitenin [amacı](#) dışına çıkmış olurum. Sadece olayın özünü kavramanıza yardımcı olmaya çalışıyorum.

Ters Dönüşüm (Çarpımdan Toplamaya Dönüşüm) Formülleri

Burada, kasıtlı olarak ters dönüşüm formüllerini önce yazıyorum. Çünkü aslında dönüşüm formülleri, ters dönüşüm formüllerinden elde ediliyor. İngilizce de "product to sum" olarak geçmesine karşın

Türkçeye çevrilirken anlamı değiştirilmiş; dolayısıyla sanki ters dönüşüm formülleri, dönüşüm formüllerinden elde ediliyormuş gibi hava uyandırılmış.

Bana kalırsa, akılda daha rahat kalması açısından ters dönüşüm formüllerine "çarpımdan toplamaya dönüşüm" veya kısaca "çarpım-toplam dönüşümü"; diğerine de tersini demek daha doğru olur.

5 ve 7 numaralı denklemler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B & (5) \\ + \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B & (7) \\ \hline \cos(A - B) + \cos(A + B) &= 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \end{aligned}$$

Sonuç sadeleştirilip düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilmiş olur.

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (12)$$

5 ve 7 numaralı denklemler birbiri ile toplanmak yerine birbirinden çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B & (5) \\ - \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B & (7) \\ \hline \cos(A - B) - \cos(A + B) &= 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \end{aligned}$$

ve denklem düzenlenirse;

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad (13)$$

elde edilir.

6 ve 8 numaralı denklemler benzer işlemlerden geçirilirse aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \quad (14)$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)] \quad (15)$$

Dönüşüm (Toplamdan Çarpıma Dönüşüm) Formülleri

Eğer 12, 13, 14 ve 15 numaralı denklemlerde;

$$A = \frac{u+v}{2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{u-v}{2}$$

buradan da;

$u=A+B$ ve $v=A-B$ yazılabilir. Değişken dönüşümünü uygularsak denklemler aşağıdaki forma gelir.

$$\cos(u) + \cos(v) = 2 \cdot \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad (16)$$

$$\cos(u) - \cos(v) = -2 \cdot \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad (17)$$

$$\sin(u) + \sin(v) = 2 \cdot \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad (18)$$

$$\sin(u) - \sin(v) = 2 \cdot \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad (19)$$

İşte trigonometri bu kadar basit.

Kaynakça

Orijinal metin: Trig without Tears Part 7, 25 Mart 2010, <http://oakroadsystems.com/twt/sumdiff.htm>

Çeviri: Salih Onur ZORLU, 25 Mart 2010, <http://www.inkibikke.com/trigonometrik-donusumlerin-fiziksel-yorumu>