

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

9. SINIF

DERS KİTABI

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 08.12.2011 tarih ve 224 sayılı kurul kararıyla 2012-2013 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

YAZARLAR

Havva AY TAR

Sibel ARSLANTAŞ



DİKEY YAYINCILIK

Her hakkı saklıdır ve DİKEY YAYINCILIK SAN. ve TİC. LTD. ŞTİ. ne aittir. İçindeki şekil, yazı, metin ve grafikler, yayın evinin izni olmadan alınamaz; fotokopi, teksir, film şeklinde ve başka hiçbir şekilde çoğaltılamaz, basılamaz ve yayımlanamaz.

ISBN: 978-975-9168-04-9

Editör

Melek GÜLBAHAR

Dil Uzmanı

Kürşat EFE

Görsel Tasarım Uzmanı

Yrd. Doc. Dr. Anıl ERTOK ATMACA

Program Geliştirme Uzmanı

Yusuf SARIGÜNEY

Ölçme Değerlendirme Uzmanı

Kenan GEDİK

Rehberlik / Gelişim Uzmanı

Filiz YILMAZ

Baskı

Ada Matbaacılık Ltd. Şti. Ankara - 2012



DİKEY YAYINCILIK

Kavacık Subayevleri Mah. Fahrettin Altay Cad. Nu.: 4/8 Keçiören/ANKARA

tel.: (0.312) 318 51 51- 50 • Belgeç : 318 52 51



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl...
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
“Medeniyet!” dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş! Yurduma alçakları uğratma, sakın.
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın...
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri “toprak!” diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da, bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki fedâ?
Şühedâ fişkırarak toprağı sıksan, şühedâ!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüdâ.

Ruhumun senden, İlâhi, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şahadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan, İlâhi, boşanıp kanlı yaşım,
Fıskırır ruh-ı mücerred gibi yerden na'sım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl:
Hakkıdır, hür yaşamış, bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

ATATÜRK'ÜN GENÇLİĞE HİTABESİ

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk cumhuriyetini, ilelebet, muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin, en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni, bu hazineden, mahrum etmek isteyecek, dahilî ve haricî, bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok nâmüsaî bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın, bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dahilinde, iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlilerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi, vazifen; Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır! Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asîl kanda, mevcuttur!



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

ORGANİZASYON ŞEMASI.....	9
1. BÖLÜM : MANTIK	
ÖNERMELER	11
Önerme	12
Önermelerin Doğruluk Değeri	13
Denk Önermeler	14
Bir Önermenin Olumsuzu (Değili).....	14
ALİŞTIRMALAR	15
BİLEŞİK ÖNERMELER	16
Bileşik Önerme	16
“Ve”, “Veya” Bağlaçları	17
“Ve”, “Veya” Bağlaçlarının Özellikleri	19
Koşullu Önerme	22
İki Yönlü Koşullu Önerme	25
Totoloji ve Çelişki	27
ALİŞTIRMALAR	29
AÇIK ÖNERMELER	30
Açık Önerme	30
Niceleyiciler.....	31
ALİŞTIRMALAR.....	33
TANIM, AKSİYOM, TEOREM VE İSPAT	34
Tanım, Aksiyom ve Teorem	34
İspat Yöntemleri	37
ALİŞTIRMALAR.....	37
1. TEST	38
2. BÖLÜM : KÜMELER	
KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR	39
Küme Kavramı	39
Kümelerin Gösterilişi	40
Sonlu ve Sonsuz Kümeler	41
Alt Küme	42
Eşit ve Denk Kümeler	46
ALİŞTIRMALAR.....	47
KÜMELERDE İŞLEMLER	48
İki Kümenin Birleşimi	49
İki Kümenin Kesişimi	49
Birleşim ve Kesişim İşlemlerinin Özellikleri	50
İki veya Üç Kümenin Birleşiminin Eleman Sayısı	51
Evrensel Küme ve Bir Kümenin Tümleyeni.....	54
Tümleme İşleminin Özellikleri	56
İki Kümenin Farkı	58
Fark İşleminin Özellikleri	60
Kümeler ile İlgili Problemler	61
ALİŞTIRMALAR.....	63
2. TEST	64

3. BÖLÜM : BAĞINTI, FONKSİYON VE İŞLEM

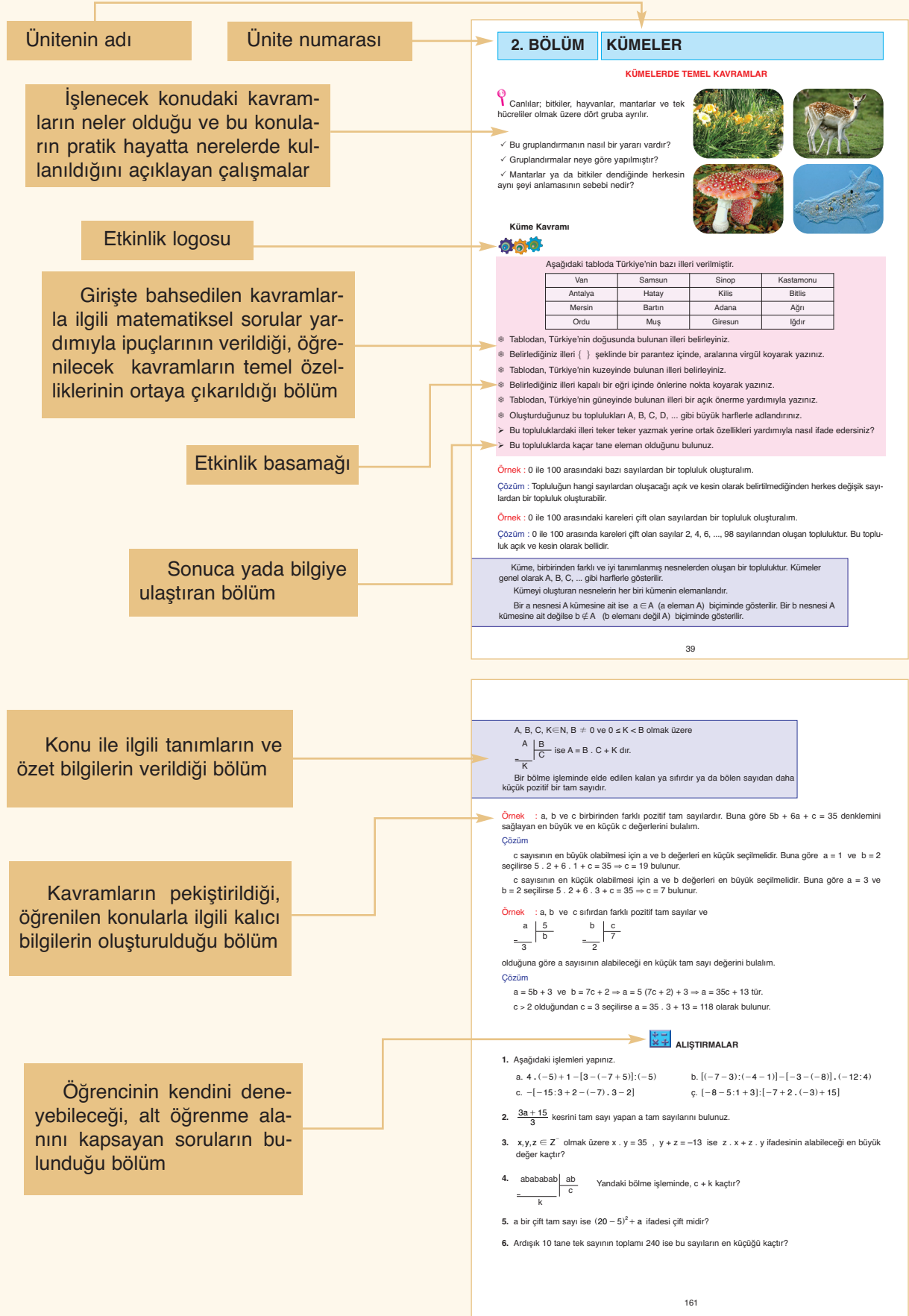
KARTEZYEN ÇARPIM	65
Sıralı İkili	65
İki Kümenin Kartezyen Çarpımı	66
ALİŞTİRMALAR.....	70
BAĞINTI	71
Bağıntı	71
Bağıntının Şeması ve Grafiği	72
Bağıntının Tersine.....	73
Bağıntının Özellikleri	74
ALİŞTİRMALAR.....	81
FONKSİYON	83
Fonksiyon	83
Bir Fonksiyonun Grafiği	87
Fonksiyon Türleri	90
ALİŞTİRMALAR.....	98
İŞLEM	99
İşlem	99
İşlemin Özellikleri	101
ALİŞTİRMALAR.....	108
FONKSİYONLARDA İŞLEMLER	109
Fonksiyonların Bileşkesi	109
Bir Fonksiyonun Tersine	114
Fonksiyonlarda Dört İşlem	125
ALİŞTİRMALAR.....	127
3. TEST	130

4. BÖLÜM : SAYILAR

DOĞAL SAYILAR	133
Doğal Sayıların Pozitif Sayı Kuvvetleri.....	133
Taban Aritmetiği	135
Asal Sayılar	138
Bölünebilme Kuralları	142
OBEB ve OKEK.....	151
ALİŞTİRMALAR.....	154
TAM SAYILAR	155
Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi	156
Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri.....	157
Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi	158
Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri	158
Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi	159
Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi	160
ALİŞTİRMALAR.....	161
MODÜLER ARİTMETİK	162
Modül Kavramı ve Kalan Sınıfları	162
Modüler Aritmetik ile İlgili Özellikler.....	164
\mathbb{Z} / m Kümesinde İşlemler	168
Toplama ve Çarpma İşleminin Özellikleri.....	169
ALİŞTİRMALAR.....	171

RASYONEL SAYILAR.....	172
Rasyonel Sayı Kavramı	173
Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi	174
Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri	175
Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi	177
Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri	178
Rasyonel Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi	181
Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi	181
Rasyonel Sayılarda Sıralama	184
Rasyonel Sayıların Yoğunluğu	186
Rasyonel Sayıların Ondalık Açılımı	186
ALİŞTİRMALAR.....	189
GERÇEK SAYILAR	190
Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri	192
Gerçek Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri	193
Gerçek Sayılarda Eşitsizliğin Özellikleri	194
Gerçek Sayı Aralıkları	196
Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler	199
ALİŞTİRMALAR.....	206
MUTLAK DEĞER	207
Mutlak Değer Kavramı	207
Mutlak Değerin Özellikleri	208
ALİŞTİRMALAR.....	215
ÜSLÜ SAYILAR.....	216
Üslü Sayıların Eşitliği	219
ALİŞTİRMALAR.....	223
KÖKLÜ SAYILAR	224
Köklü İfadelere Ait Bazı Özellikler	226
Bir Gerçek Sayının n. Kuvvetten Kökü	229
n. Kuvvetten Kökle İlgili Bazı Özellikler	230
ALİŞTİRMALAR.....	234
ORAN VE ORANTI	235
Orantı Çeşitleri	236
Bileşik Orantı	238
Aritmetik Ortalama	238
Geometrik Ortalama	239
Orantının Özellikleri	240
ALİŞTİRMALAR.....	241
PROBLEMLER	241
Sayı Problemleri	241
Yüzde – Faiz Problemleri	243
Hareket Problemleri	245
Yaş Problemleri	248
Karışım Problemleri	250
Kâr – Zarar Problemleri.....	251
İşçi-Havuz Problemleri	253
ALİŞTİRMALAR.....	254
4. TEST	255
SÖZLÜK.....	258
KAYNAKÇA	260
SEMBOLLER	260
CEVAP ANAHTARLARI.....	261

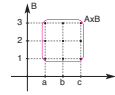
ORGANİZASYON ŞEMASI



Bölüm ile ilgili değerlendirme yapma çalışması

3. TEST

1. a ve b pozitif tam sayı olmak üzere $(2a + b, 4) = (11, a - b)$ ise (a, b) ikilisi nedir?
A. (5,1) B. (1,5) C. (2,3) D. (1,-5) E. (2,6)
2. $s(A) = 7$ ve $s(B) = 8$ ise $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
A. 7 B. 8 C. 15 D. 56 E. 7^8
3. $A = \{x : x \mid 10, x \in \mathbb{N}\}$ ve $s(A \times B) = 4$ ise $s(B)$ kaçtır?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4
4. $A = \{3, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{0, 2, 4, 6, 7\}$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi $B \times A$ kümesinin elemanı olamaz?
A. (0,5) B. (2,6) C. (8,7) D. (4,3) E. (6,5)
5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ ise aşağıdaki bağıntılardan hangisi A dan B ye bir bağıntı değildir?
A. $\alpha = \{(1,a), (2,b), (b,2)\}$ B. $\beta = \{(3,c), (3,d), (2,a)\}$
C. $\varnothing = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$ D. $\theta = \{(1,a), (4,d)\}$
E. $\psi = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)\}$
6. $A = \{a, b\}$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyan değildir?
A. $\alpha_1 = \{(a,a), (b,b)\}$ B. $\alpha_2 = \{(a,a), (b,b), (b,a)\}$
C. $\alpha_3 = \{(a,a), (b,a), (a,b)\}$ D. $\alpha_4 = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a)\}$
E. $\alpha_5 = \{(b,a), (b,b), (a,a)\}$
7. $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyan, simetrik ve geçişkendir?
A. $\alpha_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ B. $\alpha_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$
C. $\alpha_3 = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$ D. $\alpha_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
E. $\alpha_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1)\}$
8. Yandaki grafiğe göre A kümesinin alt küme sayısı kaçtır?
A. 3 B. 8 C. 9
D. 16 E. 64



130

Kitapta Kullanılan Logolar



Etkinlik logosu



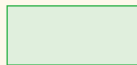
Tanım, bilgi, özellik



Motivasyon logosu



Alıştırma logosu



Özlü söz

ÖNERMELER



– Bir küp buldum.

- Bir kenar uzunluğu kaç cm?
- Ne önemi var? İçinden altın çıktı.
- İyi ya hacmini bulup değerini hesaplarız.
- Ama kenarı yok ki bunun.
- Nasıl yok! Küpün 12 kenarı vardır.
- ✓ Yukarıdaki baba-oğulun iletişimindeki problem sizce nedir?
- ✓ Yukarıdaki cümlelerden hangisi kesim bir hüküm bildiriyor? Açıklayınız.

Terim



- * Ay Dünya'nın uydusudur.
- * Doğru noktalardan oluşur.
- * Su 100 °C de kaynar.
- * Küp 16 yüzlü bir cisimdir.
- * Paralel iki doğrudan birini kesen düzlem diğerini de keser.

- Yukarıdaki cümlelerde farklı yerlerde özel anlam kazanan kelime ya da kelimeleri belirleyiniz?
- Bu sözcüklerin her biri tanımlanabilir mi? Açıklayınız.
- * Belirlediğiniz kelimelerin hangi bilim dalında anlamlı olduğunu söyleyiniz.
- * Bir bilim dalı için kullandığınız kelimeyi başka bir bilim dalı için kullanırsanız kendinizi doğru ifade edebilir misiniz? Açıklayınız.

Örnek : Yamuk, ışın, kültür, küp terimlerinin anlamlarını inceleyelim.

Çözüm : Yamuk, konuşma dilinde “bir yana doğru eğik olan” anlamına gelir. Fakat matematikte yamuk, “karşılıklı kenarlardan en az bir çifti paralel olan dörtgen” anlamını kazanarak matematiğin bir terimi olmuştur.

Işın, konuşma dilinde “bir ışık kaynağından çıkarak her yöne yayılıp giden ışık demeti” anlamında kullanılır. Fakat matematikte “bir noktadan çıkıp sonsuza giden yarım doğrulardan her biri” anlamını kazanır.

Kültür, konuşma dilinde “bir toplumun maddi ve manevi birikimlerinin bütünü” anlamında kullanılır. Biyolojide ise “bir canlının yapay bir ortamda çoğaltılması” anlamındadır.

Küp, konuşma dilinde “su, pekmez, yağ gibi sıvıları veya un, buğday gibi tahılları saklamaya yarayan, geniş karınlı, dibi dar toprak kap” anlamında kullanılır. Matematikte ise “altı yüzü de kare olan bir çok yüzlü” anlamını kazanır.

Yukarıdaki örnekte bazı terimleri tanımladık. Bunlar evrensel olarak tanımlanabilen, tanımı evrensel kabul görmüş terimlerdir. Fakat bazı terimleri tanımlayamayız, sezgi ile kavrarız ve bu terimleri olduğu gibi kabul ederiz. “Nokta”, “doğru”, “düzlem”, “değişken” sezgi ile kavradığımız terimlerdenidir. Örneğin düzlemi tanımlamak için hangi ifadeyi kullanırsak kullanalım bu ifade eksik kalacaktır.

Konuşma dilinde farklı kelimeleri aynı anlamda kullandığımız gibi bazen de aynı kelimeyi farklı anlamlarda kullanırız. Bazı kelimeler de belirli bilim dallarında özel anlam kazanır. Doğru kelimesi, konuşma dilinde dürüst anlamında kullanılabileceği gibi yanlışın karşıtı olarak da kullanılabilir. Fakat matematikteki anlamı daha başkadır.

Bir terimin evrensel kabul görmüş bir tanımı varsa bu terime tanımlı terim denir. Sezgi yolu ile kavranabilen terimler tanımsız terimlerdir.

Belirli bir bilim dalında özel anlam kazanan kelimeler o bilim dalının terimleridir.

Örnek : “Açı”, “dörtgen”, “çember”, “asal sayı”, “alt küme” matematikteki tanımlı terimlere örnek olarak verilebilir.

Önerme



- * Ay Dünya’nın uydusudur.
- * Bugün pazartesidir.
- * Bugün sinemaya gidelim.
- * $5 + 2 = 15$ tir.

- * Yukarıdaki cümlelerden hangileri doğru veya yanlış yargı bildirir? Belirleyiniz.
- “ $5 + 2 = 15$ tir.” cümlesinin yanlış olması yargı bildirmesine engel midir? Nedenini açıklayınız.
- Kesin bir hüküm verebileceğimiz ifadelere ne ad verilir?
- Yargı bildiren bir cümlemin doğruluğu ile ilgili kaç tane değer vardır? Açıklayınız.
- * Yukarıdaki cümleleri doğru veya yanlış yargı bildirmesi yönüyle sınıflandırınız. Bu sınıflamaya göre hangi cümlelerin denk olduğunu söyleyiniz.
- * Yukarıdaki cümlelerin olumsuzlarını söyleyiniz.
- “Değildir” sözcüğünün bir cümle üzerindeki etkisi nedir? Açıklayınız.
- Bir cümlemin olumsuzunu nasıl isimlendirebilirsiniz? Arkadaşlarınızla tartışınız.

Örnek : “Bir çırak bir ustayı değerlendirebilir mi?” ve “5 ile 7 toplanınca sonuç 12 olur.” cümlelerin yargı bildirip bildirmediğini belirleyelim.

Çözüm : Örnekteki birinci cümle soru cümlesidir. Bu yüzden yargı bildirmez. İkinci cümle yargı cümlesidir.

Örnek : Aşağıdaki cümlelerin hangilerinin kesin olarak doğru ya da yanlış olduğunu belirleyelim.

- a. “Ankara, Türkiye’nin başkentidir.”
- b. “2 den başka çift olan asal sayı yoktur.”
- c. “ $-15 > 10$ dur.”
- ç. “Bayramınız kutlu olsun.”

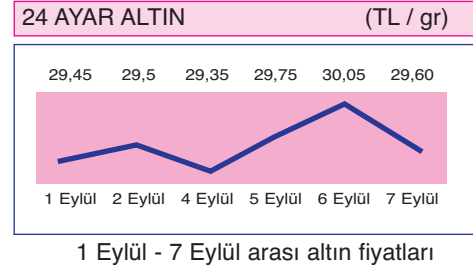
Çözüm : Yukarıda a ve b de belirtilen cümleler kesin olarak doğrudur. c deki cümle kesinlikle yanlıştır. ç de belirtilen cümle ise doğru ya da yanlış hüküm bildirmez.

Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadeler önerme olarak adlandırılır.

Önermeler; p, q, r, ... gibi küçük harflerle gösterilirler.

Örnek : Yandaki altın fiyatlarını gösteren grafiğe göre aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını belirleyelim.

- a. p : “1 Eylül ile 7 Eylül tarihleri arasında 24 ayar altının en yüksek gram fiyatı 29,75 TL olmuştur.”
- b. r : “En iyi yatırım altına yapılan yatırım mıdır?”



Çözüm : Bu ifadelerden p kesin hüküm bildirdiğinden bir önermedir. r ifadesi ise kesin hüküm bildirmediğinden önerme değildir.

Önermelerin Doğruluk Değeri

Örnek : Aşağıdaki önermelerin hükümlerini doğruluk ve yanlışlık yönüyle inceleyelim.

p: “ $3^3 = 27$ dir.”

q: “Bursa şehrinin Marmara Denizi’ne kıyısı yoktur.”

Çözüm : Yukarıdaki önermelerden p önermesi doğru, q önermesi ise yanlış hüküm bildirmektedir.

Bir önermenin doğru ya da yanlış olması, bu önermenin doğruluk değeridir. Önerme doğru ise doğruluk değeri “1” ya da “D” ile, yanlış ise doğruluk değeri “0” ya da “Y” ile gösterilir.

Doğruluk değerleri genellikle doğruluk tablosu denen bir tablo ile gösterilir.

p önermesinin doğruluk tablosu		
Doğru	D	1
Yanlış	Y	0

Bir önermenin doğruluk değeri “1” ya da “0” olacağından bu önerme için 2 değişik durum vardır.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

p ve q gibi iki önermemiz olduğunu varsayalım. Bu iki önermenin doğruluk değerlerini birlikte değerlendirip bir tahminde bulunalım.

Her iki önerme de doğru olabilir. p doğru iken q yanlış olabilir. p yanlış iken q doğru olabilir ya da her ikisi de yanlış olabilir. Bu durumları doğruluk tablosunda gösterelim. Tablodan da görüldüğü gibi iki önerme için 4 durum oluşur.

Aşağıda p, q ve r önermelerinin doğruluk tablosu verilmiştir.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Üç önerme için 8 değişik durum oluşur.

n tane farklı önermenin doğruluk değeri için 2^n tane farklı durum vardır.

Denk Önermeler

Örnek : p : “İki tek sayının toplamı çifttir.” önermesi ile doğruluk değeri aynı olan başka bir önerme yazalım.

Çözüm : p \equiv 1 dir. Doğruluk değeri 1 olan başka bir önerme q: “ $3^0 = 1$ dir.” önermesi olabilir.

Doğruluk değerleri aynı olan iki önerme denk önermelerdir. p ve q gibi iki önermenin denkliği p \equiv q biçiminde gösterilir.

Örnek : Aşağıdaki önermelerden denk olanları belirleyelim.

- a. p: “ $3^4 > 2^5$ tir.”
- b. q: “1 asal bir sayıdır. ”
- c. r: “ $3 - 8 < 5$ tir. ”
- ç. t: “9 bir çift sayıdır. ”

Çözüm : p ve r önermelerinin doğruluk değerleri 1 olup p \equiv r dir. q ve t önermelerinin doğruluk değerleri 0 olup q \equiv t dir.

Bir Önermenin Olumsuzu (Değili)

Örnek : p : “Bir yıl 12 aydır.” önermesinin doğruluk değerini değiştirecek şekilde yeni bir önerme yazalım.

Çözüm : p önermesinin doğruluk değeri 1 dir. Bu önermenin doğruluk değerini 0 yapacak önerme, q: “Bir yıl 12 ay değildir.” dir.

Hükmünün olumsuzu alınarak oluşturulan yeni önerme, bu önermenin olumsuzu (değili) olarak adlandırılır. Bir p önermesinin olumsuzu p' ile gösterilir.

Örnek : Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazalım. Doğruluk değerlerini ve varsa denk olan önermeleri gösterelim.

- a. p: “En küçük tam sayı -1 dir.”
- b. q: “13 ten küçük 7 tane çift doğal sayı vardır. ”

Çözüm :

- a. p \equiv 0 dir. p': “En küçük tam sayı -1 değildir.” olup p' \equiv 1 dir.
 - b. q \equiv 1 dir. q': “13 ten küçük 7 tane çift doğal sayı yoktur.” olup q' \equiv 0 dir.
- p' \equiv 1 \equiv q olduğundan p' \equiv q ve q' \equiv 0 \equiv p olduğundan q' \equiv p olduğunu söyleyebiliriz.

Bununla birlikte p \equiv 1 ise p' \equiv 0 ve (p') \equiv 1 olduğundan (p') \equiv p dir. p \equiv 0 durumu için de aynı sonuç bulunur.



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki terimlerden tanımlı ve tanımsız olanları belirleyiniz.
a. Doğru b. Üçgen c. Düzlem ç. Eşit d. Paralelkenar
2. Aşağıdaki bilim dallarına ait üçer terim yazınız.
a. Matematik b. Fizik c. Tarih
3. “Bir noktadan sonsuz doğru geçer.” ifadesindeki tanımlı ve tanımsız terimleri belirleyiniz.
4. Aşağıdaki ifadelerden önerme olanları belirleyiniz.
a. “95, 2 ye tam bölünür.”
b. “Sen o kadar meşhur muydun?”
c. “Negatif sayıların çift kuvvetleri negatiftir.”
ç. “Gece çok soğuk muydu?”
d. “Masa yüzeyi düzlem belirtir.”
5. Doğruluk değeri 1 ve 0 olan birer önerme yazınız.
6. Önerme olmayan bir cümle yazınız.
7. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini belirleyip bu önermelere denk olan birer önerme yazınız.
p: “Kare 5 kenarlıdır.”
q: “İstanbul başkent olmuş bir şehirdir. ”
8. Aşağıdaki önermelerin değillerini yazınız.
a. “Yaz ayları kış aylarından sıcak geçer. ”
b. “ $5 = 7 - 2$ dir.”
c. “ -7 asal sayıdır.”
ç. “Tek sayılar asal sayıdır. ”
9. p , p' , $(p')'$ önermelerini doğruluk tablosunda gösteriniz.
10. r , s , p , k önermelerinin doğruluk değeri için kaç değişik durum vardır?
11. “Su renksizdir.” önermesi “Su beyazdır.” önermesinin değili olabilir mi? Açıklayınız.
12. Aşağıdaki önermelerden hangileri denktir?
p: “Doğruluk değerleri aynı olan önermeler denk önermelerdir.”
p: “Hatay’ın Akdeniz’e kıyısı vardır.”
r: “1 asal bir sayıdır.”
s: “Yanlış önermenin doğruluk değeri 0 dır.”
t: “Bir saat 10 000 saniyedir.”
v: “Su bir elementtir.”
13. Birbirine denk olmayan iki önerme yazınız.

BİLEŞİK ÖNERMELER



- * Anne-baba iyi eğitim almışlarsa çocuklar da görgülü olur. (Geothe)
- * Hiçbir şey insan için “ölçüsüz tenkit” veya “aşırı methetme” kadar zararlı olamaz. (Geothe)
- * Parasızlık kapıdan girer ise aşk bacadan çıkar.
- * Düzenli bir çalışma ve ardından kazanılan başarılar : İşte mutluluk. (Alain)
- * Cümleler doğrudur sen doğru isen
Doğruluk bulunmaz sen eğri isen (Yunus Emre)
- * Yukarıdaki güzel sözler ve özdeyişlerde yer alan bağlaçların cümleye kattığı anlamları tartışınız.
- ✓ İyi eğitim almış ebeveynin (anne-babanın) görgüsüz çocukları varsa ilk özlü söz doğru olur mu? Neden?

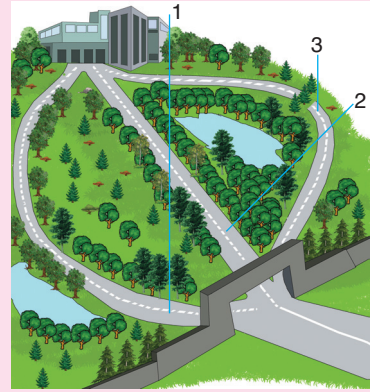
Bileşik Önerme



Kampüs girişinde bulunan üç yoldan ikinci ve üçüncü yol takip edilerek eğitim fakültesine gidilebilmesine rağmen birinci yol izlenerek gidilememektedir. Buna göre,

Kapıda duran memur, aşağıdaki önermeleri söylediğinde gelen ziyaretçileri doğru yönlendirmiş olur mu?

- “Birinci yol eğitim fakültesine gider.”
 - “İkinci yol eğitim fakültesine gider.”
 - “Üçüncü yol eğitim fakültesine gitmez.”
 - “İkinci veya üçüncü yoldan eğitim fakültesine gidilebilir.”
 - “Birinci veya ikinci yoldan eğitim fakültesine gidilebilir.”
 - “Birinci ve ikinci yollardan hiçbirisiyle eğitim fakültesine gidilemez.”
 - “İkinci ve üçüncü yolların her ikisiyle de eğitim fakültesine gidilebilir.”
- Bağlaçlarla birleştirilen önermelerde “ve” ile “veya”nın etkisi hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Yukarıdaki önermelerin doğruluk değerleri hakkında ne düşünüyorsunuz? Arkadaşlarınızla tartışınız.
- Yukarıdaki önermelerden hangileri aynı anlama geliyor olabilir? Neden?



Örnek : Aşağıdaki önermeleri “ve”, “veya” bağlaçlarıyla bağlayalım.

p: “ Kar beyazdır. ” q: “ Kar, kış mevsiminde yağar. ”

Çözüm :

p ve q : “ Kar beyazdır ve kar kış mevsiminde yağar.”

p veya q : “ Kar beyazdır veya kar kış mevsiminde yağar. ”

Önermelerin “ve”, “veya”, “ise”, “ancak ve ancak” gibi bağlaçlarla bağlanmasından oluşan yeni önermeler bileşik önermelerdir.

“Ve”, “Veya” Bağlaçları



- ❄ Belma hanım yemek hazırlamak için çocukları Kemal ve Yeşim'den tuz istemiştir.
- Sadece Kemal'in tuz getirmesi yeterli olur mu? (Annenin istediği iş yapılmış olur mu?)
 - Yeşim tuz getirirse Kemal getirmese ya da tersi olsa yeterli olur mu? Neden?
 - Her ikisinin de tuz getirmesi ve hiç birisinin tuz getirmemesiyle ilgili ne söyleyebilirsiniz?
 - Belma hanım yemek hazırlamak için çocukları Kemal veya Yeşim'den tuz istemiş olsaydı, hangi durumlarda Belma hanımın isteği gerçekleşmiş olurdu? Açıklayınız.
 - Yukarıda verilen ve, veya mantıksal bağlacı ile bağlanmış iki önermeden oluşan bileşik önermelerin doğru veya yanlış olabilmesi için gerekli koşulları tartışarak ulaştığınız sonuçları açıklayınız.

Örnek : p : “ Su 0° C ta donar. ”

q : “ Su renksizdir. ” önermelerini “veya” bağlacı ile bağlayarak oluşturulmuş bileşik önermenin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : p veya q : “ Su 0° C ta donar veya su renksizdir.” şeklinde yazılabilir. Bu örnekte “veya” ile bağlanan önermelerin ikisi de doğru olduğu için bileşik önermenin de doğruluk değeri 1 dir. Bunu p veya $q \equiv 1$ biçiminde gösterebiliriz.

“veya” bağlacı ile bağlanmış bileşik önermede önermelerden birisinin doğru olması bileşik önermenin doğruluğu için yeterlidir. Çünkü “veya” bağlacının anlamında her iki önerme için zorunluk yoktur.

p ile q gibi iki önermenin “veya” bağlacı ile birleştirilmesiyle oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerden her ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur. “Veya” bağlacı “ V ” sembolü ile gösterilir.

p, q, p v q önermelerinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	p v q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek : p : “ Ahmet 45 kg dır. ”

q : “ Veli' nin boyu 170 cm dir. ” önermelerini “ve” bağlacı ile bağlayarak oluşan bileşik önermenin doğruluk değerini yorumlayalım.

Çözüm : p ve q : “ Ahmet 45 kg dır ve Veli' nin boyu 170 cm dir. ” şeklinde yazılabilir. Önermelerden her ikisi de doğru ise bileşik önerme doğrudur. Önermelerden herhangi birinin ya da her ikisinin yanlış olması durumunda bileşik önerme yanlış olacaktır. Çünkü “ve” bağlacının anlamında bir zorunluluk sezilmektedir. Eğer Ahmet 45 kg ve Veli 150 cm ise ilk kısmı doğru olmasına rağmen cümle yanlış olacağından bileşik önerme yanlış olur.

p ile q gibi iki önermenin “ve” bağlacı ile birleştirilmesiyle oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri, önermelerden her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır. “Ve” bağlacı “ ^ ” sembolü ile gösterilir.

p, q, p ^ q önermelerinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	p ^ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek : $p \vee q$, $p' \wedge q$, $p' \vee q'$, $(p \vee q) \wedge q'$ bileşik önermelerinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p' \wedge q$	$p' \vee q'$	$(p \vee q) \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0

Örnek : $(p \vee q') \wedge p$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	q	q'	$p \vee q'$	$(p \vee q') \wedge p$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

Örnek : $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ önermeleri için aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerini bulalım.

a. $(p \vee q') \wedge r$

b. $(r' \wedge q') \vee p'$

c. $(p' \vee q') \vee r'$

Çözüm :

a. $(p \vee q') \wedge r \equiv (1 \vee 0') \wedge 1 \equiv (1 \vee 1) \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$,

b. $(r' \wedge q') \vee p' \equiv (1' \wedge 0') \vee 1' \equiv (0 \wedge 1) \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$,

c. $(p' \vee q') \vee r' \equiv (1' \vee 0') \vee 1' \equiv (0 \vee 1) \vee 0 \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ olur.

Örnek : p: “ $2 + 2 = 4$ ”

q: “ $8 \cdot 2 = 14$ ”

r: “Dünya bir gezegen değildir.” önermeleri veriliyor. $p \vee q$, $q \wedge r$ ve $p' \wedge q$ önermelerini yazarak doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm :

p: “ $2 + 2 = 4$ ” olduğundan $p \equiv 1$ ve q: “ $8 \cdot 2 = 14$ ” olduğundan $q \equiv 0$ dir.

$p \vee q$: “ $2 + 2 = 4$ veya $8 \cdot 2 = 14$ ” olur. $p \vee q \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ dir.

r: “Dünya bir gezegen değildir.” Öyleyse $r \equiv 0$ dir.

$q \wedge r$: “ $8 \cdot 2 = 14$ ve Dünya bir gezegen değildir.” olur. $q \wedge r \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$ dir.

$p' \wedge q$: “ $2 + 2 \neq 4$ ve $8 \cdot 2 = 14$ ” olur. $p' \wedge q \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$ dir.

“Ve”, “Veya” Bağlaçlarının Özellikleri

Örnek : $p \vee p$, $p \wedge p$ önermelerinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	$p \vee p$
1	1
0	0

p	$p \wedge p$
1	1
0	0

p , $p \vee p$, $p \wedge p$ önermelerinin doğruluk değerleri aynıdır.

Her p önermesi için, $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ dir. (tek kuvvet özelliği)

Örnek : $p \vee q$, $q \vee p$, $p \wedge q$, $q \wedge p$ önermelerinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q$, $q \vee p$ önermeleri ile $p \wedge q$, $q \wedge p$ önermelerinin doğruluk değerleri aynıdır.

Her p ve q önermeleri için, $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ dir. (değişme özelliği)

Örnek : $(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ önermelerinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Her p , q ve r önermesi için, $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ve $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ dir. (birleşme özelliği)

Örnek : $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ önermelerinin doğruluk tablosunu yapalım.

Çözüm :

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Her p ve q önermesi için $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dir. Bu özelliklerden birincisi \wedge nın \vee üzerine soldan dağılma özelliğidir. İkincisi ise \vee nın \wedge üzerine soldan dağılma özelliğidir. Ayrıca $(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$ ve $(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ dir. Bu özelliklerden birincisi \wedge nın \vee üzerine sağdan dağılma özelliğidir.

Örnek : $(p \vee q) \wedge q'$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : $(p \vee q) \wedge q' \equiv q' \wedge (p \vee q) \equiv (q' \wedge p) \vee (q' \wedge q) \equiv (q' \wedge p) \vee 0 \equiv q' \wedge p$ olur.



✱ Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

✱ $(p \vee q)'$ ile $p' \wedge q'$ bileşik önermelerinin ve $(p \wedge q)'$ ile $p' \vee q'$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerini karşılaştırarak bir sonuca ulaşınız.

Her p ve q önermeleri için $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ dir. Bu kurallar **De Morgan** (Dö Morgan) kurallarıdır.

Örnek : $(p' \wedge q)' \vee q' \equiv 0$ ise $(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : $(p' \wedge q)' \vee q' \equiv 0 \Rightarrow (p' \wedge q)' \equiv 0$ ve $q' \equiv 0$ (veya bağlacının özelliği)
 $\Rightarrow p' \wedge q \equiv 1$ ve $q' \equiv 0$ (bir önermenin olumsuzluğu)
 $\Rightarrow p' \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ (ve bağlacının özelliği)
 $\Rightarrow p \equiv 0$ (bir önermenin olumsuzluğu)

olacaktır. Buna göre, $(p \wedge q)' \vee (p \vee q) \equiv (0 \wedge 1)' \vee (0 \vee 1) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ olur.

Örnek : $(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : $(p \wedge q)' \vee (p \vee q) \equiv (p' \vee q') \vee (p \vee q)$ (De Morgan kuralları)
 $\equiv (p' \vee p) \vee (q' \vee q)$ (değişme ve birleşme özelliği)
 $\equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ bulunur.

Örnek : $[(p' \wedge q)' \vee q]'$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : $[(p' \wedge q)' \vee q]' \equiv (p' \wedge q) \wedge q' \equiv p' \wedge \underbrace{(q \wedge q')}_{0} \equiv p' \wedge 0 \equiv 0$ olur.

Örnek : “Ali ve Veli evde ödev yapıyorlar.” önermesinin değerini bulalım.

Çözüm :

p, q önermeleri; p: “Ali evde ödev yapıyor.”

q: “Veli evde ödev yapıyor.” şeklinde yazılabilir.

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğundan “Ali ve Veli evde ödev yapıyorlar.” önermesinin değili “Ali veya Veli evde ödev yapmıyorlar.” önermesi olur.

Örnek : $[(p \vee q') \wedge (p \vee q)]'$ önermesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} [(p \vee q') \wedge (p \vee q)]' &\equiv (p \vee q')' \vee (p \vee q)' \\ &\equiv (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q) \\ &\equiv p' \wedge q \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek : $(p \vee q')' \vee (p' \wedge q')$ önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} (p \vee q')' \vee (p' \wedge q') &\equiv (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q') \\ &\equiv p' \wedge (q \vee q') \\ &\equiv p' \wedge 1 \\ &\equiv p' \end{aligned}$$

George Boole (Corc Buul)-(1815–1864), matematiksel Mantık teorisine dayalı Boolean Cebiri geliştirmiştir. George Boole bu eserle matematikte yeni bir çığır açarak bugünkü bilgi teknolojilerinin gelişebileceği müjdesini o günlerde vermiştir.



Koşullu Önerme



Bir spor kulübü sporcularına “Eğer maçı kazanırsanız sizi tatile göndereceğim.” diyor. Bu önerme için;

- Sporcuların maçı kazandığı ve tatile gittiği düşünülürse kulüp sözünü tutmuş olur mu?
- Bu durumda önermenin doğruluğu için ne söyleyebilirsiniz?
- Sporcuların maçı kazandığı fakat tatile gitmediği düşünülürse kulüp sözünü tutmuş olur mu?
- Bu durumda önermenin doğruluğu için ne söyleyebilirsiniz?
- Sporcuların maçı kazanamaması durumunda, kulübün sözünü tutmadığı söylenebilir mi? Açıklayınız.
- Kulübün sporcularına söylediği şartlı cümlelerin hangi şart ve sonuçlar altında doğru olduğunu bulabilir misiniz? Açıklayınız.

Örnek : “Kırmızı ışık yanarsa trafik durur.” bileşik önermesini oluşturan önermeleri belirleyelim.

Çözüm : p , q önermeleri;

p : “Kırmızı ışık yandı.”

q : “Trafik durdu.” şeklinde yazılabilir.



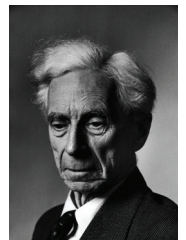
Kırmızı ışık yanar ve trafik durursa bileşik önerme doğrudur. Kırmızı ışık yanar ve trafik durmazsa önerme yanlış olur. Kırmızı ışık yanmazsa trafiğin durması ya da durmaması durumunda şart gerçekleşmediğinden önermeye yanlıştır diyemeyiz, doğru kabul etmek zorundayız.

p ve q önermelerinin “ise” bağlacı getirilerek birleştirilmesiyle oluşan bileşik önermeye koşullu önerme denir. $p \Rightarrow q$ biçiminde gösterilir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesi p doğru, q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

Bertrand Russell (Bertrant Rasıl)-(1872–1970), matematiğin prensipleri konulu bir kitap yazmıştır. Çalışmalarında, önermelerin ilişkilerini ve, veya, ise, ancak ve ancak gibi mantıksal operatörlere dayalı mantık sistemini tanıtmıştır. Mantıksal öğretiyile, yeni bir felsefe ortaya koymuştur. Matematiği $p \Rightarrow q$ biçiminde önermeler kümesi olarak tanımlaması ile matematiğe yeni bir boyut kazandırmıştır.



Örnek : p: “Ağaç yaş iken eğilir.”

q: “Hayatta en gerekli şey iyi bir eğitimidir.” önermeleri veriliyor. $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerini yazalım.

Çözüm : Verilen önermeler ise bağlacı ile bağlandığında,

$p \Rightarrow q$: “Ağaç yaş iken eğilir ise hayatta en gerekli şey iyi bir eğitimidir.” olur.

p' : “Ağaç yaş iken eğilmez.” olduğunda

$q \Rightarrow p'$: “Hayatta en gerekli şey iyi bir eğitim ise ağaç yaş iken eğilmez.” olur.

Örnek : $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ ise aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ b. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)$ c. $(r \vee q') \Rightarrow p'$

Çözüm :

a. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1 \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$

b. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \equiv (1 \Rightarrow 0) \wedge (1 \Rightarrow 0) \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$

c. $(r \vee q') \Rightarrow p' \equiv (1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek : $p' \Rightarrow (q' \wedge r')' \equiv 0$ ise $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow (r \wedge p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : Koşullu önermenin doğruluk değeri sadece $1 \Rightarrow 0$ durumunda 0 dır. Bu yüzden $p' \equiv 1$ ve $(q' \wedge r')' \equiv q \vee r \equiv 0$ olur.

$q \vee r \equiv 0$ ise $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır. $p' \equiv 1$ olduğundan $p \equiv 0$ olur. O hâlde

$[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow (r \wedge p) \equiv [(0 \vee 0) \Rightarrow 0] \Rightarrow (0 \wedge 0) \equiv (0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Koşullu önermeyi oluşturan önermelerin yerleri değiştirilerek ya da önermelerin olumsuzları kullanılarak yeni koşullu önermeler oluşturulabilir. Bunlar mantıkta özel adlarla ifade edilirler.

Örnek : p: “4 + 7 ≠ 12”

q: “2 = 3” önermeleri veriliyor.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesi ile bu önermenin karşıtını, tersini ve karşıt tersini ifade edelim.

Çözüm : $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı: $q \Rightarrow p$: “2 = 3 ise 4 + 7 ≠ 12 dir.”,

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi: $p' \Rightarrow q'$: “4 + 7 = 12 ise 2 ≠ 3 tür.”,

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi: $q' \Rightarrow p'$: “2 ≠ 3 ise 4 + 7 = 12 dir.” olur.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesi için;
 $q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı,
 $p' \Rightarrow q'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi,
 $q' \Rightarrow p'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi deriz.

Örnek : $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p' \Rightarrow q'$, $p' \vee q$ ve $q' \Rightarrow p'$ önermelerinin doğruluk değerini doğruluk tablosu üzerinde gösterelim.

Çözüm :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	p'	q'	$p' \Rightarrow q'$	$p' \vee q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv q' \Rightarrow p'$$

Her p ve q önermesi için, $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv q' \Rightarrow p'$ dir.

Bir koşullu önerme karşıt tersine denktir.

Örnek : “Ahmet okulda ise Ali eve gitmiştir.” önermesini “veya” bağlacı kullanarak yazalım.

Çözüm : $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğundan

$p \Rightarrow q$: “Ahmet okulda ise Ali eve gitmiştir.” olur. Bu durumda,

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$: “Ahmet okulda değildir veya Ali eve gitmiştir.” olur.

Örnek : $(p \Rightarrow q) \wedge r$ önermesinin doğruluk değerini doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

Çözüm :

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

Örnek : $[(p' \Rightarrow q')' \wedge q']' \vee (p \vee q)'$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}
 [(p' \Rightarrow q')' \wedge q']' \vee (p \vee q)' &\equiv (p' \Rightarrow q')' \wedge q' \Rightarrow (p \vee q)' \text{ (her p ve q önermesi için, } p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \text{ olduğundan)} \\
 &\equiv [(p \vee q)' \wedge q'] \Rightarrow (p' \wedge q') \\
 &\equiv [(p' \wedge q) \wedge q'] \Rightarrow (p' \wedge q') \\
 &\equiv [p' \wedge (q \wedge q')] \Rightarrow (p' \wedge q') \\
 &\equiv (p' \wedge 0) \Rightarrow (p' \wedge q') \\
 &\equiv 0 \Rightarrow (p' \wedge q') \\
 &\equiv 0 \Rightarrow \underbrace{t}_{t} \\
 &\equiv 1
 \end{aligned}$$

İlginç bir sonuç: Yanlışla başlayan her koşullu önerme doğrudur.

Örnek : $(p \wedge q) \Rightarrow (m' \Rightarrow n) \equiv 0$ ise p, q, m, n önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm : $(p \wedge q) \Rightarrow (m' \Rightarrow n) \equiv 0$ ise $(p \wedge q) \equiv 1$ ve $(m' \Rightarrow n) \equiv 0$ dır.

Buradan, $(p \wedge q) \equiv 1$ ise $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$

$(m' \Rightarrow n) \equiv 0$ ise $m' \equiv 1$ ve $n \equiv 0$ bulunur.

O hâlde $p \equiv 1$, $q \equiv 1$, $m \equiv 0$ ve $n \equiv 0$ dır.

Örnek : $(p \Rightarrow q) \equiv [p \vee (p \Rightarrow q)]' \vee (q' \Rightarrow p')$ denkleğinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm : $[p \vee (p \Rightarrow q)]' \vee (q' \Rightarrow p') \equiv [p' \wedge (p \Rightarrow q)'] \vee (p \Rightarrow q)$
 $\equiv [p' \wedge (p' \vee q)'] \vee (p' \vee q)$
 $\equiv [p' \wedge (p \wedge q)'] \vee (p' \vee q)$
 $\equiv [(p' \wedge p) \wedge q'] \vee (p' \vee q)$
 $\equiv (0 \wedge q') \vee (p' \vee q)$
 $\equiv 0 \vee (p' \vee q)$
 $\equiv p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$ olur.

Örnek : $[(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow q)]$ önermesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm : $(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q) \wedge (p \vee q)$
 $\equiv (q \vee p') \wedge (q \vee p)$
 $\equiv q \vee (p' \wedge p)$
 $\equiv q \vee 0$
 $\equiv q$ olur.

İki Yönlü Koşullu Önerme



ABC üçgeni için, p: “ABC üçgeni ikizkenardır.”, q: “ABC üçgeninin iki kenarı birbirine eştir.” önermelerinden yola çıkarak,

✱ $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ önermelerinin doğruluk değerlerini yazınız.

➤ $p \Rightarrow q$ önermesi doğruysa $q \Rightarrow p$ önermesi doğru olmak zorunda mıdır?

✱ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesini yazınız.

➤ $p \Rightarrow q$ önermesi ile $q \Rightarrow p$ önermesinin “ve” bağlacıyla bağlanmasıyla oluşturulan bileşik önermenin doğruluk değeri hakkında ne söylenebilir?

Örnek : “İki doğru paraleldir ancak ve ancak kesişmezlerse.” bileşik önermesini oluşturan p ve q önermeleri belirleyelim. Bu bileşik önermenin hangi durumlarda doğru, hangi durumlarda yanlış olacağını bulalım.

Çözüm : Verilen bileşik önermeyi oluşturan p ve q önermeleri

p : “İki doğru paraleldir.”

q : “İki doğru kesişmez.” şeklinde yazılabilir.

İki doğru paralel ve kesişmez ise bileşik önerme doğrudur. İki doğru paralel değil ve kesişir ise bileşik önerme yine doğru olur. Fakat iki doğru paralelken doğruların kesişmesi ya da iki doğru paralel değilken kesişmemesi durumlarında bileşik önerme yanlış olur.

p ve q önermelerinin “ancak ve ancak” bağlacıyla birleştirilerek oluşturulan bileşik önerme-ye iki yönlü koşullu önerme denir. p ancak ve ancak q önermesi $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterilir.

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri, p ile q önermelerinin doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlış olur.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Örnek : $p \wedge q \equiv 1$ ise $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm : $p \wedge q \equiv 1$ ise $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olmalıdır. Öyleyse $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (1 \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

Örnek : $p \Leftrightarrow q$ ile $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosunu yaparak eşit olduklarını gösterelim.

Çözüm :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Her p , q önermesi için $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ dur.

Örnek : $(1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 1)$ önermesinin en sade biçimde yazalım.

Çözüm : $[(1 \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1)] \Rightarrow (0 \Rightarrow 1) \equiv (0 \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 1) \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.

Örnek : $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv q \Leftrightarrow p$ olur.

Öyleyse, $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ dir.

Örnek : $m' \Leftrightarrow n \equiv m \Leftrightarrow n'$ denkliğinin doğru olduğunu gösterelim.

Çözüm : $m' \Leftrightarrow n \equiv (m' \Rightarrow n) \wedge (n \Rightarrow m') \equiv (m \vee n) \wedge (n' \vee m')$
 $\equiv (n \vee m) \wedge (m' \vee n') \equiv (n' \Rightarrow m) \wedge (m \Rightarrow n')$
 $\equiv m \Leftrightarrow n'$ olur.

Örnek : $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$ olduğunu tablo yaparak gösterelim.

Çözüm :

p	q	p'	q'	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q)'$	$p' \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q'$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

$(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

Örnek : $(p \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (q \Leftrightarrow 0)$ önermesinin en sade biçimini bulalım.

Çözüm : $(p \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (q \Leftrightarrow 0) \equiv [(p \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow p)] \Rightarrow [(q \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow q)]$
 $\equiv (1 \wedge p) \Rightarrow (q' \wedge 1) \equiv p \Rightarrow q' \equiv p' \vee q' \equiv (p \wedge q)'$ olur.

Örnek : $(p \vee q) \equiv 0$ ve $(p \Rightarrow q') \Leftrightarrow [(tvp) \Rightarrow k] \equiv 0$ olduğuna göre t ve k önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm : $p \vee q \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ olmalıdır. Bu durumda $(p \Rightarrow q') \equiv (0 \Rightarrow 1) \equiv 1$ olur.

$1 \Leftrightarrow [(tvp) \Rightarrow k] \equiv 0$ ise $(tvp) \Rightarrow k \equiv 0$ dir. Bu durumda $(tvp) \equiv 1$ ve $k \equiv 0$ olur. $tvp \equiv 1$ ise $p \equiv 0$ olduğundan $t \equiv 1$ olmalıdır.

Örnek : $(p \Leftrightarrow q) \equiv p' \Leftrightarrow q'$ olduğunu doğruluk tablosu yapmadan gösterelim.

Çözüm : $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (q' \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow q') \equiv p' \Leftrightarrow q'$ olur.

Örnek: $p \wedge q \equiv 1$ ve $[(p \Rightarrow t) \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow p \vee q \equiv 0$ olduğuna göre t ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm : $p \wedge q \equiv 1$ olduğundan $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olur. O hâlde,

$$[(p \Rightarrow t) \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (1 \vee 1) \equiv 0$$

$$[(p \Rightarrow t) \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow 1 \equiv 0 \text{ olur. Buna göre}$$

$$[(\underbrace{p \Rightarrow t}_1) \Rightarrow (\underbrace{q \Rightarrow r}_0)] \equiv 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{ccccc} p \Rightarrow t \equiv 1 & \text{ve} & q \Rightarrow r \equiv 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 0 \\ t \equiv 1 & \text{ve} & r \equiv 0 \text{ olur.} \end{array}$$

Totoloji ve Çelişki



❄ Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

p	p'	$p \vee p'$	$p \vee 1$	$p \wedge p'$	$p \wedge 0$
1					
0					

➤ $p \vee p'$ ile $p \vee 1$ önermelerin doğruluk değerleri ne olur?

➤ $p \wedge p'$ ve $p \wedge 0$ önermelerinin doğruluk değerleri ne olur? Tartışınız.

❄ Doğruluk değeri daima 1 veya daima 0 olan bileşik önermelere örnekler veriniz.

Örnek : $(p \wedge p') \vee q$ önermelerinin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu üzerinde gösterelim.

Çözüm :

p	q	p'	$p \wedge p'$	$(p \wedge p') \vee q$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

$(p \wedge p') \vee q$ önermesinin hem 1 hem de 0 değerleri vardır.

Örnek : $(p \vee q)' \wedge (p \wedge q)$ önermesinin çelişki olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm :

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p \wedge q$	$(p \vee q)' \wedge (p \wedge q)$
1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

Çelişki

p ve q önermelerinin tüm doğruluk değerleri için $(p \vee q)' \wedge (p \wedge q)$ önermesinin doğruluk değeri 0 olduğundan bu önerme çelişkidir.

Bir bileşik önerme, kendisini oluşturan önermelerin her değeri için daima “1” değerini alıyorsa bu bileşik önerme tautoloji; daima “0” değerini alıyorsa bu bileşik önerme çelişkidir.

Örnek : $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$ bileşik önermesinin tautoloji olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

Çözüm :

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Tautoloji

p ve q önermelerinin tüm doğruluk değerleri için $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri 1 olduğundan bu önerme bir tautolojidir.

Örnek : $p \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow q]$ önermesinin tautoloji olduğunu özellikler yardımıyla gösterelim.

Çözüm : $p \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow q] \equiv p' \vee [(p \wedge q) \Leftrightarrow q] \equiv p' \vee \{[(p \wedge q) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (p \wedge q)]\}$
 $\equiv p' \vee \{[(p \wedge q)' \vee q] \wedge [q' \vee (p \wedge q)]\} \equiv p' \vee \{[p' \vee q' \vee q] \wedge [(q' \vee p) \wedge (q' \vee q)]\}$
 $\equiv p' \vee \{[p' \vee 1] \wedge [(q' \vee p) \wedge 1]\} \equiv p' \vee [1 \wedge (q' \vee p)] \equiv p' \vee (q' \vee p) \equiv p' \vee p \vee q'$
 $\equiv 1 \vee q' \equiv 1$ dir.

Örnek : $(p' \wedge q) \wedge p \wedge (q \Rightarrow p')$ önermesinin çelişki olduğunu özellikler yardımıyla gösterelim.

Çözüm : $(p' \wedge q) \wedge p \wedge (q \Rightarrow p') \equiv (p' \wedge q) \wedge p \wedge (q' \vee p') \equiv (p' \wedge p) \wedge q \wedge (q' \vee p')$
 $\equiv 0 \wedge q \wedge (q' \vee p') \equiv 0 \wedge (q' \vee p') \equiv 0$ dir.

Örnek : $[p \Rightarrow (q \vee r)] \vee [(p' \Rightarrow (t' \wedge (r' \Rightarrow m')))]$ önermesi bir çelişki ise p, q, r, t, m önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm : Önerme çelişki ise doğruluk değeri 0 dir. O hâlde,

$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \vee [p' \Leftrightarrow (t' \wedge (r' \Rightarrow m'))] \equiv 0 \text{ olur.}$$

V bağlacının doğruluk değerinin 0 olabilmesi için $[p \Rightarrow (q \vee r)]' \equiv 0$ ve $[p' \Leftrightarrow (t' \wedge (r' \Rightarrow m'))] \equiv 0$ olmalıdır.

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ ise $p \equiv 1$ ve $q \vee r \equiv 0$ dir. Öyleyse,

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır.

$p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$ olur.

$p' \Leftrightarrow (t' \wedge (r' \Rightarrow m')) \equiv 0$ ise $p' \equiv 0$ olduğundan $t' \wedge (r' \Rightarrow m') \equiv 1$ olmalıdır. Bu durumda,

$t' \equiv 1$ ve $(r' \Rightarrow m') \equiv 1$ olmalıdır.

$t' \equiv 1 \Rightarrow t \equiv 0$ olur.

$r' \Rightarrow m' \equiv 1$ ise $r' \equiv 1$ olduğundan $m' \equiv 1$ ve dolayısıyla $m \equiv 0$ olmalıdır.



ALİŞTIRMALAR

1. $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ olduğuna göre aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.
a. $(p \wedge q) \vee r'$ b. $(p \Rightarrow q)' \vee r$ c. $[(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (q' \wedge r)]'$
2. $p \Rightarrow [(q' \Rightarrow p) \wedge p]$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.
3. $(p' \wedge q)' \wedge q \equiv 1$ ise $(p \wedge q) \vee q'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.
4. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini doğruluk tablosu ile bulunuz.
a. $(p \wedge q)' \wedge r$ b. $(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \vee q)$ c. $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$
5. $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \vee r) \equiv 0$ ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.
a. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge p'$ b. $(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$ c. $(q' \wedge p)' \Leftrightarrow (r' \vee q)$
6. p : “Ali zekidir.” , q : “Veli çalışkandır.” ve r : “Remzi başarılıdır.” önermeleri veriliyor. Aşağıdaki önermeleri ifade ediniz.
a. $p \vee q'$ b. $q \wedge p$ c. $p \Rightarrow r'$ ç. $q \Leftrightarrow r$ d. $p' \Rightarrow r$
7. $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ ise $(p' \vee q) \Rightarrow [r \wedge (q' \vee p)]$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.
8. $p \vee q \equiv 0$ ve $(p \wedge q)' \Leftrightarrow [t \Rightarrow (p \vee r)] \equiv 1$ olduğuna göre t ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.
9. Aşağıdaki önermeleri en sade şekilde yazınız.
a. $q \vee (q' \wedge p)$ b. $p \vee p'$ c. $p' \vee q'$ ç. $1 \wedge p$
d. $q \vee 1$ e. $p \Rightarrow 1$ f. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ g. $p \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge q']$
10. Aşağıdaki önermelerin değillerini bulunuz.
a. $p \wedge q$ b. $p \Rightarrow q$ c. $p \Leftrightarrow q$ ç. $(p \wedge q') \vee q'$
11. Aşağıdaki koşullu önermelerin karıştını, tersini ve karışit tersini bulunuz.
a. $p' \Rightarrow q$ b. $q' \Rightarrow p'$ c. $p \Rightarrow q'$
12. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin totoloji, hangilerinin çelişki olduğunu gösteriniz.
a. $p \vee 1$ b. $(p \vee q) \wedge p'$ c. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ ç. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q')$
13. Aşağıdaki denklıkların doğruluğunu gösteriniz.
a. $(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$ b. $(p \Rightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q$ c. $q' \Rightarrow p' \equiv (p' \wedge q)'$
14. p, q, r, s ve t önermelerine göre, $q \wedge \{[(q \vee r) \wedge (s \wedge t)']' \wedge (p \vee s)'\}'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.
15. $(q \vee p') \wedge q$ önermesinin olumsuzunu bulunuz.

AÇIK ÖNERMELER



“Cinderella (Sindrella) fakir bir kızdır. Bir gün prensin de bulunduğu bir baloya katılır. Cinderella'dan çok hoşlanan prens onu kaybedince Cinderella'nın baloda bıraktığı tek ayakkabıyı herkese deneterek onu bulmaya çalışır.”

- ✓ Herkesin ayakkabıyı denemesini bir önermeyle özdeşleştirirsek bu önerme ne zaman doğru olur?
- ✓ Doğruluk değeri, içerdği değişkenin değerine bağlı olan önermelere örnek verebilir misiniz?

Açık Önerme



* $p : “x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 > 7”$ önermesinin doğruluk değerini $x = 1, 2$ ve 5 sayıları için bulunuz.

* $q : “x, \text{İstanbul'a komşu bir ilimizdir.}”$ önermesinin doğruluk değerini $x = \text{Adapazarı, Ankara ve Antalya illeri için bulunuz.}$

- x bilinmiyorsa p ve q önermelerinin doğruluk değeri belirlenebilir mi? Açıklayınız.
- Yukarıdaki önermeler tüm x değerleri için doğru olur mu? Neden?
- Yukarıdaki önermeleri doğru ya da yanlış yapan başka değerler bulabilir misiniz?

Örnek : $p(x) : “x, \text{Ömer Seyfettin'in öykülerindendir.}”$ önermesinin doğruluk değerini x yerine $\{\text{Kaşığı, Şu Çılgın Türkler, And, Diyet}\}$ kümesinin elemanlarını koyarak bulalım.

Çözüm : x yerine Kaşığı konursa “Kaşığı, Ömer Seyfettin'in öykülerindendir.” olur ve doğruluk değeri 1 dir.

x yerine Şu Çılgın Türkler konursa “Şu Çılgın Türkler, Ömer Seyfettin'in öykülerindendir.” olur ve doğruluk değeri 0 dir.

x yerine And konursa “And, Ömer Seyfettin' in öykülerindendir.” olur ve doğruluk değeri 1 dir.

x yerine Diyet konursa “Diyet, Ömer Seyfettin'in öykülerindendir.” olur ve doğruluk değeri 1 dir.

Örnek : $p(x) : “x^2 \leq 10, x \in \mathbb{N}^+”$ açık önermesini doğru yapan x değerlerini bulalım.

Çözüm : $x = 1$ için $1^2 < 10$

$x = 2$ için $2^2 < 10$

$x = 3$ için $3^2 < 10$ dur.

$x = 4$ için $4^2 > 10$ olduğundan $p(x)$ önermesi 1, 2 ve 3 doğal sayıları için doğru, diğer doğal sayılar için yanlıştır.

Bir açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine o açık önermenin doğruluk kümesi deriz.

Örnek : $p(x)$: " $1 \leq 2x + 5 < 15$ " açık önermesinin doğruluk kümesini doğal sayılarda ve tam sayılarda bulalım.

Çözüm : $1 \leq 2x + 5 < 15 \Rightarrow -4 \leq 2x < 10 \Rightarrow -2 \leq x < 5$ olur. Buna göre doğal sayılardaki doğruluk kümesi; $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ve tam sayılardaki doğruluk kümesi; $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.

Denklem ve eşitsizlikler de birer açık önermedir.

Niceleyiciler



- “Bütün elmalar tatlıdır.” önermesi doğru ise tatlı olmayan elma bulunabilir mi?
- Yukarıdaki önermenin yanlış olması için elmaların hiçbirinin tatlı olmaması mı gerekir? Neden?
- “En az bir”, “bazı” ve “her” sözcüklerini içeren önermeler yazarak bu önermelerin doğruluklarını ifade etmeye çalışınız.
- “Bazı insanlar 200 cm den uzundur.” önermesinin doğruluğunu yukarıdaki üç sözcüğü kullanarak ifade ediniz?

Örnek : “Bazı” ve “her” niceleyicilerini kullanarak üç önerme yazalım.

Çözüm : p : “Bazı hayvanlar uçabilir.”
 q : “Her tam sayının karesi pozitiftir.”
 r : “Bazı sayıların küpü kendisinden küçüktür.”
cümleleri birer önermedir ve “her”, “bazı” kelimelerini içerir.

Önüne geldiği elemanların çokluğunu belirten “her”, “bazı” sözcüklerine niceleyiciler deriz. Her niceleyicisi “ \forall ” sembolü ile, bazı niceleyicisi de “ \exists ” sembolü ile gösterilir.

Örnek : p : “ Bazı asal sayılar çifttir. ”
 q : “ Her çift sayı 2 ile bölünebilir. ”
 r : “ Her x, y sayısı için $x + y = y + x$ tir. ”
önermelerini \forall ve \exists sembollerini kullanarak ifade edelim.

Çözüm : p : “ $\exists x$, x asal sayı, $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ ”
 q : “ $\forall x = 2k, k \in \mathbb{N}, 2 \mid x$ ”
 r : “ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ ” olur.

Her niceleyicisi “bütün” anlamı taşır. Bu niceleyiciye evrensel niceleyici denir. Bazı niceleyicisi “en az bir” anlamı taşır. Bu niceleyiciye varlıksal niceleyici adı verilir.

Örnek : “ $\forall x \in \mathbb{N}$ için $x^2 + 3 > 0$ ve “ $\exists x$ için $x^2 - 5x < 0$ ” önermelerinin olumsuzunu bulalım.

Çözüm :

“ $\forall x \in \mathbb{N}$ için $x^2 + 3 > 0$ ” önermesi bütün x doğal sayıları için $x^2 + 3$ ün pozitif olduğunu ifade eder. Bunun olumsuzu, bazı x doğal sayıları için $x^2 + 3$ ün negatif ya da sıfır olmasıdır. Bu da;

“ $\exists x \in \mathbb{N}$ için $x^2 + 3 \leq 0$ ” olarak ifade edilir.

“ $\exists x$, $x^2 - 5x < 0$ ” önermesi bazı x ler için $x^2 - 5x$ in negatif olduğunu ifade eder. Bunun olumsuzu, her x sayısı için $x^2 - 5x$ in pozitif ya da sıfır olmasıdır.

Bu da; “ $\forall x$, $x^2 - 5x \geq 0$ ” olarak ifade edilir.

x bir değişken ve $p(x)$ bir açık önerme olsun.

“ $\forall x$ için, $p(x)$ tir.” önermesinin olumsuzu “ $\exists x$ için, $p(x)$ değildir. ” şeklindedir. Yani,

$$[\forall x, p(x)]^I \equiv [\exists x, p^I(x)] \text{ tir.}$$

“ $\exists x$ için, $p(x)$ tir.” önermesinin olumsuzu “ $\forall x$ için, $p(x)$ değildir. ” şeklindedir. Yani,

$$[\exists x, p(x)]^I \equiv [\forall x, p^I(x)] \text{ tir.}$$

Aşağıda bazı terimlerin sembollerinin olumsuzları karşılıklarına yazılmıştır.

Semboller	Olumsuzları	Semboller	Olumsuzları
\forall	\exists	$=$	\neq
\exists	\forall	$>$	\leq
\vee	\wedge	$<$	\geq
\wedge	\vee	\geq	$<$
		\leq	$>$

Örnek : $[(\exists x \in \mathbb{R}, x - x^2 \geq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0)]$ önermesinin olumsuzunu bulalım.

Çözüm :

$$[(\exists x \in \mathbb{R}, x - x^2 \geq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0)]^I \equiv (\forall x \in \mathbb{R}, x - x^2 < 0) \vee (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0) \text{ dir.}$$

Örnek : p : “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 = 3x - 7$ ” ve q : “ $\forall x \in \{2, 4, 5\}, x^3 > 20$ ” önermeleri için $p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q$ bileşik önermelerini yazarak doğruluk değerlerini bulup olumsuzlarını gösterelim.

Çözüm :

$$p \vee q: [(\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 = 3x - 7) \vee (\forall x \in \{2, 4, 5\}, x^3 > 20)]$$

$$p \wedge q: [(\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 = 3x - 7) \wedge (\forall x \in \{2, 4, 5\}, x^3 > 20)]$$

$$p \Rightarrow q \equiv p^I \vee q: [(\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 \neq 3x - 7) \vee (\forall x \in \{2, 4, 5\}, x^3 > 20)] \text{ şeklindedir.}$$

p ve q önermelerinin doğruluk değerleri,

$$2x + 5 = 3x - 7 \Rightarrow x = 12 \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan } p \equiv 1 \text{ dir.}$$

$$2^3 = 8 < 20 \text{ olduğundan } q \equiv 0 \text{ dir.}$$

$$p \vee q \equiv 1 \vee 0 \equiv 1, p \wedge q \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0, p \Rightarrow q \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 \text{ bulunur.}$$

Bu bileşik önermelerin olumsuzları,

$$(p \vee q)^I \equiv p^I \wedge q^I: [(\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 \neq 3x - 7) \wedge (\exists x \in \{2, 4, 5\}, x^3 \leq 20)]$$

$$(p \wedge q)^I \equiv p^I \vee q^I: [(\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 \neq 3x - 7) \vee (\exists x \in \{2, 4, 5\}, x^3 \leq 20)]$$

$$(p \Rightarrow q)^I \equiv p \wedge q^I: [(\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 5 = 3x - 7) \wedge (\exists x \in \{2, 4, 5\}, x^3 \leq 20)] \text{ dir.}$$



ALİŞTIRMALAR

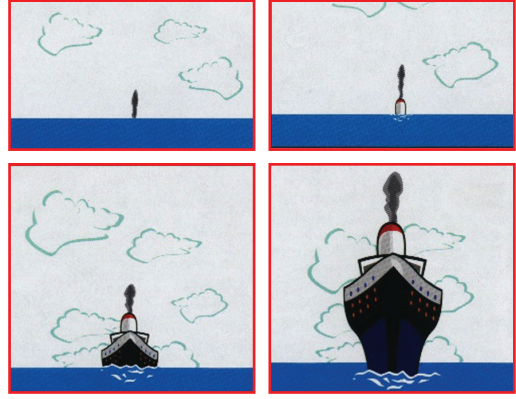
1. $p(x): "2x + 1 < 17, x \in \mathbb{N}"$ açık önermesi veriliyor. $p(x)$ açık önermesini doğru ve yanlış yapan ikişer değer bulunuz.
2. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.
 - a. " $\forall x \in \mathbb{N}, 2^x - 1$ bir asal sayıdır."
 - b. " $\exists x \in \mathbb{Z}, 3x - 4 = 5x - 6$ "
 - c. " $\forall x \in \{0, 1\}, x^2 = x$ "
3. Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız.
 - a. "Her asal sayı tektir."
 - b. "Bazı üçgenlerin kenarortayları aynı zamanda açıortaydır."
 - c. " $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x - 5 \leq 0$ "
 - ç. $[(\forall x, x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)) \wedge (\exists x, 2x + 14 < 0), x \in \mathbb{Z}]$
4. $p(x): "-1 < x < 7"$ açık önermesinin tam sayılardaki ve doğal sayılardaki doğruluk kümesini bulunuz.
5. Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz ve değillerini yazınız.
 - a. $[(\forall x, x^6 < 0) \wedge (\exists x, x - 3 > 0), x \in \mathbb{Z}]$
 - b. $[(\forall x, -x < 0) \vee (\exists x, x + 3 \neq 4), x \in \mathbb{N}]$
 - c. $[(\exists x, x^3 \leq x)]' \vee [\forall x, x^2 \geq 0, x \in \mathbb{Z}]$

TANIM, AKSİYOM, TEOREM VE İSPAT



Yanda verilen resimleri inceleyiniz.

- ✓ Dört resimden sadece birincisine bakarak yaklaşan cismin ne olduğu tam olarak açıklanabilir mi?
- ✓ “Denizin üzerinde dumanı tüten bir cisim varsa bu cisim bir gemidir” koşullu önermesinin her zaman doğru olduğunu kanıtlayabilir misiniz?
- ✓ İlk üç resime göre zihninizde oluşan düşünceler, yaklaşan cismin bir gemi olduğuna nasıl yardım etti?
- ✓ Yukarıdaki sorularla bir önermenin ispatının basamakları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.



Tanım, Aksiyom ve Teorem



- Aksiyom ve teorem arasında nasıl bir farklılık vardır?
- Tanım ve terim arasındaki fark nedir? Açıklayınız.
- İspatın evrenselliği ile ilgili neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.
- ✳ “Negatif sayıların çift kuvvetleri pozitifdir.” bileşik önermesini oluşturan önermeleri belirleyiniz.
- Bu önermelerden hangisi hipotez, hangisi hükümdür? Açıklayınız.

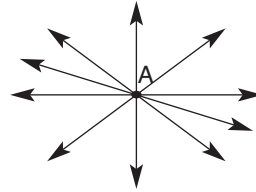
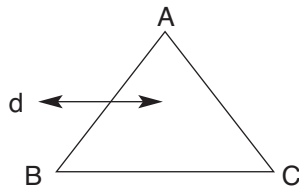
Örnek : Matematikte bazı terimlerin tanımlı, bazılarının tanımsız olduğundan bahsetmiştik. Aşağıda bazı terimlerin tanımları verilmiştir.

Önerme : Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren cümlelere önerme denir,

Asal Sayı : 1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük tam sayılara asal sayı denir.

Bir terimin ne olduğunu açıklayan ifadeye tanım denir.

Örnek : “d doğrusu ABC üçgeninin kenarlarından birini keserse diğer iki kenardan birini de keser.” ve “ Bir noktadan sonsuz doğru geçer.” önermelerini aşağıdaki şekillere bakarak sezgisel olarak kavrayabiliriz.



Doğruluğu sezgisel olarak kavranan, ispatlanmadan kabul edilen önermelere aksiyom denir.

Örnek : “Bir sayı çift ise sayının karesi de çift sayıdır.” önermesinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm : “Bir sayı çift ise sayının karesi de çift sayıdır.” önermesi sezgisel olarak kavranamaz fakat doğruluğu gösterilebilir. Doğruluğu gösterilirken yapılan işlemler de evrensel doğrular olmalıdır.

x çift sayı ise $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ dir. $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$ olur.

$2n^2 = t \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x^2 = 2t$ dir ve x^2 de çift sayıdır.

“Bir sayı çift ise karesi de çift sayıdır.” önermesi evrensel doğrularla ispatlandığı için bu önerme evrensel bir doğrudur.

Doğruluğu ispatlanarak kabul edilen önermelere teorem denir.
Teoremler $p \Rightarrow q$ şeklindeki önermelerdir. Burada p önermesine hipotez , q önermesine hüküm adı verilir. Bir teoremin hipotezi doğru iken hükmünün de doğru olduğunun gösterilmesi teoremin ispatlanmasıdır.

Örnek : “ \widehat{ABC} eşkenar üçgen ise $|AB| = |BC| = |AC|$ dir.” teoreminin hipotez ve hüküm kısımlarını belirtelim.

Çözüm : Teorem : $p \Rightarrow q$: “ \widehat{ABC} eşkenar üçgen ise $|AB| = |BC| = |AC|$ dir.”

Hipotez : p : “ \widehat{ABC} eşkenar üçgendir.” Hüküm : q : “ $|AB| = |BC| = |AC|$ dir.”

Aksiyom ile teorem arasındaki en önemli fark, aksiyomun doğruluğunun ispatlanmadan kabul edilmesi, teoremin ise doğruluğunun ispat edilebilmesidir.



Teorem: “ $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$ dir.”

* Bu teoremin hipotezini ve hükümünü aşağıdaki noktalı yerlere yazınız.

Hipotez:

Hüküm:

* $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$ açık önermesi için x değişkenine değerler vererek yandaki tabloyu örneğe uygun şekilde doldurunuz.

➤ Elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız. Tüm gerçekte sayılar için verilen teoremin doğru olduğunu söyleyebilir misiniz? Açıklayınız.

➤ Bu teoremi farklı ispat yöntemleri ile ispatlayabilir misiniz? Açıklayınız.

x	$x^2 - 4$	sonuç	$(x - 2)(x + 2)$	sonuç
5	$5^2 - 4$	21	$(5 - 2)(5 + 2)$	21
-3	$(-3)^2 - 4$	5	$(-3 - 2)(-3 + 2)$	5
$\frac{1}{3}$				
$\sqrt{2}$				
.....

Örnek : “Her tek sayının karesi tek sayıdır.” teoreminin hipotez ve hükmünü belirleyerek ispatlayalım.

Çözüm : Hipotez “p: $x = 2a + 1$ ($a \in \mathbb{Z}$) tek sayıdır.” Hüküm: “q : x^2 tek sayıdır.”

p önermesinin doğru olduğunu kabul edelim.

p doğru \Rightarrow x tek sayıdır.

$$\Rightarrow x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(\underbrace{2a^2 + 2a}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

$\Rightarrow x^2$ tek sayıdır.

\Rightarrow q doğrudur.

Hiçbir araştırma matematiksel ispattan geçmedikten sonra bilim adını almaya layık olamaz. (**Leonardo Davinci**)

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinden oluşan teoremden, p önermesinin doğruluğu kabul edilerek bilinen tanım ve aksiyomlar yardımıyla q önermesinin doğru olduğunun gösterilmesine doğrudan ispat yöntemi denir.

Örnek : $a \neq 5 \Rightarrow 2a + 3 \neq 13$ tür. Koşullu önermesinin hipotez ve hükmünü belirleyerek ispatlayalım.

Çözüm : Hipotez : p: $a \neq 5$ tir. Hüküm : q: $2a + 3 \neq 13$ tür.

$(p \Rightarrow q) \equiv (q^I \Rightarrow p^I)$ olduğundan $p \Rightarrow q$ önermesi yerine bu önermeye denk olan $q^I \Rightarrow p^I$ önermesini ispatlayalım.

$q^I: (2a + 3 \neq 13)^I \equiv 2a + 3 = 13 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \equiv p^I$ bulunur. Böylece $q^I \Rightarrow p^I$ önermesinin doğru olduğunu göstermiş olduk. Dengi doğru olan önerme de doğru olacağından $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur. Dolayısıyla bu ispat aynı zamanda $p \Rightarrow q$ önermesinin de ispatıdır.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinden oluşan teoremden $(p \Rightarrow q) \equiv (q^I \Rightarrow p^I)$ denkleğinden faydalananarak $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatlanması yerine, $q^I \Rightarrow p^I$ teoreminin ispatlanmasına, olmayana ergi yöntemi ile ispat denir.

Örnek : $A = \{0, 1, 2\}$ kümesi veriliyor. “ $\forall n \in A$ için $2n^2 < 3n + 4$ tür.”

Çözüm : $n = 0$ için $2 \cdot 0^2 < 3 \cdot 0 + 4 \Rightarrow 0 < 4$,

$n = 1$ için $2 \cdot 1^2 < 3 \cdot 1 + 4 \Rightarrow 2 < 7$,

$n = 2$ için $2 \cdot 2^2 < 3 \cdot 2 + 4 \Rightarrow 8 < 10$ elde edilir. Buna göre $A = \{0,1,2\}$ kümesinin her elemanı için $2n^2 < 3n + 4$ tür.

Sonlu sayıdaki değerler için ifade edilen bir teoremin doğruluğunun, o değerlerin teker teker denenerek gösterilmesi yöntemi deneme yöntemi ile ispattır.

Örnek : “ABC eşkenar üçgen ise her bir açısı 60° dir.” teoreminin hipotez ve hükünü belirleyip ispatlayalım.

Hipotez : “ABC eşkenar üçgendir.”

Hüküm : “ABC üçgeninin her bir açısı 60° dir.”

$p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğunu göstermek için $(p \Rightarrow q)^I$ nin yanlış olduğunu gösterelim.

$(p \Rightarrow q)^I \equiv p \wedge q^I$ denkleğinden yola çıkarak p önermesi ile q^I önermesinin birbiriyle çeliştiğini göstereceğiz. Yani $p^I \wedge q^I \equiv 0$ olduğunu, dolayısıyla $p \Rightarrow q \equiv 1$ olduğunu, göstermiş olacağız.

p : “ABC eşkenar üçgendir.” q^I : “ABC üçgeninin her bir açısı 60° değildir.”

q^I önermesi, ABC üçgeninin açılarının 60° olmadığını söylemektedir. Açıların 60° den farklı olması, kenar uzunluklarının da farklı olduğunu gösterir. Bu ise başta kabul ettiğimiz ABC üçgeninin eşkenar olmasıyla çelişir. O hâlde q^I önermesi yanlıştır. Eşkenar bir üçgenin bütün açıları 60° dir.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinden oluşan teoremin doğruluğunu göstermek için bu önermenin değılinin yanlış olduğunun gösterilmesi yöntemi, çelişki ile ispat yöntemidir.

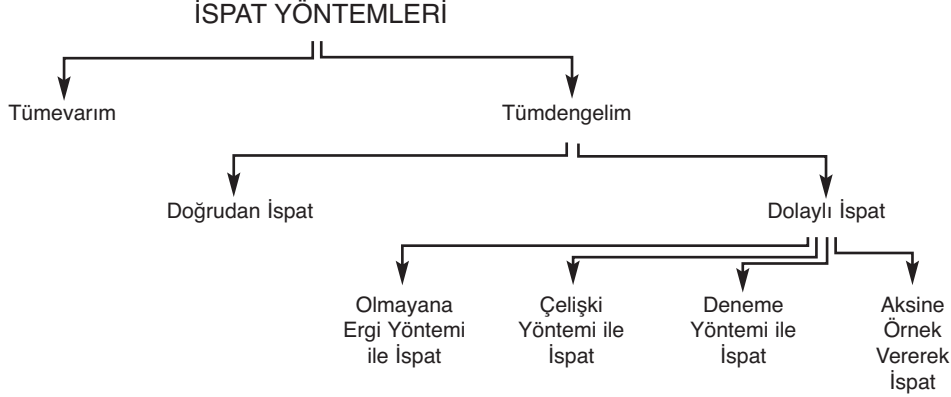
Örnek : “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1$ bir asal sayıdır.” teoreminin doğru olmadığını örnek vererek açıklayalım.

Çözüm : $n = 4$ için $n^2 + n + 1 = 4^2 + 4 + 1 = 21$ sayısı 1 ve kendisinden başka sayılara da bölünebildiğinden asal değildir. Dolayısıyla verilen teorem en az bir doğal sayı için doğru değildir. Yani verilen teorem yanlıştır.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğru olmadığını göstermek için bir istisna bulmak yeterlidir. Bu şekilde aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunun gösterilmesine aksine örnek vererek ispat deriz. Bu yöntem bir önermenin doğruluğunu değil, yanlışlığını göstermek için kullanılır.

İspat Yöntemleri

Teoremlerin ispatlanabilmesi için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden bazılarını inceleyelim.



ALİŞTIRMALAR

- Aşağıdaki ifadelerden hangileri birer aksiyom, hangileri birer teorem ifade eder?
 - “Farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.”
 - “İki tek doğal sayının toplamı daima çifttir.”
 - “Tek bir doğal sayının karesi yine tek bir doğal sayıdır.”
 - “Bir doğruya dışındaki bir noktadan en çok bir paralel doğru çizilebilir.”
- Aşağıdaki koşullu önermelerle ifade edilen teoremlerin hipotez ve hükümlerini belirtiniz.
 - “İki tek doğal sayının çarpımı daima tek sayıdır.”
 - “ $2x - 10 = 0$ ise $x^3 + 1 = 126$ olur.”
 - “ \widehat{ABC} i, ikizkenar üçgen ise tabana ait kenarortay uzunluğu aynı zamanda açıortay uzunluğudur.”
 - “İki çift sayının farkı çift sayıdır.”
- “Herhangi bir tek sayının kuvveti daima tek sayıdır.” önermesini doğrudan ispat yöntemi ile ispatlayınız.
- “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x + 1 = 7$ ise $x^2 + 4x = 12$ dir.” önermesini olmayana ergi yöntemi ve çelişki metodu ile ispatlayınız.
- “ $a \in \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere, $\forall a^m = a^n$ ise $m = n$ dir.” önermesinin yanlış olduğunu çelişki yöntemiyle ispatlayınız.
- “ $x \in \{2, 3, 4, 5\}$ için $x^2 < 7x - 6$ dir.” önermesini deneme yöntemiyle ispatlayınız.
- “ $x \in \mathbb{N}$ için “ $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ ” ifadesinin yanlış olduğunu aksine örnek vererek ispatlayınız.

1. TEST

- 38

2. BÖLÜM

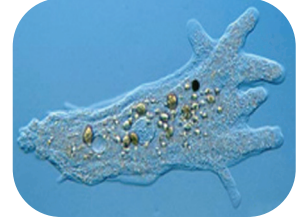
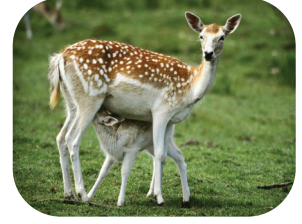
KÜMELER

KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR



Canlılar; bitkiler, hayvanlar, mantarlar ve tek hücreliler olmak üzere dört gruba ayrılır.

- ✓ Bu gruplandırmanın nasıl bir yararı vardır?
- ✓ Gruplandırmalar neye göre yapılmıştır?
- ✓ Mantarlar ya da bitkiler dendiğinde herkesin aynı şeyi anlamasının sebebi nedir?



Küme Kavramı



Aşağıdaki tabloda Türkiye'nin bazı illeri verilmiştir.

Van	Samsun	Sinop	Kastamonu
Antalya	Hatay	Kilis	Bitlis
Mersin	Bartın	Adana	Ağrı
Ordu	Muş	Giresun	Iğdır

- * Tablodan, Türkiye'nin doğusunda bulunan illeri belirleyiniz.
- * Belirlediğiniz illeri { } şeklinde bir parantez içinde, aralarına virgül koyarak yazınız.
- * Tablodan, Türkiye'nin kuzeyinde bulunan illeri belirleyiniz.
- * Belirlediğiniz illeri kapalı bir eğri içinde önlerine nokta koyarak yazınız.
- * Tablodan, Türkiye'nin güneyinde bulunan illeri bir açık önerme yardımıyla yazınız.
- * Oluşturduğunuz bu toplulukları A, B, C, D, ... gibi büyük harflerle adlandırınız.
- Bu topluluklardaki illeri teker teker yazmak yerine ortak özellikleri yardımıyla nasıl ifade edersiniz?
- Bu topluluklarda kaçar tane eleman olduğunu bulunuz.

Örnek : 0 ile 100 arasındaki bazı sayılardan bir topluluk oluşturalım.

Çözüm : Topluluğun hangi sayılardan oluşacağı açık ve kesin olarak belirtilmediğinden herkes değişik sayılardan bir topluluk oluşturabilir.

Örnek : 0 ile 100 arasındaki kareleri çift olan sayılardan bir topluluk oluşturalım.

Çözüm : 0 ile 100 arasında kareleri çift olan sayılar 2, 4, 6, ..., 98 sayılarından oluşan topluluktur. Bu topluluk açık ve kesin olarak bellidir.

Küme, birbirinden farklı ve iyi tanımlanmış nesnelerden oluşan bir topluluktur. Kümeler genel olarak A, B, C, ... gibi harflerle gösterilir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her biri kümenin elemanlarıdır.

Bir a nesnesi A kümesine ait ise $a \in A$ (a elemanı A) biçiminde gösterilir. Bir b nesnesi A kümesine ait değilse $b \notin A$ (b elemanı değil A) biçiminde gösterilir.

Örnek : Aşağıdaki toplulukların hangilerinin bir küme belirteceğini bulalım.

- a. İki basamaklı pozitif tam sayılar topluluğu
- b. Yeryüzünde yaşayan bazı canlılar topluluğu
- c. 12 yi tam bölen bazı sayılar topluluğu
- ç. Türkiye'nin G harfi ile başlayan illerinin topluluğu

Çözüm : a ve ç şıklarında verilen topluluklar birer küme belirtirler. Çünkü herkesin bu topluluklar için söyleyeceği elemanlar aynı olacaktır.

b ve c şıklarında verilen topluluklar kişilere göre farklılıklar göstereceğinden oluşturulacak topluluklar birer küme belirtmeyeceklerdir.

Örnek : “ATATÜRK” kelimesinde kullanılan harflerin oluşturduğu kümedeki elemanları belirtelim.

Çözüm : “ATATÜRK” kelimesindeki harfler A, T, Ü, R, K harfleridir.

Kümelerde her eleman bir kez yazılır, tekrarlanmaz.

Kümelerin Gösterilişi

a. Liste Yöntemi ile Gösterme

Örnek : 10, 4, 8, 6, 2 elemanlarının oluşturduğu A kümesini $\{ \}$ biçimindeki parantezin içine, elemanların aralarına virgül koyarak yazalım.

Çözüm : $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ olur.

Kümeyi oluşturan nesnelerin, sıra gözetilmeden $\{ \}$ biçimindeki parantezin içine, aralarına virgül konularak yazılması bu kümelerin liste biçiminde gösterilmesidir.

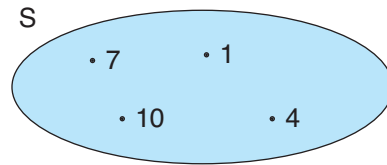
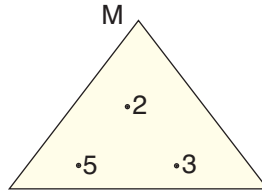
Örnek : 3 ile 46 arasında 6 ile tam bölünebilen sayıların oluşturduğu K kümesini, liste yöntemi ile gösterelim.

Çözüm : $K = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 \}$ olur.

b. Venn Şeması ile Gösterme

Örnek : $M = \{ 2, 3, 5 \}$ ve $S = \{ 1, 4, 7, 10 \}$ kümelerinin elemanlarını ayrı ayrı önlerine nokta koyarak kapalı bir eğri içerisinde gösterelim.

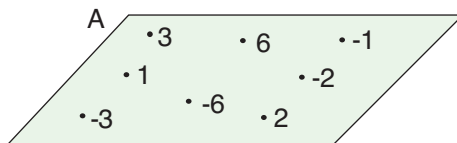
Çözüm :



Kümeyi oluşturan nesnelerin kapalı bir eğri içinde önlerine nokta konularak yazılması bu kümelerin Venn şemasıyla gösterilmesidir.

Örnek : 12 ile 18 sayılarını ortak bölen tam sayıların oluşturduğu A kümesini Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm :



c. Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterme

Örnek : $C = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \}$ kümesini, elemanları arasında ortak bir özellik varsa bu özelliği belirterek gösterelim.

Çözüm : Bu kümedeki elemanların ortak özelliği 20 den küçük asal sayılar olmasıdır. Kısaca,

$$C = \{x \mid 2 \leq x < 20, x \text{ asal sayı} \} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Kümeler $\{x \mid \dots\}$ veya $\{x : \dots\}$ şeklinde noktalı yere x elemanlarını tanımlayan bir açık önerme yazılarak gösterilebilir. Kümelerin bu şekilde gösterimi, ortak özellik yöntemi ile gösterim olarak adlandırılır.

Örnek : Aşağıda ortak özellik yöntemiyle verilen kümeleri liste yöntemi ve Venn şemasıyla gösterelim.

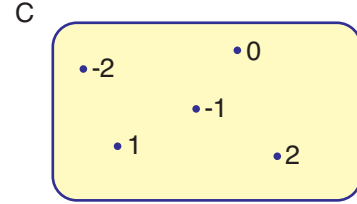
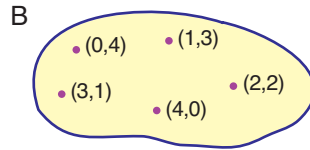
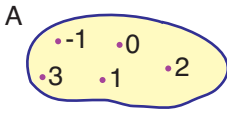
a. $A = \{x \mid -2 < x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

b. $B = \{(x, y) \mid x + y = 4, x \in \mathbb{N} \text{ ve } y \in \mathbb{N}\}$

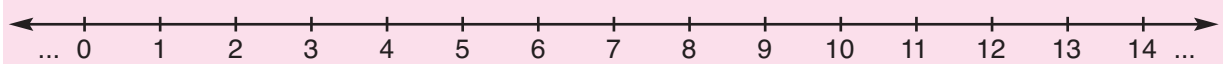
c. $C = \{x \mid x^2 < 9, x \in \mathbb{Z}\}$

Çözüm :

a. $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ b. $B = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ c. $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



Sonlu ve Sonsuz Kümeler



- * Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde 0 dan 10 a kadar olan çift sayıları işaretleyiniz.
- * İşaretlediğiniz çift sayılardan oluşan kümeyi liste yöntemi ile yazınız.
- * Aynı sayı doğrusu üzerinde 10 dan büyük kaç tane daha çift sayı işaretleyebiliriz?
- İşaretlediğiniz en büyük çift sayıyı söyleyebilir misiniz?
- * Bu şekilde elde ettiğiniz çift sayılardan bir küme oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz kümenin eleman sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- * Şimdi de sayı doğrusu üzerinde ardışık iki çift sayı işaretleyiniz.
- * Bu iki sayı arasında bulunan çift sayılar ile rasyonel sayılardan iki ayrı küme oluşturunuz.
- * Oluşturduğunuz kümelerin eleman sayılarını belirleyiniz.
- Yukarıdaki kümelerin her birinin eleman sayısını bir doğal sayı ile ifade edebilir misiniz? Neden?

Örnek : $A = \{x \mid 0 \leq x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olduğundan A kümesinin 5 elemanı vardır.

Bir A kümesine ait bütün elemanların sayısı $s(A)$ ile gösterilir. A kümesinin eleman sayısı m ise bu, $s(A) = m$ biçiminde gösterilir.

Örnek : Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulalım.

a. $A = \{x | x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ b. $B = \{x | 1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ c. $C = \{x | x^2 = -1, x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm : a. A kümesinin elemanları 5 ten küçük doğal sayılardan oluşur. O hâlde,

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ve $s(A) = 5$ tir.

- b. B kümesinin elemanları 1 ve 3 arasındaki gerçekte sayılardan oluşur. Bu aralıktaki elemanlar sayılamayacak kadar çoktur. Bu nedenle B kümesinin eleman sayısını belirleyemeyiz.
- c. Karesi -1 olan gerçekte sayı bulunamayacağından C kümesinin elemanı yoktur. O hâlde $s(C) = 0$ dir.

Elemanları sayılabilir çoklukta olan kümeler sonlu kümelerdir. Sayılamayacak kadar çok elemanlı kümeler sonsuz kümelerdir. Hiç elemanı olmayan kümeler boş kümelerdir. Boş kümeler \emptyset veya $\{\}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Alt Küme



* $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak

Bir, iki, üç ve dört elemanlı kümeler oluşturunuz.

Elemanı olmayan bir küme oluşturunuz.

➤ Oluşturduğunuz kümelerden başka, A kümesinin elemanlarını kullanarak başka küme oluşturabilir misiniz?

* Elemanları yukarıdaki kümeler olan bir küme oluşturunuz ve bu kümenin eleman sayısını bulunuz.

* Benzer işlemleri uygulayarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

➤ Tablodan yararlanarak bir kümenin eleman sayısı ile alt kümelerinin sayısı arasında bir bağıntı bulunuz. Bulduğunuz bağıntıyı arkadaşlarınızın bulduğu bağıntı ile karşılaştırınız.

Küme	Alt kümeleri	Kümenin eleman sayısı	Kümenin alt kümelerinin sayısı
$A = \{ \}$			
$B = \{ 1 \}$			
$C = \{ 1, 2 \}$			
$D = \{ 1, 2, 3 \}$			
$E = \{ 1, 2, 3, 4 \}$			

Örnek : $A = \{ 1, 2, 3 \}$ kümesinin elemanlarını kullanarak farklı kümeler oluşturalım.

Çözüm : Bu kümeler $\{ \}, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 1, 2, 3 \}$ şeklindedir. Bu kümelerin her biri A kümesinin birer alt kümesidir. Ayrıca boş küme her kümenin alt kümesi ve her küme kendisinin alt kümesidir.

A ve B gibi iki kümeden A kümesinin her bir elemanı B kümesinin de elemanı ise, A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir. Bu durum $A \subset B$ (A alt küme B) veya $B \supset A$ (B kapsar A) biçiminde gösterilir. Yani, $\forall x \in A$ için $x \in B \Leftrightarrow A \subset B$ dir.

Örnek : $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A \subset B \Rightarrow \forall x \in A$ için $x \in B$,

$B \subset C \Rightarrow \forall x \in A$ için $x \in C$ dir.

$\forall x \in A$ için $x \in B$ ve $\forall x \in B$ için $x \in C$ ise $\forall x \in A$ için $x \in C$ dir.

Öyleyse $A \subset C$ olur. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ dir.

Bir kümenin kendisi dışındaki tüm alt kümelerine o kümenin öz alt kümeleri denir.

Örnek : $B = \{*, \square, \triangle, \circ\}$ kümesinin 0, 1, 2, 3 ve 4 elemanlı alt kümelerini bulalım.

Çözüm : $B = \{*, \square, \triangle, \circ\}$ kümesinin,

0 elemanlı alt kümesi , $\{ \}$;

1 elemanlı alt kümeleri , $\{*\}, \{\square\}, \{\triangle\}, \{\circ\}$;

2 elemanlı alt kümeleri , $\{*, \square\}, \{*, \triangle\}, \{*, \circ\}, \{\square, \triangle\}, \{\square, \circ\}, \{\triangle, \circ\}$;

3 elemanlı alt kümeleri , $\{*, \square, \triangle\}, \{*, \square, \circ\}, \{\square, \triangle, \circ\}, \{\triangle, \circ, *\}$;

4 elemanlı alt kümesi , $\{*, \square, \triangle, \circ\}$ şeklindedir.

Boş küme her kümenin alt kümesi, her küme de kendisinin alt kümesidir. $\emptyset \subset A$ ve $A \subset A$ dir.

B kümesinin sıfır elemanlı 1, bir elemanlı 4, iki elemanlı 6, üç elemanlı 4, dört elemanlı 1 olmak üzere toplam 16 alt kümesi vardır.

Sıfır elemanlı kümenin alt küme sayısı 1,

Bir elemanlı kümenin alt küme sayısı 2,

İki elemanlı kümenin alt küme sayısı 4,

Üç elemanlı kümenin alt küme sayısı 8,

Dört elemanlı kümenin alt küme sayısı 16 olup bu sayılar 2 nin kuvvetleridir.

Eleman sayısı n olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n , öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.

Örnek : $K = \{x \mid x^2 < 9, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan bir küme yazalım.

Çözüm : $K = \{0, 1, 2\}$ dir. K kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan küme;

$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ şeklindedir.

Bir kümenin tüm alt kümelerinden oluşan küme, bu kümenin kuvvet kümesidir. O hâlde $s(A) = n$ ise A nın kuvvet kümesinin eleman sayısı 2^n dir.

Örnek : Bir A kümesinin alt küme sayısı ile öz alt küme sayısının toplamı 31 dir. A kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulalım.

Çözüm : $s(A) = n$ olsun. O hâlde; alt küme sayısı, 2^n ve öz alt küme sayısı, $2^n - 1$ dir. Buna göre;

$$2^n + 2^n - 1 = 31 \Rightarrow 2 \cdot 2^n = 32$$

$$\Rightarrow 2^n = 2^4$$

$$\Rightarrow n = 4 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;

- a. 7 eleman olarak bulunmaz?
- b. 3 eleman olarak bulunur?
- c. 1 ve 5 eleman olarak birlikte bulunur?
- ç. 3 ve 7 elemanlarından hiçbirisi bulunmaz?
- d. 3 veya 7 eleman olarak bulunur?

Çözüm :

- a. “7” alt kümelerin hiçbirinde eleman olarak bulunmayacağından geriye kalan $\{1, 3, 5, 9\}$ kümesinin elemanları ile kaç tane alt küme yazabileceğimizi bulmalıyız. O hâlde $2^4 = 16$ tane alt kümede “7” eleman olarak bulunmaz.
- b. “3” elemanı dışında geriye kalan $\{1, 5, 7, 9\}$ kümesinin elemanları ile $2^4 = 16$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin her birine “3” elemanını da dâhil edelim. Böylece elde edilen 16 alt kümenin her birinde “3” eleman olarak bulunur.
- c. “1” ile “5” elemanları dışında geriye kalan $\{3, 7, 9\}$ kümesinin elemanları ile $2^3 = 8$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin her birine “1” ve “5” elemanlarını da dâhil edelim. Böylece elde edilen 8 alt kümenin her birinde “1” ve “5” eleman olarak birlikte bulunur.
- ç. “3” ve “7” alt kümelerin hiçbirinde eleman olarak bulunmayacağından geriye kalan $\{1, 5, 9\}$ kümesinin elemanları ile $2^3 = 8$ tane alt küme yazılabilir.
- d. A kümesinin tüm alt kümelerinden, “3” ve “7” elemanlarının her ikisinin de bulunmadığı alt kümeleri çıkarırsak istenileni bulabiliriz. Buna göre A kümesinin $2^5 = 32$ tane alt kümesi vardır. $32 - 8 = 24$ tanesinin de “3” veya “7” eleman olarak bulunur.

Örnek : $A = \{m, l, s, k, b\}$ kümesi veriliyor. $\{s, b\} \subset K \subset A$ şartını sağlayan kaç tane K kümesinin yazılabileceğini bulalım.

Çözüm : $\{s, b\} \subset K \subset \{m, l, s, k, b\}$ olacak şekilde kümeler bulacağız. Oluşturulabilecek kümelerde “s” ve “b” elemanları olmak zorundadır. Geriye kalan $\{m, l, k\}$ kümesinin elemanları ile $2^3 = 8$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin her birine “s” ve “b” eleman olarak eklenir. Böylece 8 tane K kümesi yazılabilir.

Örnek : $M = \{a, b, c, d\}$ kümesi veriliyor. Buna göre;

- a. M nin en fazla bir elemanlı alt kümelerini,
- b. M nin en az iki elemanlı alt kümelerini,
- c. M nin en az üç elemanlı alt kümelerini bulalım.

Çözüm :

- a. $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset$
- b. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$
- c. $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

1. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısının n nin r li kombinasyonu olduğunu biliyoruz. O hâlde n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısını;

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ şeklinde bulabiliriz.}$$

2. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ dir.

3. $0! = 1$ dir.

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin;

- a. 2 elemanlı alt küme sayısını,
- b. 6 elemanlı alt küme sayısını,
- c. 5 elemanlı alt küme sayısını,
- ç. 7 elemanlı alt küme sayısını,
- d. En çok 3 elemanı olan alt kümelerinin sayısını,
- e. En az 2 elemanı olan alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm :

a. $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{42}{2} = 21$ dir.

b. $\binom{7}{6} = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1!} = 7$ dir.

c. $\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = 21$ dir.

ç. $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7! \cdot 0!} = 1$ dir.

d. En çok üç elemanlı alt kümeler; 0, 1, 2 ve 3 elemanlı alt kümelerdir. Buna göre,

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 1 + 7 + 21 + 35 = 64 \text{ olarak bulunur.}$$

e. En az iki elemanlı alt kümeler; 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 elemanlı alt kümelerdir. Öyleyse,

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} \right] = 128 - (1 + 7) = 120 \text{ olarak bulunur.}$$

$n \in \mathbb{Z}^+$, $r \leq n$ olmak üzere

1) $\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$

3) $\binom{n}{0} = 1$

4) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ dir.

n elemanlı bir kümenin;

5) En çok r elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r}$

6) En az r elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} + \dots + \binom{n}{n}$

7) Tüm alt kümelerinin sayısı, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ dir.

Örnek : B kümesinin eleman sayısı, A kümesinin eleman sayısından bir fazladır. B kümesinin alt kümelerinin sayısı, A kümesinin alt kümelerinin sayısından 32 fazladır. Buna göre B kümesinin kaç tane üç elemanlı alt kümesinin olduğunu bulalım.

Çözüm : $s(A) = n \Rightarrow s(B) = n + 1$ olur. $2^n + 32 = 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} - 2^n = 32$

$$\Rightarrow 2^n (2 - 1) = 32$$

$$\Rightarrow 2^n = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow n = 5 \text{ bulunur. O hâlde } s(B) = n + 1 = 5 + 1 = 6 \text{ dir.}$$

B kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı, $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20$ olarak bulunur.

Eşit ve Denk Kümeler



$$A = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \mid x^2 < 25, x \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{x \mid 2 < x \leq 20, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$$

✱ Yanda verilen A, B ve C kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

✱ Bu kümelerin her birinin eleman sayılarını bulunuz.

➤ A, B ve C kümelerini eleman sayıları ve elemanları bakımından karşılaştırınız. Sonuçları arkadaşlarınız ile paylaşınız.

Örnek : $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$$B = \{x \mid 2 < x < 9, x \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \mid x, 12 \text{ yi tam bölen pozitif tam sayılar}\}$$

kümelerinin elemanlarını ve eleman sayılarını karşılaştıralım.

Çözüm : $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ve $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ dir.

A kümesinin her elemanı B kümesinde ($A \subset B$) ve B kümesinin her elemanı da A kümesinde ($B \subset A$) bulunmaktadır. $s(A) = s(B) = 6$ dir.

C kümesinin elemanları A ve B kümelerinin elemanları ile aynı değildir. Fakat, $s(A) = s(B) = s(C) = 6$ dir.

Örnek : $A = \{x \mid (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5) \cdot (x - 6) = 0, x \in \mathbb{Z}\}$

$$B = \{x \mid x^2 < 6, x \in \mathbb{N}\} \quad 0, 1, 2$$

$C = \{x \mid x < 3, x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri için aşağıdaki boşlukları uygun şekilde dolduralım.

a. $s(A) \dots s(B) \dots s(C)$

b. $(B \dots C) \wedge (C \dots B)$

c. $(C \dots A) \wedge (A \dots C)$

Çözüm : $A = \{-5, 2, 3, 6\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ ve $C = \{0, 1, 2\}$ dir. Öyleyse

a. $s(A) \neq s(B) = s(C)$

b. $(B \subset C) \wedge (C \subset B)$

c. $(C \not\subset A) \wedge (A \not\subset C)$ dir.

Aynı elemanlardan oluşan kümeler eşit kümelerdir. A ve B eşit kümeler ise $A = B$ şeklinde, A ve B eşit kümeler değil ise $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Eleman sayısı eşit olan kümeler denk kümelerdir. A ve B denk kümeler ise $A \equiv B$ şeklinde, A ve B denk kümeler değil ise $A \not\equiv B$ şeklinde gösterilir.

Eşit kümeler aynı zamanda denk kümelerdir. Fakat denk kümeler eşit küme olmak zorunda değildir.

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 –1918)

Kümeler kavramının kurucusudur. "Sonsuz küme" kavramına matematiksel bir tanım getirmiş ve gerçel sayıların sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan "daha büyük" olduğunu ispatlamıştır.





ALİŞTIRMALAR

- Aşağıdaki ifadelerden hangileri birer küme belirtir?
a. 43 ten büyük tek sayılar b. Yılın bazı ayları c. "MATEMATİK" sözcüğünün harfleri
- Küpü 0 ile 90 arasında olan doğal sayıların kümesi A olsun. Buna göre aşağıdaki ifadelerin hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.
a. $5 \in A$ b. $\{2, 4\} \subset A$ c. $A \subset A$ ç. $s(A) = 5$
d. $A \neq \emptyset$ e. $0 \in A$ f. $\{3\} \in A$ g. $\{\} \subset A$
- $A = \{a, \{b, c\}, d\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangilerinin doğru (veya yanlış) olduğunu belirtiniz.
a. $d \in A$ b. $\{a\} \subset A$ c. $s(A) = 3$ ç. $\{a, c\} \subset A$ d. $b, c \in A$
- Aşağıda liste yöntemi ile verilen kümeleri ortak özellik yöntemi ile yazınız.
a. $A = \{a, b, c, ç, d\}$ b. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, \dots\}$
- Aşağıda ortak özellik yöntemi ile verilen kümeleri liste yöntemi ile yazınız.
a. $A = \{x \mid x^2 = 16, x \in \mathbb{Z}\}$ b. $B = \{x \mid 2 < x < 7, x \in \mathbb{Z}\}$
c. $C = \{x \mid 2x - 3 = 10, x \in \mathbb{Z}\}$ ç. $D = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$
- Aşağıdaki kümelerin sonlu veya sonsuz küme olup olmadıklarını belirtiniz.
a. $A = \{x \mid x > 5, x \in \mathbb{N}\}$ b. $C = \{x \mid x^2 = -9, x \in \mathbb{Z}\}$ c. $D = \{x \mid x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$
- $A = \{x \mid x \text{ tam sayı, } 0 \leq x \leq 14\}$ ile $B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \text{ asal sayı}\}$ kümeleri veriliyor. A ve B kümelerinin eleman sayılarını bulunuz.
- $A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \text{ tam sayı}\}$ kümeleri veriliyor. A kümesi, B kümesinin alt kümesi midir? Açıklayınız.
- $K = \{x \mid x, 3 \text{ ün katı olan doğal sayılar ve } -2 \leq x < 21\}$ kümesi veriliyor.
a. K kümesini liste yöntemi ile yazınız.
b. K kümesinin kaç alt kümesi ve öz alt kümesi vardır?
c. K kümesinin kuvvet kümesini yazınız.
ç. K kümesinin üç elemanlı, en çok üç elemanlı ve en az beş elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?
- Öz alt küme sayısı 7 olan küme kaç elemanlıdır?
- Alt küme sayısının 6 fazlası, öz alt küme sayısının 2 katına eşit olan küme kaç elemanlıdır?
- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümesi veriliyor. A kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde;
a. 6 eleman olarak bulunmaz? b. 4 eleman olarak bulunur?
c. 4 ve 6 eleman olarak bulunur? ç. 4 veya 6 eleman olarak bulunur?
d. 4 eleman olarak bulunur, 6 bulunmaz?
- $A = \{x : 2 \leq x^2 \leq 25, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi veriliyor. A kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde, 4 eleman olarak bulunur?
- 2 den az elemanlı alt küme sayısı 7 olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı kaçtır?
- Karesi tek sayı olan çift sayma sayılarının kümesi A olsun. A kümesine eşit olan bir küme yazınız.
- $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümeleri veriliyor. $A \neq K$ ve $B \neq K$ olmak üzere, $A \subset K \subset B$ olacak biçimde kaç tane K kümesi yazılabilir?
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde asal sayı bulunmaz?
- A kümesinin alt küme sayısı B kümesinin alt küme sayısının 32 katı ise A kümesinin eleman sayısı, B kümesinin eleman sayısından kaç fazladır?

KÜMELERDE İŞLEMLER



Yandaki tabloda bir grup öğrencinin okulda hangi etkinliklere katıldığı verilmiştir.

- ✓ En az bir etkinlikte görev alan öğrenciler kimlerdir?
- ✓ Okul korosuna katılmayan öğrenciler kimlerdir?
- ✓ Sadece tiyatroya katılanlar kimlerdir?
- ✓ Her iki etkinliğe katılan öğrenciler kimlerdir?

Okul Korusu	Tiyatro
Duru	Canan
Gonca	Kemal
Canan	Burak
Duru	Alptuğ
Esra	Duru

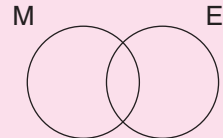


Bir sınıftaki öğrencilerden, matematik veya edebiyat kurslarına devam edenlerin tablosu aşağıda verilmiştir.

	Matematik	Edebiyat
Esra		x
Ceren		x
Ceyda	x	
Ece	x	x
Sinem	x	x
Burak		x
Kemal	x	

Buna göre;

- ✱ Matematik kursuna devam eden öğrencilerden bir küme oluşturunuz.
- ✱ Edebiyat kursuna devam eden öğrencilerden bir küme oluşturunuz.
- ✱ Matematik ve edebiyat kurslarının her ikisine de devam eden öğrencilerden bir küme oluşturunuz.
- ✱ Yalnız bir kursa devam eden öğrencilerden bir küme oluşturunuz.
- ✱ Bu sınıfta kursa devam eden öğrencilerden bir küme oluşturunuz.
- ✱ Oluşturduğumuz bu kümelerin elemanlarını yandaki gibi bir Venn şeması üzerinde gösteriniz.
- ✱ Venn şemasında oluşan üç bölgenin özelliklerini söyleyiniz.



İki Kümenin Birleşimi

Örnek : Aşağıdaki her bir seçenek için verilen iki kümenin elemanlarının tamamını oluşturan kümeyi liste yöntemi ile yazarak aynı Venn şeması üzerinde gösterelim.

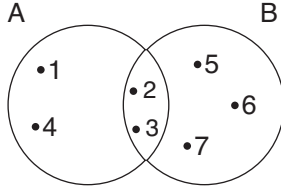
a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

b. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$

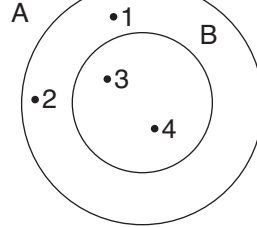
c. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$

Çözüm :

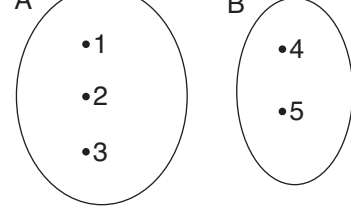
a. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



b. $\{1, 2, 3, 4\}$



c. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



A ve B herhangi iki küme olmak üzere; A ve B kümelerinin bütün elemanlarının oluşturduğu küme bu iki kümenin birleşim kümesidir.

A ve B kümelerinin birleşim kümesi $A \cup B$ (A birleşim B) ile gösterilir. Kısaca,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \text{ dir.}$$

İki Kümenin Kesişimi

Örnek : Aşağıda a, b ve c de verilen iki kümenin ortak elemanlarından oluşan kümeyi (K_1 , K_2 , K_3) liste yöntemi ile yazarak Venn şeması ile gösterelim.

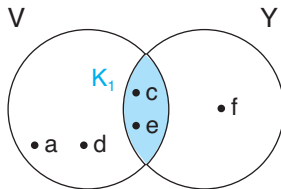
a. $V = \{a, c, d, e\}$, $Y = \{c, f, e\}$

b. $M = \{b, c, d\}$, $N = \{b, d\}$

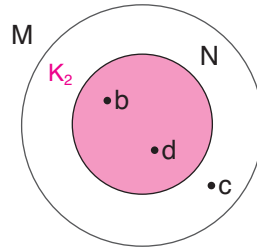
c. $T = \{a, b, c\}$, $R = \{d, e\}$

Çözüm :

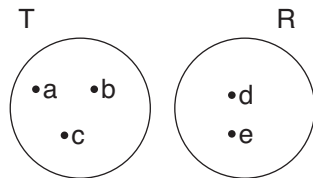
$$K_1 = \{c, e\}$$



$$K_2 = \{b, d\}$$



$$K_3 = \{ \}$$



A ve B herhangi iki küme olmak üzere ; A ve B kümelerinin ikisine de ait olan elemanların oluşturduğu küme, bu iki kümenin kesişim kümesidir.

A ve B kümelerinin kesişim kümesi $A \cap B$ (A kesişim B) ile gösterilir. Kısaca,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \text{ dir.}$$

Kesişimleri boş olan kümeler ayrık kümelerdir.

A ve B ayrık kümeler ise $A \cap B = \emptyset$ dir.

Örnek : $A = \{x \mid x, 90 \text{ in asal çarpanları} \}$, $B = \{x \mid x, 105 \text{ in asal çarpanları} \}$ kümeleri için $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm : $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ve $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ olup

$$A = \{2, 3, 5\} \text{ ve } B = \{3, 5, 7\} \text{ dir.}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 7\} \text{ ve } A \cap B = \{3, 5\} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $A = \{2,3,5,6\}$, $B = \{3,4,6,7\}$ ve $C = \{5,6,7,8\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazalım.

a. $A \cap (B \cup C)$ b. $A \cup (B \cap C)$

Çözüm : a. $A \cap (B \cup C) = \{2,3,5,6\} \cap \{3,4,5,6,7,8\} = \{3,5,6\}$

b. $A \cup (B \cap C) = \{2,3,5,6\} \cup \{6,7\} = \{2,3,5,6,7\}$

Birleşim ve Kesişim İşlemlerinin Özellikleri

1. Tek Kuvvet Özelliği

$K = \{1, 2\}$ ise $K \cup K = K \cap K = \{1, 2\} = K$ dir.

Her A kümesi için $A \cap A = \{x | x \in A \wedge x \in A\} = \{x | x \in A\} = A$,
 $A \cup A = \{x | x \in A \vee x \in A\} = \{x | x \in A\} = A$ dir.

$A \cap A = A$ ve $A \cup A = A$ dir.

2. Değişme Özelliği

$K = \{1, 2\}$, $L = \{2, 3\}$ ise $K \cup L = L \cup K = \{1, 2, 3\}$ ve $K \cap L = L \cap K = \{2\}$ dir.

Her A ve B kümeleri için

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in B \vee x \in A\}$ (\vee bağlacının değişme özelliği)
 $= B \cup A$ ve

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in B \wedge x \in A\}$ (\wedge bağlacının değişme özelliği)
 $= B \cap A$ dir.

$A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ dir.

3. Birleşme Özelliği

$K = \{1, 2\}$, $L = \{2, 3\}$, $M = \{a, b\}$ ise $K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M = \{1, 2, 3, a, b\}$ ve
 $(K \cap L) \cap M = K \cap (L \cap M) = \{2\}$ dir.

Her A, B ve C kümeleri için

$A \cup (B \cup C) = \{x | x \in A \vee x \in (B \cup C)\}$
 $= \{x | x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$
 $= \{x | x \in (A \cup B) \vee x \in C\}$ (\vee bağlacının birleşme özelliği)
 $= (A \cup B) \cup C$ ve

$A \cap (B \cap C) = \{x | x \in A \wedge x \in (B \cap C)\}$
 $= \{x | x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$
 $= \{x | x \in (A \cap B) \wedge x \in C\}$ (\wedge bağlacının birleşme özelliği)
 $= (A \cap B) \cap C$ dir.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ve $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dir.

4. Birim Eleman

$K = \{1, 2\}$ ise $K \cup \emptyset = \emptyset \cup K = \{1, 2\} = K$ dir.

Her A kümesi için $A \cup \emptyset = \{x | x \in A \vee x \in \emptyset\} = \{x | x \in A\}$
 $= A$ dir.

$A \cup \emptyset = A$ dir.

5. Yutan Eleman

$K = \{1, 2\}$ ise $K \cap \emptyset = \emptyset \cap K = \{\} = \emptyset$ dir.

Her A kümesi için $A \cap \emptyset = \{x | x \in A \wedge x \in \emptyset\} = \{x | x \in \emptyset\} = \emptyset$ dir.

$A \cap \emptyset = \emptyset$ dir.

6. Birleşim İşleminin Kesişim İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

$K = \{1, 2\}$, $L = \{2, 3\}$, $M = \{2, b\}$ ise $K \cup (L \cap M) = \{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ ve

$(K \cup L) \cap (K \cup M) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, b\} = \{1, 2\}$ dir.

Her A, B ve C kümeleri için

$A \cup (B \cap C) = \{x | x \in A \vee x \in (B \cap C)\} = \{x | x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$
 $= \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$ (\vee bağlacının \wedge bağlacı üzerine dağılma özelliği)
 $= \{x | x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

7. Kesişim İşleminin Birleşim İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

$K = \{1, 2\}$, $L = \{2, 3\}$, $M = \{2, b\}$ ise $K \cap (L \cup M) = \{1, 2\} \cap \{2, 3, b\} = \{2\}$ ve

$(K \cap L) \cup (K \cap M) = \{2\} \cup \{2\} = \{2\}$ dir.

Her A, B ve C kümeleri için

$A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} = \{x | x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$
 $= \{x | (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$ (\wedge bağlacının \vee bağlacı üzerine dağılma özelliği)
 $= \{x | x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

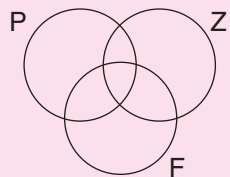
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

İki veya Üç Kümenin Birleşiminin Eleman Sayısı



Türkiye'nin en çok pamuk ihracatı yaptığı ülkeler İtalya, İspanya, Almanya, Fransa ve Belçika; en çok zeytin ihraç ettiği ülkeler ABD, Almanya, Fransa, İtalya ve İngiltere; en çok fındık ihraç ettiği ülkeler ise Almanya, Fransa, İtalya, Hollanda ve Belçika'dır. Bu verilere göre;

- * Pamuk ihraç ettiğimiz ülkelere bir küme oluşturunuz. (P kümesi)
- * Zeytin ihraç ettiğimiz ülkelere bir küme oluşturunuz. (Z kümesi)
- * Fındık ihraç ettiğimiz ülkelere bir küme oluşturunuz. (F kümesi)
- * Hem pamuk hem de zeytin ihraç ettiğimiz ülkelere bir küme oluşturunuz.
- * Oluşturduğunuz bu kümeleri tek bir Venn şeması üzerinde gösteriniz.
- Sizce, pamuk ile zeytin ihraç ettiğimiz ülkelerin sayıları toplamı, bu ürünlerin hepsini ihraç ettiğimiz ülkelerin sayılarına eşit midir? Açıklayınız.
- * Yukarıdaki bilgilere göre yandaki venn şemasını ilgili ülke isimleriyle doldurunuz.
- Pamuk ihraç ettiğimiz ülkelerin kümesi P, zeytin ihraç ettiğimiz ülkelerin kümesi Z, fındık ihraç ettiğimiz ülkelerin kümesi F ise $s(P)$, $s(Z)$, $s(F)$ ve bu kümelerin ikili ve üçlü kesişim ve birleşim kümelerinin eleman sayıları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

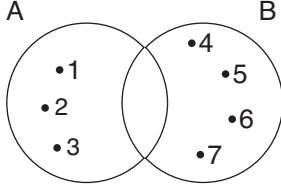


Örnek : Aşağıda her bir seçenek için verilen iki kümenin birleşiminin eleman sayılarını bulalım.

a. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$

Çözüm :

a.



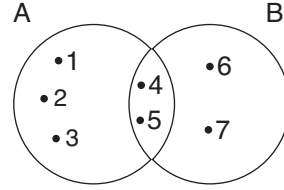
$s(A) = 3, s(B) = 4, s(A \cup B) = 7$ dir.

$s(A) + s(B) = s(A \cup B)$ dir.

Burada $A \cap B = \emptyset$ olup $s(A \cap B) = 0$ dir.

b. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$

b.



$s(A) = 5, s(B) = 4, s(A \cup B) = 7$ dir.

$s(A) + s(B) = 9$ olduğundan

$s(A) + s(B) \neq s(A \cup B)$ dir.

Çünkü, $s(A) + s(B)$ toplamında, ortak olan elemanlar iki kez alındığından sonuç $s(A \cup B)$ nı vermez.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere; $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ dir.

Eğer A ve B ayrık iki küme ise $s(A \cap B) = 0$ olacağından, $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ dir.

Örnek : Bir sınıftaki öğrencilerden her biri İngilizce ya da Almanca bilmektedir. İngilizce bilenlerin sayısı 15, Almanca bilenlerin sayısı 11, her iki dili de bilenlerin sayısı 3 tür. Buna göre sınıf mevcudunu bulalım.

Çözüm :

1. yol:

İngilizce bilenlerin sayısı : $s(i) = 15$

Almanca bilenlerin sayısı : $s(A) = 11$

Her iki dili bilenlerin sayısı : $s(A \cap i) = 3$

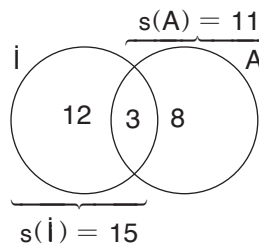
Sınıf mevcudu : $s(A \cup i)$

$s(A \cup i) = s(A) + s(i) - s(A \cap i)$

$= 11 + 15 - 3$

$= 23$ olur.

2. yol:



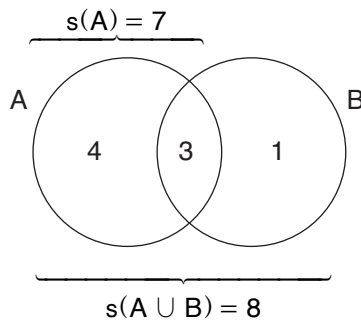
İngilizce bilenlerin sayısı 15 olduğundan, $15 - 3 = 12$ öğrenci yalnız İngilizce bilmektedir.

Almanca bilenlerin sayısı 11 olduğundan, $11 - 3 = 8$ kişi yalnız Almanca bilmektedir.

$s(A \cup i) = 12 + 3 + 8 = 23$ olur.

Örnek : A kümesinin eleman sayısı 7, $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 3, $A \cup B$ kümesinin öz alt küme sayısı 255 ise B kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm : $s(A) = 7$ ve $s(A \cap B) = 3$ olduğu veriliyor. $s(A \cup B) = n$ olsun. $A \cup B$ kümesinin öz alt küme sayısı $2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ olduğundan $s(A \cup B) = 8$ dir.



$s(A) + s(B \setminus A) = 8 \Rightarrow 7 + s(B \setminus A) = 8 \Rightarrow s(B \setminus A) = 1,$

$s(A \setminus B) + s(A \cap B) = 7 \Rightarrow s(A \setminus B) + 3 = 7 \Rightarrow s(A \setminus B) = 4,$

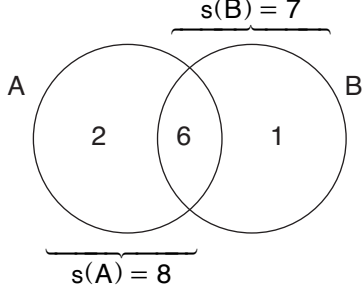
$s(B) = 3 + 1 = 4$

$s(A \cup B) = 4 + 3 + 1 = 8$ olarak bulunur.

Örnek : $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $s(A) = 8$ ve $s(B) = 7$ olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulalım.

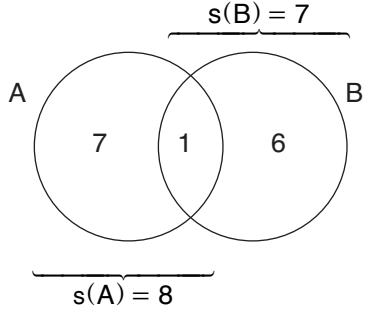
Çözüm :

$s(A \cup B)$ nın en küçük değeri alabilmesi için $s(A \cap B)$ nı en fazla seçmeliyiz. Buna göre;



$$s(A \cup B) = 2 + 6 + 1 = 9 \text{ olmalıdır.}$$

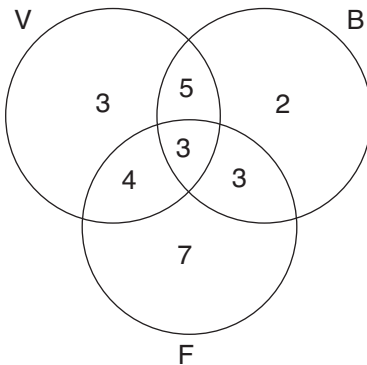
$s(A \cup B)$ nın en büyük değeri alabilmesi için $s(A \cap B)$ nı en az seçmeliyiz. Buna göre;



$$s(A \cup B) = 7 + 1 + 6 = 14 \text{ olmalıdır.}$$

Örnek : Herkesin futbol, voleybol veya basketbol oyunlarından en az birini oynadığı bilinen bir sınıftaki öğrencilerin 17 si futbol, 15 i voleybol, 13 ü basketbol oynayabiliyor. Bu öğrencilerin 7 si futbol ve voleybol, 6 sı futbol ve basketbol, 8 i voleybol ve basketbol, 3 ü de her üç oyunu oynayabildiğine göre sınıf mevcudunu bulalım.

Çözüm :



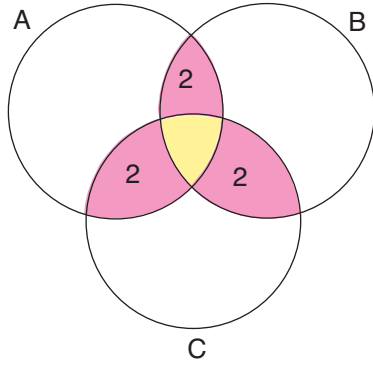
Venn şeması ile çözüm yaparken önce her üç oyunu oynayanlar, sonra her iki oyunu oynayanlar, en sonunda yalnız bir oyunu oynayanlar şemaya yerleştirilir. Buna göre sınıf mevcudu;

$$s(M) = s(V \cup B \cup F) = 3 + 5 + 2 + 4 + 3 + 3 + 7 = 27 \text{ dir.}$$

Burada $s(V) + s(B) + s(F) = 17 + 15 + 13 = 45$ olup bu sayı $s(M)$ na eşit değildir.

Örnek : Not : Herhangi üç A, B ve C kümeleri için $s(A \cup B \cup C)$ nı sözel olarak ifade edelim.

Çözüm :



Bunun için $s(A) + s(B) + s(C)$ toplamını bulmak yeterli değildir. Çünkü bu toplamda, yandaki şekilde pembe ile boyanan bölgeler ikişer kez, sarı ile boyanan bölge ise üçer kez toplanmış olur. Bu nedenle bu toplamdan pembe bölgeleri ifade eden $s(A \cap B)$, $s(B \cap C)$ ve $s(A \cap C)$ nı birer kez çıkarmamız gerekir. Bu ise sarı bölgenin üç kez çıkarılmasına neden olur. O hâlde $s(A \cap B \cap C)$ toplama eklenmelidir.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere;

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \text{ dir.}$$

Örnek : Bir gezi grubunda; A dilini bilen 16 kişi, B dilini bilen 20 kişi, C dilini bilen 12 kişi, A ve B dillerini bilen 10 kişi, B ve C dillerini bilen 7 kişi, A ve C dillerini bilen 5 kişi vardır. 30 kişilik bu gezi grubunda başka dil bilen olmadığına göre üç dili de bilen kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$s(A) = 16, \quad s(B) = 20, \quad s(C) = 12,$$

$$s(A \cap B) = 10, \quad s(B \cap C) = 7, \quad s(A \cap C) = 5 \text{ tir.}$$

$s(G) = 30$ olduğu biliniyor. Buna göre,

$$s(G) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

$$30 = 16 + 20 + 12 - 10 - 7 - 5 + s(A \cap B \cap C)$$

$$30 = 48 - 22 + s(A \cap B \cap C) \Rightarrow s(A \cap B \cap C) = 4 \text{ olarak bulunur.}$$

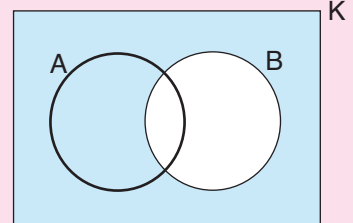
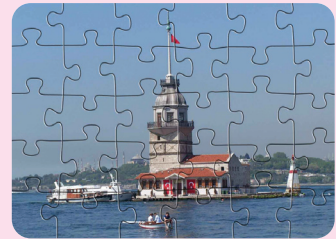
Evrensel Küme ve Bir Kümenin Tümleyeni



Yanda Kız Kulesi, büyük ve küçük tekne figürlerinden oluşan bir yapboz verilmiştir.

Yapbozla ilgili olarak;

- Yapbozdaki şekilleri oluşturan parçalardan birbirinin aynısı olan var mıdır?
- Yapbozu bir bütün olarak düşünürsek bütünü oluşturan ana şekiller nelerdir? Yazınız.
- Yapbozun sadece küçük tekne şeklini tamamlamayan bir kişi, tamamladığı kısmı nasıl ifade edebilir?
- ✳ Her bir figürü “kendisi” ve “kendisi dışında kalan kısım” olmak üzere iki şekilde ifade ediniz.
- Yapbozdan seçtiğiniz herhangi bir bölüm için bu bölümü oluşturan parçalar ile bu bölüm dışında kalan parçaların birleşimi hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- Yanda verilen boyalı kısmı sözel olarak ifade ediniz. İfadenizi sınıfta tartışınız.



Örnek : Türkiye'nin göllerinde yaşayan canlı türleri üzerinde araştırma yapmak isteyen bir araştırmacı çalışmasının geçerli olabilmesi için neye dikkat etmelidir? Bulalım.

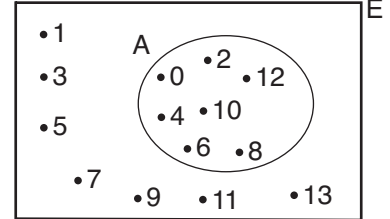
Çözüm : Türkiye'deki bütün göllerin kümesi bu çalışmaya ait en geniş kümedir ve araştırmacının yaptığı çalışmanın geçerli olabilmesi için Türkiye'deki bütün göller üzerinde çalışma yapmalıdır.

Üzerinde işlem yapılan, bütün kümeleri kapsayan, boş kümeden farklı en geniş küme evrensel kümedir. Genel olarak E harfi ile gösterilir.

Örnek : Yandaki şemada A kümesi E evrensel kümesinin bir alt kümesidir. Evrensel kümeye ait olup A kümesine ait olmayan elemanları liste yöntemiyle yazalım.

Çözüm :

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ ve $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ olduğundan A kümesine ait olmayıp evrensel kümeye ait olan elemanların oluşturduğu küme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ tür.



Evrensel kümenin bir alt kümesi A olmak üzere; evrensel kümeye ait olup A kümesine ait olmayan elemanların kümesi A nın tümleyeni olarak adlandırılır. A^c (A nın tümleyeni) ile gösterilir. Kısaca, $A^c = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$ dir.

Örnek : $E = \{x \mid x \leq 15, x \in \mathbb{N}\}$ evrensel küme ve $A = \{x \mid x \leq 15, x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ kümeleri verilsin. A kümesinin tümleyenini yazalım.

Çözüm : $E = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 14, 15\}$ ve $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ dir. Buna göre

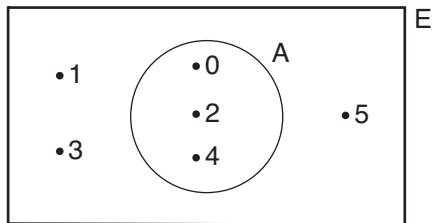
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ olacaktır.

Örnek : $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $A = \{0, 2, 4\}$ kümeleri için.

a. E^c b. \emptyset^c c. $A \cup E$ ç. $A \cap E$ d. $A^c \cup A$ e. $A^c \cap A$ f. $(A^c)^c$

kümelerini liste yöntemi ile yazalım.

Çözüm :



Yandaki şemada görüldüğü gibi

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2, 4\}$, $A^c = \{1, 3, 5\}$ dir.

a. Evrensel kümeye ait olmayan başka elemanlar bulamayız. O hâlde $E^c = \emptyset$ dir.

b. $\emptyset \subset E$ dir. $\emptyset^c = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = E$

c. $A \cup E = \{0, 2, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = E$

ç. $A \cap E = \{0, 2, 4\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 2, 4\} = A$

d. $A^c \cup A = \{1, 3, 5\} \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = E$

e. $A^c \cap A = \{1, 3, 5\} \cap \{0, 2, 4\} = \{\} = \emptyset$

f. $(A^c)^c = \{1, 3, 5\}^c = \{0, 2, 4\} = A$ olur.

Tümleme İşleminin Özellikleri



- ✱ Yandaki Venn şemasına göre aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

$E^c = \dots\dots\dots$

$A \cup E = \dots\dots\dots$,

$B \cup E = \dots\dots\dots$

$A \cap E = \dots\dots\dots$,

$A \cup A^c = \dots\dots\dots$,

$A \cap A^c = \dots\dots\dots$,

$(A^c)^c = \dots\dots\dots$,

$(A \cup B)^c = \dots\dots\dots$,

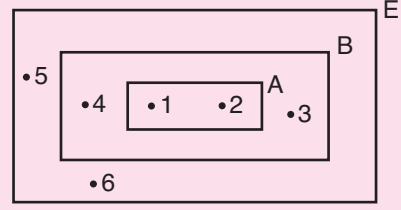
$B \cap E = \dots\dots\dots$

$B \cup B^c = \dots\dots\dots$

$B \cap B^c = \dots\dots\dots$

$(B^c)^c = \dots\dots\dots$

$A^c \cup B^c = \dots\dots\dots$



- ✱ Her bir satır için bir kural belirleyebilir misiniz? Tartışınız.

- ✱ $A \subset B$ iken $B^c \subset A^c$ olur mu? Tartışınız.

1. E, evrensel küme olmak üzere $E^c = \{x | x \notin E\} = \emptyset$ dir.

$E^c = \emptyset$ dir.

2. E, evrensel küme olmak üzere $\emptyset^c = \{x | x \notin \emptyset\} = \{x | x \in E\} = E$ dir.

$\emptyset^c = E$ dir.

3. E, evrensel küme ve A herhangi bir küme olmak üzere

$$A \cup E = \{x | x \in A \vee x \in E\} = \{x | x \in E\} \quad (A \subset E \text{ olduğundan}) \\ = E \text{ dir.}$$

$A \cup E = E$ dir.

4. E, evrensel küme ve A herhangi bir küme olmak üzere

$$A \cap E = \{x | x \in A \wedge x \in E\} = \{x | x \in A\} = A \text{ dir.}$$

$A \cap E = A$ dir.

5. Her A kümesi için $A^c \cup A = \{x | x \in A^c \vee x \in A\}$

$$= \{x | x \in E\} = E \text{ dir.}$$

$A^c \cup A = E$ dir.

6. Her A kümesi için $A^c \cap A = \{x | x \in A^c \wedge x \in A\} = \{x | x \notin A \wedge x \in A\}$ (Tümleme işlemi)
= \emptyset dir ($1 \wedge 0 \equiv 0$ dir.).

$A^c \cap A = \emptyset$ dir.

7. Her A kümesi için $(A^c)^c = \{x | x \notin A^c\} = \{x | x \in A\}$ (Tümleme işlemi)
= A dir.

$(A^c)^c = A$ dir.

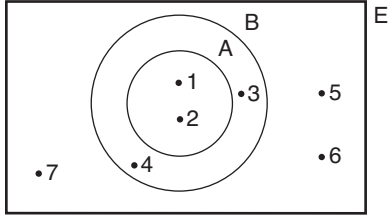
8. Her A ve B kümeleri için, $A \subset B \Rightarrow B^c = \{x | x \notin B\} \subset \{x | x \notin A\} = A^c$ dir.

$A \subset B$ ise $B^c \subset A^c$ dir.

Örnek : $A \subset E$ olmak üzere, $s(A) + s(A') = s(E)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $s(E) = s(A \cup A') = s(A) + s(A') - s(A \cap A') = s(A) + s(A') - s(\emptyset) = s(A) + s(A')$ dir.

Örnek :



Yandaki şemada verilenlere göre A' ile B' nin elemanlarının oluşturduğu kümeleri liste biçiminde yazarak karşılaştıralım.

Çözüm : $A = \{1, 2\}$ olup $A' = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dir. $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olup $B' = \{5, 6, 7\}$ dir.

Burada $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ dir.

Örnek : $A \subset B$ olmak üzere, $s(A') = 20$, $s(B') = 15$, $s(A \cup B) = 12$ olduğuna göre A kümesinin alt küme sayısını bulalım.

Çözüm : $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ dir. O hâlde, $s(A \cup B) = s(B) = 12$ olur.

$s(E) = s(B) + s(B')$ olduğundan $s(E) = 12 + 15 = 27$ dir.

$s(E) = s(A) + s(A')$ olduğundan $27 = s(A) + 20 \Rightarrow s(A) = 7$ dir.

A kümesinin alt küme sayısı : $2^{s(A)} = 2^7 = 128$ dir.

Örnek : $(A \cap B) \cup (A \cap B')$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm : $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap \underbrace{(B \cup B')}_E$ (\cap işleminin \cup işlemi üzerine dağılma özelliği),
 $= A \cap E = A$ olarak bulunur.

Örnek : E , evrensel küme olmak üzere $(A \cup \emptyset) \cap (B \cup E)$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm : $\underbrace{(A \cup \emptyset)}_A \cap \underbrace{(B \cup E)}_E = A \cap E = A$ olarak bulunur.



* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ evrensel kümesi üzerinde tanımlı A ve B kümeleri için yandaki tabloda istenen kümeleri liste yöntemi ile yazarak boş bırakılan yerleri doldurunuz.

➤ Her A ve B kümeleri için $(A \cup B)'$ ile $A' \cap B'$ ve $(A \cap B)'$ ile $A' \cup B'$ kümelerini karşılaştırarak bir sonuca varınız.

A ve B kümeleri	$(A \cup B)$	$(A \cup B)'$	A'	B'	$A' \cap B'$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4\}$							
$A = \{1, 3\}$ $B = \{2, 3, 4\}$							

Örnek : A ve B herhangi iki küme olmak üzere

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm : a. $(A \cup B)' \Leftrightarrow \{x \mid x \in (A \cup B)'\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \notin (A \cup B)\}$ (tümleme işlemi tanımından)

$\Leftrightarrow \{x \mid [x \in (A \cup B)]'\}$ (önermelerde olumsuz önerme tanımından)

$\Leftrightarrow \{x \mid [x \in A \vee x \in B]'\}$ (birleşim işlemi tanımından)

$\Leftrightarrow \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$ ($((p \vee q)' \equiv p' \wedge q')$ olduğundan)

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A' \wedge x \in B'\}$ (tümleme işlemi tanımından)

$\Leftrightarrow A' \cap B'$ (birleşim işlemi tanımından)

O hâlde, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olur.

$$\begin{aligned}
b. (A \cap B)^I &\Leftrightarrow \{x \mid x \in (A \cap B)^I\} \\
&\Leftrightarrow \{x \mid x \notin (A \cap B)\} && (\text{tümleme işlemi tanımından}) \\
&\Leftrightarrow \{x \mid [x \in (A \cap B)]^I\} && (\text{önermelerde olumsuz önerme tanımından}) \\
&\Leftrightarrow \{x \mid [x \in A \wedge x \in B]^I\} && (\text{kesişim işlemi tanımından}) \\
&\Leftrightarrow \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && ((p \wedge q)^I \equiv p^I \vee q^I \text{ olduğundan}) \\
&\Leftrightarrow \{x \mid x \in A^I \vee x \in B^I\} && (\text{tümleme işlemi tanımından}) \\
&\Leftrightarrow A^I \cup B^I && (\text{birleşim işlemi tanımından})
\end{aligned}$$

O hâlde, $(A \cap B)^I = A^I \cup B^I$ olur.

DE MORGAN KURALLARI

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, $(A \cup B)^I = A^I \cap B^I$ ve $(A \cap B)^I = A^I \cup B^I$ dir.

Örnek : $A \cap (A \cup B)^I$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

$$\begin{aligned}
\text{Çözüm : } A \cap (A \cup B)^I &= A \cap (A^I \cap B^I) && (\text{De Morgan kuralından}) \\
&= (A \cap A^I) \cap B^I && (\text{birleşme özelliğinden}) \\
&= \emptyset \cap B^I = \emptyset \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek : $A \subset E$, $B \subset E$ ve $A \subset B$ ise $(A^I \cup B^I)^I \cup (B \cup E)^I$ ifadesini en sade şekilde yazalım. (E , evrensel kümedir.)

$$\begin{aligned}
\text{Çözüm : } (A^I \cup B^I)^I \cup (B \cup E)^I &= \underbrace{(A \cap B)}_A \cup (B^I \cap E^I) && (\text{De Morgan kuralından}) \\
&= A \cup (B^I \cap E^I) && (A \subset B \text{ olduğundan}) \\
&= A \cup (B^I \cap \emptyset) \\
&= A \cup \emptyset = A \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek : $A^I = \{a, b, c, d\}$, $B^I = \{b, c, d, e, f\}$ ise $(A \cup B)^I$ kümesini bulalım.

$$\text{Çözüm : } (A \cup B)^I = A^I \cap B^I = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{b, c, d\} \text{ dir.}$$

İki Kümenin Farkı



Yanda İzmir'de yetiştirilen tarım ürünleri I kümesi, Bursa'da yetiştirilen tarım ürünleri B kümesi olarak gösterilmiştir. Buna göre;

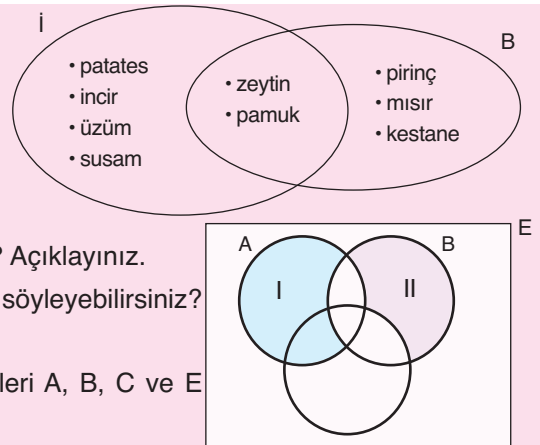
* Yalnız İzmir'de yetişip Bursa'da yetişmeyen tarım ürünlerinden bir küme oluşturunuz ve bu kümeyi yandaki şekilde tarayınız.

* $\{ \text{pirinç, mısır, kestane} \}$ kümesini nasıl tanımlarsınız? Açıklayınız.

➤ Oluşturduğunuz bu kümelerin özellikleri ile ilgili neler söyleyebilirsiniz?

➤ Bu kümeler hangi yönleriyle birbirlerinden ayrılırlar?

➤ Yandaki Venn şemasında I ve II ile belirtilen bölümleri A, B, C ve E cinsinden ifade ediniz.



Örnek : Aşağıdaki her bir seçenek için A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanları ve B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanları, Venn şeması üzerinde gösterip liste yöntemi ile yazalım.

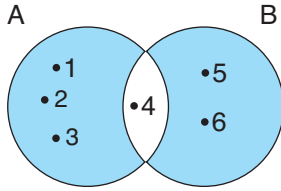
a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

b. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$

c. $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

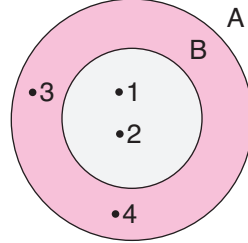
Çözüm :

a.



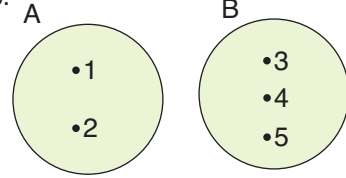
A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi: $\{1, 2, 3\}$
B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların kümesi: $\{5, 6\}$
(Burada $A \neq B$ dir.)

b.



A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi : $\{3, 4\}$
B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların kümesi : $\{\}$
(Burada $B \subset A$ dir.)

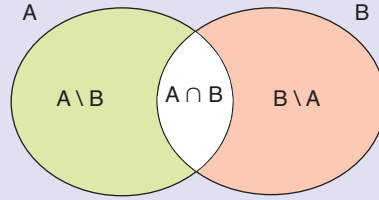
c.



A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi: $\{1, 2\} = A$
B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların kümesi: $\{3, 4, 5\} = B$
(Burada $A \cap B = \emptyset$ dir.)

A ve B herhangi iki küme olmak üzere; A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme A'nın B'den farkıdır. $A - B$ (A fark B) veya $A \setminus B$ şeklinde gösterilir. Kısaca,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\} \text{ dir.}$$



Bir önceki örneğin a, b, c şıkları incelendiğinde $A \setminus B = \{1, 2, 3\} \neq \{5, 6\} = B \setminus A$ olduğu, $B \subset A$ ise $B \setminus A = \emptyset$ olduğu ve $A \cap B = \emptyset$ ise $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ olduğu görülür.

- $A \neq B$ için $A \setminus B \neq B \setminus A$ dir.
- $B \subset A$ ise $B \setminus A = \emptyset$ dir.
- $A \cap B = \emptyset$ ise $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ dir.

Örnek : Yandaki şemaya göre aşağıdaki kümeleri liste E yöntemi ile yazalım.

a. $(A \cup C) \setminus A$

b. $B \setminus (A \cap C)$

c. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

ç. $A^1 \setminus B$

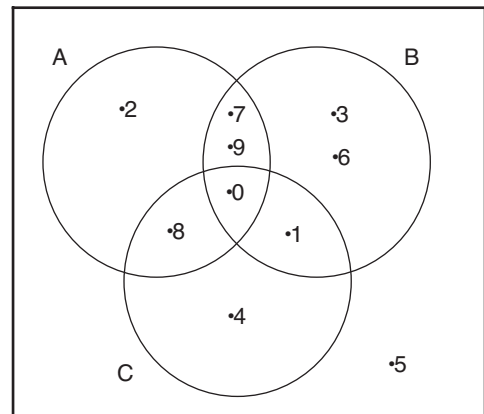
Çözüm :

a. $(A \cup C) \setminus A = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 9\} \setminus \{0, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 4\}$

b. $B \setminus (A \cap C) = \{0, 1, 3, 6, 7, 9\} \setminus \{0, 8\} = \{1, 3, 6, 7, 9\}$

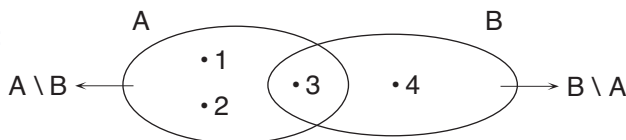
c. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \{2, 8\} \cap \{3, 6, 7, 9\} = \{\}$

ç. $A^1 \setminus B = \{1, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{0, 1, 3, 6, 7, 9\} = \{4, 5\}$



Örnek : $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4\}$ kümeleri veriliyor. $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerinin herbirini bularak $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm :



$A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{4\}$, $A \cap B = \{3\}$ ve $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ tür. O hâlde,
 $s(A \setminus B) = 2, s(B \setminus A) = 1, s(A \cap B) = 1$ ve $s(A \cup B) = 4$ tür.
 $s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B) = 2 + 1 + 1 = 4 = s(A \cup B)$ olarak bulunur.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$ dir.

Örnek : E, evrensel küme olmak üzere, $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olarak veriliyor. $A \setminus B$ ve $A \cap B'$ kümelerini liste yöntemi ile yazarak elemanlarını karşılaştıralım.

Çözüm : $A \setminus B = \{-1, 0\}$ ve $A \cap B' = \{-1, 0, 1\} \cap \{-2, -1, 0, 4\} = \{-1, 0\}$ bulunur. O hâlde, $A \setminus B$ ve $A \cap B'$ nin elemanları birbirinin aynısıdır.

Örnek : E, evrensel küme olmak üzere, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki kümeleri liste biçiminde yazalım.

- a. $A - A$ b. $A \setminus \emptyset$ c. $\emptyset \setminus A$ ç. $A \setminus E$ d. $E \setminus A$

Çözüm :

- a. $A \setminus A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{ \}$ b. $A \setminus \emptyset = \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{ \} = \{0, 2, 4, 6, 8\} = A$
c. $\emptyset \setminus A = \{ \} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{ \}$ ç. $A \setminus E = \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{ \}$
d. $E \setminus A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = A'$ olur.

Fark İşleminin Özellikleri

1. Her A, B ($A \neq B$) kümesi için

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B'\} = \{x | x \in (A \cap B')\} = A \cap B' \text{ dir.}$$

$B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\} = \{x | x \in B \wedge x \in A'\} = \{x | x \in (B \cap A')\} = B \cap A' \text{ dir.}$ $A \cap B' \neq B \cap A'$ olduğundan $A \setminus B \neq B \setminus A$ dir.

$$A \setminus B \neq B \setminus A \text{ dir.}$$

2. Her A kümesi için

$$A \setminus A = \{x | x \in A \wedge x \notin A\} = \emptyset \text{ dir. (} 1 \wedge 0 \equiv 0 \text{ olduğundan)}$$

$$A \setminus A = \emptyset \text{ dir.}$$

3. Her A kümesi için

$$A \setminus \emptyset = \{x | x \in A \wedge x \notin \emptyset\} = \{x | x \in A \wedge x \in E\} = \{x | x \in A\} = A \text{ dir. (} A \subset E \text{ olduğundan)}$$

$$A \setminus \emptyset = A \text{ dir.}$$

4. Her A kümesi için

$$\emptyset \setminus A = \{x | x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \{x | x \in \emptyset \wedge x \in A'\} = \{x | x \in (\emptyset \cap A')\} = \emptyset \cap A' = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset \text{ dir.}$$

5. E evrensel küme olmak üzere

$$A \setminus E = \{x | x \in A \wedge x \notin E\} = \{x | x \in A \wedge x \in \emptyset\} = \{x | x \in (A \cap \emptyset)\} = A \cap \emptyset = \emptyset \text{ dir.}$$

$$A \setminus E = \emptyset \text{ dir.}$$

6. E evrensel küme olmak üzere

$$E \setminus A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\} = \{x | x \in E \wedge x \in A'\} = \{x | x \in (E \cap A')\} = E \cap A' = A' \text{ dir.}$$

$$E \setminus A = A' \text{ dir.}$$

7. Herhangi iki A ve B kümeleri için

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (\text{fark alma işlemi})$$

$$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B^1\} \quad (\text{tümleme işlemi})$$

$$= \{x \mid x \in (A \cap B^1)\} \quad (\text{kesişim işlemi})$$

$$= A \cap B^1 \text{ dir.}$$

$$A \setminus B = A \cap B^1 \text{ dir.}$$

Örnek : $s(A) = 5$, $s(B) = 7$ ve $s(B^1) = 8$ olduğuna göre, $s[(B^1 \setminus A) \cup (B \setminus A)]$ nı bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} (B^1 \setminus A) \cup (B \setminus A) &= (B^1 \cap A^1) \cup (B \cap A^1) \\ &= (B^1 \cup B) \cap A^1 \\ &= E \cap A^1 = A^1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O hâlde, $s[(B^1 \setminus A) \cup (B \setminus A)] = s(A^1)$ dir.

$$s(E) = s(B) + s(B^1) \text{ olup } s(E) = 7 + 8 = 15 \text{ tir.}$$

$$s(E) = s(A) + s(A^1) \text{ olup } 15 = 5 + s(A^1) \Rightarrow s(A^1) = 10 \text{ dur.}$$

Buna göre, $s[(B^1 \setminus A) \cup (B \setminus A)] = s(A^1) = 10$ bulunur.

Örnek : $(A - B) \cup (B \cap A)$ kümesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm :

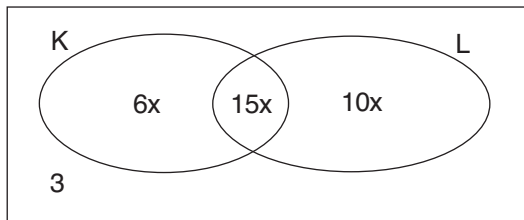
$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B \cap A) &= (A \cap B^1) \cup (B \cap A) && (\text{fark alma işlemi tanımından}) \\ &= A \cap \underbrace{(B^1 \cup B)}_E && (\cap \text{ in } \cup \text{ üzerine dağılıma özelliğinden}) \\ &= A \cap E = A \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek : $K \subseteq E$ ve $L \subseteq E$ olmak üzere

$3 \cdot s(L \setminus K) = 2 \cdot s(K \cap L) = 5 \cdot s(K \setminus L)$, $s[(K \cup L)^1] = 3$, $s(E) = 96$ olduğuna göre, $s(K \setminus L)$ nı bulalım.

$$\text{Çözüm : } 3 \cdot \underbrace{s(L \setminus K)}_{10x} = 2 \cdot \underbrace{s(K \cap L)}_{15x} = 5 \cdot \underbrace{s(K \setminus L)}_{6x}$$

E



$s(E) = 96$ olduğundan

$$s(E) = 3 + 6x + 15x + 10x = 96$$

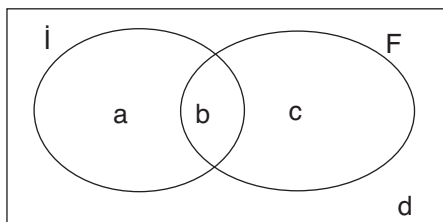
$$31x + 3 = 96 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

$$s(K \setminus L) = 6 \cdot x = 6 \cdot 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

Kümeler ile İlgili Problemler

Örnek : Bir turist grubunda yalnız İngilizce bilen 5 kişi, Fransızca bilmeyen 8 kişi, İngilizce bilmeyen 12 kişidir. Bu grup 21 kişi olduğuna göre hem İngilizce hem de Fransızca bilen kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm : G



Yalnız İngilizce bilen : $s(I \setminus F) = a = 5$

Fransızca bilmeyen : $s(F^1) = a + d = 8$

İngilizce bilmeyen : $s(I^1) = c + d = 12$

Grup : $s(G) = a + b + c + d = 21$

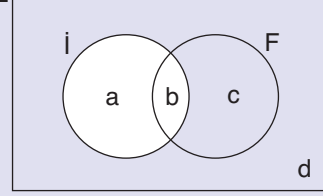
Hem İngilizce hem de Fransızca bilen : $s(I \cap F) = b = ?$

$$\begin{array}{ccccccc} a + d = 8 \Rightarrow d = 3 & ; & c + d = 12 \Rightarrow c = 9 & ; & a + b + c + d = 21 \Rightarrow b = 4 & \text{bulunur.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & & 3 & & 5 & 9 & 3 \end{array}$$

Kümeler ile ilgili problemleri çözerken Venn şemasından faydalanmak çözümü kolaylaştırır.

Yandaki şemada İ, İngilizce bilenlerin kümesi; F, Fransızca bilenlerin kümesi olsun. Buna göre;

1. Yalnız İngilizce bilenler : a; Yalnız Fransızca bilenler : c,
2. Hem İngilizce hem de Fransızca bilenler : b,
3. İngilizce veya Fransızca bilenler : a + b + c,
4. İngilizce veya Fransızca dillerinden en az birini bilenler : a + b + c,
5. İngilizce veya Fransızca dillerinden en çok birini bilenler : a + c + d,
6. İngilizce bilmeyenler : c + d; Fransızca bilmeyenler : a + d dir.



Örnek : Bir turist grubu Almanca ve İngilizce dillerinden en az birini bilenlerden oluşmuştur. Grubun % 40 ı Almanca, % 80 i İngilizce biliyor. Grupta her iki dili de bilen 12 kişi vardır. Bu turist grubunda kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm : Almanca bilenler A,

İngilizce bilenler İ ile gösterilmek üzere grup 100x kişi olsun. O hâlde

$$\begin{aligned} s(A \cup İ) &= s(A) + s(İ) - s(A \cap İ) \Rightarrow 100x = 40x + 80x - s(A \cap İ) \\ &\Rightarrow s(A \cap İ) = 20x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$s(A \cap İ) = 12 \text{ kişi olduğundan } 20x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{20} \text{ olur. Buna göre grup,}$$

$$s(A \cup İ) = 100x = 100 \cdot \frac{12}{20} = 60 \text{ kişi olarak bulunur.}$$

Örnek : 42 kişilik bir grupta 7 kişi sarışın, ela gözlü; 8 kişi esmer, mavi gözlüdür. Sarışın, mavi gözlülerin sayısı; esmer, ela gözlülerin sayısının 2 katı olduğuna göre bu gruptaki esmer kişilerin sayısını bulalım.

Çözüm :

	ela gözlü	mavi gözlü
sarışın	a	b
esmer	c	d

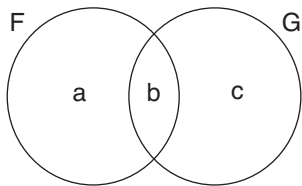
$$\begin{aligned} a &= 7, d = 8, b = 2c, a + b + c + d = 42, \\ \text{esmer kişilerin sayısı : } c + d &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} a + b + c + d = 42 \Rightarrow 15 + 3c = 42 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 7 \quad 2c \quad 8 \end{array}$$

$$c + d = 9 + 8 = 17 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : Herkesin gitar veya flüt çaldığı bilinen bir sınıfta, hem flüt hem gitar çalanların sayısı 5, flüt veya gitardan en az birini çalanların sayısı 21 dir. Flüt çalanların sayısı, gitar çalanların sayısından 4 fazla ise bu sınıfta flüt çalan kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm : F



$$b = 5 ; a + b + c = 21 ; a + b = b + c + 4 \Rightarrow a = c + 4$$

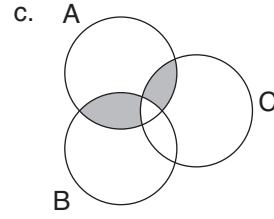
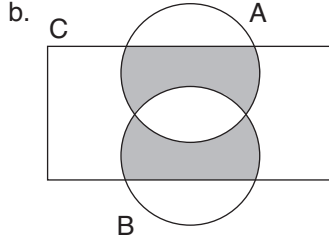
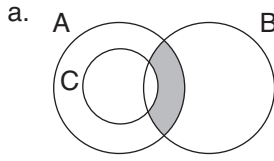
$$a + b + c = 21 \Rightarrow c + 4 + b + c = 21 \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow a = 10$$

$$\text{Flüt çalanların sayısı : } a + b = 10 + 5 = 15 \text{ tir.}$$



ALİŞKİRMALAR

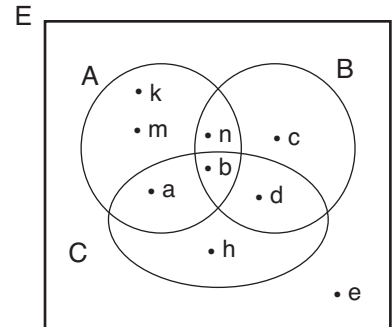
1. A ve B iki kümedir. $s(A) = 3 \cdot s(A - B)$ ve $s(B) = 4 \cdot s(B - A)$ olduğu biliniyor. $A \cap B$ nin alt küme sayısı 64 olduğuna göre, A kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?
2. $A - B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{7, 8\}$, $B - A = \{2, 4, 6\}$ olduğuna göre, $A \cup B$ kümesini bulunuz.
3. $s(B) = 15$, $s(A - B) = 10$ ve $A \cap B$ kümesinin öz alt küme sayısı 63 olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?
4. $A - B' = \{a, b\}$, $A - B = \{c, d\}$ ve $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümeleri veriliyor. B kümesinin öz alt küme sayısını bulunuz.
5. $A \subset B$ olmak üzere, $s(A') = 22$, $s(B') = 17$ ve $s(A \cup B) = 11$ olduğuna göre A kümesinin öz alt küme sayısını bulunuz.
6. Aşağıdaki renkli bölgelere karşılık gelen ifadeleri bulunuz.



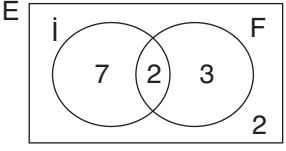
7. $(B' - A') \cap (B - A)'$ ifadesini en sade biçimde yazınız.
8. A ve B kümeleri için $s(A \cap B') = 4$, $s(B \setminus A) = 7$ ve $s(A \cup B) = 15$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?
9. Evrensel küme $E = \{x \mid -4 < x < 12, x \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $A = \{x \mid x < 0 \text{ veya } x > 6, x \in E\}$ ve $B = \{x \mid x > 3, x \in E\}$ dir. Buna göre $A' \setminus B$ kümesini bulunuz.
10. A ve B kümeleri veriliyor. $s(A \cap B) = 1$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ ve $s(A \cup B) = 11$ olduğuna göre A kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?
A. 10 B. 9 C. 8 D. 7 E. 6
11. Bir sınıftaki öğrencilerin her biri; resim, müzik ve spor kurslarından en az birine katılmaktadır. Üç kursta da katılan 5 kişi, resim ve müzik kursuna katılan 7 kişi, resim ve spor kursuna katılan 10 kişi, müzik ve spor kursuna katılan 9 kişi vardır. Resim kursuna 20 kişi, müzik kursuna 14 kişi ve spor kursuna 22 kişi katıldığına göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?
A. 33 B. 34 C. 35 D. 36 E. 37
12. Üç dilin konuşulduğu bir grupta herkes en az bir yabancı dil bilmektedir. En çok iki dil bilen 50, en az iki dil bilen 36 ve her üç dili de bilen 6 kişi olduğuna göre grupta yalnız bir dil bilen kaç kişi vardır?
13. Bir otobüste İngiliz ve Fransızlardan oluşan 42 yolcu vardır. Bu yolcuların 26 sı erkektir. Otobüste 23 Fransız vardır. Kadın yolcuların 11 i İngiliz olduğuna göre erkek yolcuların kaç i İngilizdir?
14. Bir gruptaki insanların % 30 u A gazetesini, % 20 si B gazetesini ve % 10 u ise hem A hem de B gazetelerini okuyor. Gazete okumayan veya diğer gazeteleri okuyanların sayısı 60 kişi olduğuna göre yalnız A gazetesini okuyanların sayısı kaçtır?

15. Yandaki şemaya göre aşağıdaki kümeleri bulunuz.

- a. $B \setminus C$
- b. $(A \cup C) \cap (A \cup B)$
- c. $B - (A \cap C)$
- ç. $B' \cap C$
- d. $B \cap (A \cup C')$
- e. $E \setminus C$



2. TEST

1. $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 A. $3 \in A$ B. $\{1, 2, 3\} \subset A$ C. $\{2, 3\} \subset A$ D. $\{1, 3\} \subset A$ E. $\{1, 2\} \in A$
2. $B = \{a, b, \{c, d\}, \{e, f\}\}$ olmak üzere B kümesinin öz alt küme sayısı kaçtır?
 A. 3 B. 7 C. 15 D. 31 E. 63
3. K ve L kümeleri için, $K - L$ kümesinin öz alt küme sayısı 63, $s(K) = 9$ ve $L \not\subset K$ ise $K \cup L$ kümesinin en az kaç elemanı vardır?
 A. 13 B. 12 C. 11 D. 10 E. 9
4. n elemanlı bir kümenin $n - 2$ elemanlı alt kümelerinin sayısı 6 ise bu kümenin eleman sayısı kaçtır?
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7
5. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde e eleman olarak vardır?
 A. 2 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32
6. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir. $s(A \cap B) = 2$, $s(B \setminus A) = 3$, $s(A \setminus B)$ ve $s(A \cup B) = 44$ ise $s(B)$ kaçtır?
 A. 10 B. 16 C. 32 D. 36 E. 64
7. $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x \leq 250\}$ kümesi veriliyor.
 Bu kümenin elemanlarından kaç tanesi 3 veya 5 ile bölünebilir?
 A. 114 B. 115 C. 116 D. 117 E. 118
8. $K = \{1, 2, 3\}$, $L - K = \{4, 5\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $K \cap L$ kümesi aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{2\}$ E. \emptyset
9. $A - B$ ve $A \cap B$ kümelerinin öz alt küme sayıları sırasıyla 31 ve 15 tir. $3 \cdot s(B) = 2 \cdot s(A)$ ise $s(A \cup B)$ kaçtır?
 A. 6 B. 8 C. 10 D. 11 E. 15
10. 127 tane öz alt kümesi olan kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?
 A. 7 B. 14 C. 21 D. 35 E. 42
11. $(K - L) \cap (K - L')$ ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?
 A. K B. L C. K' D. \emptyset E. L'
12. 90 kişinin katıldığı bir seminerde 6 kişi hem Almanca hem de İtalyanca konuşmaktadır. Almanca konuşanlar İtalyanca konuşanların iki katı olduğuna göre kaç kişi yalnız İtalyanca konuşmaktadır?
 A. 14 B. 19 C. 20 D. 23 E. 26
13.  Yandaki şemada rakamlar eleman sayılarını belirtmek üzere,
 İ: İngilizce bilenler; F: Fransızca bilenler; E: Sınıftaki öğrencilerdir.
 Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
 A. En az bir dil bilen 12 kişidir. B. En çok bir dil bilen 13 kişidir.
 C. Yalnızca bir dil bilen 10 kişidir. D. En çok iki dil bilen 14 kişidir.
 E. İki dil bilen 2 kişidir.
14. $s(A) + s(B) = 14$, $s(A') + s(B') = 10$ ise A kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?
 A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 13
15. Bir kümenin kuvvet kümesinin alt küme sayısı 256 ise bu küme kaç elemanlıdır?
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

3. BÖLÜM

BAĞINTI, FONKSİYON VE İŞLEM



KARTEZYEN ÇARPIM

Bir şirket, çalışanlarının ve eşlerinin telefon numaralarını, (çalışanın telefonu, eşinin telefonu) şeklinde bilgisayara kaydediyor.

Emre Bey için tutulan kayıt,

(0 569 253 25 35 , 0 569 640 00 10) şeklindedir.

✓ Emre Bey'in eşini aramak isteyen şirket sekreterinin hangi numarayı arayacağını düşünüyorsunuz?

✓ Kayıt yapılırken telefon numaraları yanlışlıkla yer değiştirilerek yazılırsa bir problem çıkar mı? Neden?



Sıralı İkili



- Bir futbol karşılaşması sonucunda 0 – 2 ile 2 – 0 skorları arasındaki fark nedir? Araştırınız.
- A(2, 0), B(0,2) noktaları düzlemde aynı noktaya karşılık gelir mi? Açıklayınız.
- Yerleri değiştiğinde anlamı değişen başka sayı çiftleri bulabilir misiniz? Araştırınız.
- (3, a) ifadesi (b + 1, 8) ifadesine eşit ise a ve b sayılarını nasıl bulursunuz? Cevabınızı açıklayınız.

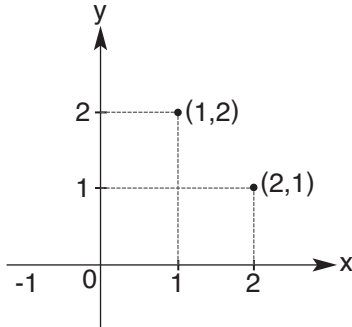
Örnek : 1 ile 8 arasındaki doğal sayıları, (tek sayı, çift sayı) biçiminde sayı çiftleri olarak yazalım.

Çözüm : (tek sayı, çift sayı) biçiminde yazacağımız sayı çiftleri; (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (7,2), (7,4), (7,6) dir.

x ve y gibi iki elemanın, sırası önemli olmak koşulu ile oluşturulan (x , y) elemanı sıralı ikili olarak adlandırılır. Burada x elemanı, ikilinin birinci bileşeni; y elemanı ikilinin ikinci bileşenidir.

Örnek : (1,2) ile (2,1) ikililerini analitik düzlem üzerinde göstererek bu ikililerin birbirine eşit olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm :



Yandaki grafikte de görüldüğü gibi, $(1,2) \neq (2,1)$ dir. O hâlde ikililerin bileşenlerinin yerlerinin değiştirilmesi hâlinde başka bir ikili elde edilir.

Örnek : $(2x - 1, x \cdot y) = (11, 42)$ olduğuna göre, (x , y) ikilisini bulalım.

Çözüm : $(2x - 1, x \cdot y) = (11, 42)$ eşitliğinin sağlanabilmesi için bu iki sıralı ikilinin birinci bileşenlerinin birbirine, ikinci bileşenlerinin de birbirine eşit olması gerekir. O hâlde,

$$2x - 1 = 11 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \text{ dir.}$$

$$x \cdot y = 42 \Rightarrow 6 \cdot y = 42 \Rightarrow y = 7 \text{ dir.}$$

Bu durumda, $(x, y) = (6, 7)$ olarak bulunur.

(a,b) ve (c,d) gibi iki sıralı ikilisinin birbirine eşit olması için birinci ve ikinci bileşenleri karşılıklı olarak birbirine eşit olmalıdır. Kısaca,

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \text{ dir.}$$

Örnek : $(2x - y - 3, x) = (2, 4 - y)$ eşitliğine göre x ve y nin alacağı değerleri bulalım.

Çözüm :

$$(2x - y - 3, x) = (2, 4 - y)$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 2 \\ x = 4 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases} \text{ olmalıdır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa } 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ bulunur.}$$

Buradan, $4 - y = x \Rightarrow 4 - y = 3 \Rightarrow y = 1$ bulunur.

Örnek : $(a^2 - b^2, 2) = (12, a + b)$ olduğuna göre (a, b) ikilisini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 12 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)(a + b) = 12 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (a - b) = 12 \Rightarrow a - b = 6 \text{ dir.}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \text{ bulunur. } a = 4 \text{ için } b = -2 \text{ bulunur. O hâlde, } (a, b) = (4, -2) \text{ dir.}$$

İki Kümenin Kartezyen Çarpımı



$A = \{m, n\}$, $B = \{b, c, d\}$ kümeleri veriliyor.

- ✱ Birinci bileşeni A kümesinden ikinci bileşeni B kümesinden alarak ikililer oluşturunuz.
- Bu şekilde en fazla kaç ikili oluşturabilirsiniz?
- ✱ Bu ikililerin tümünü içeren bir küme yazınız. Bu kümeyi koordinat düzleminde gösteriniz.
- Bu kümenin eleman sayısını A ve B nin eleman sayıları cinsinden ifade edebilir misiniz?
- İkilileri oluştururken ilk elemanı B kümesinden alırsanız kümelerle ilgili olarak yukarıda elde ettiklerinizden hangileri değişir, hangileri değişmez? Açıklayınız.

Örnek : Ece ve Ali yapılacak çekilişle Mısır, Çin, İsveç ülkelerinden birine gitmeye hak kazanacaktır.

- a. Çekilişe katılan kişileri ve gidilebilecek ülkeleri birer küme şeklinde yazalım.
- b. Bu kümeleri kullanarak (kişi, gideceği ülke) biçiminde oluşturulabilecek tüm ikilileri belirleyelim.

Çözüm :

- a. Çekilişe katılacak kişiler : $\{Ece, Ali\}$,
Gidilebilecek ülkeler : $\{Mısır, Çin, İsveç\}$ tir.
- b. Oluşturulabilecek tüm ikililerin kümesi : $K = \{(Ece, Mısır), (Ece, Çin), (Ece, İsveç), (Ali, Mısır), (Ali, Çin), (Ali, İsveç)\}$ tir.

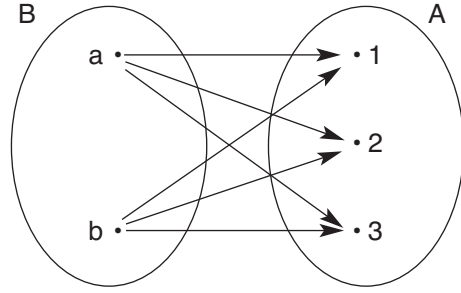
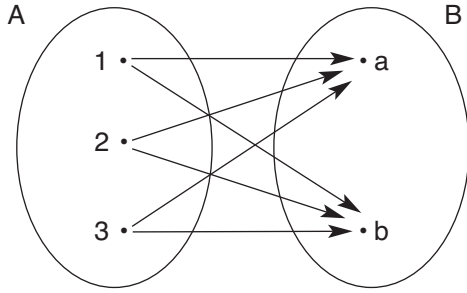
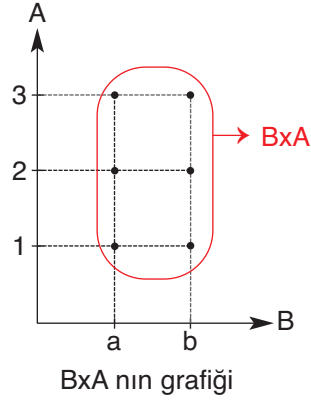
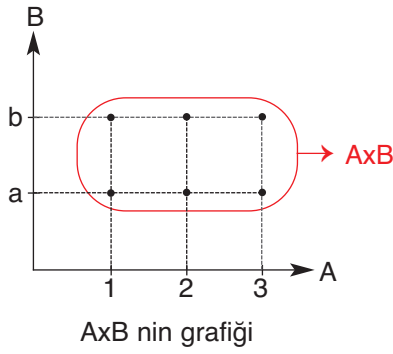
Bu küme A ile B kümesinin kartezyen çarpım kümesidir.

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesi A ile B kümelerinin kartezyen çarpımıdır. $A \times B$ (A kartezyen çarpım B) biçiminde gösterilir. Kısaca,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \text{ dir.}$$

Örnek : $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulup bu kümeleri grafik ve şema ile gösterelim.

Çözüm : $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ ve $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ olur. $A \times B$ kümesinde A kümesinin elemanları x ekseninde, B kümesinin elemanları y ekseninde gösterilir. $B \times A$ kümesinde ise x ekseninde gösterilen elemanlar B kümesine aittir. Bu kümeleri grafik ve şema ile gösterelim.



Kartezyen çarpımın değişme özelliği yoktur. Yani, $A \times B \neq B \times A$ dır.

Örnek : $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$ kümesi veriliyor.

a. A ve B kümelerini bulalım.

b. A, B ve $A \times B$ kümelerinin eleman sayılarını bulup karşılaştıralım.

Çözüm : a. $A \times B$ kümesindeki ikililerin ilk bileşeni A kümesinin elemanlarından, ikinci bileşeni B kümesinin elemanlarından oluşur. Bu yüzden, $A = \{2, 4\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ dir.

b. $s(A) = 2$, $s(B) = 3$ tür. $A \times B$ oluşturulurken A kümesinin her elemanı için B kümesinin eleman sayısı kadar $A \times B$ kümesine eleman oluşturulmuş olur. Bu durumda $s(A \times B)$, $s(A)$ ile $s(B)$ nın çarpımı ile bulunur.

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 2 \cdot 3 = 6$ olur. Bunu yukarıdaki örnekte şemaları inceleyerek de anlayabiliriz.

Örnek : $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. Buna göre $A \times A$ kümesini yazarak eleman sayısını bulalım.

Çözüm : $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ olup $s(A \times A) = 9$ bulunur.

$s(A \times A) = 9 = 3 \cdot 3 = s(A) \cdot s(A) = [s(A)]^2$ dir.

İki kümenin kartezyen çarpımının eleman sayısı, bu kümelerin eleman sayılarının çarpımına eşittir. Yani, $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$; $s(B \times A) = s(B) \cdot s(A)$ dır.

Ayrıca, $s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = [s(A)]^2$ dir.

Örnek : $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin kaç tane alt kümesi olduğunu bulalım.

Çözüm : $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$ ve $A \cap B = \{2,3\}$ olur. O hâlde, $A \cap B$ nin alt küme sayısı: $2^2 = 4$ olarak bulunur.

Örnek : $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ ve $C = \{4,5,6\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

- $A \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Çözüm :

- $A \times (B \cup C) = \{1,2\} \times \{3,4,5,6\} = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
- $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \cup \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
 $= \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
- $A \times (B \cap C) = \{1,2\} \times \{4\} = \{(1,4), (2,4)\}$
- $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \cap \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
 $= \{(1,4), (2,4)\}$

Burada a ve b şıklarında elde ettiğimiz kümeler ile c ve ç şıklarında elde ettiğimiz kümeler birbirine eşittir.

A , B ve C boş olmayan kümeler olmak üzere,

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ve $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ dir.

Yani, kartezyen çarpımın birleşim ve kesişim işlemleri üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek : $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,c,d,e,f\}$ ve $C = \{c,d,e,f,g,h\}$ olduğuna göre

$(A \times C) \cup (B \times C)$ kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm :

$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$ dir. Burada, $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$ olup $s(A \cup B) = 6$ dir. Buna göre, $s[(A \cup B) \times C] = s[A \cup B] \cdot s(C) = 6 \cdot 6 = 36$ bulunur.

Örnek : $A = \{ \}$ ve $B = \{a,b\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre, $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulalım.

Çözüm :

$$A \times B = \{ \} \times \{a,b\} = \{ \}$$

$$B \times A = \{a,b\} \times \{ \} = \{ \}$$

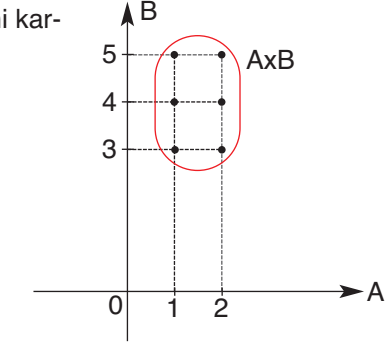
Bu iki kümenin kartezyen çarpımını yazarken kümelere biri boş küme olduğu için ikililer oluşturamıyoruz. O hâlde, böyle durumlarda kartezyen çarpım kümesi boş küme olur.

$A \times \emptyset = \emptyset$ ve $\emptyset \times A = \emptyset$ dir.

$A \times B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ dir.

Örnek : $A = \{1,2\}$ ve $B = \{3,4,5\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ kümesini kartezyen koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ olur. Bu noktalar kartezyen koordinat sisteminde işaretlenirse yandaki grafik elde edilir. $A \times B$ nin grafiği,
 $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 2 \cdot 3 = 6$ noktadan oluşur.



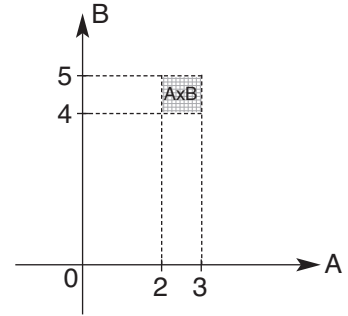
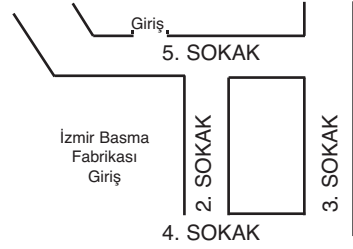
Örnek : Bir semtteki belediye çalışanları birbirine paralel olan 2 ve 3. sokaklar ile bu sokakları dik kesen 4 ve 5. sokaklar arasında kalan araziye çocuk parkı yapacaklardır. Bu araziye grafik üzerinde gösterelim.

Çözüm : Birbirine paralel olan 2 ve 3. sokaklar arasını A kümesi ile, bu sokakları dik kesen 4 ve 5. sokaklar arasını da B kümesi ile gösterelim. Buna göre;

$$A = \{x \mid 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{x \mid 4 < x < 5, x \in \mathbb{R}\} \text{ dir.}$$

Burada park yapılacak alana yollar dâhil olmayacağından sokakları kümelere dâhil etmeyeceğiz.



Örnek :

$$A = \{x \mid -1 \leq x < 2, x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{y \mid 1 < y < 3, y \in \mathbb{R}\}$$

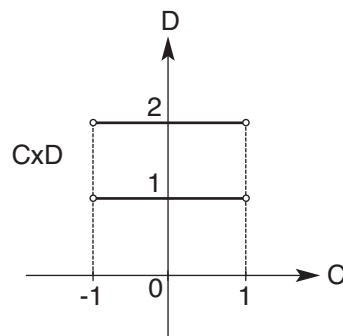
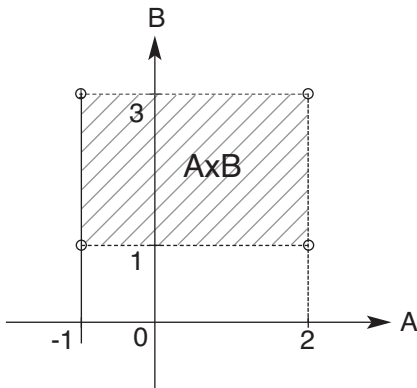
kümeleri için $A \times B$ nin grafiğini çizelim.

$$C = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{1,2\}$$

kümeleri için $C \times D$ nin grafiğini çizelim.

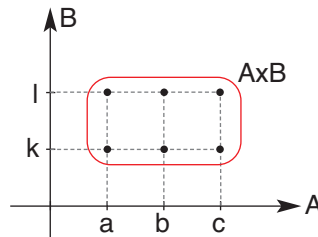
Çözüm :





ALİŞTIRMALAR

1. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $(a + b, 2x) = \left(\frac{x}{a-b}, 14\right)$ ise a tam sayısını bulunuz.
2. $(2^x, 26) = (32, 3^y - 1)$ olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.
3. $(5a - 3, a + 9)$ ikilisinin bileşenleri birbirine eşitse a sayısını bulunuz.
4. 1 den 8 e kadar olan tam sayılardan (tek sayı, asal sayı) biçiminde ikililer oluşturunuz. Bu şekilde kaç ikili oluşturulabilir?
5. $A \times B = \{(1,k), (1,m), (1,n), (2,k), (2,m), (2,n)\}$ ve $A \times C = \{(1,m), (2,m)\}$ kümeleri veriliyor.
 $A \times (B \cap C)$ kümesini bulunuz.
6. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$ ve $C = \{d, e\}$ kümeleri için $(A \cap B) \times (B \setminus C)$ kümesini bulunuz.
7. $A = \{x \mid 2 \leq x^2 \leq 25, x \in \mathbb{N}\}$ ve $B = \{x \mid 3 \leq x^3 \leq 28, x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor.
a. A ve B kümelerini liste yöntemi ile yazınız.
b. $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini liste biçiminde yazıp grafiğini çiziniz.
8. $s(A \times A) = 256$ ise $s(A)$ kaçtır?
9. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $B = \{1, 5, 9\}$ kümeleri veriliyor. $(A \cap B) \times (A \cup B)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.
10. A ve B kümeleri için $(A \setminus B) \times (A \cup B) = \{(5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$ ve $B \setminus A = \{4\}$ olduğuna göre $(B \setminus A) \times (A \cap B)$ kümesinin elemanlarını bulunuz.
11. A ve B kümeleri için $s(A \cap B) = 3$, $s(B) = 7$ ve $s(A \times B) = 42$ ise $s(A \cup B)$ nı bulunuz.
12. A ve B kümeleri için $s(A \cap B) = 2$, $s(B) = 3$ ve $s[(A \times A) \cup (A \times B)] = 20$ ise A kümesinin eleman sayısını bulunuz.
13. $A = \{-1, 3\}$, $B = \{x \mid -2 < x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ nin grafiğini çiziniz.
14. $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre $A \times B$ nin belirttiği bölgenin alanını bulunuz.
15. $A = \{5, 7, 9\}$ ve $B = \{k, m, n\}$ kümeleri veriliyor. $B \times A$ kümesinin kaç tane öz alt kümesi olduğunu bulunuz.
16. Analitik düzlemde $K(3 + a, 2)$ ve $M(-5, a - 7)$ noktaları aynı bölgededir. Buna göre A nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.
17. Yandaki şekle göre A ve B kümelerinin elemanlarını belirleyiniz.



BAĞINTI



Yukarıdaki resimde okçuların birer okları vardır. Atıcıların kendi hedef tahtası dışındaki hedef tahtalarına da ok atma hakkı bulunmaktadır.

✓ Buna göre oklar atıldıktan sonra ortaya çıkabilecek bütün olası durumların oluşturduğu kümeyi bulabilir misiniz?

✓ Her okçunun kendi hedef tahtasına okunu attığını düşünelim. Bu durum yukarıda belirlediğiniz kümenin bir alt kümesi midir? Tartışınız.

Bağıntı



$$A = \{\text{İstanbul, Bitlis, İzmir, Gümüşhane}\}$$

$$B = \{34, 13, 35, 29\}$$

- ✱ Yukarıdaki kümelerden yararlanarak $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız. $A \times B$ ve $B \times A$ nın eleman sayılarını bulunuz.
- ✱ $A \times B$ ve $B \times A$ nın grafiğini koordinat düzleminde çiziniz.
- ✱ Oluşturduğunuz kümedeki ikililerden hangileri sırasıyla şehirler ve plakaları biçiminde doğru eşlenmiştir ? Belirleyiniz.
- ✱ (Şehir, plaka) biçiminde doğru eşlenen ikililerden oluşan bir β kümesini liste yöntemiyle yazıp grafiğini çiziniz.
- ✱ β kümesini şema ile gösteriniz.
- β kümesi, etkinliğin 1. basamağında oluşturduğunuz kümelerden birinin alt kümesi olur mu? Açıklayınız.
- ✱ $A \times B$ kümesinin başka bir alt kümesini yazınız.
- ✱ Yazdığınız kümeyi şema ile gösteriniz ve grafiğini çiziniz.
- $A \times B$ nin kaç tane alt kümesini oluşturabilirsiniz?
- $A \times B$ nin bütün alt kümelerinin sayısı ile $A \times B$ kümesinin eleman sayısı arasında bir ilişki kurabilir misiniz? Tartışınız.

Örnek : $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2\}$ kümeleri verilsin. $A \times B$ nin tüm alt kümelerini yazalım.

Çözüm : $A \times B = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$ dir. $s(A \times B) = 3$ olup bu kümenin tüm alt kümelerinin sayısı, $2^3 = 8$ olur. Bu alt kümeler;

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{ \} & \beta_2 &= \{(1, 2)\} & \beta_3 &= \{(3, 2)\} & \beta_4 &= \{(5, 2)\} \\ \beta_5 &= \{(1, 2), (3, 2)\} & \beta_6 &= \{(1, 2), (5, 2)\} & \beta_7 &= \{(3, 2), (5, 2)\} & \beta_8 &= \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, $A \times B$ kümesinin her alt kümesi A dan B ye tanımlanan bir bağıntıdır. Bağıntılar genellikle β_1, β_2, \dots biçiminde gösterilirler.

$(x,y) \in \beta$ ise y elemanı, x elemanına β bağıntısı ile bağlıdır.

A dan B ye tanımlanabilecek tüm bağıntıların sayısı, $2^{S(A \times B)}$ dır.

Örnek : $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre,

- $\beta_1 = \{(-2, 2), (2, 2)\}$,
- $\beta_2 = \{(-2, 2), (0, 4), (0, 2), (-2, 3), (2, 3), (2, 4)\}$,
- $\beta_3 = \{(2, 0), (2, 2)\}$ kümelerinden hangilerinin A dan B ye bir bağıntı olduğunu bulalım.

Çözüm : $A \times B = \{(-2, 2), (-2, 3), (-2, 4), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ tür.

- $\beta_1 \subset A \times B$ olduğundan β_1 , A dan B ye bir bağıntıdır.
- $\beta_2 \subset A \times B$ olduğundan β_2 , A dan B ye bir bağıntıdır.
- $\beta_3 \not\subset A \times B$ olduğundan β_3 , A dan B ye bir bağıntı değildir.

Bağıntının Şeması ve Grafiği

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

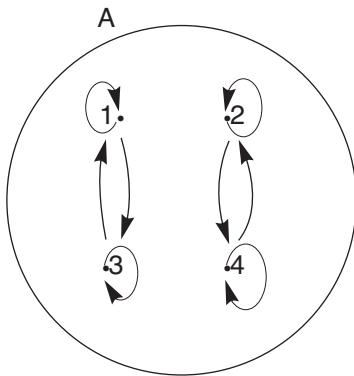
$\beta = \{(x, y) \mid y - x, 2 \text{ ile bölünür}, x, y \in A\}$ bağıntısı veriliyor.

- β bağıntısını liste biçiminde yazalım.
- β bağıntısını şema ile gösterelim.
- β bağıntısının grafiğini çizelim.

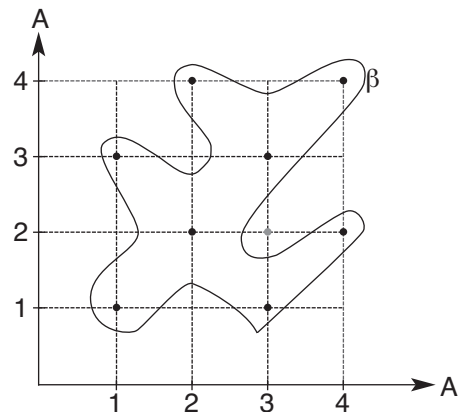
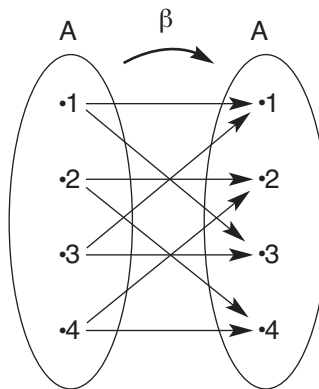
Çözüm :

- $\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4)\}$ tür.

b.

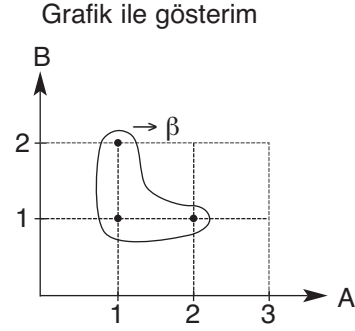
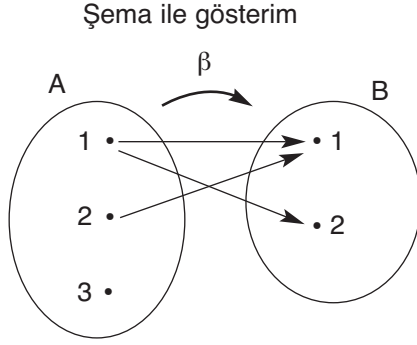


c.



Örnek : $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{1,2\}$ kümeleri ile A dan B ye tanımlı $\beta = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ bağıntısının şemasını ve grafiğini çizelim.

Çözüm :



Bağıntının Tersi



- * $A = \{2,3,4\}$ $B = \{4,5,6\}$ kümeleri üzerinde tanımlı β bağıntısı, $\beta_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B, y = x + 2\}$ veriliyor.
- * β_1 bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.
- * β_1 bağıntısının grafiğini çiziniz.
- * β_1 bağıntısındaki ikililerin bileşenlerini yer değiştirerek yeni bir β_2 bağıntısı oluşturunuz.
- * β_1 bağıntısının grafiği üzerinde β_2 bağıntısının grafiğini çiziniz.
- β_1 ve β_2 bağıntılarının grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre konumu hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- β_1 bağıntısının tersinin nasıl bulunabileceğini tartışınız.

Örnek : $A = \{\text{Bitlis, İzmir, Gümüşhane}\}$ ve $B = \{13, 35, 29\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlı bir bağıntı, $\beta = \{(\text{Bitlis}, 13), (\text{İzmir}, 35), (\text{Gümüşhane}, 29)\}$ olsun. β bağıntısındaki tüm ikililerin birinci ve ikinci bileşenlerinin yerlerini değiştirerek oluşturulan yeni kümeyi inceleyelim.

Çözüm : β bağıntısında tüm ikililerin bileşenleri yer değiştirirse

$\alpha = \{(13, \text{Bitlis}), (35, \text{İzmir}), (29, \text{Gümüşhane})\}$ kümesi elde edilir. Bu küme $A \times B$ kümesinin bir alt kümesi değildir. Ancak,

$B \times A = \{(13, \text{Bitlis}), (13, \text{İzmir}), (13, \text{Gümüşhane}), (35, \text{Bitlis}), (35, \text{İzmir}), (35, \text{Gümüşhane}), (29, \text{Bitlis}), (29, \text{İzmir}), (29, \text{Gümüşhane})\}$ olup α kümesi $B \times A$ kümesinin bir alt kümesidir.

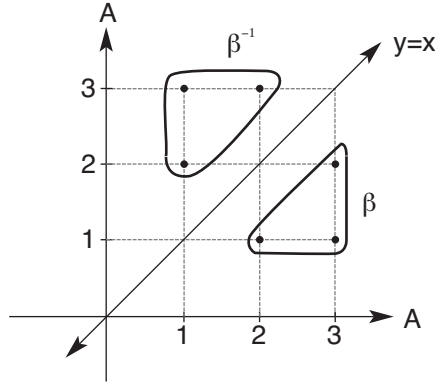
A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; β , A dan B ye tanımlanan bir bağıntı olsun. β bağıntısındaki bütün ikililerin birinci bileşenleri ile ikinci bileşenlerinin yer değiştirilmesiyle elde edilen bağıntı β bağıntısının tersidir. Bu da β^{-1} ile gösterilir.

$$\beta \subset A \times B \text{ ise } \beta^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \beta\} \subset B \times A \text{ dır.}$$

Örnek : $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$\beta = \{(x, y) \mid x > y, (x, y) \in A \times A\} \subset A \times A$ bağıntısı veriliyor. β ve β^{-1} bağıntılarını liste yöntemi ile yazarak grafiklerini çizelim.

Çözüm : $\beta = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$ olup $\beta^{-1} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ tür.



β ve β^{-1} bağıntılarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik.

Örnek : $A = \{x \mid 0 \leq x < 13, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(x,y) \mid y = 2x, (x,y) \in A \times A\}$ olarak tanımlanmıştır. β^{-1} bağıntısını liste biçiminde yazalım.

Çözüm : $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ dir.

$\beta = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12)\}$ olarak bulunur. O hâlde,

$\beta^{-1} = \{(0,0), (2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6)\}$ dir.

Örnek : $K = \{x \mid x \leq 4, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(x,y) \mid x = 2y, (x,y) \in K \times K\}$ bağıntısı tanımlanıyor. β^{-1} bağıntısını liste yöntemiyle ve ortak özellik yöntemiyle yazınız.

Çözüm :

$$K = \{0,1,2,3,4\}$$

$$\beta = \{(0,0), (2,1), (4,2)\}$$

$$\beta^{-1} = \{(0,0), (1,2), (2,4)\}$$

$$\beta^{-1} = \{(x,y) \mid y = 2x, x,y \in \mathbb{N}\}$$

Bağıntının Özellikleri



✱ Aşağıdaki özelliklere sahip ikişer tane;

- Tanımlı olduğu kümedeki her x elemanı için (x,x) ikililerini içeren bağıntı,
- $a \neq b$ olmak üzere her (a,b) ikilisi için (b,a) ikilisini de içeren bağıntı,
- Her (a,b) ikilisi için (b,a) ikilisini de içermeyen bağıntı,
- Her (a,b) ve (b,c) ikili çifti için (a,c) ikilisini içeren bağıntı yazınız.

➤ Siz de bu özelliklerin hepsini içeren bir bağıntı oluşturabilir misiniz? Açıklayınız.

1. Yansıma Özelliği

Örnek : $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki β_1 ve β_2 bağıntılarını liste yöntemiyle yazalım.

a. $\beta_1 = \{(x,y) \mid x = y, (x,y) \in A \times A\}$

b. $\beta_2 = \{(x,y) \mid x \leq y, (x,y) \in A \times A\}$

Çözüm :

a. $\beta_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

b. $\beta_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

β_1 ve β_2 bağıntılarında bileşenleri birbirine eşit olan ikililer vardır. Bu ikililer A kümesinin bütün elemanları için β_1 ve β_2 de mevcuttur.

β , A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. A kümesinin her a elemanı için $(a,a) \in \beta$ olursa β bağıntısının yansıma özelliği vardır veya β yansıyandır, denir.

$$\forall x \in A \text{ için } (x,x) \in \beta \text{ ise, } \beta \text{ yansıyandır.}$$

Örnek : $A = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangilerinin yansıyan olduğunu bulup grafiklerini çizelim.

a. $\beta_1 = \{(1,3), (3,3), (1,1), (3,4), (4,4), (2,2)\}$

b. $\beta_2 = \{(1,1), (3,3), (4,4)\}$

c. $\beta_3 = \{(1,1), (3,3), (3,4)\}$

ç. $\beta_4 = \{(1,1), (3,3), (2,2), (4,4)\}$

Çözüm :

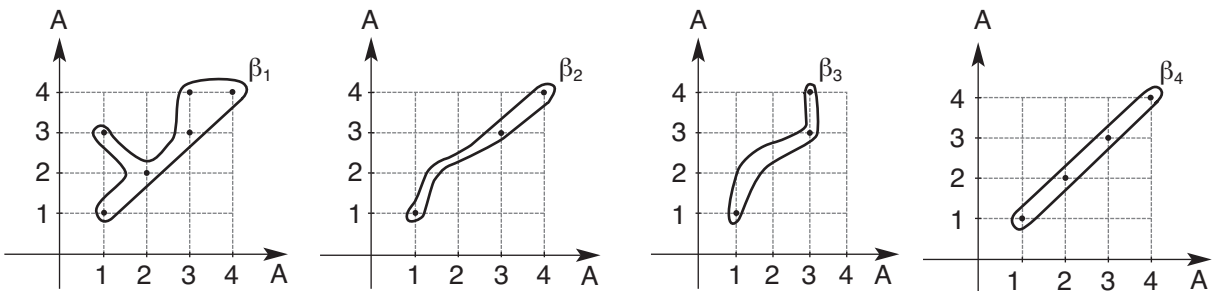
a. β_1 bağıntısı yansıyandır. Çünkü A kümesinin her x elemanı için $(x,x) \in \beta_1$ dir.

b. β_2 bağıntısı yansıyan değildir. Çünkü $2 \in A$ için $(2,2) \notin \beta_2$ dir.

c. β_3 bağıntısı yansıyan değildir. Çünkü A kümesinin 2 ve 4 elemanları için $(2,2) \notin \beta_3$ ve $(4,4) \notin \beta_3$ tür.

ç. β_4 bağıntısı yansıyandır. Çünkü A kümesinin her x elemanı için $(x,x) \in \beta_4$ tür.

Şimdi de β_1 , β_2 , β_3 ve β_4 bağıntılarının grafiklerini çizelim.



Yansıma özelliği olan bağıntılarda köşegen üzerindeki elemanların hepsi bağıntıya dâhildir.

2. Simetri Özelliği

Örnek : $A = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki β_1 ve β_2 bağıntılarını liste yöntemiyle yazalım.

- a. $\beta_1 = \{(x,y) \mid x - y, 2 \text{ ile bölünür}, (x,y) \in A \times A\}$
- b. $\beta_2 = \{(x,y) \mid x + y \text{ nin } 2 \text{ ye bölümünden kalan } 1 \text{ dir}, (x,y) \in A \times A\}$

Çözüm :

- a. $\beta_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$
- b. $\beta_2 = \{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)\}$ tür.

Dikkat edilirse β_1 ve β_2 bağıntılarındaki sıralı ikililerin bileşenlerinin yer değiştirilmesiyle elde edilen sıralı ikililer bu bağıntıların içinde yer alır.

β , A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. β bağıntısının her (x,y) elemanı için, $(y,x) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısının simetri özelliği vardır veya β simetriktir. Yani,

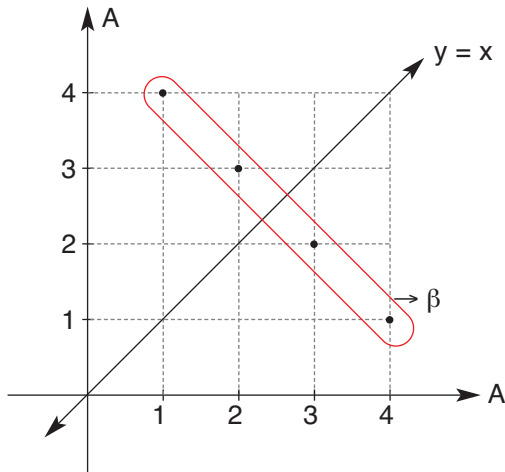
$$\forall (x,y) \in \beta \text{ için } (y,x) \in \beta \text{ ise } \beta \text{ simetriktir.}$$

Örnek : $A = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan,
 $\beta = \{(x,y) : x + y = 5, x, y \in A\}$ bağıntısını,

- a) Liste yöntemi ile yazalım.
- b) β bağıntısı simetrik midir? Bulalım.
- c) β bağıntısının grafiğini çizelim.

Çözüm :

- a) $\beta = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ dir.
- b) $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ olduğundan β bağıntısı simetriktir.
- c)

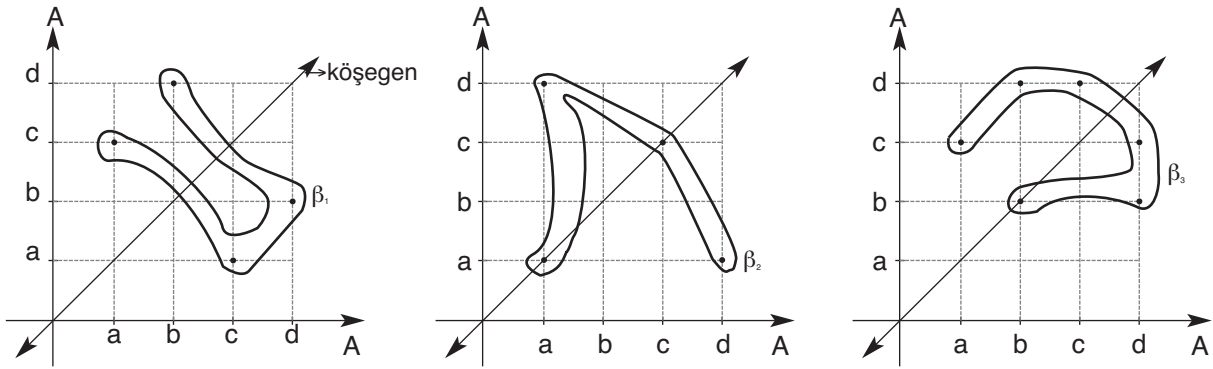


Örnek : $A = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların simetrik olup olmadığını belirleyip grafiklerini çizelim.

- a. $\beta_1 = \{(a,c), (b,d), (c,a), (d,b)\}$
- b. $\beta_2 = \{(d,a), (a,a), (a,d), (c,c)\}$
- c. $\beta_3 = \{(b,d), (d,c), (d,b), (c,d), (a,c), (b,b)\}$

Çözüm :

- a. β_1 bağıntısı simetriktir. Çünkü $(a,c) \in \beta_1$ iken $(c,a) \in \beta_1$ ve $(b,d) \in \beta_1$ iken $(d,b) \in \beta_1$ dir.
 - b. β_2 bağıntısı simetriktir. Çünkü $(d,a) \in \beta_2$ iken $(a,d) \in \beta_2$ dir. Ayrıca (a,a) ve (c,c) ikililerinin tersleri kendilerine eşittir.
 - c. β_3 bağıntısı simetrik değildir. Çünkü $(a,c) \in \beta_3$ iken $(c,a) \notin \beta_3$ tür.
- Şimdi de β_1 , β_2 ve β_3 bağıntılarının grafiklerini çizelim.



Simetrik bağıntılarda her elemanın köşegene göre simetriği vardır veya elemanlar köşegen üzerindedir.

3. Ters Simetri Özelliği

Örnek : $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki β_1 ve β_2 bağıntılarını liste yöntemiyle yazalım.

- a. $\beta_1 = \{(x,y) \mid x \geq y, (x,y) \in A \times A\}$
- b. $\beta_2 = \{(x,y) \mid y \text{ böler } x, (x,y) \in A \times A\}$

Çözüm :

- a. $\beta_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1), (2,1), (3,2)\}$
- b. $\beta_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1), (2,1)\}$ dir.

β_1 ve β_2 bağıntılarındaki sıralı ikililerin bileşenlerinin yer değiştirilmesi ile elde edilen sıralı ikililer bu bağıntıların içinde yer almaz.

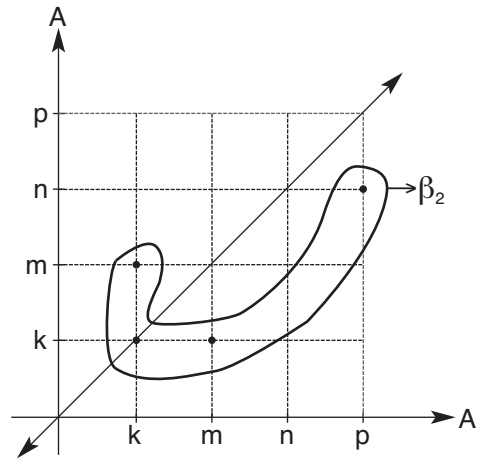
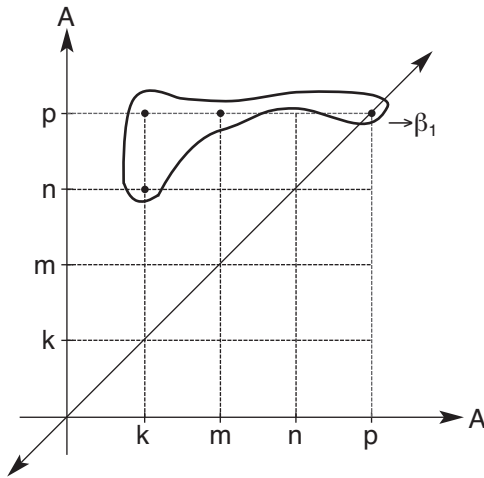
β , A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. β bağıntısının her (x,y) elemanı için $(y, x) \notin \beta$ veya her $(x, y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ iken $x = y$ oluyorsa β bağıntısının ters simetri özelliği vardır ya da β ters simetrik, denir.

Örnek : $A = \{k,m,n,p\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların ters simetrik olup olmadıklarını belirleyip grafiklerini çizelim.

- a. $\beta_1 = \{(k,n), (k,p), (p,p), (m,p)\}$
- b. $\beta_2 = \{(k,k), (m,k), (p,n), (k,m)\}$

Çözüm :

- a. β_1 bağıntısı ters simetrik değildir. Çünkü $(k,n) \in \beta_1$ iken $(n,k) \notin \beta_1$, $(k,p) \in \beta_1$ iken $(p,k) \notin \beta_1$ ve $(m,p) \in \beta_1$ iken $(p,m) \notin \beta_1$ dir.
 - b. β_2 bağıntısı ters simetrik değildir. Çünkü $(m,k) \in \beta_2$ iken $(k,m) \in \beta_2$ ve $k \neq m$ dir.
- Şimdi de β_1 ve β_2 bağıntılarının grafiklerini çizelim.



1. Bir elemanlı bir bağıntı, karşılaştıracak başka eleman bulunmadığından daima ters simetrik-tir.
2. Bir bağıntı ters simetrik değil ise simetrik olduğu söylenemez. Aynı şekilde bir bağıntı simetrik değil ise ters simetrik olduğu söylenemez.

4. Geçişme Özelliği

Aynı büroda çalışan Berk, Mert'in amiri ve Elif de Berk'in amiri ise Elif'in Mert'in amiri olduğu söylenebilir.

Örnek : $A = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\beta = \{(x,y) : x < y, (x,y) \in A \times A\}$ bağıntısını liste yöntemi ile yazalım. Yukarıda anlatılan durumu göz önüne alarak β bağıntısının da benzer bir özellik gösterip göstermediğini belirleyelim.

Çözüm : β bağıntısı, $\beta = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ olarak bulunur.

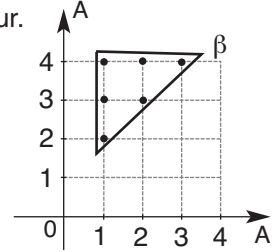
Yukarıda anlatılan durum göz önüne alınırsa

$(1,2) \in \beta$ ve $(2,3) \in \beta$ iken $(1,3) \in \beta$,

$(1,2) \in \beta$ ve $(2,4) \in \beta$ iken $(1,4) \in \beta$,

$(1,3) \in \beta$ ve $(3,4) \in \beta$ iken $(1,4) \in \beta$

olduğu söylenebilir. Bağıntının grafiği yanda verilmiştir.



β , A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. β nın her (x,y) elemanı için $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısının geçişme özelliği vardır veya β geçişkendir, denir.

$\forall (x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise β geçişkendir.

Yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip bağıntılara denklik bağıntısı denir.

Örnek : $A = \{a,e,k,p\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların geçişken olup olmadıklarını belirleyelim.

a. $\beta_1 = \{(k,a), (e,e), (a,p), (k,p)\}$

b. $\beta_2 = \{(k,e), (k,a), (e,a), (a,p)\}$

Çözüm :

a. β_1 bağıntısı geçişkendir. Çünkü $(k,a) \in \beta_1$ ve $(a,p) \in \beta_1$ iken $(k,p) \in \beta_1$ dir ve başka geçişme özelliği arayabileceğimiz iki eleman mevcut değildir.

b. β_2 bağıntısı geçişken değildir. Çünkü $(k,e) \in \beta_2$ ve $(e,a) \in \beta_2$ iken $(k,a) \in \beta_2$ fakat $(e,a) \in \beta_2$ ve $(a,p) \in \beta_2$ iken $(e,p) \notin \beta_2$ dir.

1. Bir elemanlı bir bağıntı, geçişme özelliği kuralını bozmayacağından daima geçişkendir.

2. Bir β bağıntısında $(a,b) \in \beta$ iken b ile başlayan başka ikili yoksa (a,b) ikilisi geçişkenliği bozmaz.

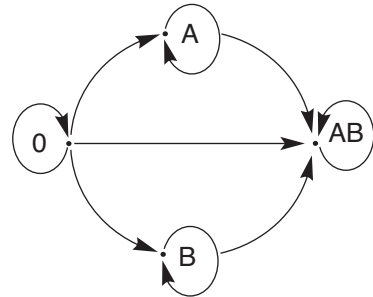
Örnek : Yanda, kan grupları ile verici olabilecekleri gruplar arasındaki bağıntının şeması verilmiştir.

Buna göre;

a. Bu bağıntıyı ortak özellik yöntemi ile yazalım.

b. Bu bağıntıyı liste yöntemi ile yazalım.

c. Bu bağıntının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerine sahip olduğunu inceleyelim.



Çözüm : İnsanların kan gruplarının kümesi; $I = \{0, A, B, AB\}$ dir. I kümesi üzerinde tanımlı β bağıntısı,

a. $\beta = \{(x, y) \mid x, y \text{ ye kan verebilir}\}$ şeklindedir.

b. $\beta = \{(0, 0), (0, A), (0, B), (0, AB), (A, A), (A, AB), (B, B), (B, AB), (AB, AB)\}$

c. $(0, 0), (A, A), (B, B)$ ve (AB, AB) ikilileri β bağıntısının elemanları olduğundan, β bağıntısı yansıyandır.

$(0, A) \in \beta$ iken $(A, 0) \notin \beta$ olduğundan, β bağıntısı simetrik değildir.

Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ olduğundan, β bağıntısı ters simetriktir.

Her $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ için, $(x, z) \in \beta$ olduğundan, β bağıntısı geçişkendir. β yansıyan ve geçişkendir fakat simetrik olmadığı için denklik bağıntısı değildir.

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan, $\beta = \{(x, y) : (x - y), 7 \text{ ile bölünür}, (x, y) \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerine sahip olduğunu inceleyelim.

Çözüm :

Yansıma özelliği : $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $7 \mid (x - x) \Rightarrow 7 \mid 0$ (7 böler 0) olduğundan, $(x, x) \in \beta$ dir. β bağıntısı yansıyandır.

Simetri özelliği : $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için, $7 \mid (x - y) \Rightarrow 7 \mid (y - x)$ tir. O hâlde $(x, y) \in \beta$ ise $(y, x) \in \beta$ dir. β bağıntısı simetriktir.

Ters Simetri özelliği : $(x, y) \in \beta \Rightarrow (x - y) \mid 7 \Rightarrow (y - x) \mid 7 \Rightarrow (y, x) \in \beta$ olduğundan β ters simetrik değildir.

Geçişme özelliği : $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için, $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ olsun. Buradan,

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 7k, k \in \mathbb{N} \\ y - z = 7p, p \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow x - \cancel{y} + \cancel{y} - z = 7k + 7p \Rightarrow x - z = 7(\underbrace{k + p}_{\in \mathbb{N}}) \text{ bulunur.}$$

Öyleyse $(x, z) \in \beta$ dir. β bağıntısı geçişkendir. β bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu için denklik bağıntısıdır.

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan ve aşağıdaki şartlara uyan en az elemanlı birer bağıntı yazalım.

- β_1 yansıyan ve simetrik değil.
- β_2 simetrik değil ve ters simetrik değil.
- β_3 simetrik ve ters simetrik.
- β_4 simetrik değil ve geçişken değil.
- β_5 yansıyan, simetrik, ters simetrik ve geçişken.

Çözüm :

a. $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3)\}$ ilk dört ikili yansıma özelliğini sağlıyor. $(1, 3)$ ikilisi simetri özelliğini yok ediyor.

b. $\beta_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4)\} \Rightarrow (1, 3)$ ve $(3, 1)$ ikilileri ters simetri özelliğini, $(2, 4)$ ikilisi simetri özelliğini yok ediyor.

c. $\beta_3 = \{(1, 1)\} \Rightarrow$ simetrik ve ters simetrik.

ç. $\beta_4 = \{(1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow$ simetriktir. $(1, 2)$ ve $(2, 1)$ ikilileri ile birlikte $(1, 1)$ ikilisi olmadığından geçişken değildir.

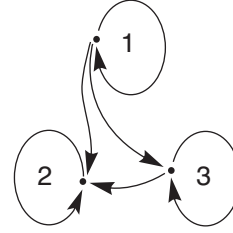
d. $\beta_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \Rightarrow$ yansıyan, ters simetrik, simetrik, geçişken. (x, x) ikilileri, ters simetri özelliğine aykırı olmadığı gibi geçişkenliği de yok etmez.



ALİŞTIRMALAR

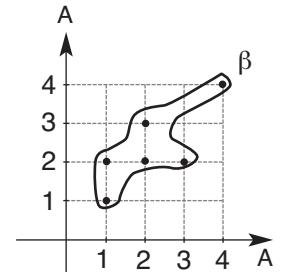
1. $A = \{-9, -3, 0, 3, 9\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri ile $\beta = \{(x, y) \mid x^y = 9, x \in A \text{ ve } y \in B\}$ bağıntısı veriliyor. Buna göre;
 - a. β bağıntısını liste biçiminde yazınız.
 - b. Bağıntıyı şema ile gösteriniz.
 - c. Bağıntının grafiğini çiziniz.
2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan, $\beta = \{(x, y) \mid x, y \text{ sayısını böler; } (x, y) \in A \times A\}$ bağıntısının eleman sayısını bulunuz.
3. $s(A) = 2$ ve $s(B) = x$ olmak üzere A dan B ye 256 tane bağıntı tanımlanabildiğine göre x kaç olmalıdır?

4. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde,
 $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 1)\}$ bağıntısı veriliyor.
 β_2 bağıntısının şeması ise yandadır. Buna göre,
 $\beta_1 \cap \beta_2$ bağıntısını elemanlarını yazarak belirtiniz.



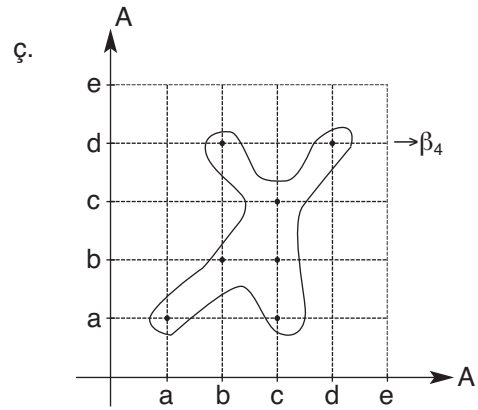
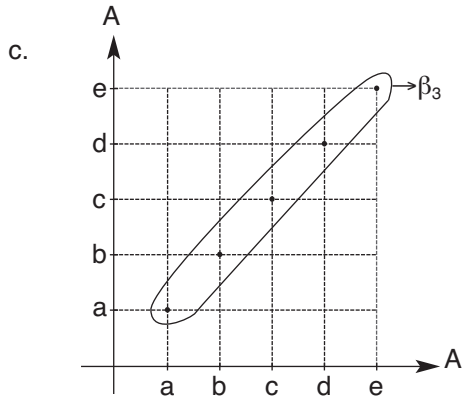
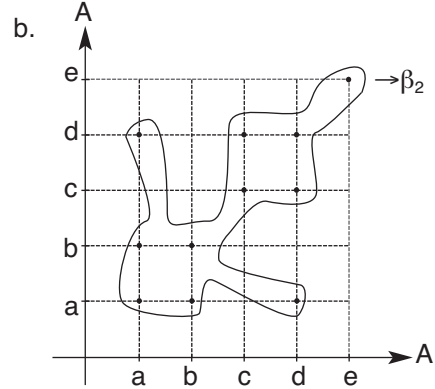
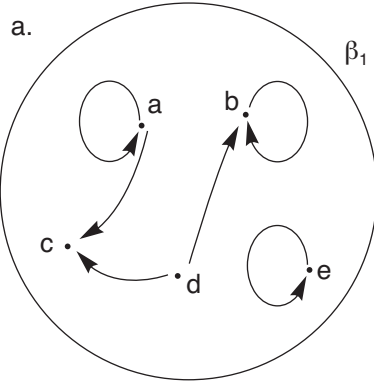
5. $A = \{8, 9, 12, 15\}$ ve $B = \{2, 3\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye β bağıntısı,
 $\beta = \{(x, y) \mid y, x \text{ sayısını böler ve } (x, y) \in A \times B\}$ biçiminde tanımlanıyor. β bağıntısını ve β^{-1} ters bağıntısını bulup bu bağıntıların grafiklerini aynı analitik düzlemde gösteriniz.
6. $\beta = \{(x, y) \mid 2x - y = 3, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ bağıntısı veriliyor. Buna göre, $\beta \cap \beta^{-1}$ kümesini bulunuz.
7. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılarda; yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerinin olduğunu bulunuz.
 - a. $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$
 - b. $\beta_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$
 - c. $\beta_3 = \{(1, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
 - d. $\beta_4 = \{(2, 3)\}$
 - e. $\beta_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (2, 4)\}$
 - f. $\beta_6 = \{(4, 4)\}$

8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı β bağıntısının grafiği yandadır. Buna göre;
 - a. β bağıntısını liste yöntemiyle yazınız.
 - b. β bağıntısının yansıma özelliği var mıdır?
 - c. β bağıntısının simetrik olması için hangi eleman çıkarılmalıdır?



9. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ kümesi üzerinde tanımlanan,
 $\beta = \{(x, y) \mid x \leq y, (x, y) \in A \times A\}$ bağıntısında yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangileri vardır?

10. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılarda, bağıntının özelliklerinden hangileri vardır?



11. Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan,

$\beta = \{(x, y) \mid x \geq y, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ bağıntısı yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinden hangilerine sahiptir?

12. “İnsanlar arasındaki kardeşlik bağıntısı”nın; yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerinin olup olmadığını araştırınız.
13. Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı, $\beta = \{(x, y) \mid 2x + ay = 0\}$ bağıntısının yansıyan bir bağıntı olması için a kaç olmalıdır?
14. $A = \{2, a, 3, b, 4, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı β bağıntısının yansıma özelliği olduğuna göre β bağıntısının en az kaç elemanı olmalıdır?
15. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $\beta = \{(a, b) \mid b = 2a\}$ bağıntısının geçişme özelliği var mıdır?

FONKSİYON



Fabrikalar mevcut ham maddeyi işleyerek yeni bir ürüne dönüştürür. Sandalye üreten bir fabrikada ham maddeler çeşitli metaller ve döşemelik malzemelerdir.

- ✓ Ham maddenin tamamı işlenmezse fabrika işlevini yerine getirmiş olur mu?
- ✓ Tek bir malzemenin farklı iki ürünün yapımında kullanılması söz konusu olabilir mi?

Fonksiyon



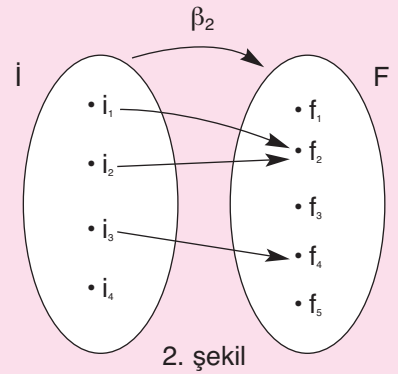
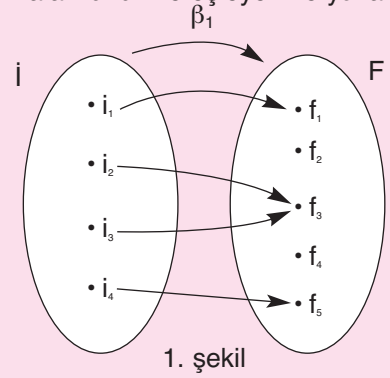
İşsizliğin olmadığı ve tek bir maaşla yaşamının mümkün olduğu bir ülkede;

1. koşul: Her kişinin bir işi olduğu,
2. koşul: Her kişinin birden fazla işte çalışmadığı biliniyor.

Bu ülkedeki fabrikalarda çalışan işçilerden, işçiler ve çalıştığı fabrikaları birbirine eşleyen ve yukarıdaki koşulları sağlayan bir bağıntı 1. şekildeki gibi veriliyor.

1. şekle göre;

- * Bu bağıntıyı liste yöntemiyle yazınız.
- Her işçi bir fabrikada çalışıyor mu? Birden fazla fabrikada çalışan işçi var mıdır?
- * İşçilerin kümesini liste yöntemiyle yazınız.
- * İşçisi olmayan fabrika var mıdır?
- * Fabrikada çalışan işçilerin hangi fabrikada çalıştıklarını liste yöntemiyle yazınız.
- * 1 ve 2. şekildeki bağıntıların 1 ve 2. koşulu sağlayıp sağlamadığını inceleyiniz.
- 1 ve 2. koşulu sağlayan bağıntıların özel bir adı vardır. Siz de buna benzer bir bağıntı oluşturunuz.
- * Bu bağıntıyı şema ile gösteriniz.
- * Yazdığınız bağıntının kuralını bulunuz.

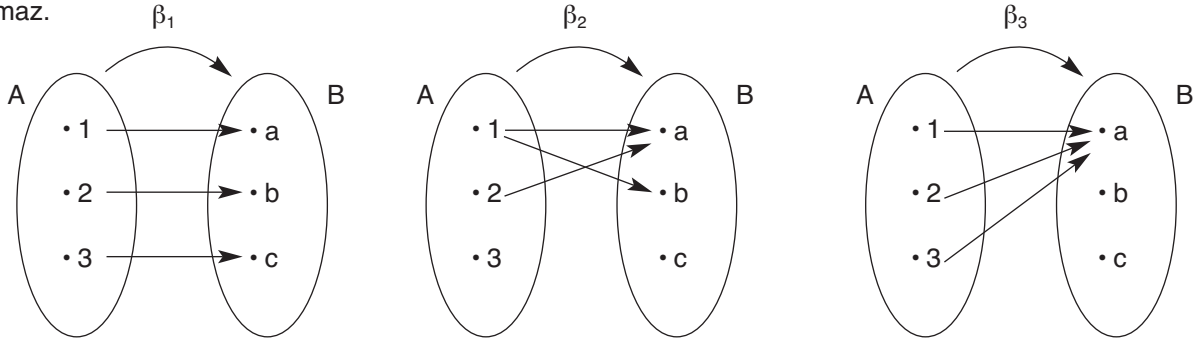


Örnek : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ kümeleri veriliyor.

$\beta_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$, $\beta_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$ ve $\beta_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ bağıntılarının her biri için A kümesinin elemanlarından bir tanesiyle B kümesinin birden fazla elemanının eşlenip eşlenmediğini ve A kümesinde eşlenmeyen eleman kalıp kalmadığını inceleyelim.

Çözüm : β_1 ve β_3 bağıntıları için A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmadığı gibi bu elemanlardan hiç biri B kümesinde birden fazla elemanla eşlenmemiştir. Dolayısıyla β_1 ve β_3 bağıntıları istenen koşulları sağlar.

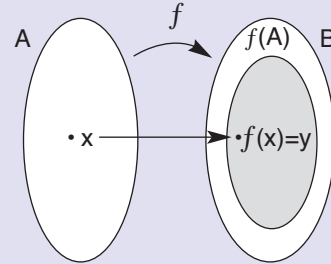
β_2 bağıntısında A kümesindeki 3 elemanı, B kümesinden hiçbir elemanla eşlenmemiştir. Ayrıca A kümesindeki 1 elemanı B kümesinden iki elemanla eşlenmiştir. Bu yüzden β_2 koşulların ikisini de sağlamaz.



A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere, A dan B ye tanımlanan bir bağıntı f olsun. Eğer f bağıntısı, aşağıdaki özelliklere sahip ise bu f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyondur, deriz.

1. f bağıntısı, A kümesinin her bir elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyor.
2. A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıyor.

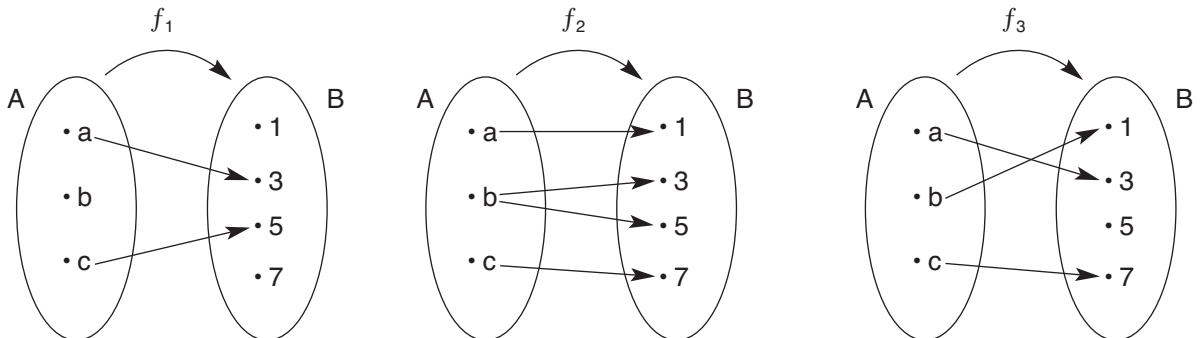
Burada, A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, B kümesine f fonksiyonunun değer kümesi denir. A kümesinin elemanlarının f fonksiyonu yardımıyla B kümesinde eşleştiği değerlerin kümesine de f fonksiyonunun görüntü kümesi denir. Görüntü kümesi $f(A)$ ile gösterilir.



Tanım kümesinin bir x elemanı, değer kümesinin bir y elemanına f ile bağlı ise bunu $f : x \rightarrow y$ ya da $x \xrightarrow{f} y$ ya da $f(x) = y$ biçiminde gösteririz. Bu bağıntı cebirsel veya aritmetik bir kural olmak zorunda değildir.

Fonksiyon bir bağıntı olduğundan tanımlı olduğu kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesidir.

Örnek : $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 3, 5, 7\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan hangileri birer fonksiyondur? Fonksiyon olanların tanım, değer ve görüntü kümelerini bulalım.



Çözüm :

f_1 bağıntısı, A dan B ye bir fonksiyon değildir. Çünkü A kümesindeki “b” elemanı, B kümesindeki hiçbir elemanla eşlenmemiştir.

f_2 bağıntısı, A dan B ye bir fonksiyon değildir. Çünkü A kümesindeki “b” elemanı, B kümesindeki “3” ve “5” elemanları ile eşlenmiştir.

f_3 bağıntısı, A dan B ye bir fonksiyondur. Çünkü A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıyor ve A nın her bir elemanı B nin yalnız bir elemanı ile eşleniyor. A dan B ye tanımlanan f_3 fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c\}$, değer kümesi $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ve görüntü kümesi : $f(A) = \{1, 3, 7\}$ dir.

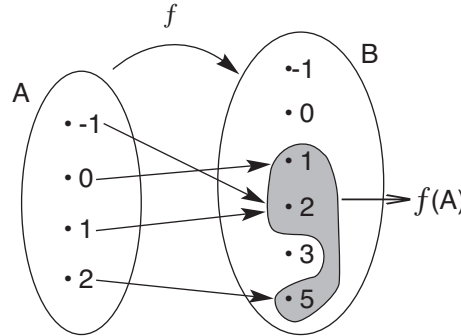
Örnek : $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$ kümeleri için $f : A \rightarrow B, x \rightarrow x^2 + 1$ bağıntısı veriliyor. Buna göre;

- f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olduğunu gösterelim.
- $f(A)$ görüntü kümesini liste biçiminde yazıp şema ile gösterelim.

Çözüm :

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$, $f(0) = 0^2 + 1 = 1$, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ tir. Buna göre

- A kümesinin her bir elemanı B kümesinin yalnız bir elemanı ile eşlendiği için f bağıntısı A dan B ye bir fonksiyondur.
- $f(A) = \{1, 2, 5\}$ tir.



Örnek : $f : A \rightarrow B, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesi, $B = \{-1, 5, 7\}$ olduğuna göre tanım kümesini bulalım.

Çözüm :

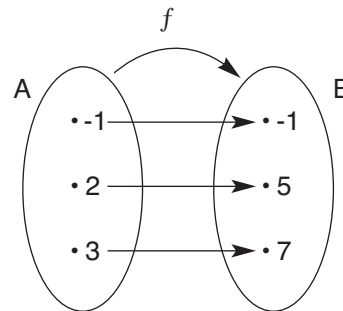
$f(x) = 2x + 1$ ile tanımlı fonksiyonun kuralını tek tek görüntü kümesindeki elemanlara eşitleyerek tanım kümesinin elemanlarını bulabiliriz.

$$2x + 1 = -1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2x + 1 = 7 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

O hâlde tanım kümesi $A = \{-1, 2, 3\}$ olur.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeleri hesaplayalım.

- | | | |
|------------|---------------|-------------|
| a. $f(5)$ | b. $f(-2)$ | c. $f(4x)$ |
| ç. $f(-x)$ | d. $f(x + 2)$ | e. $f(x^2)$ |

Çözüm :

- a. $f(5) = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 75 - 10 + 1 = 66$
- b. $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = 3 \cdot 4 + 4 + 1 = 17$
- c. $f(4x) = 3 \cdot (4x)^2 - 2 \cdot (4x) + 1 = 3 \cdot 16x^2 - 8x + 1 = 48x^2 - 8x + 1$
- ç. $f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 1 = 3x^2 + 2x + 1$
- d. $f(x + 2) = 3 \cdot (x + 2)^2 - 2 \cdot (x + 2) + 1 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 2x - 4 + 1$
 $= 3x^2 + 12x + 12 - 2x - 4 + 1$
 $= 3x^2 + 10x + 9$
- e. $f(x^2) = 3 \cdot (x^2)^2 - 2(x^2) + 1 = 3x^4 - 2x^2 + 1$ olur.

Örnek : $A = \{1,2,3,4,5\}$, $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11)\}$ olduğuna göre f ve g fonksiyonlarının tanım ve değer kümelerini inceleyelim.

Çözüm : f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{1,2,3,4,5\}$ dir. g fonksiyonun elemanlarının birinci bileşenlerini göz önünde bulundurursak g nin tanım kümesinin de $A = \{1,2,3,4,5\}$ olduğu görülür. Benzer şekilde g nin değer kümesi $D = \{3,5,7,9,11\}$ dir. f fonksiyonun değer kümesinin elemanları,

$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7, f(4) = 9, f(5) = 11$ dir. f fonksiyonu liste biçiminde yazarsak $f = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11)\}$ olup g fonksiyonuna eşittir. f ve g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri eşit ve bu kümedeki herhangi bir x elemanı için $f(x) = g(x)$ tir.

$f, g : A \rightarrow B$ ve $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x) \in B$ ise f ile g fonksiyonları eşit fonksiyonlardır.

Örnek : $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = 3x + 3$ ve $f(a) = g(2a)$ olduğuna göre, a sayısını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 1 \Rightarrow f(a) = 4a - 1 \\ g(x) &= 3x + 3 \Rightarrow g(2a) = 3 \cdot 2a + 3 = 6a + 3 \text{ olur.} \\ f(a) &= g(2a) \Rightarrow 4a - 1 = 6a + 3 \\ &\Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bir Fonksiyonun Grafiği

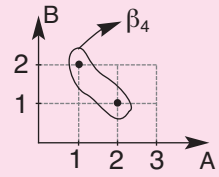
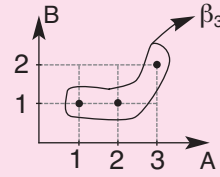
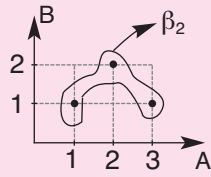
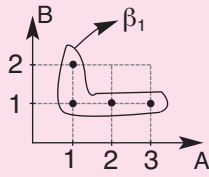


❄ $A = \{x \mid 0 \leq x < 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R}^+$, $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonu için x e farklı değerler vererek y nin değerlerini hesaplayınız.

❄ Bulduğunuz noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

➤ Sizce bir fonksiyonun ya da doğrunun grafiği nasıl çizilebilir? Açıklayınız.

❄ $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıda grafiği verilen A dan B ye tanımlı β_1 , β_2 , β_3 ve β_4 bağıntılarını liste yöntemi yazınız.

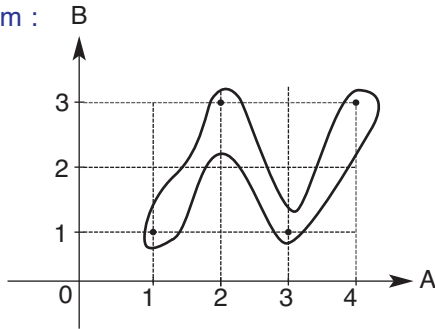


❄ β_1 , β_2 , β_3 ve β_4 bağıntılarından hangileri fonksiyondur? Fonksiyon olanların tanım ve görüntü kümeleri söyleyiniz.

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 3)\}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm :



Yandaki grafikte tanım kümesindeki elemanların her biri değer kümesinin yalnız bir elemanı ile eşlenmiştir.

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ kümeleri ile $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

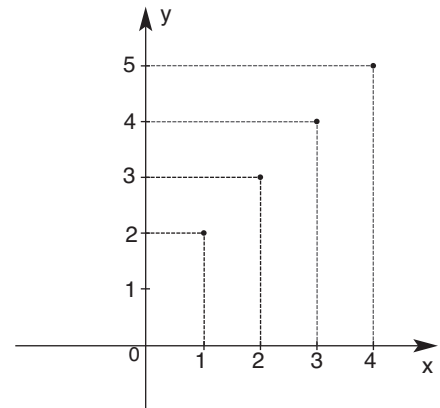
Çözüm : A kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulalım.

$f(x) = x + 1 \Rightarrow f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$ bulunur.

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ tir.

Bu noktaları analitik düzlemde gösterelim.

Yanda görüldüğü gibi f fonksiyonunun grafiği, $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$ ikililerinin belirttiği noktaların oluşturduğu kümedir.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm :

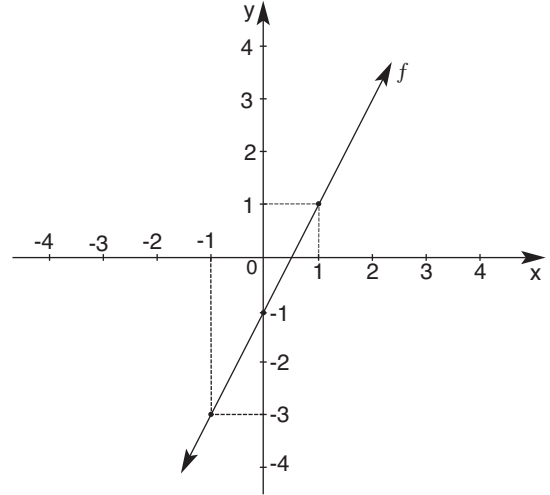
Tanım kümesinden seçilecek herhangi üç değer için fonksiyonun alacağı değerler;

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3,$$

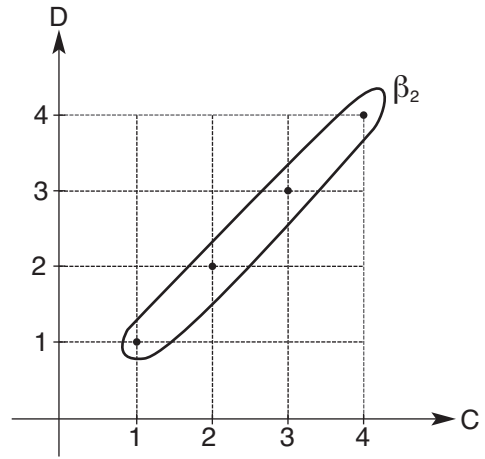
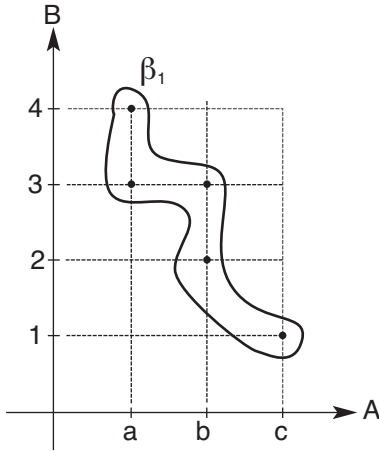
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \text{ olur.}$$

Buna göre fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.



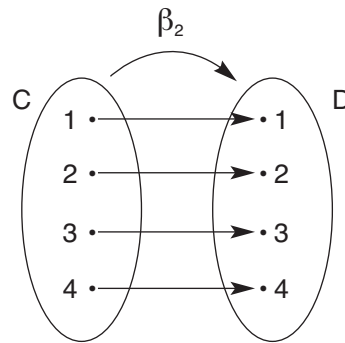
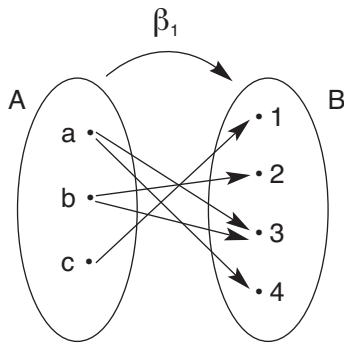
Örnek :



Yukarıda iki bağıntının grafiği verilmiştir. Buna göre;

- Bağıntıları şema ile gösterelim.
- Bu bağıntılardan hangisinin fonksiyon olduğunu bulalım.
- Bu bağıntılardan fonksiyon olanların tanım ve değer kümelerini bulalım.

Çözüm : a.



- β_1 bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü, A kümesindeki a ve b elemanlarının iki görüntüsü vardır.

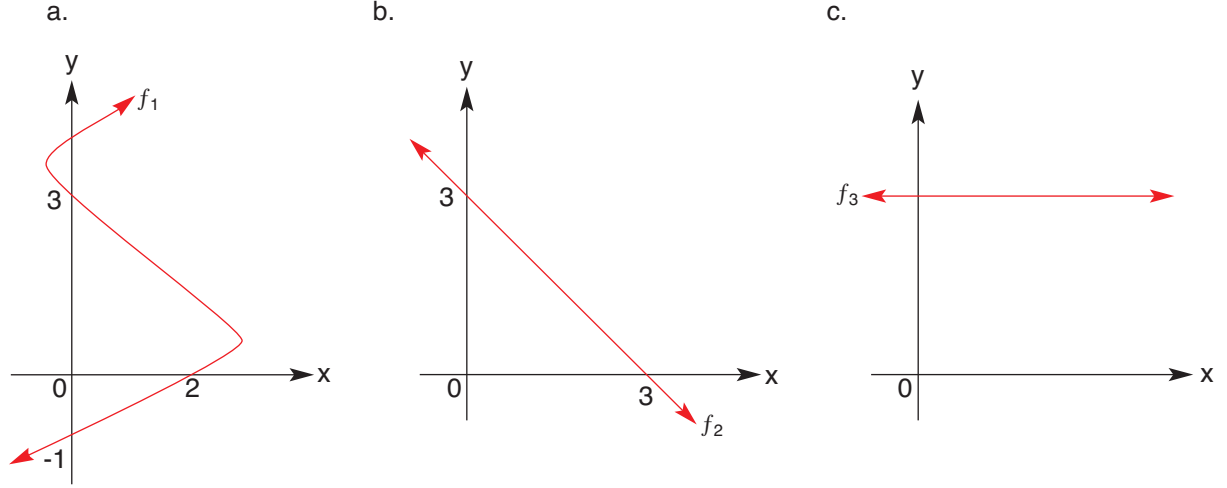
$\beta_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ tür. β_2 bağıntısı fonksiyondur. Çünkü C kümesindeki her elemanın bir tek görüntüsü vardır ve C kümesinde görüntüsü olmayan eleman yoktur.

- β_2 fonksiyonunun tanım kümesi $C = \{1, 2, 3, 4\}$, değer kümesi $D = \{1, 2, 3, 4\}$ tür.

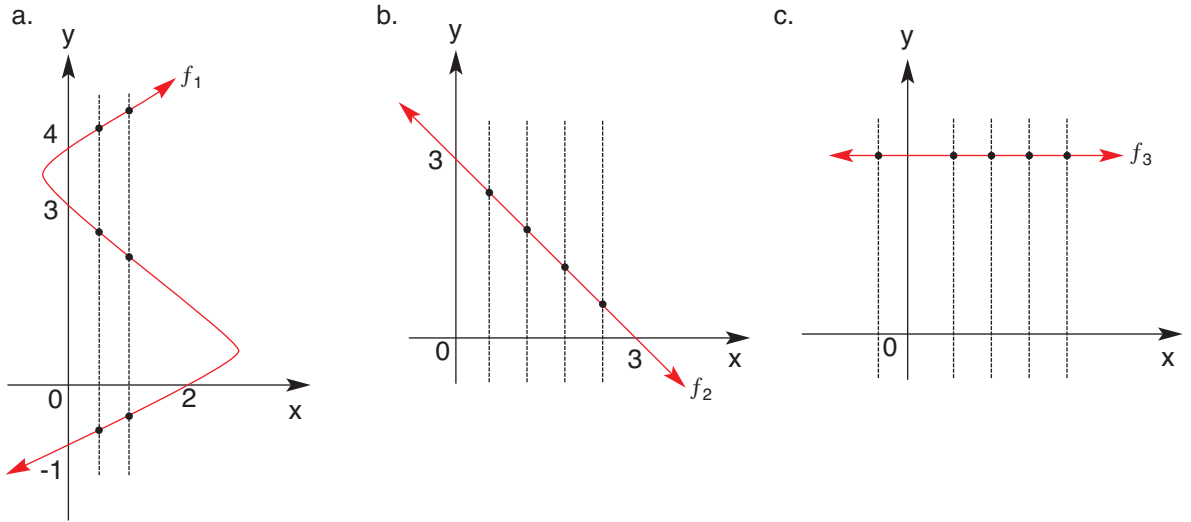
Düşey Doğru Testi

Bir bağıntının grafiğinde y eksenine çizilen her paralel doğru, grafiği en fazla bir noktada kesiyor ise grafik fonksiyon grafiğidir. Eğer, y eksenine çizilen en az bir paralel doğru, grafiği en az iki noktada kesiyor ise tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinden birden fazla elemanla eşleşmiş olacağından grafik fonksiyon grafiği değildir.

Örnek : Aşağıda grafikleri verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını bulalım.



Çözüm :



y eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği birden fazla noktada kestiğinden f_1 fonksiyon grafiği değildir.

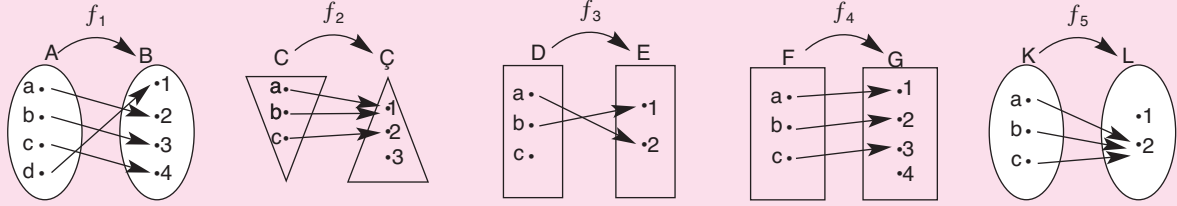
y eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği en fazla bir noktada kestiğinden f_2 fonksiyon grafiğidir.

y eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği en fazla bir noktada kestiğinden f_3 fonksiyon grafiğidir.

Fonksiyon Türleri



✱ Aşağıdaki şemaları inceleyiniz.



✱ Yukarıdaki şemalardan;
Fonksiyon olmayanları,
Değer kümesinde boşta eleman kalan fonksiyonları,
Değer kümesinde boşta eleman kalmayan fonksiyonları,
Her elemanın farklı yalnız bir elemanla eşlendiği fonksiyonları,
Görüntü kümesi tek elemanlı olan fonksiyonları belirleyiniz.

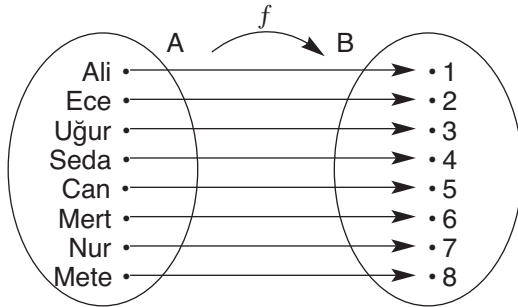
1. Bire Bir Fonksiyon

Örnek :

Numara	Ad Soyad
1	Ali Akman
2	Ece Yüce
3	Uğur Öz
4	Seda Kara
5	Can Akar
6	Mert Demir
7	Nur Yılmaz
8	Mete Ak

Yandaki liste bir sınıfta bulunan öğrencilerin listesidir. x , sınıftaki her bir öğrencinin adını, y ise sınıftaki her bir öğrencinin numarasını göstermek üzere, (x, y) sıralı ikililerinden oluşan f fonksiyonunu liste yöntemi ve şema ile göstereyim. Bu fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü farklı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm : $f = \{(Ali, 1), (Ece, 2), (Uğur, 3), (Seda, 4), (Can, 5), (Mert, 6), (Nur, 7), (Mete, 8)\}$

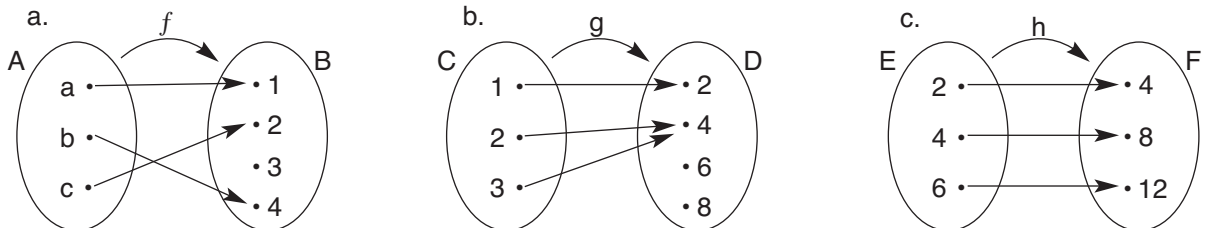


Yandaki şemadan f fonksiyonunun tanım kümesindeki farklı elemanların görüntülerinin de farklı olduğu görülür.

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü daima farklı ise f fonksiyonuna bire bir fonksiyon denir.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

Örnek : Aşağıda verilen fonksiyonların bire bir fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.



Çözüm : f ve h fonksiyonları bire bir fonksiyonlardır. Çünkü tanım kümesindeki her elemanın farklı görüntüsü vardır. g fonksiyonu bire bir fonksiyon değildir. Çünkü

$2, 3 \in C$ için $2 \neq 3$ iken $f(2) = f(3) = 4$ tür.

Örnek : $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $f: A \rightarrow B$ olmak üzere A dan B ye tanımlanabilecek bütün bire bir f fonksiyonlarını yazalım.

Çözüm : A dan B ye tanımlanabilecek bütün bire bir f fonksiyonları,

$$f_1 = \{(a, 1), (b, 2)\} , f_2 = \{(a, 2), (b, 1)\} , f_3 = \{(a, 1), (b, 3)\} \\ f_4 = \{(a, 3), (b, 1)\} , f_5 = \{(a, 2), (b, 3)\} , f_6 = \{(a, 3), (b, 2)\}$$

şeklindedir. Permütasyondan yararlanarak tanımlanabilecek tüm bire bir f fonksiyonları kısaca

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6 \text{ şeklinde de bulunabilir.}$$

1. A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısı $= s(B)^{s(A)}$ dır.

2. $s(B) > s(A)$ olmak üzere, A dan B ye tanımlı bire bir tüm fonksiyonların sayısı;

$$P(s(B), s(A)) = \frac{[s(B)]!}{[s(B) - s(A)]!} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere;

- A dan B ye tanımlı bağıntı sayısını,
- A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısını,
- B den A ya tanımlı bire bir fonksiyon sayısını,
- B den B ye tanımlı bire bir olmayan fonksiyon sayısını bulalım.

Çözüm :

a. A dan B ye tanımlı bağıntı sayısı: $2^{s(A \times B)} = 2^{s(A) \cdot s(B)}$
 $= 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$ tir.

b. A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısı: $s(B)^{s(A)} = 3^5$ tir.

c. B den A ya tanımlı bire bir fonksiyon sayısı: $\frac{[s(B)]!}{[s(B) - s(A)]!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ tır.

ç. B den B ye tanımlı fonksiyon sayısı: $s(B)^{s(B)} = 3^3 = 27$ dir.

B den B ye tanımlı bire bir fonksiyon sayısı: $\frac{[s(B)]!}{[s(B) - s(B)]!} = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$ dır.

B den B ye tanımlı bire bir olmayan fonksiyon sayısı $27 - 6 = 21$ dir.

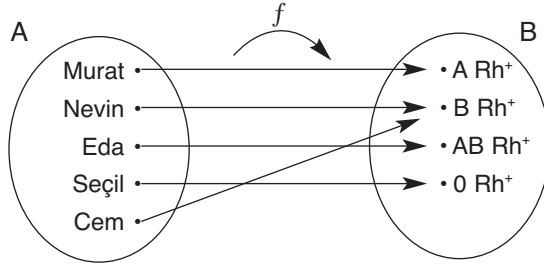
2. Örten Fonksiyon

Adı	Kan Grubu
Murat	A Rh ⁺
Nevin	B Rh ⁺
Eda	AB Rh ⁺
Seçil	0 Rh ⁺
Cem	B Rh ⁺

Yandaki tabloda bir ailedeki bireylerin kan grupları verilmiştir. Bu ailedeki bireylerin kümesini A ile, aile bireylerinin kan gruplarının kümesini de B ile gösterelim.

A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu, A daki her bir bireyi B de kendi grubuna eşlesin. f fonksiyonunu liste yöntemi ve şema ile gösterelim. Bu fonksiyonun değer kümesinde eşlenmeyen eleman var mıdır? $f(A) = B$ midir? İnceleyelim.

$$f = \{(\text{Murat}, A \text{ Rh}^+), (\text{Nevin}, B \text{ Rh}^+), (\text{Eda}, AB \text{ Rh}^+), (\text{Seçil}, 0 \text{ Rh}^+), (\text{Cem}, B \text{ Rh}^+)\}$$

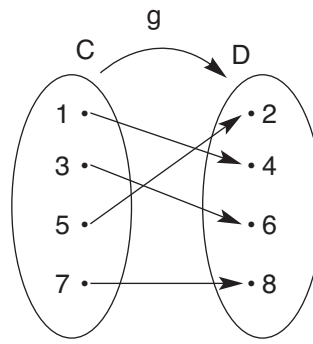
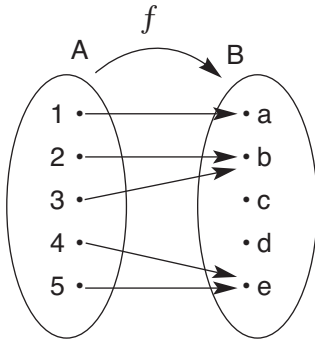


Yandaki şemaya göre, f fonksiyonunun değer kümesinde eşlenmeyen eleman kalmamıştır.

O hâlde $f(A) = B$ dir.

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için değer kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıyorsa yani $f(A) = B$ ise f fonksiyonuna, örten fonksiyon deriz. Bu durumda f örten fonksiyon ise $\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

Örnek : Aşağıda verilen fonksiyonların örten fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.



Çözüm :

- $f: A \rightarrow B$ örten fonksiyon değildir. Çünkü B kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıştır.
- $g: C \rightarrow D$ örten fonksiyondur. Çünkü D kümesinde eşlenmeyen eleman kalmayıp $\forall y \in D$ için $g(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in C$ vardır.

A dan B ye tanımlanan bir f fonksiyonu, hem bire bir hem de örten fonksiyon ise f fonksiyonuna bire bir ve örten fonksiyon denir.

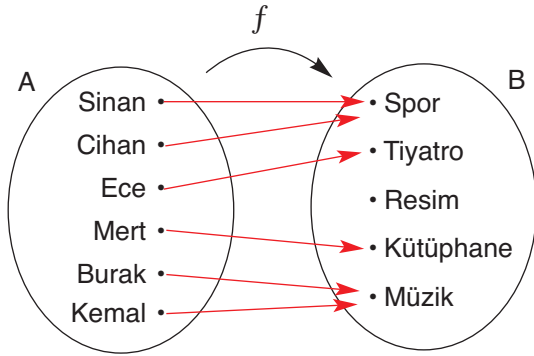
3. İçine Fonksiyon

Örnek :

Adı	Kulüp
Sinan	Spor
Cihan	
Ece	Tiyatro
—	Resim
Mert	Kütüphane
Burak	Müzik
Kemal	

Yandaki tabloda bir sınıftaki öğrencilerin hangi kulübe üye oldukları verilmiştir. Bu sınıftaki öğrencilerin kümesini A ile, üye olunabilecek kulüplerin kümesini B ile gösterelim. A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu, A daki her öğrenciyi B de seçtiği kulübe eşlesin. f fonksiyonunu liste yöntemi ve şema ile gösterelim. Bu fonksiyonun değer kümesinde eşlenmeyen eleman var mıdır? $f(A) \neq B$ midir? İnceleyelim.

$f = \{(Sinan, spor) , (Cihan, spor) , (Ece, tiyatro) , (Mert, kütüphane) , (Burak, müzik) , (Kemal, müzik)\}$

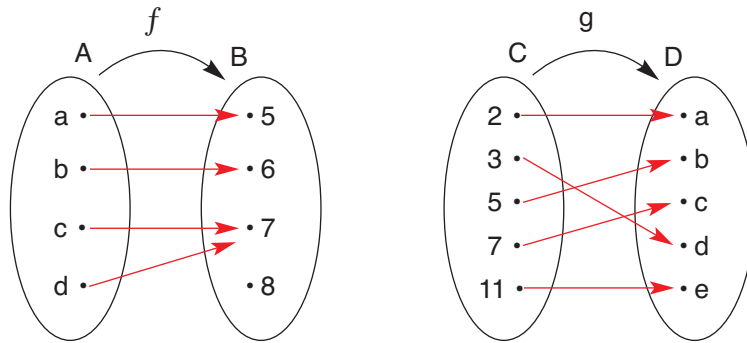


Yandaki şemaya göre f fonksiyonunun değer kümesinde eşlenmeyen eleman vardır.

O hâlde $f(A) \neq B$ dir.

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için, değer kümesinde eşlenmeyen en az bir eleman kalıyorsa yani $f(A) \neq B$ ise f fonksiyonuna, içine fonksiyon denir.

Örnek : Aşağıda verilen fonksiyonların içine fonksiyon olup olmadığını inceleyelim.



Çözüm :

- $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu içine fonksiyondur. Çünkü B kümesinde eşlenmeyen eleman kalmıştır.
- $g : C \rightarrow D$ fonksiyonu içine fonksiyon değildir. Çünkü B kümesinde eşlenmeyen eleman kalmamıştır.

A dan B ye tanımlanan bir f fonksiyonu, hem bire bir hem de içine fonksiyon ise f fonksiyonuna bire bir ve içine fonksiyon denir.

4. Özdeşlik (Birim) Fonksiyon

Örnek : Ticari amacı olan bir kuruluş, aldığı her malı 2 katına satarak kâr elde ediyor. Bu durum $x \rightarrow f(x) = 2x$ şeklinde modellenebilir. Kâr amacı olmayan bir vakıf ise aldığı her malı kâr elde etmeden satıyor. Bu durum ise $x \rightarrow g(x) = x$ şeklinde modellenebilir.

Buna göre 5 TL ye alınan bir malın, ticari kuruluşta ve vakıf kuruluşunda ne kadara satılacağını bulalım.

Çözüm :

$$f(x) = 2x \Rightarrow f(5) = 2 \cdot 5 = 10 \quad \text{ve} \quad g(x) = x \Rightarrow g(5) = 5 \quad \text{olarak bulunur.}$$

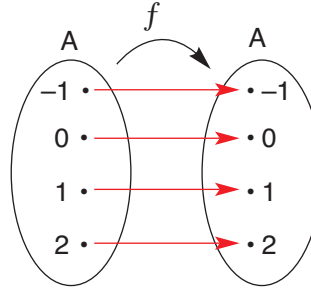
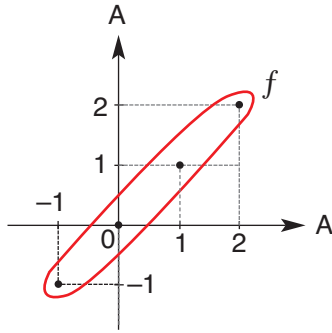
Buradan görülebilir ki f fonksiyonundaki her eleman kendisinin iki katına eşlenir. g fonksiyonunda ise her eleman tekrar kendisine eşlenir.

$f : A \rightarrow A$ fonksiyonunda, f fonksiyonu A kümesindeki her elemanı tekrar kendisine eşliorsa f fonksiyonuna özdeşlik fonksiyon ya da birim fonksiyon denir. Kısaca $I : A \rightarrow A$, $I(x) = x$ fonksiyonu birim fonksiyondur. Birim fonksiyon bire bir ve örten bir fonksiyondur.

Örnek : $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $f: A \rightarrow A$, $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini ve şemasını çizerek fonksiyon türünü belirleyelim.

Çözüm :

$$f(x) = x \Rightarrow f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1 \quad \text{ve} \quad f(2) = 2 \quad \text{dir.}$$



f birim fonksiyondur, aynı zamanda bire bir ve örten dir.

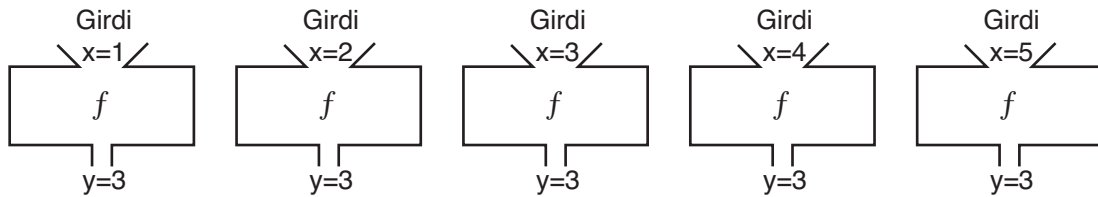
Örnek : $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = (a - 2)x + b + 3$ fonksiyonunun birim fonksiyon olabilmesi için a ve b ne olmalıdır? Bulalım.

Çözüm : Birim fonksiyonun $f(x) = x$ şeklinde olduğunu biliyoruz. O hâlde $f(x) = (a - 2)x + b + 3$ fonksiyonunda x in kat sayısı 1, sabit terim ise 0 olmalıdır. Bu durumda,

$$a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \quad \text{ve} \quad b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3 \quad \text{olmalıdır.}$$

5. Sabit Fonksiyon

Örnek : Aşağıda girdileri x ile, fonksiyonu f ile ve çıktıları da y ile gösteren bir fonksiyon makinesi veriliyor.



f fonksiyonunu liste yöntemi ile gösterelim. Tüm girdilerden elde edilen çıktılar aynı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm :

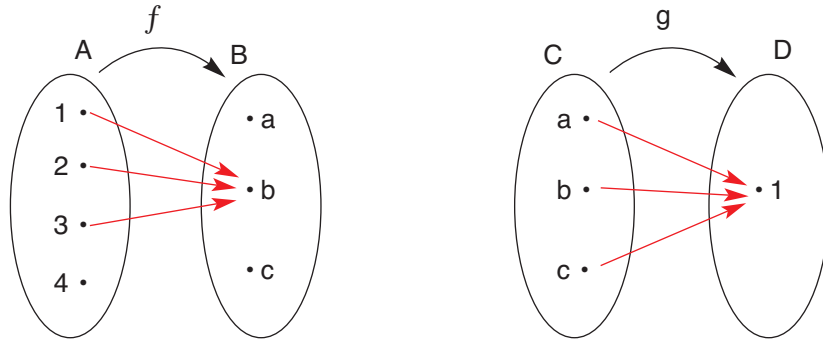
$$f = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$$

$f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(3) = 3$, $f(4) = 3$ ve $f(5) = 3$ olduğundan tüm girdilerin çıktıları aynıdır.

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için A kümesindeki bütün elemanlar, B kümesindeki yalnız bir eleman ile eşleniyorsa f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

$\forall x \in A$ için, $f(x) = c$ ($c \in B$) ise f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Örnek : Aşağıda verilen fonksiyonların türlerini belirleyelim.



Çözüm :

- $f : A \rightarrow B$ ye sabit fonksiyon ve içinedir.
- $g : C \rightarrow D$ ye sabit fonksiyon ve örtendir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-3)x^2 - (a+b)x + 5$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olabilmesi için a ve b ne olmalıdır? Bulalım.

Çözüm : $f(x) = (a-3)x^2 - (a+b)x + 5$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olabilmesi için x^2 ve x in kat sayılarının 0 olması gerekir.

Bu durumda,

$$(a-3) = 0 \Rightarrow a=3 \text{ ve } a+b=0 \Rightarrow 3+b=0 \Rightarrow b=-3 \text{ olmalıdır.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{k-1}{3}\right)x^2 + (3m-1)x$ fonksiyonunun birim fonksiyon olması için k ve m değerlerini bulalım.

Çözüm : f fonksiyonunun birim fonksiyon olması için

$$\frac{k-1}{3} = 0 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1, \quad 3m-1=0 \Rightarrow 3m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{3} \text{ olmalıdır.}$$

6. Doğrusal Fonksiyon

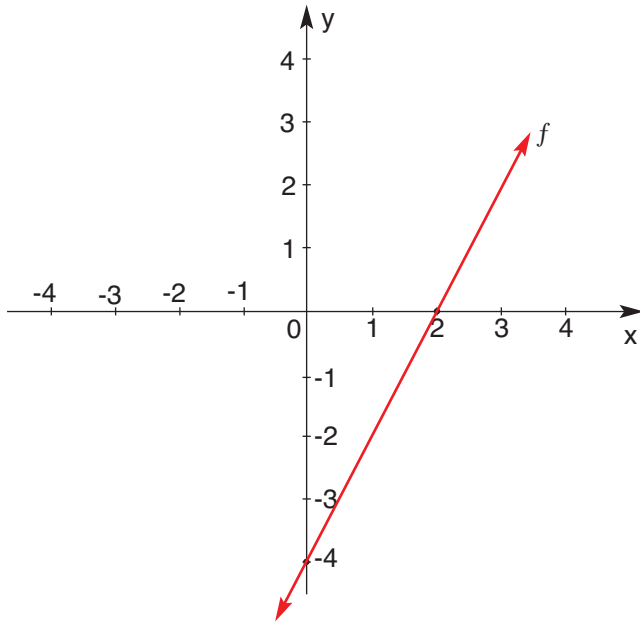
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y = 2x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm :

$y = 2x - 4$ doğrusundan geçen iki nokta belirleyelim.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 4 \Rightarrow y = -4$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2 \cdot x - 4 \Rightarrow x = 2$$



f fonksiyonu $(0, -4)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçen bir doğruyu ifade eder.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlar doğrusal fonksiyonlardır.

Örnek : f doğrusal fonksiyon, $f(1) = 3$ ve $f(3) = -5$ ise $f(100)$ ün değerini bulalım.

Çözüm :

f , doğrusal fonksiyon ise $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 \Rightarrow f(1) = a + b = 3 \\ f(3) = -5 \Rightarrow f(3) = 3a + b = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -a - b = -3 \\ + 3a + b = -5 \\ \hline 2a = -8 \\ a = -4 \text{ tür.} \end{array}$$

$$a = -4 \Rightarrow -4 + b = 3 \Rightarrow b = 7 \text{ bulunur.}$$

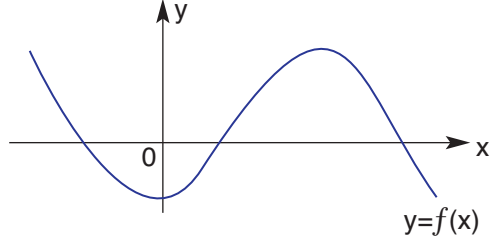
O hâlde f doğrusal fonksiyonu,

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = -4x + 7 \text{ şeklindedir. Buna göre}$$

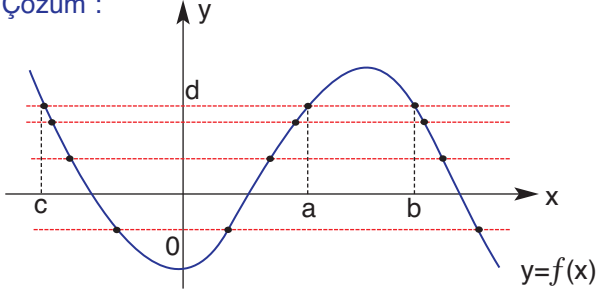
$$f(100) = -4 \cdot 100 + 7 = -393 \text{ tür.}$$

Örnek :

Yanda grafiği verilen ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan fonksiyon bire bir midir? Bulalım.



Çözüm :



x eksenine çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kesmektedir. Tanım kümesindeki a, b ve c noktalarının görüntüleri d noktasıdır. Bu durumda f bire bir olmaz.

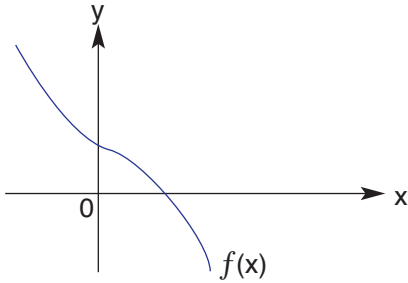
Yatay Doğru Testi

1. Grafiği verilen bir fonksiyonun bire bir olup olmadığını x eksenine çizdiğimiz paralel doğrular, yardımıyla anlayabiliriz. x eksenine çizdiğimiz paralel doğrular, grafiği bir tek noktada kesiyorsa değer kümesindeki bir eleman tanım kümesinden sadece 1 elemanla eşleşiyor demektir ve bu durumda fonksiyon bire birdir, birden fazla noktada kesiyorsa tanım kümesindeki birden fazla eleman değer kümesinden aynı elemanla eşleştiğinden fonksiyon bire bir değildir. Buna yatay doğru testi denir.

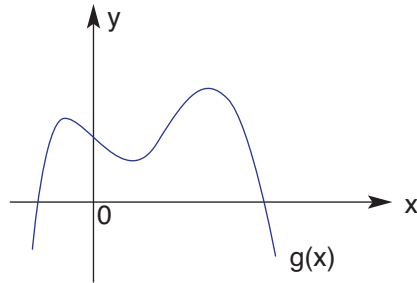
2. Sabit fonksiyonun grafiği x eksenine paralel bir doğrudur.

Örnek : Aşağıda grafiği verilen ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonların bire bir olup olmadığını inceleyelim.

a.

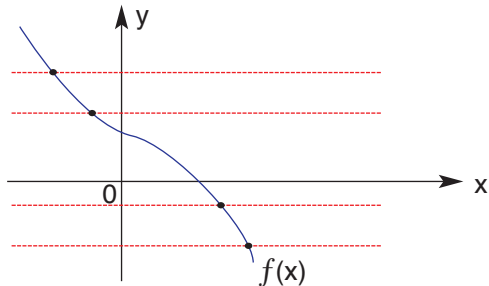


b.



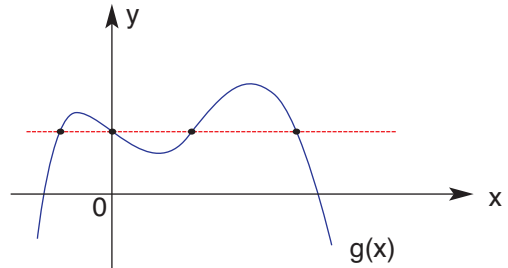
Çözüm :

a.



x eksenine çizilen paralel doğrular, eğriyi en fazla bir noktada kestiğinden fonksiyon bire birdir.

b.



x eksenine çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kestiğinden fonksiyon bire bir değildir.



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıda tanımlanan bağıntılardan hangilerinin fonksiyon olduğunu bulunuz.

a. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 5$$

b. $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \rightarrow g(x) = 7x + 2$$

c. $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$x \rightarrow h(x) = (x + 2)^2$$

ç. $t: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \rightarrow t(x) = -x$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 5}$ bağıntısının bir fonksiyon belirtmesi için tanım kümesinden hangi eleman çıkarılmalıdır?

3. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{3}$ fonksiyonları tanımlanıyor.

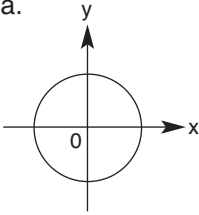
$$\frac{4 \cdot f(2) - 9 \cdot g(3)}{f(4) \cdot g(1)} \text{ değerini hesaplayınız.}$$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x - a}{3}$ fonksiyonu için $f(2) = 6$ ise a sayısını bulunuz.

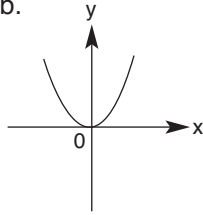
5. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 7$ ve $g(x) = 3x + 2$ fonksiyonları veriliyor. $f(2m) = g(m)$ olduğuna göre m sayısını bulunuz.

6. Aşağıda grafikleri verilen bağıntılardan hangileri fonksiyondur? Bulunuz.

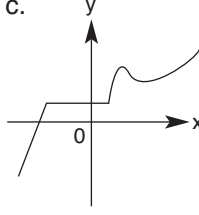
a.



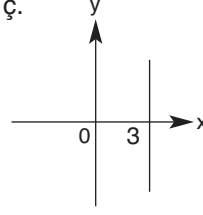
b.



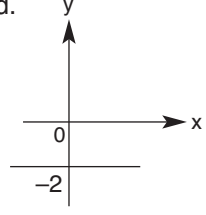
c.



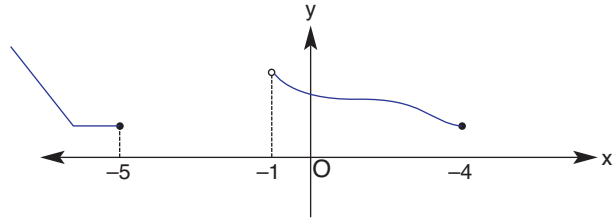
ç.



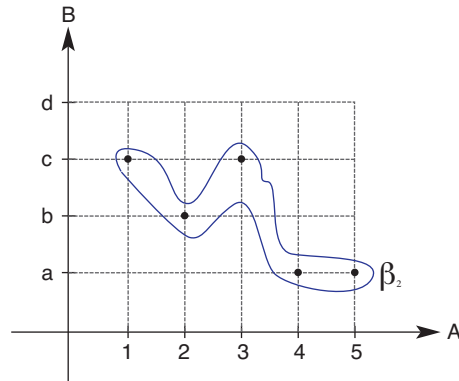
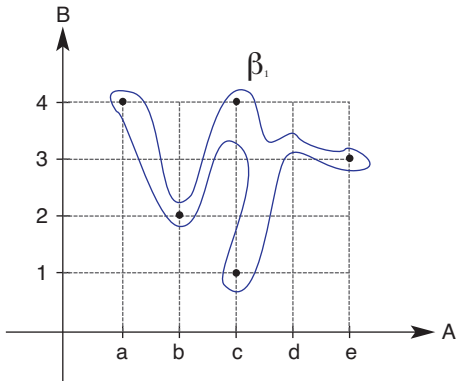
d.



7. Yanda grafiği verilen fonksiyonun hangi x değerleri için $f(x)$ vardır.



8. Aşağıda grafikleri verilen bağıntılardan fonksiyon olanı belirleyip tanım ve görüntü kümelerini yazınız.



İŞLEM



Depremeler insanların çok zarar gördüğü doğal afetlerdendir. Depremde en çok hasar gören binalar depreme dayanıklı yapılmamış binalardır. Bir binanın depreme dayanıklılığı daha çok, kullanılan betonun kalitesine bağlıdır. Beton elde etmek için %10 çimento, %30 kum, %40 çakıl ve %20 oranında su kullanılır.

✓ Depremde binaların yıkılmasının sebebi aynı malzemelerin farklı oranda kullanılması mıdır?

✓ Olması gerekenin dışında farklı oranlarda çimento, kum, çakıl ve su kullanılarak elde edilen betonun kalitesi hakkında ne söyleyebilirsiniz?

✓ 1 kg çimento ile kaç kg kum, çakıl ve su kullanılarak beton elde edilebilir?



İşlem



Aşağıda \star ve \triangle sembolleri ile verilen eşitlikleri inceleyiniz.

$$1 \star 2 = 2$$

$$5 \triangle 3 = 22$$

$$4 \star 5 = 20$$

$$6 \triangle 2 = 34$$

$$6 \star 7 = 56$$

$$10 \triangle 5 = 95$$

$$8 \star 9 = 72$$

$$1 \triangle 5 = -4$$

✧ Yukarıda \star ve \triangle sembollerinin ifade ettiği kuralları bulunuz.

✧ \star işlemi için bulduğunuz kuralı $a \star b$ şeklinde ifade ediniz.

✧ \triangle işlemi için bulduğunuz kuralı $a \triangle b$ şeklinde ifade ediniz.

➤ $a \star b$ şeklinde ifade edilen kurala göre $5 \star 2$ gibi herhangi bir işlemin sonucu da bulunabilir mi? Arkadaşlarınızla tartışınız.

Örnek : Z tam sayılar kümesi olmak üzere $f: Z \times Z \rightarrow Z$, $f(x, y) = x \cdot y + x + 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Buna göre;

a. $f(1, 2)$

b. $f(0, 3)$

c. $f(-2, 2)$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm :

$f(x, y) = x \cdot y + x + 1$ fonksiyonu için her bir (x, y) sıralı ikilisine farklı bir $x \cdot y + x + 1$ tam sayısı karşılık gelir. Buna göre;

a. $f(1, 2) = 1 \cdot 2 + 1 + 1 = 4$

b. $f(0, 3) = 0 \cdot 3 + 0 + 1 = 1$

c. $f(-2, 2) = -2 \cdot 2 - 2 + 1 = -5$

olarak bulunur.

A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ nın bir f alt kümesinden A ya tanımlanan her fonksiyona A da bir ikili işlem (veya işlem) denir.

İşlem tanımlanırken \triangle , \square , \circ , \star gibi semboller kullanılır.

$A \times A$ dan A ya bir \triangle işlemi tanımlandığında her $(x, y) \in A \times A$ sıralı ikilisi bir tek $z \in A$ ile eşlenecektir. Bu $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \triangle y = z$ biçiminde gösterilir “ x işlem y eşittir z ” biçiminde okunur.

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde Δ işlemi $x \Delta y = x^2 + y^2 - 3$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulalım.

- a. $0 \Delta 1$ b. $2 \Delta 2$ c. $1 \Delta 5$ ç. $(-1) \Delta (-2)$

Çözüm : $x \Delta y = x^2 + y^2 - 3$ işlemi, ikilinin birinci bileşeninin karesi ile ikinci bileşeninin karesinin toplamının 3 eksiği şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre;

- a. $0 \Delta 1 = 0^2 + 1^2 - 3 = -2$, b. $2 \Delta 2 = 2^2 + 2^2 - 3 = 5$,
c. $1 \Delta 5 = 1^2 + 5^2 - 3 = 23$, ç. $(-1) \Delta (-2) = (-1)^2 + (-2)^2 - 3 = 2$ olarak bulunur.

Örnek : $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi verilsin. “ \star ” işlemi $A \times A$ nın her bir ikilisini ikilinin ikinci terimiyle eşleştiren fonksiyon biçiminde tanımlanıyor. “ \star ” işlemini tablo ile gösterelim.

Çözüm : $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ tür.

O hâlde tanımlanan işleme göre

- $(1,1) \rightarrow 1$, $(1,2) \rightarrow 2$, $(1,3) \rightarrow 3$,
 $(2,1) \rightarrow 1$, $(2,2) \rightarrow 2$, $(2,3) \rightarrow 3$,
 $(3,1) \rightarrow 1$, $(3,2) \rightarrow 2$, $(3,3) \rightarrow 3$ tür.

\star	1	2	3	→ Satır
1	1	2	3	
2	1	2	3	
3	1	2	3	
	↓ Sütun			

Tablo yandaki gibi olur.

Sonlu kümede tanımlanan bir işlem, işlem tablosu ile gösterilir. Tabloya göre bir ikili işlemin değeri, satır ve sütunun kesiştiği yerdeki elemandır.

Örnek : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ya tanımlı \ast ve Δ işlemleri $x \ast y = y^x - x^2$ ve $x \Delta y = x + 2y - 1$ şeklinde tanımlanıyor. Tanımlanan işlemlere göre;

- a. $2 \ast (2 \Delta 1)$ işleminin sonucunu bulalım.
b. $a \Delta 1 = 2 \ast (-1)$ ise a sayısını bulalım.
c. $(1 \ast 3) \Delta (2 \ast 2)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

- a. $2 \ast (2 \Delta 1) = 2 \ast (2 + 2 \cdot 1 - 1) = 2 \ast 3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$,
b. $a \Delta 1 = 2 \ast (-1) \Rightarrow a + 2 \cdot 1 - 1 = (-1)^2 - 2^2$
 $\Rightarrow a + 1 = -3 \Rightarrow a = -4$,
c. $(1 \ast 3) \Delta (2 \ast 2) = (3^1 - 1^2) \Delta (2^2 - 2^2) = 2 \Delta 0 = 2 + 2 \cdot 0 - 1 = 1$ dir.

İşlemin Özellikleri

1. Kapalılık Özelliği

Örnek : $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ tek doğal sayıları kümesinde tanımlı “ \triangle ” işlemi, $\forall (a, b) \in A$ için $a \triangle b = a \cdot b + 2$ biçiminde veriliyor. $A \times A$ dan alınan bütün ikililerin “ \triangle ” işlemine göre alacağı değerlerin yine A kümesinde olup olmayacağını inceleyelim.

Çözüm : \triangle işlemi ikilinin birinci ve ikinci bileşenlerinin çarpımının 2 fazlası olarak tanımlanmıştır. Bu bileşenler tek sayı olduğundan, bileşenlerin çarpımının iki fazlası yine bir tek sayı olup sonuç daima A kümesine aittir.

A kümesi üzerinde tanımlanan bir işlem “ \triangle ” olmak üzere her $x, y \in A$ için $x \triangle y \in A$ ise A kümesinin “ \triangle ” işlemine göre kapalılık özelliği vardır.

Yukarıdaki işlemi $B \subset A$ olan $B = \{1, 3, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlasak $3 \triangle 5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17 \notin B$ olur ki bu durumda \triangle işlemi B kümesi üzerinde kapalı değildir.

Örnek : $A = \{-1, 0, 1\}$ kümesi üzerinde $x * y = x + y$ işlemi tanımlanıyor. A kümesinin $*$ işlemine göre kapalı olup olmadığını bulalım.

Çözüm : A kümesi üzerinde tanımlanan “ $*$ ” işlemine göre

$$1 * 1 = 1 + 1 = 2 \notin A \text{ olduğundan } A \text{ kümesi } * \text{ işlemine göre kapalı değildir.}$$

2. Değişme Özelliği

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde $x \square y = x + y + x \cdot y$ işlemi tanımlanıyor. $x \square y$ ve $y \square x$ işlemlerinden elde edilecek değerler aynı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm : $x \square y = x + y + x \cdot y$
 $= y + x + y \cdot x = y \square x$ olur. Bunu sayısal değerler üzerinde gösterelim.

$$1 \square 2 = 1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5, \quad 2 \square 1 = 2 + 1 + 2 \cdot 1 = 5 \text{ olup } 1 \square 2 = 2 \square 1 \text{ dir.}$$

A kümesi üzerinde tanımlanan bir işlem “ \triangle ” olmak üzere her $x, y \in A$ için $x \triangle y = y \triangle x$ ise “ \triangle ” işleminin değişme özelliği vardır.

Örnek : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ya tanımlı \triangle işlemi $x \triangle y = x^y$ şeklinde tanımlanıyor. \triangle işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm : Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan “ \triangle ” işlemine göre

$$2 \triangle 3 = 2^3 = 8 \text{ ve } 3 \triangle 2 = 3^2 = 9 \text{ olduğundan } \triangle \text{ işleminin değişme özelliği yoktur.}$$

Örnek : $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan “ \circ ” işlemi, yandaki tablo ile veriliyor. “ \circ ” işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını bulalım.

\circ	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Çözüm : Tablodan,

$$\begin{aligned}
 a \circ b &= b \circ a = b, & a \circ c &= c \circ a = c \\
 a \circ d &= d \circ a = d, & a \circ e &= e \circ a = e \\
 b \circ c &= c \circ b = d, & b \circ d &= d \circ b = e \\
 b \circ e &= e \circ b = a, & c \circ d &= d \circ c = a \\
 c \circ e &= e \circ c = b, & d \circ e &= e \circ d = c
 \end{aligned}$$

\circ	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

olduğu görülür. Buna göre “ \circ ” işleminin değişme özelliği vardır.

→ köşegen

İşlem tablosu üzerinde, her elemanın köşegenine göre simetriği varsa verilen işlemin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde $x \triangle y = x + y + 2$ işlemi tanımlanıyor.

$x \triangle (y \triangle z)$ ve $(x \triangle y) \triangle z$ işlemlerinden elde edilecek değerler aynı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm :

$$\begin{aligned}
 x \triangle (y \triangle z) &= x \triangle (y + z + 2) = x + y + z + 2 + 2 = x + y + z + 4 \\
 (x \triangle y) \triangle z &= (x + y + 2) \triangle z = x + y + 2 + z + 2 = x + y + z + 4 \text{ olup}
 \end{aligned}$$

$x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$ dir.

A kümesi üzerinde tanımlanan bir işlem “ \triangle ” olmak üzere, her $x, y, z \in A$ için $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$ ise “ \triangle ” işleminin birleşme özelliği vardır.

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde $x \star y = x \cdot y + y$ işleminin birleşme özelliğinin olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm : Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan “ \star ” işlemine göre $(1 \star 3) \star 2$ ve $1 \star (3 \star 2)$ değerlerini karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}
 (1 \star 3) \star 2 &= (1 \cdot 3 + 3) \star 2 = 6 \star 2 = 6 \cdot 2 + 2 = 14 \\
 1 \star (3 \star 2) &= 1 \star (3 \cdot 2 + 2) = 1 \star 8 = 1 \cdot 8 + 8 = 16
 \end{aligned}$$

olduğundan “ \star ” işleminin birleşme özelliği yoktur.

4. Dağılma Özelliği

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde $(x \triangle y) = x \cdot y + 1$ ve $x \square y = 2x + y$ işlemleri tanımlanıyor. $x \triangle (y \square z)$ ve $(x \triangle y) \square (x \triangle z)$ işlemlerinden elde edilecek değerler aynı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm :

$$\begin{aligned} x \triangle (y \square z) &= x \triangle (2y + z) = x \cdot (2y + z) + 1 = 2xy + xz + 1 \\ (x \triangle y) \square (x \triangle z) &= (x \cdot y + 1) \square (x \cdot z + 1) = 2(x \cdot y + 1) + x \cdot z + 1 = 2xy + 2 + xz + 1 \\ &= 2xy + xz + 3 \text{ olup} \end{aligned}$$

$x \triangle (y \square z)$ ve $(x \triangle y) \square (x \triangle z)$ işlemlerinden elde edilen değerler aynı değildir.

A kümesi üzerinde “ \triangle ” ve “ \square ” işlemleri tanımlanıyor. Her $x, y, z \in A$ için $x \triangle (y \square z) = (x \triangle y) \square (x \triangle z)$ ise “ \triangle ” işleminin “ \square ” işleminin üzerine dağılma özelliği vardır.

Buna göre yukarıdaki “ \triangle ” işleminin “ \square ” işleminin üzerine dağılma özelliği yoktur.

Örnek : Z de “ \star ” ve “ \triangle ” işlemleri $a \star b = a + b$ ve $a \triangle b = a \cdot b$ biçiminde tanımlanıyor. “ \triangle ” işleminin “ \star ” işleminin üzerine dağılma özelliği olup olmadığını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} a \triangle (b \star c) &= a \triangle (b + c) = a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a \triangle b) \star (a \triangle c) &= (a \cdot b) \star (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c \end{aligned}$$

olup $a \triangle (b \star c) = (a \triangle b) \star (a \triangle c)$ olduğundan “ \triangle ” işleminin “ \star ” işleminin üzerine dağılma özelliği vardır.

5. Etkisiz (Birim) Eleman

Örnek : $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan “ \star ” işlemleri yandaki tablo ile veriliyor. Buna göre $a \star c, c \star a, b \star c, c \star b, d \star c, c \star d, e \star c, c \star e$ işlemlerindeki ortak özelliği inceleyelim.

Çözüm :

$$\begin{aligned} a \star c &= c \star a = a, \quad b \star c = c \star b = b, \\ d \star c &= c \star d = d, \quad e \star c = c \star e = e \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

\star	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	c	d	e	a	b

Görüldüğü gibi c elemanı işleme girdiği elemana hiç etki etmemiştir, c elemanının a ile işleminin sonucu a, b ile işleminin sonucu b, d ile işleminin sonucu d, e ile işleminin sonucu e sonucunu vermiştir.

A kümesi üzerinde tanımlanan bir işlem “ \triangle ” olmak üzere, her $x \in A$ için $x \triangle e = e \triangle x = x$ koşulunu gerçekleyen bir $e \in A$ varsa e “ \triangle ” işleminin birim elemanıdır.

Örnek : Gerçek sayılar kümesi üzerinde “ $+$ ” ve “ \cdot ” işlemlerinin etkisiz elemanlarını bulalım.

Çözüm :

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olduğundan “ $+$ ” işleminin etkisiz elemanı 0 dir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ olduğundan “ \cdot ” işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

Örnek : Tam sayılar kümesinde, $x \star y = x + y - 5$ şeklinde tanımlanan “ \star ” işleminin etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm : Tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan “ \star ” işleminde;

$$x \star y = x + y - 5 = y + x - 5 = y \star x \text{ olduğundan, bu işlemin değişme özelliği vardır.}$$

$$x \star e = x \Rightarrow x + e - 5 = x \Rightarrow e - 5 = 0 \Rightarrow e = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Tam sayılar kümesi üzerinde, $x \triangle y = x + y - 7$ de tanımlanan “ \triangle ” işleminin etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm : “ \triangle ” işleminin değişme özelliği vardır.

$$x \triangle e = x \Rightarrow x + e - 7 = x \Rightarrow e - 7 = 0 \Rightarrow e = 7 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Sayma sayılar kümesi üzerinde, $x \star y = 5x + 4y$ şeklinde tanımlanan “ \star ” işleminin varsa etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm :

$x \star e = x \Rightarrow 5x + 4e = x \Rightarrow 4e = -4x \Rightarrow e = -x$ bulunur. Sabit bir e sayısı bulamadığımızdan sayma sayılar kümesi üzerinde, “ \star ” işleminin birim elemanı yoktur.

Bir işlemde birim eleman varsa tektir.

Örnek : $A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan “ \square ” işlemi yandaki tablo ile veriliyor. “ \square ” işleminin “birim” elemanını bulalım.

Çözüm :

1.yol:

$1 \square 5 = 1$, $2 \square 5 = 2$, $3 \square 5 = 3$, $4 \square 5 = 4$ olduğundan “ \square ” işleminin birim elemanı 5 tir.

2.yol:

Tablodan yararlanarak birim elemanı bulmak için işlemin tanımlı olduğu kümenin elemanlarının sıralandığı satır ve sütun bulunarak kesiştirilir. Kesişim elemanı birim elemandır. Bu durumda yandaki işlem tablosundan birim elemanın 5 olduğu görülebilir.

6. Ters Eleman

Örnek : $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan “ \triangle ” işlemi yandaki tablo ile veriliyor. Buna göre $a \triangle b$, $b \triangle a$, $c \triangle e$, $e \triangle c$ işlemlerindeki ortak özelliği inceleyelim.

\square	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

\triangle	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Çözüm :

$$a \triangle b = d, b \triangle a = d, c \triangle e = d, e \triangle c = d \text{ dir.}$$

Bu işlemlerin hepsinin sonucu d dir. İşlem tablosu üzerinde de görüldüğü gibi “ \triangle ” işleminin etkisiz elemanı d dir.

A kümesi üzerinde tanımlanan “ \triangle ” işleminin birim elemanı e olmak üzere her $x \in A$ için $x \triangle y = y \triangle x = e$ koşulunu sağlayan bir $y \in A$ varsa y elemanı, x in “ \triangle ” işlemine göre tersidir ve $y = x^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Örnek : Gerçek sayılar kümesi üzerinde, $x \star y = 4xy + 5x + 5y + 5$ şeklinde tanımlanan “ \star ” işlemi için 2 nin tersini bulalım.

Çözüm :

“ \star ” işlemi değişmelidir. Önce “ \star ” işleminin birim elemanını bulalım.

$$\begin{aligned} x \star e &= x \Rightarrow 4xe + 5x + 5e + 5 = x \\ &\Rightarrow 4xe + 5e = -4x - 5 \\ &\Rightarrow e(4x + 5) = -(4x + 5) \\ &\Rightarrow e = -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Şimdi “ \star ” işlemine göre 2 nin tersini bulalım. $2^{-1} = y$ olsun.

$$\begin{aligned} 2 \star 2^{-1} &= e \Rightarrow 2 \star y = -1 \Rightarrow 4 \cdot 2y + 5 \cdot 2 + 5y + 5 = -1 \\ &\Rightarrow 13y = -16 \Rightarrow y = -\frac{16}{13} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlanan “ \triangle ” işlemi yan-daki tablo ile veriliyor. “ \triangle ” işlemine göre A kümesindeki elemanların tersini bulalım.

\triangle	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Çözüm :

“ \triangle ” işleminin birim elemanı b dir. a, b, c ve d elemanlarının tersi;

$$a \triangle c = b \text{ olduğundan } a^{-1} = c,$$

$$b \triangle b = b \text{ olduğundan } b^{-1} = b,$$

$$c \triangle a = b \text{ olduğundan } c^{-1} = a,$$

$$d \triangle d = b \text{ olduğundan } d^{-1} = d \text{ şeklinde bulunur.}$$

\triangle	a	b	c	d
a	d	a	(b)	c
b	a	(b)	c	d
c	(b)	c	d	a
d	c	d	a	(b)

İşlem tablosundan, hangi elemanın tersi bulunacaksa önce o satırdaki etkisiz eleman bulunur. Etkisiz elemanın bulunduğu sütunun başındaki eleman, istenilen elemanın tersidir.

Ayrıca bir x elemanının tersi y ise y elemanının tersi de x tir.

Örnek : Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $x \square y = 3xy + x + y$ işleminde tersi olmayan elemanı bulalım.

Çözüm :

" \square " işlemi değişmelidir. Önce " \square " işleminin etkisiz elemanını bulalım.

$$\begin{aligned} x \square e = x &\Rightarrow 3xe + x + e = x \Rightarrow 3xe + e = 0 \\ \Rightarrow e(3x + 1) = 0 &\Rightarrow e = \frac{0}{3x + 1} \Rightarrow e = 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Şimdi, $a \in \mathbb{R}$ nin " \square " işlemine göre tersini bulalım. $a^{-1} = b$ olsun.

$$\begin{aligned} a \square b = 0 &\Rightarrow 3ab + a + b = 0 \\ \Rightarrow b(3a + 1) = -a &\Rightarrow b = -\frac{a}{3a + 1} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Paydayı sıfır yapan değeri bulalım.

$$3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ dir.}$$

$a = -\frac{1}{3}$ için payda sıfır olacağından, b tanımsız olur. Bu yüzden $-\frac{1}{3}$ ün " \square " işlemine göre tersi yoktur.

Bir işlemde, bir elemanın tersi varsa bu ters eleman bir tanedir.

Örnek : Yanda tanımlanan \triangle işlemi için $[(1 \triangle 2)^{-1} \triangle 2^{-1}]^{-1}$ nin değerini hesaplayalım.

Çözüm :

\triangle işleminin etkisiz elemanı 4 olup

$$[(1 \triangle 2)^{-1} \triangle 2^{-1}]^{-1} = [3^{-1} \triangle 2]^{-1} = [1 \triangle 2]^{-1} = 3^{-1} = 1$$

olarak bulunur.

\triangle	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Örnek : R de tanımlanan $x \star y = 4x + 4y + \frac{xy}{2} + 24$ işleminin birim elemanını bulup “ \star ” işlemine göre 2 ve -6 sayılarının terslerini bulalım.

Çözüm :

$$x \star y = 4x + 4y + \frac{xy}{2} + 24$$

$$y \star x = 4y + 4x + \frac{yx}{2} + 24$$

\star işleminin değişme özelliği vardır. O hâlde $x \star e = x$ ifadesinden,

$$x \star e = x \Rightarrow 4x + 4e + \frac{xe}{2} + 24 = x \Rightarrow e\left(\frac{8+x}{2}\right) = -3x - 24$$

$$\Rightarrow e = \frac{2 \cdot (-3x - 24)}{8+x} = -6 \text{ olur.}$$

2 nin tersi m olsun. Bu durumda, $2 \star m = m \star 2 = e = -6$ olmalıdır.

$$2 \star m = -6 \Rightarrow 4 \cdot 2 + 4m + \frac{2m}{2} + 24 = -6 \Rightarrow 5m = -38 \Rightarrow m = -\frac{38}{5} \text{ olur.}$$

-6 nın tersi n olsun. Bu durumda $(-6) \star n = n \star (-6) = e = -6$ olmalıdır.

$$(-6) \star n = -6 \Rightarrow (-6) \cdot 4 + 4n + \frac{-6n}{2} + 24 = -6 \Rightarrow n = -6 \text{ olur.}$$

Görüldüğü gibi -6 nın tersi yine -6 dır.

Etkisiz elemanın tersi kendisidir.

Örnek : R de $\frac{2}{x \triangle y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ işlemi veriliyor. $5 \triangle a = 8$ ise a sayısını bulalım.

Çözüm : İşlemin kuralına göre

$$\frac{2}{5 \triangle a} = \frac{1}{5} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{1}{5} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{20} \Rightarrow a = 20 \text{ bulunur.}$$

7. Yutan Eleman

Örnek : Gerçek sayılar kümesinde “.” işleminin yutan elemanını bulalım.

Çözüm : $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0$. $a = 0$ olduğundan gerçekte sayılar kümesi üzerinde “.” işleminin yutan elemanı sıfırdır.

A kümesi üzerinde tanımlanan bir işlem “ \triangle ” olmak üzere her $x \in A$ için $x \triangle y = y \triangle x = y$ koşulunu gerçekleyen bir $y \in A$ varsa y, “ \triangle ” işleminin yutan elemanıdır.

Örnek : Gerçek sayılar kümesinde “ \star ” işlemi $x \star y = x + y + 7xy$ biçiminde tanımlanıyor. “ \star ” işleminin yutan elemanını bulalım.

Çözüm : $x \star y = x + y + 7xy = y + x + 7yx = y \star x$ olduğundan “ \star ” işleminin değişme özelliği vardır. Bu yüzden $x \star y = y = y \star x$ eşitliğinin sadece bir tarafıyla işlem yapabiliriz.

$x \star y = y \Rightarrow x + y + 7xy = y \Rightarrow x \cdot (1 + 7y) = 0$ olur. Buna göre $1 + 7y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}$ yutan elemandır.



ALİŞTIRMALAR

1. Gerçek sayılar kümesi üzerinde, $a \triangle b = a^b - b$ işlemi tanımlanıyor. $(2 \triangle 1) \triangle (-1 \triangle -3)$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. Gerçek sayılar kümesinde tanımlanan aşağıdaki işlemlerden hangilerinin değişme özellikleri vardır?

a. $x \square y = x + 2y$ b. $x \star y = 2x + 2y + 5$ c. $x \triangle y = x + x^y$

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde yanda tablosu verilen “ \star ” işlemi tanımlanıyor. Buna göre;

a. “ \star ” işleminin birim elemanı kaçtır?

b. $(1 \star 3)^{-1} \star 2 = ?$

c. $(2^{-1} \star 0) \star 1^{-1} = ?$

ç. $0^{-1} \star (4^{-1} \star 1) = ?$

d. $(1 \star 3^{-1}) \star (1 \star 2) = ?$

\star	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	0
1	2	3	4	0	1
2	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4

4. R de, $a \star b = \begin{cases} b - a, & a \cdot b \geq 0 \\ 3ab, & a \cdot b < 0 \end{cases}$ ve $a \square b = a^2 - b$ işlemleri tanımlanıyor. Bu işlemlere göre

$[(1 \star 2) \square (-2 \star 3)] \square x = -300$ ise x kaçtır?

5. R de “ \triangle ” işlemi $x \triangle y = x + y - 2xy$ biçiminde tanımlanıyor. “ \triangle ” işleminin birim elemanı kaçtır?

6. R de tanımlanan, $x \square y = 2x + 2y + xy + 2$ işleminin;

a. Birim elemanını, b. 2 nin tersini bulunuz.

7. R de tanımlanan, $x \square y = 5x + 4y + 3xy + 5$ işlemine göre hangi sayının tersi yoktur?

8. Aşağıdaki kümelerin “ \cdot ” (çarpma) işlemine göre kapalı olup olmadıklarını araştırınız.

a. $\{0, 1, 2\}$

b. $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

c. $\{1, 2, 3\}$

9. R de $a \square b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ işlemi veriliyor. $x \square 5 = 7$ ise x kaçtır?

10. R tanımlanan “ \triangle ” işlemi $a \triangle b = a + b - 2ab$ biçiminde tanımlanıyor. “ \triangle ” işleminin yutan elemanı kaçtır?

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER



Dut pekmezi, doktorların başta kansızlık olmak üzere birçok hastalığın tedavisinde hastalarına tavsiye ettiği besinlerdendir. Daha çok doğuda üretilen ve tüketilen bir besindir.

Dut pekmezi yapılırken belli bir miktar dut önce “şıra”ya (dut suyu) daha sonra belli bir işleminden geçirilerek pekmeze dönüşür.

Yaklaşık 70 kg dut önce 50 kg şıraya daha sonra 20 kg pekmeze dönüşür.

✓ Dut-şıra ve şıra-pekmez bağıntılarını kullanarak dut-pekmez arasındaki ilişkiyi fonksiyon olarak ifade edebilir misiniz?

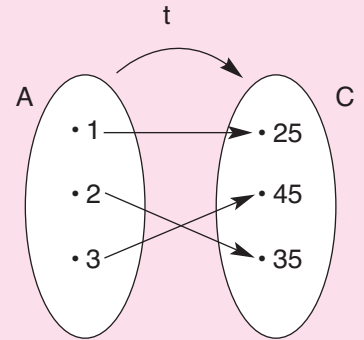
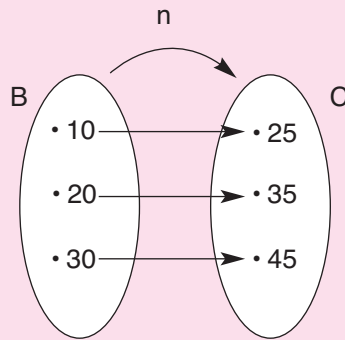
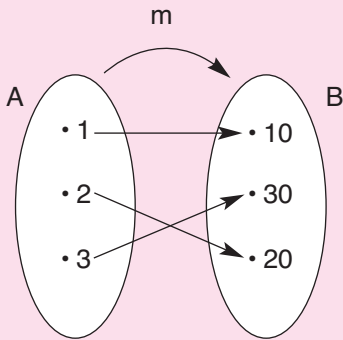


✓ $f(\text{dut}) = \text{şıra}$, $g(\text{şıra}) = \text{pekmez}$ olarak tanımlanırsa girdisi dut, çıktısı pekmez olan fonksiyonu f ve g cinsinden yazabilir misiniz?

Fonksiyonların Bileşkesi



Aşağıda verilen fonksiyonları inceleyiniz.



- m , n ve t fonksiyonlarının kuralları neler olabilir?
- m ve n ile t fonksiyonu arasında nasıl bir bağıntı kurulabilir?
- t fonksiyonu, m ve n nin yaptığı işi tek başına yapıyor olabilir mi? Açıklayınız.
- m ve n fonksiyonlarının türlerini belirleyiniz. t fonksiyonunun varlığı, m ve n fonksiyonlarının hangi özelliklerine bağlıdır?

Örnek : $f(x) = 2x + 5$ ve $g(x) = 3x - 5$ fonksiyonları veriliyor. 1, 3, 5 sayılarının f fonksiyonu altındaki görüntülerini ve bulduğumuz bu değerlerin g fonksiyonu altındaki görüntülerini bulalım.

Çözüm :

$$x = 1 \text{ için } f(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

$$x = 3 \text{ için } f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$$

$x = 5$ için $f(5) = 2 \cdot 5 + 5 = 15$ olur. Bulduğumuz bu sayıların g fonksiyonu altındaki görüntülerini bulalım.

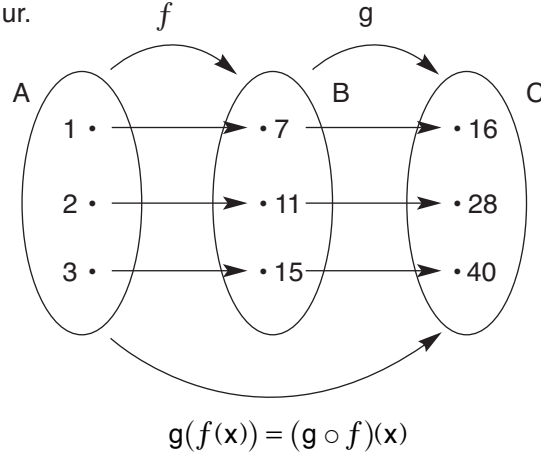
$$g(7) = 3 \cdot 7 - 5 = 16, \quad g(11) = 3 \cdot 11 - 5 = 28 \quad \text{ve} \quad g(15) = 3 \cdot 15 - 5 = 40 \text{ tır.}$$

1, 3 ve 5 sayılarının görüntülerini sırasıyla 16, 28 ve 40 olarak veren ve tek başına f ile g fonksiyonlarının yaptığı işi yapan bir fonksiyon bulalım. Bu fonksiyon k olsun.

$$k(1) = 16, \quad k(3) = 28 \quad \text{ve} \quad k(5) = 40 \text{ olmalıdır.}$$

$k(1) = 16 = g(7) = g(f(1))$, $k(3) = 28 = g(11) = g(f(3))$, $k(5) = 40 = g(15) = g(f(5))$ işlemine göre 1, 3, 5 sayılarını x değişkeni ile değiştirirsek;

$$k(x) = g(f(x)) \text{ olur.}$$



$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları verilsin. Buna göre A kümesindeki bir x elemanını C kümesinde $g(f(x))$ elemanına götüren A dan C ye tanımlı $k(x)$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının bileşkesi denir.

$$k(x) = (g \circ f)(x) : A \rightarrow C \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x + 6$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = 3x + 1$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre;

a. $(f \circ g)(1)$,

b. $(g \circ h)(5)$,

c. $(h \circ f)(3)$,

ç. $(h \circ f)(x)$,

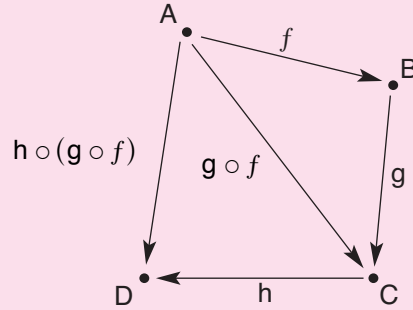
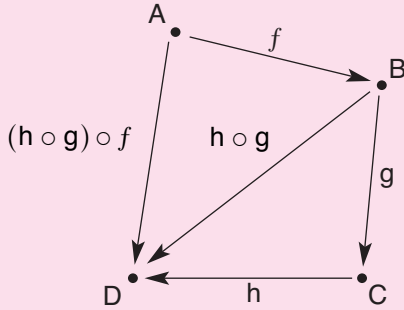
d. $(g \circ f \circ h)(x)$ ifadelerinin eşitini bulalım.

Çözüm :

- a. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3 \cdot 1 + 1) = f(4) = 4 + 6 = 10$,
- b. $(g \circ h)(5) = g(h(5)) = g(5 + 1) = g(6) = 3 \cdot 6 + 1 = 19$,
- c. $(h \circ f)(3) = h(f(3)) = h(3 + 6) = h(9) = 9 + 1 = 10$,
- ç. $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x + 6) = (x + 6) + 1 = x + 7$,
- d. $(g \circ f \circ h)(x) = (g \circ f)(h(x)) = (g \circ f)(x + 1) = g(f(x + 1)) = g((x + 1) + 6) = g(x + 7) = 3(x + 7) + 1 = 3x + 21 + 1 = 3x + 22$ olur.



※ Aşağıdaki şemalardan yararlanarak f , g , h , hog , gof , $(hog)of$ ve $ho(gof)$ fonksiyonlarının tanım ve değer kümelerini inceleyiniz.



➤ Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği var mıdır? Açıklayınız.

※ Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerlere f ve g fonksiyonlarının kurallarından yararlanarak fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını yazınız.

$f(x)$	$g(x)$	$(fog)(x)$	$(gof)(x)$
x	$x + 1$		
x	$2x + 3$		
x	$x - 1$		

➤ Tabloda yaptığınız işlemleri inceleyiniz. $f(x) = x$ fonksiyonu için ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.

Örnek : f , g , h fonksiyonları için bileşke işleminin birleşme özelliği var mıdır? Görelim.

Çözüm :

Birleşme özelliği olması için $[(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)]$ olmalıdır. Buna göre;

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x) \text{ ve}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

olduğundan bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = 3x - 5$ ve $g(x) = \frac{x-1}{3}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre

$(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right) - 5 = x - 1 - 5 = x - 6,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 5) = \frac{3x - 5 - 1}{3} = \frac{3x - 6}{3} = x - 2 \text{ dir.}$$

O hâlde ; $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ tir.

Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

Örnek : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 3$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları veriliyor. $(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

Çözüm :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 7x - 3,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7x - 3) = 7x - 3 \text{ tür.}$$

Burada, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = f(x)$ tir. Çünkü, $g(x) = x$ fonksiyonu birim fonksiyondur.

$f: A \rightarrow B$ ve $I: A \rightarrow A$, $I(x) = x$ fonksiyonu tanımlansın. Her f fonksiyonu için $f \circ I = I \circ f = f$ koşulunu sağlayan I fonksiyonuna, bileşke işlemine göre birim (etkisiz) fonksiyon denir.

Örnek : $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x-4}{2}$, $h(x) = x$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre;

a. $(f \circ h)(x)$,

b. $(g \circ h)(x)$,

c. $(f \circ g)(x)$,

ç. $(h \circ g)(x)$,

d. $(h \circ g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm :

a. $h(x) = x$, $f(x) = x + 1$ olduğundan
 $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x) = x + 1$ olur.

b. $g(x) = \frac{x-4}{2}$, $h(x) = x$ olduğundan
 $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x) = \frac{x-4}{2}$ olur.

c. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x-4}{2}$ olduğundan
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-4}{2}\right) = \frac{x-4}{2} + 1 = \frac{x-2}{2}$ olur.

ç. $h(x) = x$ ve $g(x) = \frac{x-4}{2}$ olduğundan
 $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{x-4}{2}\right) = \frac{x-4}{2}$ olur.

d. $h(x) = x$, $g(x) = \frac{x-4}{2}$ ve $f(x) = x + 1$ olduğundan
 $(h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x + 1) = h(g(x + 1)) = h\left(\frac{x+1-4}{2}\right) = h\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{x-3}{2}$ olur.

Örnek : \mathbb{R} de $f(x) = 5x - 2$ ve $(f \circ g)(x) = 8x - 7$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm :

$$(f \circ g)(x) = 8x - 7 \Rightarrow f(g(x)) = 8x - 7 \Rightarrow 5 \cdot g(x) - 2 = 8x - 7 \\ \Rightarrow 5 \cdot g(x) = 8x - 5 \Rightarrow g(x) = \frac{8x-5}{5} \text{ olur.}$$

Örnek : \mathbb{R} de $f(x) = 4x - 2$ ve $g(x) = x^2 + 1$ ise $(g \circ f)(x)$ ve $(f \circ g)(4)$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

Çözüm :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x - 2) = (4x - 2)^2 + 1 = 16x^2 - 16x + 5 \text{ olur.} \\ (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(4^2 + 1) = f(17) = 4 \cdot 17 - 2 = 66 \text{ olur.}$$

Örnek : $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 3x - 8$, $g(x) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor. $(f \circ g)(x) = 7$ denklemini çözelim.

Çözüm :

$$(f \circ g)(x) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \\ \Rightarrow f(2x + 3) = 3(2x + 3) - 8 = 7 \\ \Rightarrow 6x + 9 - 8 = 7 \\ \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x \text{ tek} \\ 3x^2 + 1 & , x \text{ çift} \end{cases}$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & , x < 2 \\ 3x+1 & , x \geq 2 \end{cases}$ fonksiyonları veriliyor.

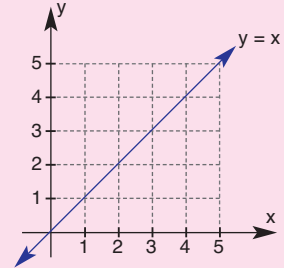
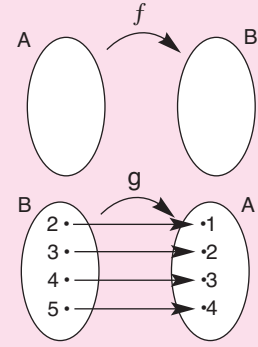
$(f \circ g)(-5) + (g \circ f)(5)$ değerini bulalım.

Çözüm : $(f \circ g)(-5) = f(g(-5)) = f\left(\frac{-5-1}{2}\right) = f(-3) = (-3)^3 - 1 = -28$
 $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(5^3 - 1) = g(124) = 3 \cdot 124 + 1 = 373$
 $(f \circ g)(-5) + (g \circ f)(5) = -28 + 373 = 345$ olur.

Bir Fonksiyonun Tersİ



- * $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B, f(x) = x + 1$ olsun. Buna göre bu fonksiyonun tanım ve değer kümelerini yandaki şemada gösteriniz.
- * Yandaki şemada verilen g fonksiyonunu tanımlayınız.
- f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini yazarak karşılaştırınız.
- * f ve g fonksiyonlarını liste yöntemi ile yazınız?
- f fonksiyonunun bire bir ve örten fonksiyon olup olmadığını tartışınız.
- f bağıntısının tersinin kuralını yazınız. Bu bağıntının da f gibi fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.
- Sizce fonksiyon olan bir bağıntının tersinin de fonksiyon olabilmesi için bağıntının (fonksiyonun) hangi özellikleri olmalıdır?
- * f ve g fonksiyonlarının grafiklerini yandaki koordinat sistemine çizerek karşılaştırınız.
- * Grafiği verilen bir fonksiyonun tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi açıklayınız.



Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 5, 7, 9\}$ kümeleri veriliyor. $f: A \rightarrow B, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun elemanlarını liste yöntemiyle yazalım. Fonksiyonlar özel bir bağıntı olduğuna göre verilen f bağıntısının tersini yazalım. f^{-1} bağıntısı fonksiyon mudur? İnceleyelim.

Çözüm :

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \quad f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

olduğundan f fonksiyonu liste yöntemiyle $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$ biçiminde yazılır. Bu f bağıntısının tersi $f^{-1} = \{(3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$ şeklindedir.

f^{-1} bağıntısı B den A ya tanımlanan bir bağıntıdır. B kümesindeki her eleman A kümesinde yalnız bir elemanla eşlendiğinden f^{-1} bağıntısı bir fonksiyondur.

Örnek : R de $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm :

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

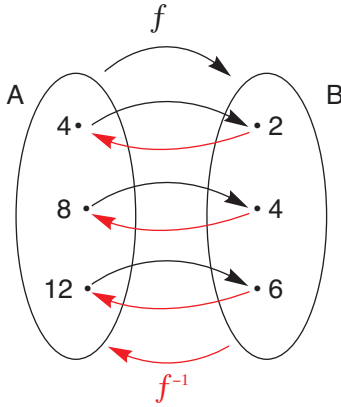
$$\Rightarrow 3 \cdot f^{-1}(x) + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olsun.

$f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonu için $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ ise f^{-1} fonksiyonu f fonksiyonunun bileşke işlemine göre ters fonksiyondur.

Örnek : $A = \{4, 8, 12\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$ kümeleri üzerinde $f(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu veriliyor. f ve f^{-1} fonksiyonlarını şema üzerinde göstererek değerleri inceleyelim.

Çözüm : $f(x) = \frac{x}{2}$ olduğundan $f(4) = 2$, $f(8) = 4$ ve $f(12) = 6$ dir. Buna göre f ve f^{-1} fonksiyonlarının şemaları aşağıdaki gibidir.



Yandaki şemadan;

$f(4) = 2$ olduğundan $f^{-1}(2) = 4$,
 $f(8) = 4$ olduğundan $f^{-1}(4) = 8$,
 $f(12) = 6$ olduğundan $f^{-1}(6) = 12$
 olduğu görülmektedir.

f , bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere; $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ tir.

Örnek : $A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$f \circ f^{-1}$ ve $f^{-1} \circ f$ fonksiyonlarının elemanlarını yazalım.

Çözüm : $B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$ olduğundan
 $f \circ f^{-1}$ $f^{-1} \circ f$

$$(f \circ f^{-1})(2) = f(f^{-1}(2)) = f(4) = 2 = I(2),$$

$$(f \circ f^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(8) = 4 = I(4),$$

$$(f \circ f^{-1})(6) = f(f^{-1}(6)) = f(12) = 6 = I(6),$$

$$(f \circ f^{-1})(8) = f(f^{-1}(8)) = f(16) = 8 = I(8) \text{ dur.}$$

A kümesinin elemanları için de $f^{-1} \circ f$ fonksiyonunun elemanları yine $I(B)$ olacaktır.

f ve g fonksiyonları için $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ dir.

Örnek : $f(x) = x + 6$ fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğundan

$f(x) = x + 6 = y \Rightarrow x = y - 6 = f^{-1}(y)$ olur. O hâlde, y değişkenini x ile değiştirirsek

$f^{-1}(x) = x - 6$ olur.

Örnek : $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun tersini bulup f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini inceleyelim.

Çözüm :

$$f(x) = y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y)$$

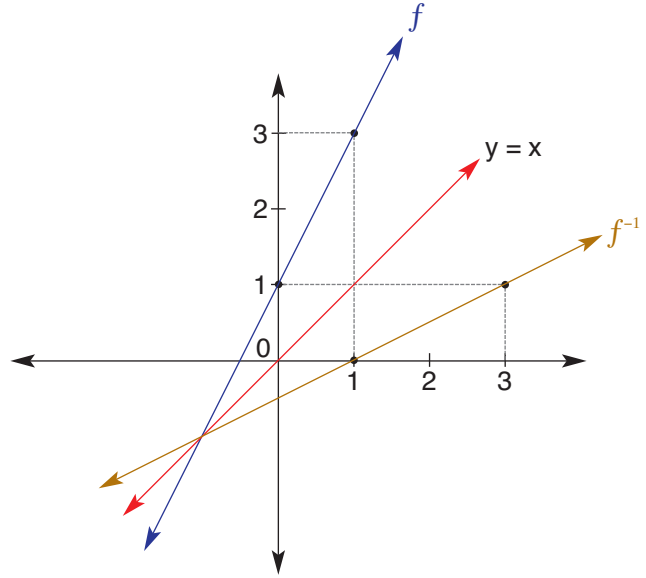
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \text{ olur.}$$

$$x = 1 \text{ için } f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$x = 0 \text{ için } f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ olur.}$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1,$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \text{ olur.}$$



Grafikten de anlaşılacağı üzere f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri üzerindeki noktalar $(3, 1)$, $(1, 3)$ ile $(0, 1)$, $(1, 0)$ $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Fonksiyon grafiği üzerinde hangi nokta alınırsa alınsın $y = x$ doğrusuna göre simetriği fonksiyonun tersinin grafiği üzerindedir.

Bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Örnek : \mathbb{R} de $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{5x-4}{3}$ ve $h(x) = 3x^2 + 1$ fonksiyonlarının terslerini bulalım.

Çözüm :

$$f(x) = 3x - 2 = y \Rightarrow x = \frac{f(x)+2}{3} = \frac{y+2}{3} \text{ olur. } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ olduğundan } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \text{ olur.}$$

$$y = g(x) = \frac{5x-4}{3} \Rightarrow 3g(x) = 5x - 4 \Rightarrow x = \frac{3g(x)+4}{5} \Rightarrow x = \frac{3y+4}{5} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x+4}{5} \text{ olur.}$$

$$y = h(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{h(x)-1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{3}} \Rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3}} \text{ olur.}$$

f in tersi f^{-1} ise f^{-1} in tersi de f fonksiyonudur.

Örnek : $k: \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{5} \right\}$, $k(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$ ve $f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$, $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre $k^{-1}(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} k(x) = y &= \frac{3x-4}{5x-2} \\ \Rightarrow y(5x-2) &= 3x-4 \\ \Rightarrow 5yx-2y &= 3x-4 \\ \Rightarrow 5yx-3x &= 2y-4 \\ \Rightarrow x(5y-3) &= 2y-4 \\ \Rightarrow x &= \frac{2y-4}{5y-3} \\ \Rightarrow k^{-1}(x) &= \frac{2x-4}{5x-3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &= \frac{2x+1}{3x+2} \\ \Rightarrow y(3x+2) &= 2x+1 \\ \Rightarrow 3yx+2y &= 2x+1 \\ \Rightarrow 3yx-2x &= -2y+1 \\ \Rightarrow x(3y-2) &= -2y+1 \\ \Rightarrow x &= \frac{-2y+1}{3y-2} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{-2x+1}{3x-2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Tanımlı oldukları kümelerde $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dır.

Örnek : $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{4} \right\}$ olmak üzere $f(x) = \frac{3x+2}{4x-a}$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun tersi-
nin olabilmesi için a değerini bulalım.

Çözüm :

Fonksiyon $4x - a = 0$ değerinde tanımlı olmayacağından $4x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$ değerini alamayacaktır. Buna göre $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{4} \right\}$ olduğundan $\frac{a}{4} = \frac{1}{4}$ olur ve $a = 1$ bulunur.

Örnek : \mathbb{R} de $f(x) = 3x + 2$ ve $(g \circ f)(x) = 15x + 7$ fonksiyonları veriliyor. g fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm :

1. yol:

$g \circ f$ bileşke fonksiyonunda sağdan f^{-1} fonksiyonu işleme alınmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= I(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow 3 \cdot f^{-1}(x) + 2 = x \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{x-2}{3} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (g \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f)(f^{-1}(x)) = (g \circ f)\left(\frac{x-2}{3}\right) = 15 \cdot \frac{x-2}{3} + 7 \\ &= 5(x-2) + 7 = 5x - 3 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 15x + 7$ olur. $g(p)$ nin kuralını bulmak için x yerine, $3x + 2 = p$ olmak üzere $\frac{p-2}{3}$ yazılırsa

$$g\left(3 \cdot \frac{p-2}{3} + 2\right) = 15 \cdot \frac{p-2}{3} + 7 \Rightarrow g(p) = 5p - 10 + 7 \Rightarrow g(p) = 5p - 3 \\ \Rightarrow g(x) = 5x - 3 \text{ olur.}$$

Dikkat edilirse yukarıdaki işlemde sonuca gitmek için $3x + 2$ ifadesinde x yerine $3x + 2$ nin tersi yazıldı. Çünkü $f(f^{-1}(x)) = I(x)$ tir. Genel olarak $f(ax + b)$ ifadesi verildiğinde $f(x)$ i bulmak için x yerine

$ax + b$ nin tersi $\frac{x-b}{a}$ yazılabilir.

Örnek : $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$ ve $g(x) = 3x - 1$ fonksiyonları veriliyor. f fonksiyonunun g fonksiyonu cinsinden değerini bulalım.

Çözüm :

$g(x) = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{g(x)+1}{3}$ olur. x değeri f fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$f(x) = \frac{\frac{g(x)+1}{3} + 3}{\frac{g(x)+1}{3} - 4} = \frac{\frac{g(x)+10}{3}}{\frac{g(x)-11}{3}} = \frac{g(x)+10}{g(x)-11} \cdot \frac{3}{3} = \frac{g(x)+10}{g(x)-11} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = 5x - 5$ fonksiyonları için $(f^{-1} \circ g)(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm : Öncelikle f fonksiyonunun tersini bulalım.

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3},$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(5x - 5) = \frac{5x - 5 - 1}{3} = \frac{5x - 6}{3} \text{ olur.}$$

Örnek : $f(4x + 1) = kx + 3$ ve $f^{-1}(4) = 9$ ise k değerini bulalım.

Çözüm : $f^{-1}(4) = 9 \Rightarrow f(9) = 4$ olmalıdır.

$4x + 1 = 9 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$ olur. O hâlde, $x = 2$ için $4x + 1$ in değeri 9 dur. Buna göre

$$x = 2 \text{ için } f(4 \cdot 2 + 1) = k \cdot 2 + 3 \Rightarrow f(9) = 2k + 3 \Rightarrow 2k + 3 = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Örnek : $f(x) = x + 10$ ve $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 1$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 10) = x^2 + 3x + 1$ olduğundan $g(x + 10)$ fonksiyonunda x yerine $x + 10$ un tersi yazılırsa

$$f(x) = x + 10 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 10$$

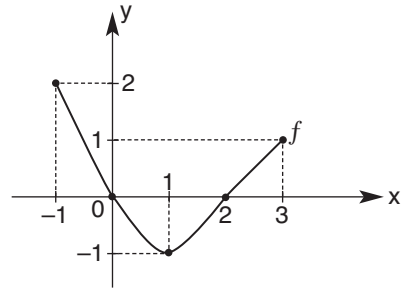
$$g(x + 10) = x^2 + 3x + 1$$

$$g((x - 10) + 10) = (x - 10)^2 + 3(x - 10) + 1$$

$$g(x) = x^2 - 20x + 100 + 3x - 30 + 1$$

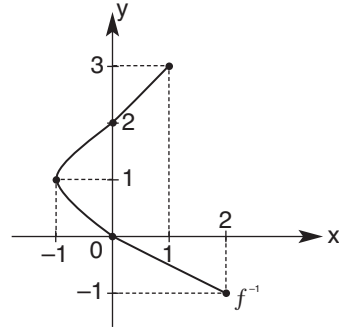
$$g(x) = x^2 - 17x + 71 \text{ olur.}$$

Örnek : Yanda grafiği verilen fonksiyonun tersinin grafiğini çizelim.

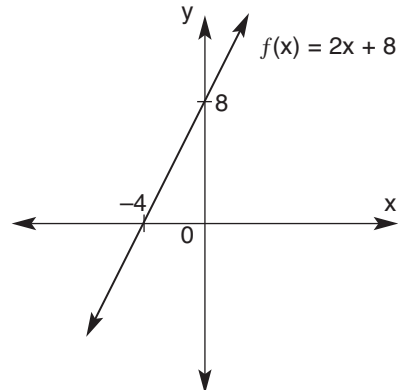


Çözüm :

Grafiğe göre f fonksiyonu $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 0)$ ve $(3, 1)$ noktalarından geçmektedir. O hâlde f fonksiyonunun tersi $(2, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ ve $(1, 3)$ noktalarından geçecektir. Buna göre f^{-1} in grafiği yandaki gibi olur.



Örnek : Yanda grafiği verilen fonksiyonun tersinin grafiğini çizelim.

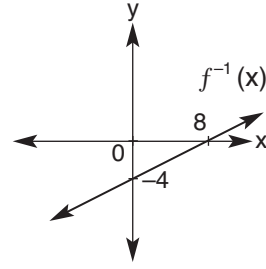


Çözüm : $f(x)$ fonksiyonun grafiğini incelersek;

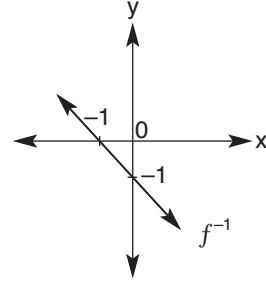
$$f(-4) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -4,$$

$$f(0) = 8 \Rightarrow f^{-1}(8) = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre $f^{-1}(x)$ grafiği yandaki gibi olur.



Örnek : $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olduğuna göre $f(x)$ in grafiğini çizelim.

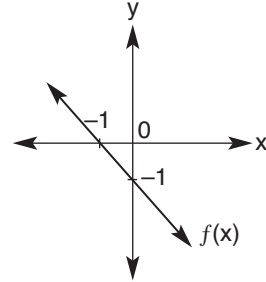


Çözüm : Grafiğe göre;

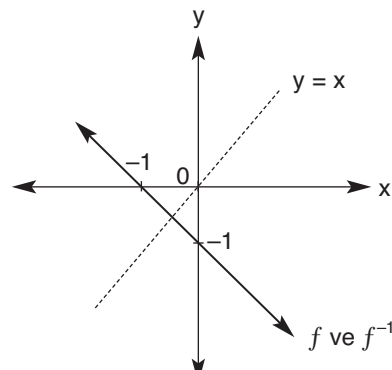
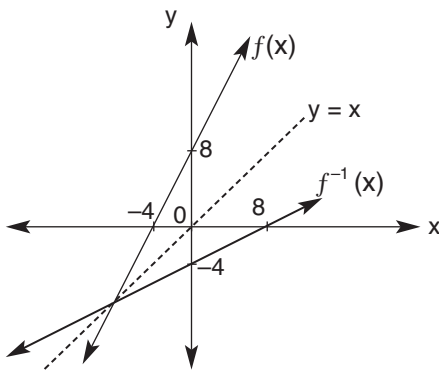
$$f^{-1}(-1) = 0 \Rightarrow f(0) = -1,$$

$$f^{-1}(0) = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$$

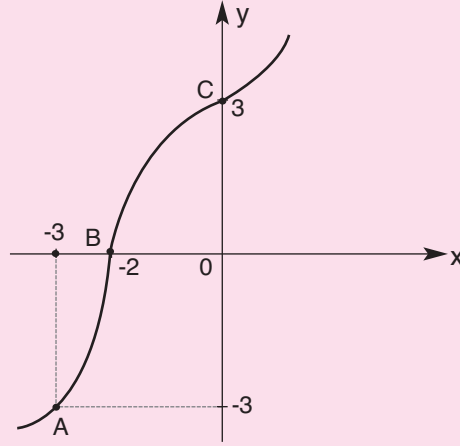
olduğundan grafik yandaki gibi olur.



Yukarıdaki iki örnekte istenen grafikler, bir fonksiyon ile tersinin grafiklerinin $y = x$ fonksiyonunun grafiğine göre birbirinin simetriği olduğu göz önünde bulundurularak da çizilebilirdi.



f nin $y = x$ e göre simetriği kendisi olduğundan f ve f^{-1} in grafiği birbirinin aynısıdır.



✱ Yukarıda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre grafik üzerinde işaretlenen A, B ve C noktalarının koordinatlarını yazınız.

➤ Yazdığınız (x, y) ikilileri için $f(x) = y$ eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

$$f(-2) = \dots,$$

$$f(\dots) = 3,$$

$$f(-3) = \dots$$

➤ $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğunu göz önüne alarak aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

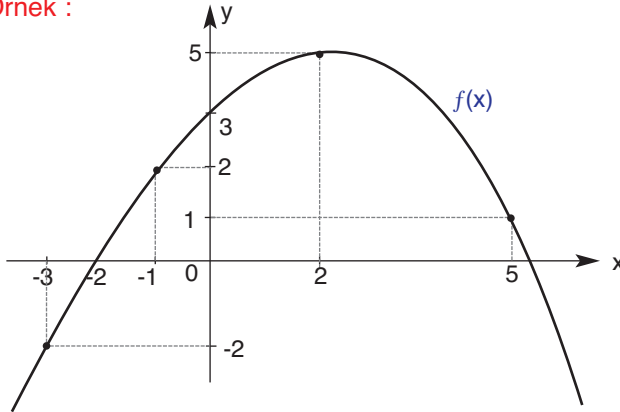
$$f^{-1}(\dots) = 0,$$

$$f^{-1}(-3) = \dots,$$

$$f^{-1}(0) = \dots$$

➤ Grafiği verilen bir fonksiyonun bazı değerlerinin nasıl bulunduğunu tartışınız.

Örnek :



Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için

$$f(5), f(2), f(0), f(-1), f(-2), f(-3),$$

$$(f \circ f)(-2) \text{ ve } (f \circ f)(-3)$$

değerlerini bulalım.

Çözüm : Grafikte; $f(x)$ fonksiyonunun $(5, 1), (2, 5), (0, 3), (-1, 2), (-2, 0), (-3, -2)$ ikililerinin belirttiği noktalardan geçmektedir.

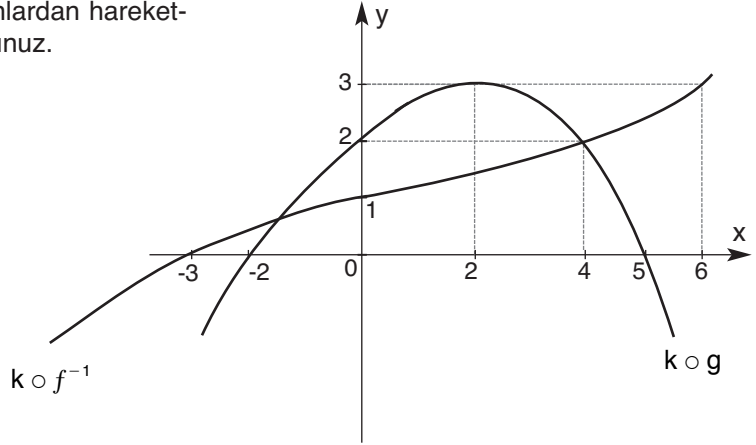
Buna göre $f(5) = 1, f(2) = 5, f(0) = 3, f(-1) = 2, f(-2) = 0$ ve $f(-3) = -2$ olarak bulunur. Ayrıca,

$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(0) = 3 \text{ ve}$$

$$(f \circ f)(-3) = f(f(-3)) = f(-2) = 0 \text{ dır.}$$

Örnek : Yanda grafiği verilen fonksiyonlardan hareketle aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

- $(k \circ f^{-1})(-3)$
- $(f \circ f^{-1})(1)$
- $(k \circ g)(5)$
- $(k \circ g)(4) + (k \circ f^{-1})(0)$
- $(f \circ g)(2)$



Çözüm : a. $(-3, 0)$ noktası $k \circ f^{-1}$ fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğundan $(k \circ f^{-1})(-3) = 0$ olur.

b. $(0, 1)$ noktası $k \circ f^{-1}$ fonksiyonunun üzerindedir. $(k \circ f^{-1})(0) = 1$ ve $(k \circ f^{-1})^{-1}(1) = (f \circ k^{-1})(1) = 0$ olur.

c. $(5, 0)$ noktası $k \circ g$ fonksiyonunun grafiği üzerindedir. $(k \circ g)(5) = 0$ olur.

ç. $(4, 2)$ noktası $k \circ g$ fonksiyonu üzerinde, $(0, 1)$ noktası $k \circ f^{-1}$ üzerindedir.

$(k \circ g)(4) = 2$ ve $(k \circ f^{-1})(0) = 1$ olur. $(k \circ g)(4) + (k \circ f^{-1})(0) = 2 + 1 = 3$ olur.

d. $k \circ f^{-1}$ ve $k \circ g$ fonksiyonlarından yararlanarak $(f \circ g)(2)$ değeri hesaplanabilir.

$$(k \circ f^{-1})^{-1} \circ (k \circ g)(x) = (f \circ k^{-1}) \circ (k \circ g)(x)$$

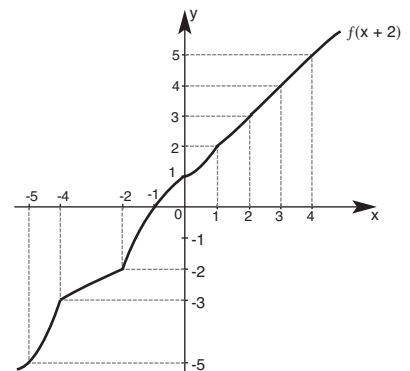
$$= (f \circ \underbrace{k^{-1} \circ k}_I \circ g)(x) = (f \circ g)(x) \text{ olur.}$$

$(f \circ g)(2) = ((k \circ f^{-1})^{-1} \circ (k \circ g))(2) = (k \circ f^{-1})^{-1}((k \circ g)(2)) = (k \circ f^{-1})^{-1}(3) = a$ olsun. O hâlde,

$(k \circ f^{-1})(a) = 3 \Rightarrow a = 6$ bulunur. $(f \circ g)(2) = 6$ dır.

Örnek : Yanda grafiği verilen $f(x+2)$ fonksiyonunun grafiği için

- $f(3)$
- $(f \circ f)(2)$
- $(f \circ f)(4) - (f \circ f)(-2)$ değerini bulalım.



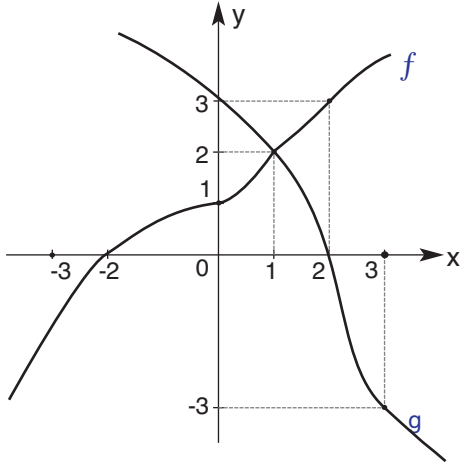
Çözüm :

a. $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$ için $f(3)$ değeri 2 bulunur.

b. $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(f(0+2)) = f(1) = 0$ olur.

c. $(f \circ f)(4) - (f \circ f)(-2) = f(f(4)) - f(f(-2))$
 $= f(f(2+2)) - f(f(-4+2))$
 $= f(3) - f(-3)$
 $= 2 - (-5) = 2 + 5 = 7$ bulunur.

Örnek :



Yandaki şekilde grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(-2)$, $(g \circ f \circ f)(1)$ ve $(f \circ g^{-1} \circ f)(-2)$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm :

Grafikten f fonksiyonu için $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ve $f(2) = 3$ ve g fonksiyonu için de $g(0) = 3$, $g(1) = 2$, $g(2) = 0$ ve $g(3) = -3$ olduğu verilmiştir. Buna göre;

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 1,$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(0) = 3,$$

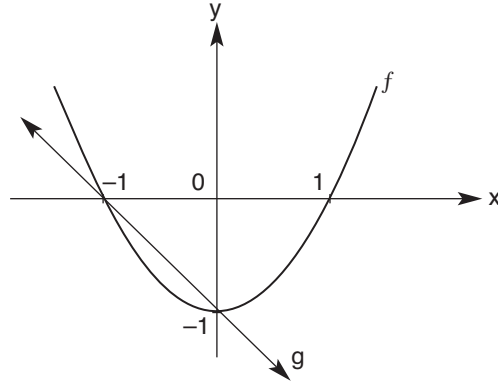
$$(g \circ f \circ f)(1) = g(f(f(1))) = g(f(2)) = g(3) = -3,$$

$$(f \circ g^{-1} \circ f)(-2) = f(g^{-1}(f(-2))) = f(g^{-1}(0)) = f(2) = 3 \text{ olur.}$$

Örnek : Yandaki grafiğe göre;

- a. $(g \circ f)(-1)$,
- b. $(f \circ g)(-1)$,
- c. $(g \circ g)(0)$,
- ç. $(f \circ g \circ f)(0)$

değerlerini bulalım.



Çözüm : Grafiğe bakılarak $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$ ve $f(1) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $g(-1) = 0$ ve $g(0) = -1$ olduğunu da görebiliriz. O hâlde;

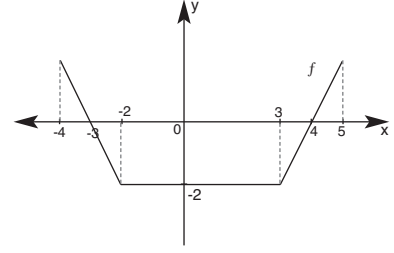
$$\text{a. } (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(0) = -1 \text{ olur.}$$

$$\text{b. } (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1 \text{ olur.}$$

$$\text{c. } (g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(-1) = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{ç. } (f \circ g \circ f)(0) = (f \circ g)(f(0)) = (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1 \text{ olur.}$$

Örnek : Yanda verilen f fonksiyonunun grafiği üzerinde aldığı değerleri inceleyelim.



Çözüm : Fonksiyonun aldığı değerleri incelediğimizde $-\infty$ dan -3 e kadar fonksiyon azalan değerler almıştır. -2 ile $+3$ arasında fonksiyon sabit $y = -2$ değerini almıştır. Fonksiyon $x = +3$ ten sonra $+\infty$ a kadar hep artan değerler almıştır.

$3 < x < \infty$ arasındaki fonksiyonunun değerlerindeki artmayı $3 < 4 < 5 < +\infty$ için $f(3) < f(4) < f(5) < f(\infty)$ biçiminde ifade edebiliriz. Benzer şekilde $[-2, \infty)$ aralığının bir kısmında artmasa da $[-2, +\infty)$ aralığında azalmadığını söyleyebiliriz. Bunu

$-2 < 0 < 3 < 4 < 5 < +\infty$ için $f(-2) \leq f(0) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(\infty)$ biçiminde ifade edebiliriz.

(x, y) aralığında seçilen her $a < b$ için $f(a) \leq f(b)$ ise f fonksiyonu bu aralıkta artan fonksiyondur. (x, y) aralığında seçilen her $a < b$ için $f(a) < f(b)$ ise $f(x, y)$ aralığında kesin artan fonksiyondur.

$(-\infty, -2)$ aralığında $-\infty < -4 < -3 < -2$ için $f(-\infty) > f(-4) > f(-3) > f(-2)$ dir. Aralığı biraz geniştirsek $-\infty < -4 < -3 < -2 < 0 < 3$ için $f(-\infty) \geq f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2) \geq f(0) \geq f(3)$ yazılabilir. $(-\infty, -2)$ aralığında fonksiyonun aldığı değerler hep azalmış, $(-\infty, 3)$ aralığında artmamıştır.

I aralığındaki her $a < b$ için $f(a) \geq f(b)$ ise f fonksiyonuna bu aralıkta azalan fonksiyon denir. $a < b$ için $f(a) > f(b)$ ise bu sefer f fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir.

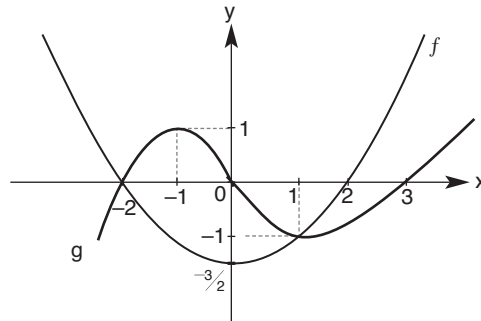
f fonksiyonu $(-\infty, -2)$ ve $(3, \infty)$ aralıklarında birebir-örten fonksiyondur. $(-2, 3)$ aralığında birebir değil ama örten fonksiyondur.

Fonksiyonlar kesin artan ve kesin azalan oldukları aralıklarda birebir-örten, artan ve azalan oldukları aralıklarda örten fonksiyondurlar.

Örnek : Yandaki grafiğe göre;

- $(f \circ g)(-1)$,
- $(f \circ g \circ f)(1)$,
- $(f \circ g)(0)$,
- $(f \circ g)(-3)$

değerlerini bulalım.



Çözüm : Grafiğe göre $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$, $f(0) = -\frac{3}{2}$ ve $f(1) = -1$ dir. Ayrıca $g(-2) = 0$, $g(0) = 0$, $g(3) = 0$, $g(1) = -1$ ve $g(-1) = 1$ dir. Buna göre;

$$a. (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = -1,$$

$$b. (f \circ g \circ f)(1) = (f \circ g)(f(1)) = (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = -1,$$

$$c. (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = -\frac{3}{2},$$

$$ç. (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 0 \text{ olur.}$$

Fonksiyonlarda Dört İşlem



Fonksiyon	$(f + g)(x)$	$f(x) + g(x)$	$(f + g)(1)$	$f(1) + g(1)$
$f(x) = x^2 - 4$	$x^2 + x - 2$		0	
$g(x) = x + 2$				

✱ R de tanımlı f ve g fonksiyonları için yukarıdaki tablonun ilk satırını doldurunuz.

✱ Siz de fonksiyonlar tanımlayarak 2 ve 3. satırları benzer şekilde doldurunuz.

➤ 2 ile 3 ve 4 ile 5. sütun arasındaki ilişki nedir? Tabloya göre vardığınız sonucu açıklayınız.

➤ Tablo toplama işlemine göre yapılmıştır. Acaba benzer özellikler çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için geçerli midir? Aynı fonksiyonlarla deneyiniz.

✱ Elde ettiğiniz sonucu arkadaşlarınızla paylaşınız.

Örnek : $f(x) = 4x^2 + 2x - 2$, $g(x) = 4x - 2$ olduğuna göre;

a. $(f + g)(x)$ b. $(f - g)(x)$ c. $(f \cdot g)(x)$ ç. $(f / g)(x)$ ifadelerinin kurallarını bulalım.

Çözüm :

$$a. (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (4x^2 + 2x - 2) + (4x - 2) = 4x^2 + 6x - 4,$$

$$b. (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (4x^2 + 2x - 2) - (4x - 2) = 4x^2 + 2x - 2 - 4x + 2 = 4x^2 - 2x,$$

$$c. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (4x^2 + 2x - 2)(4x - 2) = 4x^2(4x - 2) + 2x(4x - 2) - 2(4x - 2) \\ = 16x^3 - 8x^2 + 8x^2 - 4x - 8x + 4 = 16x^3 - 12x + 4,$$

$$ç. (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^2 + 2x - 2}{4x - 2} = \frac{(4x - 2)(x + 1)}{(4x - 2)} = x + 1 \text{ olur.}$$

Örnek : f ve g bire bir ve örten fonksiyonlar, $f(x) = 3x + 8$ ve $(f \cdot g)(4) = 40$ ise $g(4)$ ile $g^{-1}(2)$ değerlerini bulalım.

Çözüm :

$(f \cdot g) = f(4) \cdot g(4) = (3 \cdot 4 + 8) \cdot g(4) = 20 \cdot g(4) = 40$ olduğundan $g(4) = 2$ olur. Ayrıca,
 $g(4) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 4$ bulunur.

Örnek : $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 5x^2 + 2x + 1$ olduğuna göre;

- a. $f(x) + g(x)$,
- b. $2f(x) + 3g(x)$,
- c. $(f - g)(x)$,
- ç. $3f(x) + (f + g)(x)$

fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm :

a. $f(x) + g(x) = (3x - 5) + (5x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 5x - 4$ olur.

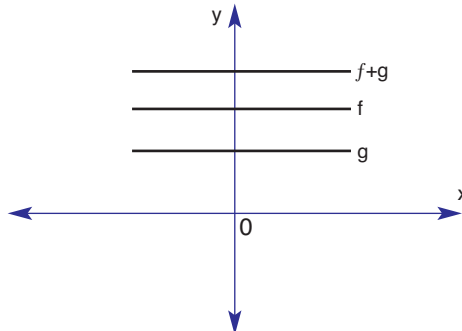
b. $2f(x) + 3g(x) = 2(3x - 5) + 3(5x^2 + 2x + 1) = 6x - 10 + 15x^2 + 6x + 3$
 $= 15x^2 + 12x - 7$ olur.

c. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 5) - (5x^2 + 2x + 1) = 3x - 5 - 5x^2 - 2x - 1$
 $= -5x^2 + x - 6$ olur.

ç. $3f(x) + (f + g)(x) = 3f(x) + f(x) + g(x) = 4f(x) + g(x) = 4(3x - 5) + (5x^2 + 2x + 1)$
 $= 12x - 20 + 5x^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 14x - 19$ olur.

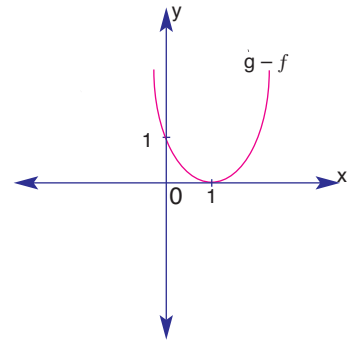
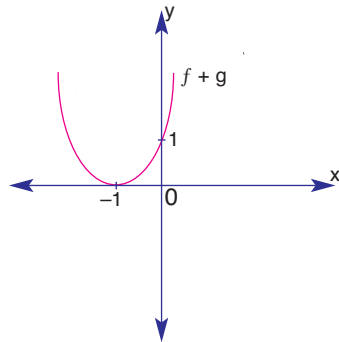
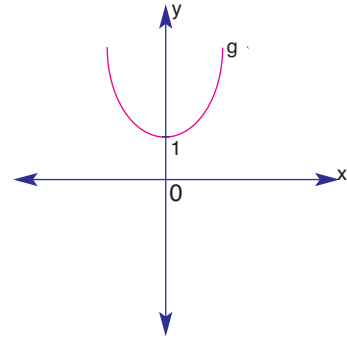
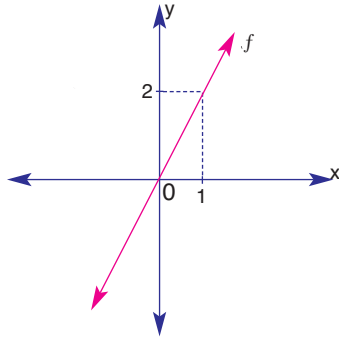
Örnek : f ve g pozitif değerler alan fonksiyonlar olsun. f , g fonksiyonlarıyla elde edilen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f / g fonksiyonlarını inceleyelim.

Çözüm : Yukarıdaki örneklerin herbiri incelendiğinde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ olduğundan a değeri için $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ olup $(f + g)(a)$ değeri $f(a) + g(a)$ değerlerinden en az birinden büyüktür.



Örnek : $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$ için f , g , $f + g$ ve $g - f$ fonksiyonların grafiklerini inceleyim.

Çözüm :



$x > 0$ için $(f + g)(x) > f(x)$ ve $(f + g)(x) > g(x)$ tir.



ALİŞTIRMALAR

1. \mathbb{R} de tanımlanan $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x - 3$ ve $h(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonları için aşağıdaki bileşke fonksiyonların kurallarını bulunuz.
 - a. $(f \circ h)(x)$
 - b. $(g \circ f)(x)$
 - c. $(g \circ f \circ h)(x)$
 - ç. $(h \circ h)(x)$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2x - 1$ fonksiyonları tanımlanıyor. $(f \circ g)(x)$ ve $(g \circ f)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz. $f \circ g = g \circ f$ midir?
3. \mathbb{R} de $f(x) = \frac{x}{2}$ ve $g(x) = 3x + 1$ fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre aşağıdaki bileşke fonksiyonları bulunuz.
 - a. $(f \circ g)(3)$
 - b. $(g \circ f)(3)$
 - c. $(g \circ g)(0)$
 - ç. $(f \circ f \circ g)(5)$

4. \mathbb{R} de $f(x) = 2x + a$, $g(x) = x^2 - 5$ ve $(f \circ g)(1) = -7$ olduğuna göre a kaçtır?

5. Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten olduğu yerlerde terslerini bulunuz.

a. $f(x) = 4x - 3$

b. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

c. $g(x) = \frac{3}{x-4}$

ç. $g(x) = \frac{x}{2} + 3$

d. $h(x) = \frac{3}{x} - 4$

e. $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$

6. $f(x) = -2x + 1$, $(g \circ f)(x) = 7x$ ise $g^{-1}(14)$ değerini bulunuz.

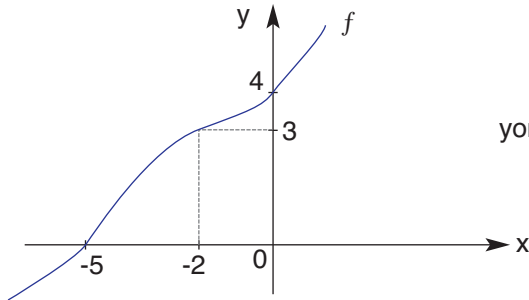
7. $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ ve $g(x) = x + 1$ olduğuna göre $(f \circ g^{-1})(x)$ bileşke fonksiyonunun kuralını yazınız.

8. $f(5x - 3) = ax + 3$ ve $f^{-1}(13) = -8$ olduğuna göre a kaçtır?

9. $f(x) = 3x - 1$ ve $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 3x + 1$ olduğuna göre $g(x)$ kaçtır?

10. $A = \{2,4,6,8\}$ ve $B = \{1,3,5,7\}$ kümeleri için $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x - 1$ fonksiyonu tanımlanıyor. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde gösteriniz.

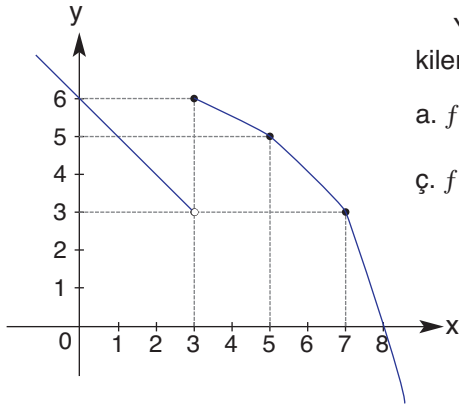
11.



Yandaki şekilde \mathbb{R} den \mathbb{R} ye bire bir ve örten f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$(f^{-1} \circ f)(-5) + f^{-1}(3) + f(0)$ toplamını bulunuz.

12.



Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdakileri cevaplayınız.

- | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------|
| a. $f(0) + f(8)$ | b. $f(3)$ | c. $(f \circ f)(7)$ |
| ç. $f^{-1}(5)$ | d. $f^{-1}(0) + f(8)$ | e. $(f \circ f)(5)$ |

13. \mathbb{R} de, $f(x) = 5x - 3$ ve $g(x) = 3$ fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre $(2g + f \cdot g)(x)$ fonksiyonunun grafiğini bulunuz.

14. $f = \{(-2, 4), (2, 3), (3, -2), (4, 3)\}$ ve $g = \{(-2, 8), (0, 4), (3, -6), (5, 1)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre

- a. $f + g$
- b. $3f - g$
- c. $\frac{g}{f}$
- ç. $f \cdot g$

fonksiyonlarını bulunuz.

15. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x^2 + 5x + 6$, $(f \cdot g)(x) = x^2 - 3x + 22$ olduğuna göre $g(2)$ pozitif bir tam sayı ise bu sayı kaçtır?

16. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarını seçerek $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ olduğunu gösteriniz.

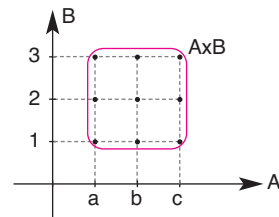
17. $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \text{ tek} \\ x + 3, & x \text{ çift} \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x + 2, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonları veriliyor.

$(f \circ g)(-5)$ in değerini bulunuz.

18. $f^{-1}(2x + 1) = 4x - 2$ ve $f(2)$ değerini bulunuz.

3. TEST

1. a ve b pozitif tam sayı olmak üzere $(2a + b, 4) = (11, a - b)$ ise (a,b) ikilisi nedir?
 A. (5,1) B. (1,5) C. (2,3) D. (1,-5) E. (2,6)
2. $s(A) = 7$ ve $s(B) = 8$ ise $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
 A. 7 B. 8 C. 15 D. 56 E. 7^8
3. $A = \{x : x \mid 10, x \in \mathbb{N}\}$ ve $s(A \times B) = 4$ ise $s(B)$ kaçtır?
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4
4. $A = \{3, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{0, 2, 4, 6, 7\}$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi $B \times A$ kümesinin elemanı olamaz?
 A. (0,5) B. (2,6) C. (8,7) D. (4,3) E. (6,5)
5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ ise aşağıdaki bağıntılardan hangisi A dan B ye bir bağıntı değildir?
 A. $\alpha = \{(1,a), (2,b), (b,2)\}$ B. $\beta = \{(3,c), (3,d), (2,a)\}$
 C. $\varsigma = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$ D. $\theta = \{(1,a), (4,d)\}$
 E. $\psi = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)\}$
6. $A = \{a, b\}$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyan değildir?
 A. $\alpha_1 = \{(a,a), (b,b)\}$ B. $\alpha_2 = \{(a,a), (b,b), (b,a)\}$
 C. $\alpha_3 = \{(a,a), (b,a), (a,b)\}$ D. $\alpha_4 = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a)\}$
 E. $\alpha_5 = \{(b,a), (b,b), (a,a)\}$
7. $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyan, simetrik ve geçişkendir?
 A. $\alpha_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ B. $\alpha_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$
 C. $\alpha_3 = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$ D. $\alpha_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
 E. $\alpha_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1)\}$
8. Yandaki grafiğe göre A kümesinin alt küme sayısı kaçtır?
 A. 3 B. 8 C. 9
 D. 16 E. 64



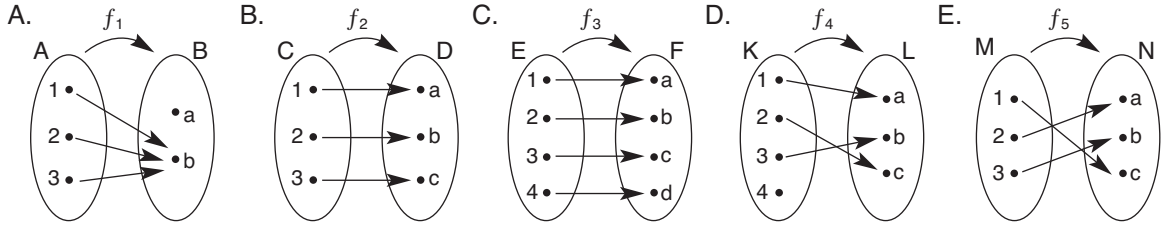
9. $s(A) = 7$, $s(B) = 5$ ve $s(A \cap B) = 4$ ise $A - B$ den $B - A$ ya kaç tane bağıntı tanımlanabilir?

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32

10. $A = \{(x,y) \mid x \leq y \text{ ve } x,y \in \mathbb{R}\}$ bağıntısı ile ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A. Yasıyandır. B. Ters simetriktir.
C. Simetriktir. D. Yansıyan ve geçişkendir.
E. Geçişkendir.

11. Aşağıdakilerden hangisi bir fonksiyon değildir?



12. \mathbb{R} de tanımlı f fonksiyonu $f(x) = 5x - 2$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A. $f(1) = 3$ B. $f(a) = 5a - 2$ C. $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$
D. $f(a+1) = 5a+3$ E. $f(a) - f(x) = 5(a-x) - 2$

13. $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ise $g^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

- A. $g^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+2}$ B. $g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$ C. $g^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$
D. $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ E. $g^{-1}(x) = x$

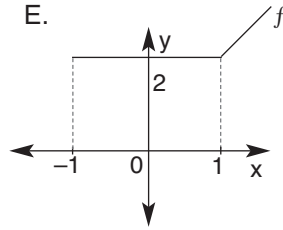
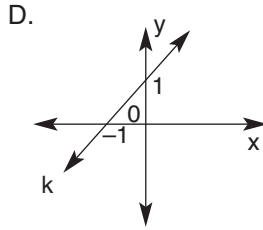
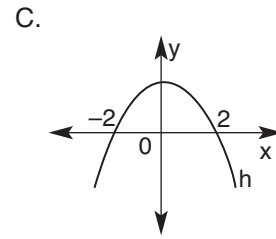
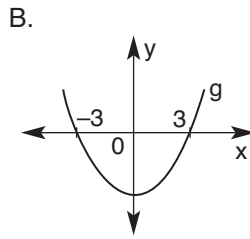
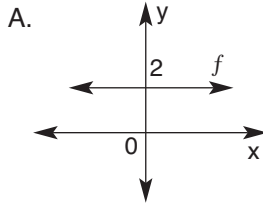
14. \mathbb{R} de tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = 3x - 5$ ve $(g^{-1} \circ f)(x) = 6x - 7$ ise $g(-7)$ kaçtır?

- A. -5 B. 10 C. 12 D. 18 E. 21

15. \mathbb{R} de tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x + 2$ ise $(g \circ f)(4)$ kaçtır?

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 13 E. 16

16. Aşağıdakilerden hangisi bire bir fonksiyon grafiğidir?



17. $a \star b = 3a + b + 4$ ise $(4 \star 2) \star 1$ işleminin sonucu kaçtır?

- A. 42 B. 50 C. 59 D. 65 E. 92

18. Aşağıda kuralları verilen işlemlerden hangisinin değişme özelliği vardır?

- A. $a \star b = 2a + b$ B. $a \triangle b = a + b$ C. $a \square b = a + 1$
D. $a \circ b = b + 1$ E. $a \circ b = b$

19. $x \star y = x + y + 2$ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2 E. 4

20. $a \triangle b = a + b - 5$ işlemine göre 4 ün tersi kaçtır?

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 6 E. 7

21. $a \star b = 4b + 2a - 1$ ve $a \triangle b = a - b + 10$ işlemleri tanımlanıyor. $(5 \star 2) \triangle (1 \star 0)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A. 26 B. 28 C. 29 D. 30 E. 38

4. BÖLÜM

SAYILAR

DOĞAL SAYILAR



Hangi yılda doğduğunuzu, en son okuduğunuz kitabın sayfa sayısını ve okulunuzdaki öğrenci sayısını karşınızdakine anlatmanız isteniyor. Fakat bunu anlatırken hiçbir sayı kullanmamanız da bekleniyor. Kendinizi doğru bir şekilde ifade edebilir misiniz?

✓ Doğal sayıların hayatımızdaki yeri hakkında ne düşünüyorsunuz?

Doğal Sayıların Pozitif Sayı Kuvvetleri



✳ Aşağıdaki çarpımları verilen örneklerden yararlanarak noktalı yerleri doldurunuz.

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ tane}} = 2^5 \quad \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ tane}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ tane}} = 2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$$

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{6 \text{ tane}} = \dots \quad \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ tane}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ tane}} = \dots$$

$$\underbrace{4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2}_{4 \text{ tane}} = (4^2)^{\dots} = 4^{\dots} \quad 4.4 \cdot 4.4 \cdot 4.4 \cdot 4.4 = 4^{\dots} = (4^2)^{\dots}$$

$$6.6.6 \cdot 6.6.6 \cdot 6.6.6 = 6^{\dots} = (6^3)^{\dots} \quad 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 = (6^3)^{\dots} = 6^{\dots}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (4.3) \cdot (4.3) \cdot (4.3) \cdot (4.3) \cdot (4.3) = \dots$$

➤ Yukarıdaki ifadeleri inceleyerek aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a, b, m, n $\in \mathbb{N}^+$ için

$$a^m \cdot a^n = \dots$$

,

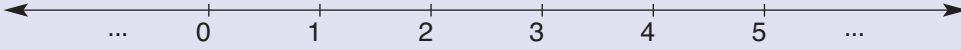
$$a^n \cdot b^n = \dots$$

,

$$(a^m)^n = \dots$$

0, 1, 2, 3, ... sayılarının her biri birer doğal sayıdır. Bu sayıların oluşturduğu küme de doğal sayılar kümesidir. Doğal sayılar kümesi N ile gösterilir.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots\}$ dir. Bunu sayı doğrusuyla aşağıdaki gibi gösteririz.



İki basamaklı bir ab doğal sayısı $ab = 10 \cdot a + b$,

Üç basamaklı bir abc doğal sayısı $abc = 100a + 10b + c$,

Dört basamaklı bir abcd doğal sayısı $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$ biçiminde yazılabilir.

Örnek : $2^3, 4^2, 5^4$ sayılarının değerini bulalım.

Çözüm :

Bir doğal sayının kuvveti, o sayının kaç tanesinin yan yana yazılıp çarpılacağını gösterir. O hâlde,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 ; 4^2 = 4 \cdot 4 = 16 ; 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $a, b, m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $a^m \cdot a^n$, $a^m \cdot b^m$, $(a^m)^n$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

Çözüm :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{n \text{ tane}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m+n} = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots b)}_{m \text{ tane}} = \underbrace{(ab \cdot ab \cdot ab \dots ab)}_{m \text{ tane}} = (ab)^m$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ tane}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^n} = a^{m \cdot n}$$

Örnek : $5^{11} \cdot 4^2 \cdot 16^3 \cdot 64$ çarpımını en sade biçimde yazalım.

Çözüm :

Örnek : $(3^2)^4 \cdot 27^2 \cdot 81^4 = 3^n$ ise n sayısını bulalım.

Çözüm :

$$(3^2)^4 \cdot 27^2 \cdot 81^4 = 3^8 \cdot (3^3)^2 \cdot (3^4)^4 = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{16} = 3^{30} \text{ olduğundan } n = 30 \text{ olur.}$$

Örnek : $5 \cdot 7^6 - 7 \cdot 7^5 + 14 \cdot 7^6$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm :

$$5 \cdot 7^6 - 7^1 \cdot 7^5 + 14 \cdot 7^6 = 5 \cdot 7^6 - 1 \cdot 7^6 + 14 \cdot 7^6 = 7^6 (5 - 1 + 14) = 18 \cdot 7^6 \text{ dir.}$$

$a, b, m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ dir.

Örnek : $A = \frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{2^4 + 2^4}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$A = \frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{2^4 + 2^4} = \frac{3 \cdot 3^4}{2 \cdot 2^4} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \text{ olur.}$$

Örnek : $3^4 + 3 \cdot 9^2 - 18 \cdot 3^2 = m \cdot 3^3$ ise m yi bulalım.

Çözüm :

$$3^4 + 3 \cdot 9^2 - 18 \cdot 3^2 = 3^4 + 3 \cdot (3^2)^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^4 + 3 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^4 = 3^4(1 + 3 - 2) = 2 \cdot 3^4 = 6 \cdot 3^3 \text{ tür.}$$
$$6 \cdot 3^3 = m \cdot 3^3 \text{ olduğundan } m = 6 \text{ olur.}$$

Taban Aritmetiği



Bir firmada fayans ihtiyacı olan bir fayans ustası araştırdığı firmalarda aşağıdaki seçenekleri görmüştür.

A firması 1, 5, 25, 125, 625 lik kutularda fayans satıyor.

B firması 1, 3, 9, 27, 81, 243 lük kutularda fayans satıyor.

C firması 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 lik kutularda fayans satıyor.

- ✳ 200 tane fayansa ihtiyacı olan bir ustanın, en çok fayans bulunduran kutulardan almak şartıyla A firmasından fayans aldığı düşünülürse her bir kutudan kaç tane alması gerektiğini bulunuz.
- ✳ 180 tane fayansa ihtiyacı olan bir ustanın, en çok fayans bulunduran kutulardan almak şartıyla B firmasından fayans aldığı düşünülürse her bir kutudan kaç tane alması gerektiğini bulunuz.
- ✳ 300 tane fayansa ihtiyacı olan bir ustanın, en çok fayans bulunduran kutulardan almak şartıyla C firmasından fayans aldığı düşünülürse her bir kutudan kaç tane alması gerektiğini bulunuz.
- ✳ Yukarıdaki 3 soruda kutu sayılarını büyük kutu sayısından başlamak üzere ve sıfır tane alınan kutu sayılarını da dâhil ederek sırayla yazınız.
- Bulduğunuz sayılardan geri 200, 180 ve 300 sayılarına nasıl ulaşabileceğinizi açıklayınız.
- ✳ Doğal sayıları çözümlerken yararlanılan yöntemi düşünürsek sayıları bu şekilde yazmanın çözümlemeye farklı ve çözümlemeye benzer yönlerini yazınız.

Örnek : Bir kırtasiye 1, 4, 16, 64, 256, 1024 lük kutularda kalem satıyor. 27 tane kaleme ihtiyacı olan bir öğrencinin bu kırtasiyeden kaç kutu kalem alacağını bulalım ve sayıyı oluşturalım.

Çözüm :

Kullanılacak kutular içinde en fazla kalem alabilecek kutunun alabileceği kalem sayısı 16'dır. 1 tane 16 lık kullanılıncı geriye kalan 11 kalem, sırasıyla 2 tane 4 lük, 1 tane 2 lik ve 3 tane 1 lik kutu alınarak tamamlanır.

Dolayısıyla sayı $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 16 & 4 & 1 \end{matrix}$ olur.

Örnek : $(124)_5$ ve $(10101)_2$ sayılarının 10 luk tabana göre değerini bulalım.

Çözüm :

$$(124)_5 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 = 4 + 10 + 25 = 39 \text{ olur.}$$
$$(10101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 0 + 4 + 0 + 16 = 21 \text{ olur.}$$

Örnek : $(123)_x = 51$ ise x sayısını bulalım.

Çözüm : $(123)_x = 3 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 = x^2 + 2x + 3 = 51 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x + 8) \cdot (x - 6) = 0 \Rightarrow x =$

$\begin{matrix} x & -6 \\ x & +8 \end{matrix}$

6 veya $x = -8$ bulunur. Fakat taban negatif olamayacağından x sayısı 6 olur.

Örnek : $(126)_{10}$ sayısının 4 lük tabanda yazılışını bulalım.

Çözüm :

1. yol:

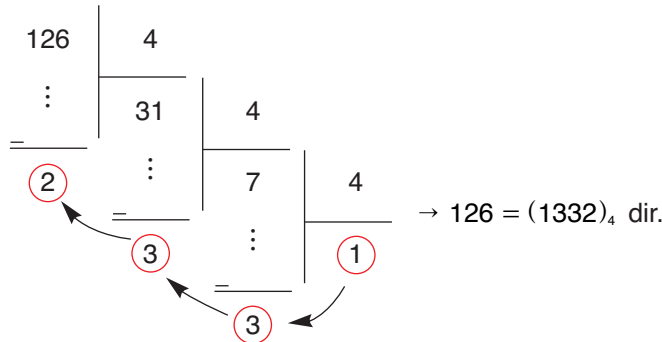
4 ün kuvvetleri 1, 4, 16, 64, 256, ... dir. 126 sayısının içinde 4'ün bu kuvvetlerinden, büyükten başlamak suretiyle kaç tane olduğunu bulursak sayıyı yazabiliriz.

126 sayısı içinde 256 yoktur. 1 tane 64, geriye kalan sayıda $(126 - 64 = 62)$; 3 tane 16; 3 tane 4 ; ve 2 tane 1 vardır. O hâlde,

$$126 = \left(\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{matrix} \right)_4 \text{ olur. Gerçekten de}$$

$$(1332)_4 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 64 = 2 + 12 + 48 + 64 = 126 \text{ dir.}$$

2. yol : Bu dönüşümü kısa yoldan 126 sayısını sürekli 4 e bölerek de yapabiliriz.

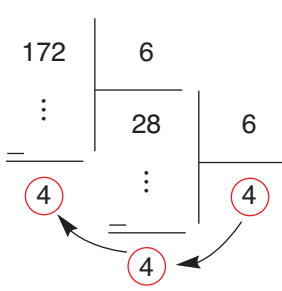


Örnek : $(334)_7 + (432)_6$ toplamını 6 tabanında yazalım.

Çözüm :

Tabanlar aynı olmadığından toplama yapamayız. 7 lik tabandaki sayıyı önce 10 luk sonra 6 lık tabana çevirip toplayabiliriz.

$$(334)_7 = 4 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 49 = 4 + 21 + 147 = 172$$



$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} (4 \ 4 \ 4)_6 \\ + (4 \ 3 \ 2)_6 \\ \hline (1 \ 3 \ 2 \ 0)_6 \end{array}$$

$$(334)_7 = 172 = (444)_6 \text{ tür.}$$

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $(231)_5 + (342)_5$

b. $(34)_5 \cdot (123)_5$

Çözüm :

$$\begin{array}{r} (2 \ 3 \ 1)_5 \\ + (3 \ 4 \ 2)_5 \\ \hline (1 \ 1 \ 2 \ 3)_5 \end{array}$$

Alt alta gelen rakamları toplarken 5 ve 5 ten büyük sayı çıkınca bulunan sayı 5 e bölünür. Kalan yazılır, bölüm de elde olarak alınır.

$$\begin{array}{r} (1 \ 2 \ 3)_5 \\ \times (3 \ 4)_5 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 2 \\ + 4 \ 2 \ 4 \\ \hline (1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 2)_5 \end{array}$$

Çarpma onluk sistemdeki gibi yapılır. Fakat çarparken 5 ve 5 ten büyük sayı çıkarsa bulunan sayı 5 e bölüp kalan yazılır. Bölümü de elde olarak alınır. Toplama yine 5 lik sisteme göre yapılır.

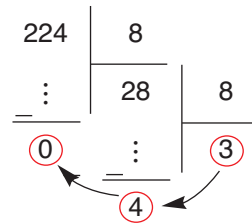
Örnek : 6 ve 3 sayı tabanlarını göstermek üzere $(22)_3 \cdot (44)_6$ çarpımını 8 tabanında yazalım.

Çözüm :

$$(22)_3 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$$

$$(44)_6 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 4 + 24 = 28$$

$28 \cdot 8 = 224$ elde edilir. Bu sayı 8 tabanında yazılırsa



$\rightarrow 224 = (340)_8$ olur.

Örnek : 7 tabanındaki 4 basamaklı, rakamları farklı en büyük sayı ile 7 tabanındaki 3 basamaklı en küçük sayının toplamını yine aynı tabanda bulalım.

Çözüm :

$$(6543)_7 + (100)_7 = (6643)_7$$

Örnek : $a > 3$ olmak üzere $3a^4 + a^2$ sayısının a tabanındaki yazılışını bulalım.

Çözüm :

$$3a^4 + a^2 = 3 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 1 \cdot a^2 + 0 \cdot a^1 + 0 \cdot a^0 \\ = (30100)_a \text{dır.}$$

Örnek : 8 tabanındaki (777) sayısının 1 fazlasının aynı tabandaki karşılığını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r} (7 \ 7 \ 7)_8 \\ + \quad (1)_8 \\ \hline (1 \ 0 \ 0 \ 0)_8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Alt alta gelen rakamları toplarken 8 ve 8 den büyük sayı çıkınca bulunan} \\ \text{sayı 8'e bölünür. Kalan yazılır, bölüm de elde olarak alınır.} \end{array}$$

Asal Sayılar



- * 1 den 100 e kadar olan sayıları 10 x 10 luk bir kare oluşturacak şekilde yandaki tabloya yazınız.
- * 2, 3, 5, 7, 11 ve 13 sayılarının katlarını işaretleyiniz.
- İşaretlemediğiniz sayıların 1 ve kendisinden başka sayma sayısı böleni var mıdır? Bu tür sayılara ne denildiğini hatırladınız mı?
- Ortak doğal sayı böleni yalnız 1 olan doğal sayılara örnekler veriniz. Bu tür sayılara ne denildiğini hatırladınız mı?
- $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 3^2 \cdot 2$, $16 = 2^4$ tür. Buna göre her doğal sayı tabloda işaretlenmeyen sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir mi? Tartışınız.
- $12 = 2^2 \cdot 3^1$ sayısı hangi sayılara bölünür? Bulunuz.

➤ Bir doğal sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulmak için pratik bir kural belirleyebilir misiniz? Tartışınız.

Örnek : 6, 7, 14, 5 ve 13 doğal sayılarını, çarpanlarının çarpımı şeklinde yazalım. Bu sayılardan hangilerinin sadece iki çarpanı olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 7 = 1 \cdot 7, \quad 14 = 1 \cdot 2 \cdot 7, \quad 5 = 1 \cdot 5 \quad \text{ve} \quad 13 = 1 \cdot 13 \text{ tür.}$$

Buna göre 5, 7 ve 13 doğal sayılarının sadece iki çarpanı vardır.

a , 1 den büyük bir doğal sayı olmak üzere; a sayısının 1 ve kendisinden başka doğal sayı böleni yoksa a sayısı asal sayıdır.

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$ asal sayılar kümesidir.

Örnek : 75 sayısını asal sayıların çarpımı şeklinde yazalım. Bu sayıyı bölen kaç tane doğal sayı olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$$

75 sayısını 1, 3, 5, 15, 25 ve 75 sayıları böldüğünden bu sayıyı bölen 6 tane doğal sayı vardır.

Örnek : $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ olmak üzere 360 sayısını kaç tane doğal sayının böldüğünü bulmak için

$\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z}$ ifadesinde x, y ve z sayıları yerine nelerin gelebileceğini inceleyelim.

Çözüm : $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z} \in \mathbb{N}$ olabilmesi için $x = 0, 1, 2, 3$, $y = 0, 1, 2$ ve $z = 0, 1$ değerlerini alabilir. Çarpma yoluyla sayma kuralına göre 360 sayısını bölen $24 = (3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1)$ tane doğal sayı vardır.

A bir doğal sayı; a,b,c asal sayılar ve x,y,z doğal sayılar olmak üzere $A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ olsun. A doğal sayısını bölen $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1)$ tane doğal sayı vardır.

Örnek : 144 sayısının doğal sayı bölenlerinin ve tam kare bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm : $144 = 2^4 \cdot 3^2$ olduğundan bu sayının tüm doğal sayı bölenlerinin sayısı: $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$ tir.

144 sayısının 1, 2^2 , 2^4 , 3^2 , $(2 \cdot 3)^2 = 6^2$, $2^4 \cdot 3^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 12^2$ olmak üzere 6 tane tam kare böleni vardır.

Örnek : 45^m sayısının 28 tane doğal sayı böleni vardır. Buna göre m sayısını bulalım.

Çözüm : $45^m = (5 \cdot 3^2)^m = 5^m \cdot 3^{2m}$ olmak üzere $(m + 1) \cdot (2m + 1) = 28 = 4 \cdot 7$ yazılabilir.

O hâlde $2m + 1 = 7 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$ olarak bulunur.

Örnek : $K = 1200 \dots 0$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 96 olduğuna göre K sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm :

$$K = 12 \cdot 10^n = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^n = 3 \cdot 2^{n+2} \cdot 5^n \text{ dir.}$$

$$(1 + 1) \cdot (n + 2 + 1) \cdot (n + 1) = 96 \Rightarrow (n + 3) \cdot (n + 1) = \frac{48}{8 \cdot 6} \Rightarrow n + 3 = 8 \Rightarrow n = 5 \text{ bulunur.}$$

O hâlde $K = 12 \cdot 10^5$ olup bu sayı 7 basamaklıdır.

Örnek : 7! sayısının içinde kaç tane 2 çarpanı olduğunu bulalım.

Çözüm : $7! = 1 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1 \cdot 2}}{2} \cdot 3 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \cdot 2}}{4} \cdot 5 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 3 \cdot 2}}{6} \cdot 7$

7! sayısının içinde 4 tane 2 çarpanı vardır. Bunu $7! = k \cdot 2^4$, $k \in \mathbb{N}$ şeklinde yazabiliriz. 7 sayısını sürekli 2 ye bölerek ve bütün bölümleri toplayarak da aynı sonucu bulabiliriz. Yani,

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 6 & \textcircled{3} \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & \textcircled{1} \end{array} \Rightarrow 3 + 1 = 4 \text{ tane 2 çarpanı vardır.}$$

Örnek : $k, n \in \mathbb{N}$ ve $38! = k \cdot 3^n$ olmak üzere n sayısının en büyük değerini hesaplayalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l}
 38 & 3 \\
 \hline
 36 & \textcircled{12} & 3 \\
 \hline
 2 & 12 & \textcircled{4} & 3 \\
 \hline
 & 0 & 3 & \textcircled{1} \\
 & & \hline
 & & 1
 \end{array}$$

$n = 12 + 4 + 1 = 17$ olarak bulunur.

Örnek : $43! = k \cdot 2^x \cdot 3^y$ olduğuna göre $x + y$ toplamının en büyük değerini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l}
 43 & 2 \\
 \hline
 42 & \textcircled{21} & 2 \\
 \hline
 1 & 20 & \textcircled{10} & 2 \\
 \hline
 & 1 & 10 & \textcircled{5} & 2 \\
 \hline
 & & 0 & 4 & \textcircled{2} & 2 \\
 \hline
 & & & 1 & 2 & \textcircled{1} \\
 & & & & \hline
 & & & & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 43 & 3 \\
 \hline
 42 & \textcircled{14} & 3 \\
 \hline
 1 & 12 & \textcircled{4} & 3 \\
 \hline
 & 2 & 3 & \textcircled{1} \\
 & & \hline
 & & 1
 \end{array}$$

$43!$ sayısında $21 + 10 + 5 + 2 + 1 = 39$ tane 2 çarpanı ve $14 + 4 + 1 = 19$ tane 3 çarpanı vardır. O hâlde $x = 39$ ve $y = 19$ olmak üzere $x + y = 39 + 19 = 58$ olarak bulunur.

Örnekte görüldüğü gibi $43!$ sayısında 3 çarpanının sayısı, 2 çarpanının sayısından daha azdır.

Örnek : $8!$ sayısında kaç tane 6 çarpanının olduğunu bulalım.

Çözüm : 6 çarpanının kaç tane olduğunu bulabilmek için kaç tane 2 ve kaç tane 3 çarpanının olduğunu bulmamız gerekir. Fakat 6 çarpanının varlığı 3 çarpanına bağlıdır. Çünkü 3 çarpanı $8!$ sayısı içinde 2 çarpanından daha azdır.

$$\begin{aligned}
 8! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overbrace{2 \cdot 2}^4 \cdot 5 \cdot \overbrace{2 \cdot 3}^6 \cdot 7 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^8 \\
 &= 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_6 \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_6 \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $8!$ sayısı içinde 2 tane 6 çarpanı vardır (Görüldüğü gibi $8!$ sayısı içindeki 6 çarpanının sayısı ile 3 çarpanının sayısı eşittir.).

Örnek : $625^3 \cdot 32^4$ çarpımının sondan kaç basamağının sıfır olduğunu ve sayının kaç basamaklı bir sayı olduğunu bulalım.

Çözüm : Verilen sayının sondan kaç basamağının sıfır olduğunu bulabilmek için sayıda kaç tane 10 çarpanının bulunduğunu bulmamız gerekir. Buna göre,

$$625^3 \cdot 32^4 = (5^4)^3 \cdot (2^5)^4 = 5^{12} \cdot 2^{20} = 5^{12} \cdot 2^{12} \cdot 2^8 = 2^8 \cdot (5 \cdot 2)^{12} = 2^8 \cdot 10^{12} \text{ bulunur.}$$

O hâlde sayının sondan 12 basamağı sıfırdır. $2^8 = 256$ olduğundan bu sayı $256 \cdot 10^{12}$ olup $12 + 3 = 15$ basamaklıdır.

Örnek : $k, n \in \mathbb{N}$ ve $40! + 41! = k \cdot 7^n$ olmak üzere n sayısının alabileceği en büyük değeri hesaplayalım.

Çözüm : $40! + 41! = 40! + 40! \cdot 41 = 40! (1 + 41) = 40! \cdot 42$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 7 \\ 35 & \textcircled{5} \\ \hline 5 & \end{array}$$

40! sayısı içinde 5 tane 7 çarpanı vardır.

$42 = 6 \cdot 7$ olduğundan 42 sayısı içinde 1 tane 7 çarpanı vardır.

$40! + 41! = 40! \cdot 6 \cdot 7 = k \cdot 7^n$ olduğundan n sayısının alabileceği en büyük değer $5 + 1 = 6$ dır.

Örnek : $33! + 34!$ toplamının sondan kaç basamağının sıfır olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$33! + 34! = 33! + 33! \cdot 34 = 33! \cdot (1 + 34) = 33! \cdot 35$$

\downarrow
5.7

$$\begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ 30 & \textcircled{6} \\ \hline 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & \\ 5 & \textcircled{1} \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow$$

33! sayısı içinde $6 + 1 = 7$ tane 5 çarpanı vardır.

$33! + 34! = 33! \cdot 5 \cdot 7$ sayısında $7 + 1 = 8$ tane 5 çarpanı vardır. Dolayısıyla 8 tane 10 çarpanı vardır. O hâlde bu toplamın sondan sekiz basamağı sıfırdır.

Örnek : $22! - 1$ sayısının sondan kaç basamağının 9 olacağını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ 20 & \textcircled{4} \\ \hline 2 & \end{array}$$

22! sayısı içinde 4 tane 5 çarpanı olduğundan 4 tane 10 çarpanı vardır.

O hâlde $22! = k \cdot 10^4$, $k \in \mathbb{N}$ yazabiliriz.

$22! = k \cdot 10^4 = k0000$ olduğundan $k0000 - 1 = m9999$ ($m \in \mathbb{N}$) olup sondan 4 basamak 9 dur.

Örnek : $0! + 1! + 2! + 3! + \dots + 21!$ sayısının birler basamağındaki sayıyı bulalım.

Çözüm : $0! + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 5! + 6! + \dots + 21!$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 1 + 1 + 2 + 6 + 24 \\ \hline 34 \end{array}$$

toplamdaki terimlerin her birinin birler basamağı sıfırdır. Çünkü her bir terimde $10 = 2 \cdot 5$ çarpanı vardır.

O hâlde 34 sayısının birler basamağı 4 olduğundan verilen toplamın birler basamağı 4 tür.

Örnek : a ve b pozitif doğal sayılar olmak üzere $72 \cdot a = b^3$ koşulunu sağlayan en küçük a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm : $72 \cdot a = b^3 \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot a = b^3$ olur. Eşitliğin sağ tarafı pozitif bir sayının küpüdür. O hâlde, eşitliğin sol tarafının da bir sayının küpü olması için a çarpanının 3 olması gerekir. $a = 3$ olursa

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = (2 \cdot 3)^3 = b^3 \text{ ten } b = 6 \text{ bulunur.}$$

Aralarında Asal Sayılar

4 ile 9 sayıları asal olmamalarına rağmen, bu sayıları ortak bölen sayı 1 dir Buna rağmen 27 ile 15 sayıları asal olmamalarına rağmen bu sayıları ortak bölen sayılar 1 ve 3 sayılarıdır.

1 den başka ortak böleni olmayan sayılara “aralarında asal sayılar” denir.

Örnek : Aşağıdaki sayı çiftlerinden aralarında asal olanları belirleyelim.

- a. 5, 12 b. 3, 18 c. 25, 50 ç. 12, 25 d. 2, 33

Çözüm : 3 ile 18 sayıları 3'e ; 25 ile 50 sayıları 5'e bölündüklerinden aralarında asal değildir. a, ç, d şıklarında belirtilen sayı çiftlerinin ortak böleni sadece 1 sayısı olduğundan bu sayı çiftleri aralarında asal sayılardır.

Bölünebilme Kuralları



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

- * Tablodan 2 nin katı olan sayıları işaretleyiniz.
- * Bulduğunuz sayıların birler basamağı için ne söyleyebilirsiniz?
- Bir sayının 2 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?
- * Tablodan 3 ün katı olan sayıları işaretleyiniz.
- * Bulduğunuz sayıların rakamlarının toplamını karşılaştırınız. Bu sayılar hangi sayının katıdır?
- Bir sayının 3 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?

- * Tablodan 4 ün katı olan sayıları işaretleyiniz.
- * Bulduğunuz sayıların son iki basamaklarını karşılaştırınız. Bu sayılar hangi sayının katıdır?
- Bir sayının 4 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?
- * Tablodan 5 in katı olan sayıları işaretleyiniz.
- * Bulduğunuz sayıların birler basamağı için ne söyleyebilirsiniz?
- Bir sayının 5 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?
- * Tablodan 9 un katları olan sayıları işaretleyiniz.
- * Bulduğunuz sayıların her birinin rakamlarının toplamı hangi tam sayıya bölünür?
- Bir sayının 9 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?

1000	1184	1576	2112
------	------	------	------

- * Yandaki sayılar 8 ile bölünebilir mi?
- * Sayıların son üç basamağı 8 ile bölünebilir mi?
- * Bir sayının 8 ile bölünebilmesi için bir kural söyleyebilir misiniz?

✱ Aşağıdaki tablodaki noktalı yerleri örneğe uygun biçimde doldurunuz.

Sayı	Bölme İşlemi	(Siyah renkli rakamların toplamı) – (Kırmızı renkli rakamların toplamı)
187	$\begin{array}{r} 187 \quad \quad 11 \\ 11 \quad \quad 17 \\ \hline 77 \\ 77 \\ \hline 0 \end{array}$	$1\textcolor{red}{8}7 = (1 + 7) - (8) = 8 - 8 = 0$
319	$\begin{array}{r} 319 \quad \quad 11 \\ \hline \dots \end{array}$	$3\textcolor{red}{1}9 = (\dots) - (\dots) = \dots$
92939	$\begin{array}{r} 92939 \quad \quad 11 \\ \hline \dots \end{array}$	$9\textcolor{red}{2}9\textcolor{red}{3}9 = (\dots) - (\dots) = \dots$
617	$\begin{array}{r} 617 \quad \quad 11 \\ \hline \dots \end{array}$	$6\textcolor{red}{1}7 = (\dots) - (\dots) = \dots$
2865	$\begin{array}{r} 2865 \quad \quad 11 \\ \hline \dots \end{array}$	$\textcolor{red}{2}8\textcolor{red}{6}5 = (\dots) - (\dots) = \dots$

➤ Tabloda yaptığınız işlemlerden yararlanarak bir sayının 11 ile bölünebilmesi için kural belirleyebilir misiniz? Tartışınız.

2 ve 3 ile bölünebilen iki sayıyı yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>	Bulduğunuz bu iki sayı aynı zamanda hangi sayıya bölünür? Yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>
3 ve 5 ile bölünebilen iki sayıyı yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>	Bulduğunuz bu iki sayı aynı zamanda hangi sayıya bölünür? Yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>
2 ve 9 ile bölünebilen iki sayıyı yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>	Bulduğunuz bu iki sayı aynı zamanda hangi sayıya bölünür? Yandaki kutuya yazınız.	⇒ <input type="text"/>

➤ 6, 15 ve 18 ile bölünebilme için bir kural söyleyebilir misiniz?

2 ile Bölünebilme

Örnek : 146, 24, 18, 50, 62, 102, 34, 98, 100, 156 sayıları 2 ile tam bölünebilmektedir. Verilen sayılardan yararlanarak 2 ile bölünebilme kuralını bulalım.

Çözüm :

50 , 62 , 24 , 146 , 18
100 , 102 , 34 , 156 , 98

Bu sayıların birler basamağındaki rakam bir çift sayı (0,2,4,6,8) dır.

Birler basamağı çift olan doğal sayılar 2 ile tam bölünebilir.

Bir doğal sayının 2 ile bölümünden kalan 0 ya da 1 dir.

Örnek : 3 basamaklı 53k sayısının 2 ile tam bölünebilmesi için k nin alabileceği değerler toplamını bulalım.

Çözüm : 53k sayısı 2 ile tam bölünebiliyorsa k çift sayı olmalıdır. O hâlde k nin alabileceği değerlerin toplamı $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ dir.

3 ile Bölünebilme

Örnek : 12, 15, 18, 21, 24, 27 sayıları 3 ün katı olup 3 ile tam bölünebilmektedir. Verilen sayılardan yararlanarak 3 ile bölünebilme kuralını bulalım.

Çözüm : $12 \longrightarrow 1 + 2 = 3$, $15 \longrightarrow 1 + 5 = 6$, $18 \longrightarrow 1 + 8 = 9$,
 $21 \longrightarrow 2 + 1 = 3$, $24 \longrightarrow 2 + 4 = 6$, $27 \longrightarrow 2 + 7 = 9$

Bu sayıların rakamları toplamı 3 veya 3 ün katıdır.

Bir doğal sayıyı oluşturan rakamların toplamı 3 veya 3 ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir.

Örnek : Üç basamaklı 2a8 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm : 2a8 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için rakamlarının toplamının 3 veya 3 ün katı olması gerekir. Buna göre,

$2 + a + 8 = 10 + a$ dır. $10 + a$ nın 3 ün katı bir sayı olabilmesi için a nın alabileceği değerler; 2, 5 ve 8 dir.

Örnek : Aşağıdaki sayıların 3 ile tam bölünüp bölünemeyeceğini inceleyelim.

a. 110121

b. 9652

c. 170253

ç. 6410

Çözüm

a. $110121 \longrightarrow 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 = 6 = 3 \cdot 2$ olduğundan 3 e tam bölünür.

b. $9652 \longrightarrow 9 + 6 + 5 + 2 = 22 = 3 \cdot 7 + 1$ olduğundan 3 e tam bölünmez. Fakat 3 ile bölümünden kalan 1 dir.

c. $170253 \longrightarrow 1 + 7 + 0 + 2 + 5 + 3 = 18 = 3 \cdot 6$ olduğundan 3 e tam bölünür.

ç. $6410 \longrightarrow 6 + 4 + 1 + 0 = 11 = 3 \cdot 3 + 2$ olduğundan 3 e tam bölünmez. Fakat 3 ile bölümünden kalan 2 dir.

Bir doğal sayının 3 ile bölümünden elde edilen kalan 0, 1 ya da 2 dir.

Bir doğal sayının 3 ile bölümünden kalan, o sayıyı oluşturan rakamların sayı değerlerinin toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : 23aa dört basamaklı sayısının üç ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm :

23aa sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 ise $2 + 3 + a + a = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ dir. O hâlde, $3 + 2a = 3k$ olur. Buradan a nın alacağı değerler; 0, 3, 6 ve 9 olarak bulunur.

4 ile Bölünebilme

Örnek : 100, 104, 108, 312, 616, 420, 524, 728, 932, 836 sayıları 4 ün katı olup 4 ile tam bölünebilmektedir. Verilen sayılardan yararlanarak 4 ile bölünebilme kuralını bulalım.

Çözüm :

100 , 104 , 108 , 312 , 616 , 420 , 524 , 728 , 932 , 836

Bu sayıların, son iki basamağında (birler ve onlar basamağında) yer alan rakamların belirttiği sayı 4 ile tam bölünebilen doğal sayılardır.

Bir doğal sayının son iki basamağını (onlar ve birler basamağı) oluşturan sayı 4 ile tam bölünebiliyorsa bu sayı 4 ile tam bölünebilir.

Örnek : Üç basamaklı 7a2 sayısının 4 ile tam bölünebilmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm : 7a2 sayısının 4 ile tam bölünebilmesi için a2 iki basamaklı sayısının 4 ile tam bölünebilmesi gerekir. Buna göre a nın alabileceği değerler; 1, 3, 5, 7 ve 9 dur.

Örnek : Aşağıdaki sayıların 4 ile tam bölünüp bölünemeyeceğini inceleyelim.

a. 1919

b. 1734

c. 10096

ç. 1881

Çözüm :

a. 1919 $\longrightarrow 19 = 4 \cdot 4 + 3$ olduğundan 4 e tam bölünmez. Fakat 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

b. 1734 $\longrightarrow 34 = 4 \cdot 8 + 2$ olduğundan 4 e tam bölünmez. Fakat 4 ile bölümünden kalan 2 dir.

c. 10096 $\longrightarrow 96 = 4 \cdot 24$ olduğundan 4 ile tam bölünebilir.

ç. 1881 $\longrightarrow 81 = 4 \cdot 20 + 1$ olduğundan 4 e tam bölünmez. Fakat 4 ile bölümünden kalan 1 dir.

Bir doğal sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalan 0, 1, 2 ya da 3 tür.

Bir doğal sayının 4 ile bölümünden kalan, bu doğal sayının son iki basamağının belirttiği sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : 532a dört basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 dir. Buna göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm : 532a sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 ise a nın alabileceği değerler 1, 5 ve 9 dur. Buna göre bu değerlerin toplamı $1 + 5 + 9 = 15$ tir.

5 ile Bölünebilme

Örnek : 95, 100, 105, 110, 115, 120 sayıları 5 ile tam bölünebilmektedir. Verilen sayılardan yararlanarak 5 ile bölünebilme kuralını bulalım.

Çözüm :

95 , 100 , 105 , 110 , 115 , 120

Bu sayıların, son basamağındaki rakam 0 ya da 5 tir.

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile tam bölünebilir.

Örnek : Üç basamaklı 7ab sayısı 5 ve 3 ile tam bölünebiliyor. Buna göre a nın yerine gelebilecek rakamları bulalım.

Çözüm : 7ab sayısı 5 ile tam bölünebiliyor ise b rakamı 0 ya da 5 olmalıdır.

b = 0 için, 7ab = 7a0 dir.

7a0 3 ile tam bölünebildiğinden,

$$7a0 \rightarrow 7 + a + 0 = 7 + \underset{\substack{2 \\ 5 \\ 8}}{a} = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

a nın alabileceği değerler 2, 5 ve 8 dir.

b = 5 için, 7ab = 7a5 tir.

7a5 sayısı 3 ile tam bölünebildiğinden,

$$7a5 \rightarrow 7 + a + 5 = 12 + \underset{\substack{0 \\ 3 \\ 6 \\ 9}}{a} = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

a nın alabileceği değerler 0, 3, 6 ve 9 dur.

O hâlde, a nın yerine gelebilecek rakamlar 0, 2, 3, 5, 6, 8 ve 9 dur.

Örnek : Aşağıdaki sayıların 5 ile bölünüp bölünemeyeceğini inceleyelim.

a. 1526

b. 3295

c. 264258

Çözüm :

a. 1526 → Birler basamağı 6 olduğundan 5 ile tam bölünmez. Kalan 1 dir.

b. 3295 → Birler basamağı 5 olduğundan 5 ile tam bölünür.

a. 264258 → Birler basamağı 8 olduğundan 5 ile tam bölünmez. Kalan 3 tür.

Bir doğal sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 0, 1, 2, 3 veya 4 tür. Bir doğal sayının 5 ile bölünmesinden elde edilen kalan, bu doğal sayının birler basamağındaki rakamın sayı değerinin 5 ile bölünmesinden elde edilen kalana eşittir.

8 ile Bölünebilme

Örnek : 1208, 1214 ve 1232 sayılarının 8 ile bölünüp bölünemediğini inceleyelim.

Çözüm :

$\begin{array}{r l} 1208 & 8 \\ \hline 8 & 151 \\ \hline 40 & \\ \hline 40 & \\ \hline 08 & \\ \hline 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 1214 & 8 \\ \hline 8 & 151 \\ \hline 41 & \\ \hline 40 & \\ \hline 14 & \\ \hline 8 & \\ \hline 6 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 1232 & 8 \\ \hline 8 & 154 \\ \hline 43 & \\ \hline 40 & \\ \hline 32 & \\ \hline 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 208 & 8 \\ \hline 16 & 26 \\ \hline 48 & \\ \hline 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 214 & 8 \\ \hline 16 & 26 \\ \hline 54 & \\ \hline 48 & \\ \hline 6 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 232 & 8 \\ \hline 16 & 29 \\ \hline 72 & \\ \hline 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$
--	--	---	--	--	--

Yukarıda 8 ile bölünebilen 1208 ve 1232 sayılarının son üç basamağının oluşturduğu sayı da 8 ile tam bölünebilmektedir.

Bir doğal sayının son üç basamağını oluşturan sayı 8 ile tam bölünebiliyorsa bu sayı 8 ile tam bölünebilir.

Örnek : Dört basamaklı 210k sayısının 8 ile bölünebilmesi için k rakamının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm : 210k sayısının 8 ile bölünebilmesi için sayının son üç basamağının oluşturduğu sayı 8 ile tam bölünebilmelidir. O hâlde 10k üç basamaklı sayısında k rakamı 4 olmalıdır.

Örnek : Aşağıdaki sayıların 8 ile tam bölünüp bölünemeyeceğini inceleyelim.

a. 4801

b. 4802

c. 4805

ç. 4816

Çözüm :

a. 4801 $\longrightarrow 801 = 8 \cdot 100 + 1$ olduğundan 8 e tam bölünmez. Fakat sayının 8 ile bölümünden kalan 1 dir.

b. 4802 $\longrightarrow 802 = 8 \cdot 100 + 2$ olduğundan 8 e tam bölünmez. Fakat sayının 8 ile bölümünden kalan 2 dir.

c. 4805 $\longrightarrow 805 = 8 \cdot 100 + 5$ olduğundan 8 e tam bölünmez. Fakat sayının 8 ile bölümünden kalan 5 tir.

ç. 4816 $\longrightarrow 816 = 8 \cdot 102$ olduğundan 8 e tam bölünür.

Bir doğal sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ya da 7 dir.
Bir doğal sayının 8 ile bölümünden kalan, bu doğal sayının son üç basamağının belirttiği sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

9 ile Bölünebilme

Örnek : 18, 27, 36, 8127, 585 sayıları 9 un katı olup 9 ile tam bölünebilmektedir. Verilen sayılardan yararlanarak 9 ile bölünebilme kuralını bulalım.

Çözüm :

$$18 \longrightarrow 1 + 8 = 9, \quad 27 \longrightarrow 2 + 7 = 9, \quad 36 \longrightarrow 3 + 6 = 9$$

$$8127 \longrightarrow 8 + 1 + 2 + 7 = 18, \quad 585 \longrightarrow 5 + 8 + 5 = 18$$

Bu sayıların rakamları toplamı 9 veya 9 un katıdır.

Bir doğal sayıyı oluşturan rakamların toplamı 9 veya 9 un katı ise bu doğal sayı 9 ile tam bölünebilir.

Örnek : Üç basamaklı aa1 doğal sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için a rakamının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm : aa1 doğal sayısının 9 ile tam bölünebilmesi için sayıyı oluşturan rakamların toplamının 9 veya 9 un katı olması gerekir.

$$a + a + 1 = 9 \Rightarrow 2a + 1 = 9 \Rightarrow a = 4 \text{ tür.}$$

$a + a + 1 = 18 \Rightarrow 2a + 1 = 18 \Rightarrow 2a = 17$ olup bu eşitliği sağlayan bir rakam bulunamaz. O hâlde a rakamının alabileceği tek değer 4 tür.

Örnek : Aşağıdaki sayıların 9 ile tam bölünüp bölünemeyeceğini bulalım.

a. 821

b. 588

c. 985

Çözüm :

- a. $821 \longrightarrow 8 + 2 + 1 = 11 = 9 \cdot 1 + 2$ olduğundan 9 a tam bölünmez. Fakat sayının 9 ile bölümünden kalan 2 dir.
- b. $588 \longrightarrow 5 + 8 + 8 = 21 = 9 \cdot 2 + 3$ olduğundan 9 a tam bölünmez. Fakat sayının 9 ile bölümünden kalan 3 tür.
- c. $985 \longrightarrow 9 + 8 + 5 = 22 = 9 \cdot 2 + 4$ olduğundan 9 a tam bölünmez. Fakat sayının 9 ile bölümünden kalan 4 tür.

Bir doğal sayının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ya da 8 dir.

Bir doğal sayının 9 ile bölümünden kalan, bu doğal sayının rakamları toplamının 9 a bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek : 75a4 sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm : 75a4 sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise $7 + 5 + a + 4 = 9k + 5$ tir. O hâlde, $11 + a = 9k$ dir. Buradan a nın alacağı değer 7 olarak bulunur.

11 ile Bölünebilme

Örnek : 28, 340, 1208 doğal sayılarını çözümleyelim.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 28 &= 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1 \\ 340 &= 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1 \\ 1208 &= 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 1 \end{aligned}$$

Örnek : İki basamaklı bir doğal sayı, basamaklarındaki rakamların toplamının iki katına eşittir. Bu sayıyı bulalım.

Çözüm : İki basamaklı doğal sayı ab olsun. Buna göre

$ab = 2(a + b) \Rightarrow 10a + b = 2a + 2b \Rightarrow 8a = b$ dir. a ve b birer rakam olduğundan $a = 1$ ve dolayısıyla $b = 8$ olmalıdır. O hâlde iki basamaklı bu doğal sayı 18 dir.

Örnek : Üç basamaklı abc , cab ve bca doğal sayılarının toplamı 1443 tür. $a < b = c$ koşulunu sağlayan abc doğal sayılarını bulalım.

Çözüm : Verilen üç basamaklı doğal sayılar çözümlenerek toplanırsa

$$\begin{aligned} abc + cab + bca &= 100a + 10b + c + 100c + 10a + b + 100b + 10c + a = 1443 \\ \Rightarrow 111(a + b + c) &= 1443 \\ \Rightarrow a + b + c &= 13 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde $b = c = 6$ için $a = 1$ ve $b = c = 5$ için $a = 3$ bulunur. Bu durumda istenilen sayılar 166 ve 355 tir.

Örnek : Üç basamaklı abc sayısı, iki basamaklı bc sayısının 46 katı olduğuna göre $a + b + c$ toplamını hesaplayalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} abc &= 46 \cdot bc \Rightarrow 100 \cdot a + bc = 46 \cdot bc \\ \Rightarrow 100 \cdot a &= 45 \cdot bc \Rightarrow 20 \cdot a = 9 \cdot bc \\ \Rightarrow a &= 9, bc = 20 \text{ olarak bulunur.} \\ a + b + c &= 9 + 2 + 0 = 11 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek : 22, 132, 165 sayıları 11 in katı olup 11 ile bölünebilmektedir.

K bir doğal sayı ve bu doğal sayıyı oluşturan rakamlar sırasıyla $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ olsun.

($K = (k_1 k_2 k_3 k_4 \dots k_n)$) Buna göre K sayısı 11 ile tam bölünebiliyorsa

$$(k_1 + k_3 + k_5 + \dots + k_n) - (k_2 + k_4 + \dots + k_{n-1}) = 11k, \quad n \text{ tek ve } k \in \mathbb{N} \text{ dir.}$$

Örnek : Beş basamaklı 239a7 sayısının 11 ile tam bölünebilmesi için a rakamı ne olmalıdır?

Çözüm :

$$\overset{+}{2} \overset{-}{3} \overset{+}{9} \overset{-}{a} \overset{+}{7} \Rightarrow (2 + 9 + 7) - (3 + a) = 11 \cdot k$$

$$\Rightarrow 18 - 3 - a = 11 \cdot k \Rightarrow 15 - a = 11k \text{ olur. } k = 1 \text{ için } 15 - a = 11 \Rightarrow a = 4 \text{ bulunur.}$$

(k yerine başka bir doğal sayı seçildiğinde bulunacak a değeri rakam olmayacaktır.)

Aralarında Asal İki Sayının Çarpımı ile Bölünebilme

Örnek : 18, 24, 30, 36, 42 sayıları 6 nın katı olup 6 ile tam bölünebilmektedir. $6 = 2 \cdot 3$ olacak biçimde aralarında asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. Şimdi bu sayıların 2 ve 3 e tam bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

18, 24, 30, 36 ve 42 sayılarının birler basamağındaki rakam çift olduğundan bu sayılar 2 ile tam bölünebilir.

18, 24, 30, 36 ve 42 sayılarının rakamlarının toplamı 3 ün katı olduğundan bu sayılar 3 ile tam bölünebilir.

Örnek : 15, 30, 45, 60, 75 sayıları 15 in katı olup 15 ile tam bölünebilmektedir. $15 = 3 \cdot 5$ olacak biçimde aralarında asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. Şimdi bu sayıların 3 ve 5 e tam bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

15, 30, 45, 60 ve 75 sayılarının rakamlarının toplamı 3 ün katı olduğundan bu sayılar 3 ile tam bölünebilir.

15, 30, 45, 60 ve 75 sayılarının birler basamağındaki rakam 0 veya 5 olduğundan bu sayılar 5 ile tam bölünebilir.

Örnek : 18, 36, 54, 72, 90 sayıları 18 in katı olup 18 ile tam bölünebilmektedir. $18 = 2 \cdot 9$ olacak biçimde aralarında asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. Şimdi bu sayıların 2 ve 9 a tam bölünüp bölünmediğini inceleyelim.

18, 36, 54, 72 ve 90 sayılarının birler basamağındaki rakam çift olduğundan bu sayılar 2 ile tam bölünebilir.

18, 36, 54, 72 ve 90 sayılarının rakamlarının toplamı 9 un katı olduğundan bu sayılar 9 ile tam bölünebilir.

$a = x \cdot y$ ve x ile y aralarında asal sayılar olmak üzere, bir doğal sayının a ile tam bölünebilmesi için hem x e hem de y ye tam bölünebilmesi gerekir.

$18 = 6 \cdot 3$ olmasına rağmen 6 ve 3 e bölünen her sayı 18 e bölünmez. Çünkü 6 ve 3 aralarında asal değildir. 24 sayısı buna bir örnektir; 6 ve 3 e bölünmesine rağmen 18 e bölünmez.

Benzer sebeple 15 ve 3 e bölünen her sayının 45 e, 12 ve 3 e bölünen her sayının 36 ya bölünmeyeceğini söyleyebiliriz.

Örnek : Beş basamaklı 23a4b sayısı 45 ile tam bölünebildiğine göre a + b toplamının alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulalım.

Çözüm : 23a4b sayısı 45 ile tam bölünebiliyorsa $45 = 5 \cdot 9$ olduğundan 5 ve 9 ile de tam bölünebilir. 23a4b sayısı 5 ile tam bölündüğünden b = 0 ya da b = 5 tir.

$$b = 0 \Rightarrow 23a4b = 23a40 \text{ tir.}$$

23a40 9 ile tam bölünebildiğinden $23a40 \rightarrow 2 + 3 + a + 4 + 0 = 9 + \underset{0 \ 9}{a} = 9k, k \in \mathbb{N}$ olup a = 0 ya da a = 9 bulunur. O hâlde a + b = 0 + 0 = 0 ya da a + b = 9 + 0 = 9 bulunur.

$$b = 5 \Rightarrow 23a4b = 23a45 \text{ tir.}$$

23a45 9 ile tam bölünebildiğinden $23a45 \rightarrow 2 + 3 + a + 4 + 5 = 14 + \underset{4}{a} = 9k, k \in \mathbb{N}$ olup a = 4 bulunur. O hâlde a + b = 4 + 5 = 9 bulunur. Bu durumda a + b toplamının alabileceği en küçük değer 0, en büyük değer ise 9 dur.

Örnek : Dört basamaklı 25ab sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 dir. 25ab sayısı 12 ile tam bölünüyorsa (a,b) ikilisinin kaç farklı değer alabileceğini bulalım.

Çözüm : 25ab sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 ise, b = 2 veya b = 7 dir.

b = 7 için 25a7 sayısı 12 ye tam bölünüyorsa bu sayı hem 3 e hem de 4 e tam bölünür. 25a7 tek sayı olduğundan ve 4 e tam bölünmediğinden 12 ye de tam bölünmez. O hâlde b = 7 olamaz.

b = 2 için 25a2 sayısı 12 ye tam bölünüyorsa, bu sayı hem 3 e hem de 4 e tam bölünür.

25a2 4 e tam bölünüyorsa a sayısı 1, 3, 5, 7 ya da 9 olabilir.

25a2 3 e tam bölünüyorsa $2 + 5 + a + 2 = 9 + a$, 3 ün katı olmalı. O hâlde a sayısı 0, 3, 6 ya da 9 olabilir.

Buna göre, $\{1,3,5,7,9\} \cap \{0,3,6,9\} = \{3,9\}$ olup (a,b) = (3,2) veya (a,b) = (9,2) olacak şekilde (a,b) ikilisi 2 farklı değer alabilir.

Örnek : Beş basamaklı 21a3b sayısının 45 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre (a,b) ikilisinin kaç farklı değer alabileceğini bulalım.

Çözüm : Beş basamaklı 21a3b sayısının 45 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre bu sayının 9 ve 5 ile bölümünden kalan 4 tür.

21a3b sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 ise b = 4 veya b = 9 dur.

b = 4 için 21a34 sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 ise $2 + 1 + a + 3 + 4 = 10 + a = 9k + 4$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}^+$ vardır. O hâlde a = 3 olmalıdır.

b = 9 için 21a39 sayısının 9 ile bölümünden kalan 4 ise $2 + 1 + a + 3 + 9 = 15 + a = 9k + 4$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}^+$ vardır. O hâlde a = 7 olmalıdır.

Buna göre (a,b) = (3,4) ve (a,b) = (7,9) olacak şekilde (a,b) ikilisi 2 farklı değer alabilir.

Örnek : Beş basamaklı 5a34b sayısı 55 ile tam bölünüyorsa a nın yerine gelebilecek rakamların toplamını bulalım.

Çözüm : 5a34b sayısı 55 ile tam bölünüyorsa bu sayı 5 ve 11 ile tam bölünür.

5a34b sayısı 5 ile tam bölünüyorsa b = 0 ya da b = 5 tir.

b = 0 için 5a340 sayısı 11 ile tam bölünüyorsa;

$$(0 + 3 + 5) - (4 + a) = 4 - a = 11k \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ vardır. O hâlde } a = 4 \text{ olmalıdır.}$$

b = 5 için 5a345 sayısı 11 ile tam bölünüyorsa;

$$(5 + 3 + 5) - (4 + a) = 9 - a = 11k \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ vardır. O hâlde } a = 9 \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre a nın yerine gelebilecek rakamların toplamı $9 + 4 = 13$ tür.

OBEB ve OKEK



Aşağıdaki tabloda kenar uzunlukları (x,y) sayı ikilileri ile gösterilen dikdörtgenler verilmiştir.

- * Buna göre her bir dikdörtgenin içini boşluk kalmadan doldurabilecek eş karelerin kenar uzunluklarını bularak tabloya yazınız.
- * Kenar uzunlukları tabloda verilen dikdörtgenlerle oluşturulabilecek en küçük üç karenin kenar uzunluklarını bularak tabloya yazınız.

(x , y)	Dikdörtgenin içine sığabilecek karelerin kenar uzunlukları	OBEB (x,y)	OKEK (x,y)	Dikdörtgenlerle oluşturulabilecek karelerin kenar uzunlukları
(20 , 12)				
(18 , 12)				
(6 , 8)				
(9 , 15)				

- Kenar uzunlukları 20 cm ve 12 cm olan dikdörtgen biçimindeki kâğıdı en büyük eş kareler şeklinde kesmeniz isteniyor. Bu sayılar için bulduğunuz OBEB ve OKEK değerlerinden hangisi bunun için size yardımcı olur? Açıklayınız.
- Kenar uzunlukları 6 cm ve 8 cm olan dikdörtgen biçimindeki kâğıtlardan kaç tanesini birleştirirseniz en küçük kareyi bulursunuz? Bu sayılar için bulduğunuz OBEB ve OKEK değerlerinden hangisi bunun için size yardımcı olur? Açıklayınız

Ortak Bölenlerin En Büyüğü

Örnek : 12 ve 18 sayılarının bölenlerini inceleyelim. Bu iki sayıyı da bölen en büyük sayıyı bulalım.

Çözüm :

- 12 sayısının bölenleri ; 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 dir.
 18 sayısının bölenleri ; 1, 2, 3, 6, 9 ve 18 dir.
 12 ve 18 sayılarının ortak bölenleri ; 1, 2, 3 ve 6 dır.
 O hâlde 6 sayısı, 12 ve 18 sayılarının en büyük ortak bölenidir.

İki ya da ikiden fazla doğal sayının her birini tam bölen sayıların en büyüğüne, bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü denir. Kısaca OBEB biçiminde gösterilir.

Örnek : 30 ve 126 sayılarını asal çarpanlarına ayırarak bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğünü kısa yoldan bulalım.

Çözüm : 1.yol:

30	126	2
15	63	3
5	21	3
5	7	5
1	7	7
	1	

2 ve 3 sayıları 30 ve 126 yı ortak bölen sayılardır. O hâlde, bu sayıların çarpımı 30 ve 126 yı ortak bölen en büyük sayı olur.
 OBEB (30, 126) = 2 . 3 = 6 dır.

2.yol:

30	2	126	2	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
15	3	63	3	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
5	5	21	3	
1		7	7	
		1		

30 ve 126 nın ortak asal çarpanlarının en küçük üslülerinin çarpımı bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğüdür. O hâlde,
 OBEB (30, 126) = 2 . 3 = 6 dır.

Örnek : Bir izci kampına Antalya'dan 60, Bilecik'ten 48 ve Ankara'dan 84 öğrenci katılmıştır. Her ilin öğrencileri bir arada olmak koşuluyla çadırlara eşit sayıda yerleşeceklerdir. Buna göre en az kaç çadır gerektiğini bulalım.

Çözüm :

Çadır sayısının en az olması için her çadırda eşit sayıda mümkün olduğu kadar çok öğrenci kalmalıdır. O hâlde 60, 48 ve 84'ün en büyük ortak böleni, her bir çadırda kalabilecek en fazla öğrenci sayısını verir. Bu durumda,

60	48	84	②
30	24	42	②
15	12	21	2
15	6	21	2
15	3	21	③
5	1	7	5
1		7	7
		1	

OBEB (60, 48, 84) = 2 . 2 . 3 = 12 olup her çadırda en fazla 12 öğrenci kalabilir. Buna göre çadır sayısı;

$$\frac{60}{12} + \frac{48}{12} + \frac{84}{12} = 5 + 4 + 7 = 16 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Birinde 48 litre, diğ erinde 56 litre farklı yoğunlukta süt bulunan iki bidondaki sütler birbirine karıştırılmadan şişelere doldurulmak isteniyor. Buna göre;

- Kullanılacak şişelerin en fazla kaç litrelik olacağını,
- Kaç şişe kullanılacağını bulalım.

Çözüm :

- Kullanılacak şişelerin kapasitesi 48 ile 56 sayılarının OBEB dır.

48	56	②
24	28	②
12	14	②
6	7	2
3	7	3
1	7	7
	1	

OBEB(48,56) = 2³ = 8 olur. Şişelerin kapasitesi 8 litredir.

$$\text{b. } \frac{48}{8} + \frac{56}{8} = 6 + 7 = 13 \text{ şişe kullanılır.}$$

Ortak Katların En Küçüğü

Örnek : 12 ve 18 sayılarının katlarını inceleyelim. Bu iki sayının ortak katlarını yazarak en küçüğünü bulalım.

Çözüm :

- 12 sayısının katları ; 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, ... dir.
 18 sayısının katları ; 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, ... dir.
 12 ve 18 sayılarının ortak katları ; 36, 72, 108, ... dir.
 O hâlde 36 sayısı, 12 ve 18 sayılarının en küçük ortak katıdır.

İki ya da ikiden fazla doğal sayının her birinin katı olan doğal sayılardan en küçüğüne, bu sayıların ortak katlarının en küçüğü denir. Kısaca OKEK biçiminde gösterilir.

Örnek : 20 ve 135 sayılarını asal çarpanlarına ayırarak bu sayıların ortak katlarının en küçüğünü kısa yoldan bulalım.

Çözüm :

1.yol :

20	135	2	
10	135	2	
5	135	3	
5	45	3	OKEK (20, 135) = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$ tır.
5	15	3	
5	5	5	
1	1		

2.yol:

20	2	135	3	$20 = 2^2 \cdot 5$	20 ve 135 in ortak asal çarpanlarının en büyük üslüleri ile
10	2	45	3	$135 = 3^3 \cdot 5$	ortak olmayan asal çarpanlarının çarpımı bu iki sayının ortak
5	5	15	3		katlarının en küçüğüdür. O hâlde
1		5	5		OKEK(20, 135) = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$ tır.
		1			

Örnek : Boyutları 18 x 12 cm olan farklı renklere boyanmış kâğıtlardan elde edilecek karenin;

- Bir kenarının uzunluğunu,
- Kaç tane kâğıt kullanılacağını bulalım.

Çözüm :

- Karenin bir kenarı 12 ile 18 sayılarının OKEK i dir.

12	18	2	
6	9	2	
3	9	3	OKEK(12, 18) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$ olur. En küçük karenin bir kenarı 36 cm olur.
1	3	3	
	1		

b. Kullanılan karenin sayısı :
$$\frac{\text{Karenin alanı}}{\text{Kâğıdın alanı}} = \frac{36^3 \cdot 36^2}{12 \cdot 18} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ olur.}$$

Örnek : $180 + x$ sayısı 6, 8, 18 sayılarıyla tam bölünüyorsa x sayısının alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm : 6, 8, 18 sayılarıyla tam bölünen bir sayı 6, 8 ve 18 in ortak katı olmalıdır.

6	8	18	2	
3	4	9	2	OKEK(6,8,18) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$ olur.
3	2	9	2	72 ve 72 sayısının katları 6, 8 ve 18 e tam bölünür. $180 + x$ sayısındaki x in en
3	1	9	3	küçük olması için 72 nin 3 katını alalım.
1		3	3	$3 \cdot 72 = 216 = 180 + x$ ise $x = 36$ olur.
		1		

Örnek : 460 sayısından en az kaç çıkarılmalıdır ki kalan sayı 12, 7 ve 15 ile tam bölünebilsin.

Çözüm : 12, 7 ve 15 ile tam bölünebilen sayı 12, 7 ve 15 in OKEK i ya da OKEK in tam katlarıdır.

12	7	15	2	
6	7	15	2	
3	7	15	3	
1	7	5	5	OKEK(12,7,15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ olur.
	7	1	7	O hâlde 460 sayısından 40 çıkarılırsa kalan sayı 12, 7 ve 15 ile tam bölünür.
	1			



ALİŞTIRMALAR

1. Yandaki toplama işleminde $x < y < z$ olacak şekilde ardışık x, y ve z rakamları için y rakamını bulunuz.

$$\begin{array}{r} xzy \\ zyx \\ + yxz \\ \hline 1998 \end{array}$$
2. $a2b$ üç basamaklı sayısında a ile 2 nin yerleri değiştirildiğinde sayı 450 azalıyor. Buna göre a sayısını bulunuz.
3. $(1024)_5 = (x)_3$ ise x kaçtır?
4. $(32)_4 \cdot (13)_4 = (x)_2$ ise x kaçtır?
5. a, b, c, d birbirinden farklı rakamlar olmak üzere $(abcd)_6$ sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamını bulunuz.
6. $K = (444)^2 + (222)^2 - (111)^2$ sayısının asal çarpanlarını bulunuz.
7. $53! + 54!$ toplamının sondan kaç basamağı sıfırdır?
8. $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\frac{62!}{9^a}$ ifadesini bir tam sayı yapan en büyük a değeri kaçtır?
9. Beş basamaklı $4257a$ sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.
10. Dört basamaklı $2xxy$ sayısı, 3 ve 5 ile bölünebilen bir tek sayı olduğuna göre x in alabileceği değerleri bulunuz.
11. 30 basamaklı, $777...7$ sayısının, 9 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
12. $3, 4$ ve 7 sayılarına ayrı ayrı bölündüğünde 2 kalanını veren en küçük doğal sayıyı bulunuz.
13. 36 ile x sayıları için $\text{OKEK}(36, x) = 99$, $\text{OBEB}(36, x) = 28$ ise x kaçtır?
14. a, b, c doğal sayılar olmak üzere, $x = 5a + 3 = 7b + 5 = 9c + 7$ eşitliğini sağlayan en küçük x sayısı kaçtır?
15. $2! + 4! + 6! + \dots + 2050!$ toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?
16. $1! + 2! + 3! + \dots + 77!$ toplamının 15 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

TAM SAYILAR



Everest Tepesi, 8884 metreye ulaşan yüksekliği ile Dünya'nın en yüksek noktasıdır. Nepal ve Çin arasında bulunan bu tepe, Himalaya Dağları üzerinde ve Nepal ülke sınırları içinde yer alır. Buna karşın; okyanusların en derin noktası, Pasifik Okyanusu'nda, Guam Adası'nın güneybatı tarafındaki Mariana Çukuru'dur (Filipin Çukuru). Derinliği tam 11 033 metre olup suya atılan bir kilogram kütledeki bir cismin Mariana Çukuru'na ulaşması tam bir saat sürer.



- ✓ Everest Tepesi'nin yüksekliğini + 8884 m olarak gösterirsek, Filipin Çukuru'nun derinliğini nasıl ifade edersiniz?
- ✓ Sadece doğal sayıların elemanları $8 + x = 3$ denkleminin çözümü için yeterli midir? Nedenini açıklayınız.



➤ Aşağıdaki işlemleri yapınız. Sırasıyla sonuçları yandaki kutudan karşılaştırarak anahtar kelimeyi bulunuz.

- a. $-6 + 5 : 5 - 3$ b. $-14 : 2 - [(-4) \cdot (+2)]$
c. $-15 : 5 - (-8 + 3)$ ç. $+3 - [(-25) : (-5)]$
d. $(+3) \cdot (-2) + (+17)$ e. $(-5) + (-23)$
f. $(-3)^3 + 1$

E	Ü	N	L	G	V	İ
-2	+1	11	-28	-8	2	-26

Örnek : $-3 + (10 : 2) - 7 \cdot 4$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $-3 + (10 : 2) - 7 \cdot 4 = -3 + 5 - 28$
 $= -31 + 5 = -26$ bulunur.

Tam sayılar kümesi negatif tam sayılar kümesinin (Z^-), sıfırın ve pozitif tam sayılar kümesinin (Z^+) birleşiminden oluşan bir kümedir. O hâlde,

$$Z^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}, \{0\} \text{ ve } Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ kümelerinin birleşimi}$$

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ \text{ (tam sayılar kümesi) ni oluşturur.}$$

Doğal sayılar kümesi tam sayılar kümesinin alt kümesidir. Yani $N \subset Z$ dir.

Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi



$(+5) + (+7)$	
$(-7) + (+3)$	
$(+9) + (-4)$	
$(+3) + (-8)$	

$(-8) + (+3)$	
$(+3) + (-8)$	
$[(-2) + (+5)] + (-7)$	
$(-2) + [(+5) + (-7)]$	

$(-5) + 0$	
$0 + (+7)$	

$(+7) + (-7)$	
$(-4) + (+4)$	

- ✳ Yandaki tablolarda verilen işlemleri yapınız.
- ✳ Bulduğunuz sayılar hangi sayı kümesine aittir?
- İki tam sayının toplamı yine bir tam sayı mıdır? Açıklayınız.
- ✳ Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.
- Tam sayılar toplanırken toplanan sayıların sırası önemli midir? Açıklayınız.
- ✳ İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı kaçtır?
- Tam sayılar kümesinde toplamı etkilemeyen sayı kaçtır? Açıklayınız.
- ✳ İşlemlerin sonucunda bulduğunuz sayılar için ne söyleyebilirsiniz?
- Toplama işleminde bir elemanın tersini nasıl bulursunuz?

Örnek : Yandaki tablo bir işletmenin kasasındaki günlük para giriş çıkışını göstermektedir. Pazartesi 2500 TL ile haftaya başlayan işletmenin kasadaki günlük para miktarlarını ve hafta bitiminde kasasında kaç TL olacağını bulalım.

	Kasadaki Para	Giriş	Çıkış
Pazartesi	2500	–	–2000
Salı		6700	–
Çarşamba		–	–3000
Perşembe		–	–1000
Cuma		1500	–
Cumartesi		2000	–
Pazar		–	–4000

Çözüm : $(+2500) + (-2000) = +500$

$$(+500) + (+6700) = +7200$$

$$(+7200) + (-3000) = +4200$$

$$(+4200) + (-1000) = +3200$$

$$(+3200) + (+1500) = +4700$$

$$(+4700) + (+2000) = +6700$$

$$(+6700) + (-4000) = +2700 \text{ Hafta bitiminde işletmenin kasasında 2700 TL olur.}$$

Tam sayılar toplanırken toplanan sayıların işaretleri aynı ise sayıların toplamına ortak işaret verilir. Toplanan tam sayılar farklı işaretli ise mutlak değerce büyük olan sayıdan küçük olan sayı çıkarılır ve mutlak değerce büyük olan sayının işareti verilir.

Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri

1. Kapalılık Özelliği

Örnek : 7 ve -10 tam sayılarının toplamı olan $(+7) + (-10) = -3$ sayısı bir tam sayıdır. Benzer şekilde her a ve b tam sayısı için $a + b$ toplamı yine bir tam sayıdır.

Her $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + b \in \mathbb{Z}$ olduğundan tam sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

Örnek : $(-5) + (-2)$ ve $(-2) + (-5)$ toplamalarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} (-5) + (-2) = -7 \\ (-2) + (-5) = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow (-5) + (-2) = (-2) + (-5) \text{ tir.}$$

Her $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + b = b + a$ olduğundan tam sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

Örnek : $(-3) + [(-2) + (+3)]$ ve $[(-3) + (-2)] + (+3)$ toplamalarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} (-3) + [(-2) + (+3)] = (-3) + (+1) = -2 \\ [(-3) + (-2)] + (+3) = -5 + (+3) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow (-3) + [(-2) + (+3)] = [(-3) + (-2)] + (+3) \text{ tür.}$$

Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ olduğundan tam sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

4. Etkisiz Eleman

Örnek : $(-7) + 0$ ve $0 + (-7)$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} (-7) + 0 = -7 \\ 0 + (-7) = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow (-7) + 0 = 0 + (-7) \text{ dir.}$$

Her $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan tam sayılar kümesinde toplama işleminin birim elemanı vardır ve sıfırdır.

5. Toplama İşlemine Göre Bir Elemanın Tersİ

Örnek : $(-5) + (+5)$ ve $(+5) + (-5)$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} (-5) + (+5) = 0 \\ (+5) + (-5) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-5) + (+5) = (+5) + (-5) = 0 \text{ dir.}$$

Her $a \in \mathbb{Z}$ ve $-a \in \mathbb{Z}$ için $(+a) + (-a) = (-a) + (+a) = 0$ olduğundan tam sayılar kümesinde her elemanın tersi vardır ve sayının ters işaretlisidir.

Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

Örnek : Aşağıdaki çarpma işlemleri yapılırken nelere dikkat edildiğini inceleyelim.

$$(-8) \cdot (-5) = +40 \quad ; \quad (+3) \cdot (+4) = +12 \quad ; \quad (-2) \cdot (+7) = -14 \quad ; \quad (+6) \cdot (-5) = -30$$

Yukarıdaki çarpma işlemlerinde aynı işaretli iki tam sayının çarpımı, pozitif bir tam sayı; ters işaretli iki tam sayının çarpımı, negatif bir tam sayıdır.

İki tam sayı çarpılırken aynı işaretli iki tam sayının çarpımı pozitif, ters işaretli iki tam sayının çarpımı negatif alınarak çarpma işlemi yapılır.

Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri



$(+4) \cdot (-3)$	
$(+5) \cdot (+6)$	
$(-2) \cdot (-7)$	
$(+2) \cdot (-3)$	

- * Yandaki tablolarda verilen işlemleri yapınız.
- * Bulduğunuz sayılar hangi sayı kümesine aittir?
- İki tam sayının çarpımı yine bir tam sayı mıdır? Açıklayınız.

$(-2) \cdot (+3)$	
$(+3) \cdot (-2)$	
$[(-2) \cdot (+5)] \cdot (-1)$	
$(-2) \cdot [(+5) \cdot (-1)]$	

- * Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.
- Tam sayılar çarpılırken çarpılan sayıların sırasının önemi var mıdır? Açıklayınız.

$(-9) \cdot (+1)$	
$(+1) \cdot (-4)$	

- * İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı kaçtır?
- Tam sayılar kümesinde çarpma işleminde sonucu etkilemeyen sayı kaçtır? Açıklayınız

$(-5) \cdot x$	1
----------------	---

- * (-5) ile çarpıldığında 1 sayısına eşit olan bir tam sayı var mıdır?
- Bir tam sayının çarpma işlemine göre tersi var mıdır? Açıklayınız.

$0 \cdot (-7)$	
$(-4) \cdot 0$	

- Yandaki işlemleri inceleyerek 0'ın işlevini açıklayınız.

1. Kapalılık Özelliği

Örnek : $(-2) \cdot (-3)$, $(+8) \cdot (+2)$, $(-1) \cdot (+1)$, $(+3) \cdot (-3)$, $(-1) \cdot 0$ çarpımlarından elde edilecek sayılar yine bir tam sayıdır. Benzer şekilde her a ve b tam sayısı için a . b yine bir tam sayıdır.

Her a,b $\in \mathbb{Z}$ olmak üzere a . b $\in \mathbb{Z}$ olduğundan tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

Örnek : $(-6) \cdot (+3)$ ve $(+3) \cdot (-6)$ işlemlerini yaparak sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} (-6) \cdot (+3) = -18 \\ (+3) \cdot (-6) = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow (-6) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-6) \text{ dir.}$$

Her $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a \cdot b = b \cdot a$ olduğundan tam sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

Örnek : $[(+1) \cdot (+2)] \cdot (-3)$ ve $(+1) \cdot [(+2) \cdot (-3)]$ işlemlerini yaparak sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} [(+1) \cdot (+2)] \cdot (-3) &= (+2) \cdot (-3) = -6 \\ (+1) \cdot [(+2) \cdot (-3)] &= (+1) \cdot (-6) = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [(+1) \cdot (+2)] \cdot (-3) = (+1) \cdot [(+2) \cdot (-3)] \text{ tür.}$$

Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olduğundan tam sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

4. Etkisiz Eleman

Örnek : $(-7) \cdot (+1)$ ve $(+1) \cdot (-7)$ işlemlerini yaparak sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} (-7) \cdot (+1) &= -7 \\ (+1) \cdot (-7) &= -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-7) \cdot (+1) = (+1) \cdot (-7) = -7 \text{ dir.}$$

Her $a \in \mathbb{Z}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olduğundan tam sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz (birim) elemanı vardır ve 1 dir.

5. Çarpma İşlemine Göre Bir Elemanın Tersİ

Örnek : -7 tam sayısının bir x tam sayısı ile çarpımı, çarpma işleminin etkisiz elemanına eşit midir? İnceleyelim.

Çözüm : Çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 olmak üzere,

$$(-7) \cdot x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{7} \notin \mathbb{Z} \text{ olur. O hâlde } (-7) \text{ tam sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.}$$

Her $a \neq 1, a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a \cdot x = 1$ olacak şekilde bir x tam sayısı bulunamayacağından tam sayılar kümesinde 1 den başka hiçbir elemanın tersi yoktur.

Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Örnek : Aşağıdaki çıkarma işlemleri yapılırken nelere dikkat edildiğini inceleyelim.

$$\begin{aligned} (-8) - (+5) &= (-8) + (-5) = -13 & ; & \quad (+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10 \\ (-8) - (-8) &= (-8) + (+8) = 0 & ; & \quad (+3) - (+10) = (+3) + (-10) = -7 \end{aligned}$$

Çözüm : Yukarıdaki çıkarma işlemlerinde çıkan sayının işareti değiştirilerek toplama işlemi yapılmıştır.

İki tam sayı birbirinden çıkarılırken çıkan sayının işareti değiştirilerek işlem toplama işlemine dönüştürülür ve toplama işlemi yapılır.

Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

Örnek : Aşağıdaki bölme işlemleri yapılırken nelere dikkat edildiğini inceleyelim.

$$(-6):(-3)=+2 \quad ; \quad (+6):(+3)=+2 \quad ; \quad (-6):(+3)=-2 \quad ; \quad (+6):(-3)=-2$$

Yukarıdaki bölme işlemlerinde aynı işaretli iki tam sayının bölümü, pozitif bir tam sayı; ters işaretli iki tam sayının bölümü negatif bir tam sayıdır.

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $(-4)+(-1) \cdot (-5)+4$

b. $(-3)+(-5)-(-7)$

c. $4 \cdot (-1)+3 \cdot [(-5):(-15)]$

ç. $(-20):[2-4 \cdot (3-5)]-3$

d. $(-3) \cdot (5-8)-[7:(9-2)-8]$

e. $(-5) \cdot (-2)-(-1)+(6:2)$

Çözüm :

a. $(-4)+(-1) \cdot (-5)+4 = (-4)+(+5)+4 = 5$ tir.

b. $(-3)+(-5)-(-7) = (-3)+(-5)+(+7) = -1$ dir.

c. $4 \cdot (-1)+3 \cdot [(-5):(-15)] = (-4)+3 \cdot \frac{1}{3} = -3$ olur.

ç. $(-20):[2-4 \cdot (3-5)]-3 = (-20):[2+8]-3 = (-20):10-3 = -2-3 = -5$ tir.

d. $(-3) \cdot (5-8)-[7:(9-2)-8] = (-3) \cdot (-3)-[7:7-8] = 9-(-7) = 9+(+7) = 16$ olur.

e. $(-5) \cdot (-2)-(-1)+(6:2) = 10+(+1)+3 = 14$ olur.

Her $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $x = y \cdot z$ ise z sayısı x in y sayısına bölümüdür. $z = \frac{x}{y}$ şeklinde gösterilir. $x = y \cdot z$ ise

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline = & z \\ 0 & \end{array} \text{ dir.}$$

Örnek : 26 tam sayısının 3 tam sayısına bölümü bir tam sayı mıdır? İnceleyelim.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 26 & 3 \\ \hline = 24 & 8 \\ 2 & \end{array} \text{ yani, } 26 = 3 \cdot 8 + 2 \text{ dir.}$$

Örnek : -55 tam sayısının 7 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} -55 & 7 \\ \hline = -56 & -8 \\ +1 & \end{array} \text{ yani } -55 = 7 \cdot (-8) + 1 \text{ dir.}$$

Örnek :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline = & 5 \\ 3 & \end{array} \text{ Yandaki bölme işlemine göre } a \text{ sayısının alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulalım.}$$

Çözüm :

$a = 5b + 3$ ve $b > 3$ olduğundan $b = 4$ alınırsa a sayısının alabileceği en küçük değer,

$$a = 5 \cdot 4 + 3 = 23 \text{ olarak bulunur.}$$

$A, B, C, K \in \mathbb{N}$, $B \neq 0$ ve $0 \leq K < B$ olmak üzere

$$\begin{array}{r} A \\ \hline B \\ C \end{array} \text{ ise } A = B \cdot C + K \text{ dir.}$$

Bir bölme işleminde elde edilen kalan ya sıfırdır ya da bölen sayıdan daha küçük pozitif bir tam sayıdır.

Örnek : a, b ve c birbirinden farklı pozitif tam sayılardır. Buna göre $5b + 6a + c = 35$ denklemini sağlayan en büyük ve en küçük c değerlerini bulalım.

Çözüm :

c sayısının en büyük olabilmesi için a ve b değerleri en küçük seçilmelidir. Buna göre $a = 1$ ve $b = 2$ seçilirse $5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + c = 35 \Rightarrow c = 19$ bulunur.

c sayısının en küçük olabilmesi için a ve b değerleri en büyük seçilmelidir. Buna göre $a = 2$ ve $b = 4$ seçilirse $5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + c = 35 \Rightarrow c = 3$ bulunur.

Örnek : a, b ve c sıfırdan farklı pozitif tam sayılar ve

$$\begin{array}{r} a \\ \hline 5 \\ b \end{array} \quad \begin{array}{r} b \\ \hline c \\ 7 \end{array}$$

olduğuna göre a sayısının alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm :

$$a = 5b + 3 \text{ ve } b = 7c + 2 \Rightarrow a = 5(7c + 2) + 3 \Rightarrow a = 35c + 13 \text{ tür.}$$

$$c > 2 \text{ olduğundan } c = 3 \text{ seçilirse } a = 35 \cdot 3 + 13 = 118 \text{ olarak bulunur.}$$



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $4 \cdot (-5) + 1 - [3 - (-7 + 5)] : (-5)$

b. $[(-7 - 3) : (-4 - 1)] - [-3 - (-8)] \cdot (-12 : 4)$

c. $-[-15 : 3 + 2 - (-7) \cdot 3 - 2]$

ç. $[-8 - 5 : 1 + 3] : [-7 + 2 \cdot (-3) + 15]$

2. $\frac{3a + 15}{3}$ kesrini tam sayı yapan a tam sayılarını bulunuz.

3. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x \cdot y = 35$, $y + z = -13$ ise $z \cdot x + z \cdot y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

4. $\begin{array}{r} abababab \\ \hline ab \\ c \end{array}$ Yandaki bölme işleminde, $c + k$ kaçtır?

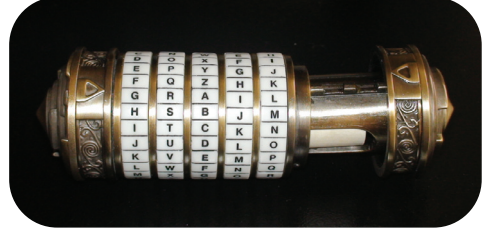
5. a bir çift tam sayı ise $(20 - 5)^2 + a$ ifadesi çift midir?

6. Ardışık 10 tane tek sayının toplamı 240 ise bu sayıların en küçüğü kaçtır?

MODÜLER ARİTMETİK



Kriptoloji şifre bilimidir. Kriptografi Yunanca gizli anlamına gelen "graf" dan türetilmiştir. Kriptografi bilgi güvenliği ile uğraşır. "Kripto analiz" güvenli bilginin kırılması anlamına gelir. Kriptoanalistler genelde şifre çözmeye dayalı çalışırlar. Kriptoloji bir matematik bilimidir ve genelde sayılar teorisi üzerine kuruludur.



Şifreleme yöntemleri Sezar'ın generallerine gönderdiği mesajlardan başlamaktadır. Sezar generaline öyle metinler yollamıştır ki metinlerdeki A harfi yerine D, B harfi yerine E, ... kullanmıştır. Böylece şifre biliminin temeli o günlerde atılmıştır. Sezar şifresinden de anlayacağımız gibi şifre bilimi belli bir sistematiklik içermektedir.

✓ Yukarıda yapılan şifreleme gibi bütün tam sayıları şifreleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Modül Kavramı ve Kalan Sınıfları



- * Alfabemizdeki ilk 29 harfi 0 dan 28 e kadar olan sayılarla eşleyiniz.
- Tüm tam sayıları bu türden bir sistemle nasıl şifreleyebilirsiniz?
- * 1 - 29 - 22 - 57 - 49 - 68 şifresini bu kurala göre çözünüz.
- Saat 15:00 in öğleden sonra 3 olarak söylenmesinin bu sistemle nasıl bir benzerliği vardır?
- * Tüm tam sayıları 8 tane sayıyla ifade etmek istersek nasıl bir sistem kullanmalıyız? Nedenini açıklayınız.
- * Tam sayıların 6 ile bölümünden elde edilen kalanların denklik sınıflarının kümesi $\{0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ tir. Bu küme matematikte $Z / 6$ olarak adlandırılır. Buna göre aşağıdaki tabloda verilen boşlukları doldurunuz.

	Bölen	Kalanlar	Denklik Sınıflarının Kümesi
Tam Sayılar	2		
	3		
	4		
	5		
	6	0, 1, 2, 3, 4, 5	$Z / 6 = \{0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

- Yukarıdaki tabloda yaptığınız işlemlerden yararlanarak $n \geq 1$ olmak üzere Z / n kümesi için bir genelleme yapılabilir mi? Tartışınız.

Örnek : Aşağıdaki bölme işlemlerini inceleyelim. Bir sayının 3 ile bölümünden kalanları söyleyelim.

$$\begin{array}{r} 125 \\ 3 \overline{) 41} \\ \underline{12} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ 3 \overline{) 30} \\ \underline{9} \\ 21 \\ \underline{18} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 3 \overline{) 12} \\ \underline{9} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ k \overline{) y} \\ \underline{} \\ \end{array}$$

$$3 \mid (125 - 12)$$

$$3 \mid (91 - 9)$$

$$3 \mid (36 - 0)$$

$$y \mid (x - k)$$

Çözüm : Yukarıdaki bölme işlemlerinde bölen 3 olduğunda kalanlar sırasıyla 2, 1, 0 sayıları olmuştur. Görüldüğü gibi herhangi bir sayının 3 ile bölümünden kalan 0, 1 ve 2 sayılarından biridir. Kalan olarak bu üç sayıdan başka sayı elde edilmez. 3 sayısına bu bölme işleminin modülü denir.

Kalan 0 (sıfır) olduğunda buna tam bölünme (kalansız bölünme) adını vermiştik. O hâlde tüm sayıların 3 e bölümünden kalanlar üç tanedir. Kalanı bu sayılar olan tüm sayıların kümesi aslında tam sayılar kümesinin tamamıdır. Tüm tam sayıları 3 küme olarak aşağıdaki gibi yazıp birinci kümeyi $\bar{0}$, ikinci kümeyi $\bar{1}$ ve üçüncü kümeyi $\bar{2}$ ile gösterirsek,

$$3' \text{ e bölündüğünde } 0 \text{ kalanını verenler } = \{ \dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \} = \bar{0},$$

$$3' \text{ e bölündüğünde } 1 \text{ kalanını verenler } = \{ \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \} = \bar{1},$$

$$3' \text{ e bölündüğünde } 2 \text{ kalanını verenler } = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \} = \bar{2} \text{ olur.}$$

Sayfa 162 de bulunan örnekteki bölme işlemlerinde 3 e bölümün tam olması için bölünenden kalan çıkarılmıştır. Bu durumda bulunan sayının 3 e tam bölündüğü belirtilmiştir. O hâlde $\bar{0}$ kümesinden seçilen bir x elemanı için $x - 0$ sayısı daima 3 e tam bölünür.

Aynı şekilde;

$\bar{1}$ kümesinden seçilen bir y sayısı için $y - 1$,

$\bar{2}$ kümesinden seçilen bir z sayısı için $z - 2$ daima 3 e tam bölünür.

x herhangi bir tam sayı, m ve k 1 den büyük iki tam sayı olmak üzere;
 $x - k$ farkı m ye tam bölünüyorsa x sayısı $(\text{mod } m)$ ye göre k sayısına denktir denir ve $x \equiv k \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (x-k)$ şeklinde yazılır.

Yukarıda $\bar{0}, \bar{1}$ ve $\bar{2}$ kümelerindeki sayılar $(\text{mod } 3)$ e göre sırasıyla 0, 1 ve 2 ye denk olan sayılardır.

m > 1 olmak üzere tam sayıların m ye bölümünden kalanların oluşturduğu kümeye kalan sınıfları denir ve Z / m şeklinde gösterilir.

Örnek : $Z / 2, Z / 3, Z / 8$ kalan sınıflarını yazalım.

Çözüm : $Z / 2$, tam sayıların 2 ye bölümünden elde edilen kalanların kümesidir. $Z / 2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Aynı şekilde; $Z / 3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $Z / 8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ olur.

Örnek : a, b, c $\in Z$, m $\in Z^+$ ve m > 1 için $a \equiv b \pmod{m}$ denkleğinin yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin olduğunu gösterelim.

Çözüm :

$$a - a = 0, 0 \mid m \text{ olduğundan } a \equiv a \pmod{m} \text{ (yansıma özelliği),}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a - b) \mid m \Rightarrow (b - a) \mid m \Rightarrow b \equiv a \pmod{m} \text{ (simetri özelliği),}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a - b) \mid m \\ b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow (b - c) \mid m \end{array} \right\} \Rightarrow [(a - b) + (b - c)] \mid m \Rightarrow (a - c) \mid m \Rightarrow a \equiv c \pmod{m} \text{ (geçişme özelliği)dir.}$$

Görüldüğü gibi $(\text{mod } m)$ ye göre denkleğın yansıma, simetri ve geçişme özellikleri vardır ve denkleğ bağıntısıdır.

Örnek : m $\in Z^+$ olmak üzere $50 \equiv 5 \pmod{m}$ denkleğini sağlayan m değerlerini bulalım.

Çözüm :

$$50 \equiv 5 \pmod{m} \text{ ise } m \mid (50 - 5) \Rightarrow m \mid 45 \text{ yazılabilir. O hâlde m 45 in pozitif bölenleridir. Bunlar;}$$

$$m \in \{3, 5, 9, 15, 45\} \text{ olur.}$$

Modüler Aritmetik ile İlgili Özellikler



28	5
34	5

- * Yukarıdaki bölme işlemlerinden elde edilen kalanları bulunuz.
- * Bölünen sayıların toplamının 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.
- * Bölünen sayıların çarpımının 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.
- * Yukarıda yaptığınız her işlemi $a \equiv b \pmod{m}$ biçiminde ifade ediniz.
- Bu işlemlerden elde ettiğiniz kalanlar için ne söyleyebilirsiniz?
- Bu ifadelerden yararlanarak nasıl bir genelleme yapabilirsiniz? Açıklayınız.

Örnek : 7^{125} sayısının 5 e bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm : $7^{125} = 5b + k \Rightarrow 7^{125} \equiv k \pmod{5}$ olur. O hâlde;

$$7^1 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$7^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(7^4)^{31} \equiv 1^{31} \pmod{5}$$

$$7^{124} \equiv 1 \pmod{5} \text{ ile } 7^1 \equiv 2 \pmod{5} \text{ taraf tarafa çarpılırsa}$$

$$7^{125} \equiv 2 \pmod{5} \text{ bulunur.}$$

Buradan 7^{125} sayısının 5 e bölümünden kalanın 2 olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için $a \equiv b \pmod{m}$ ve $c \equiv d \pmod{m}$ ise

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ 2. $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm :

1. $a \equiv b \pmod{m}$ ve $a - b = mk$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $c \equiv d \pmod{m}$ ve $c - d = mt$, $t \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan

$$a - b + c - d = m(k + t), (k + t) \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a + c - (b + d) = m(k + t), (k + t) \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m} \text{ dir.}$$

2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$ ve $a = mk + b$, $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m \mid c - d \text{ ve } c = mt + d, t \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a \cdot c = (mk + b) \cdot (mt + d) = m^2 kt + mkd + mtb + bd = m(\underbrace{mkt + kd + tb}_{s \in \mathbb{Z}^+}) + bd$$

$$a \cdot c = ms + bd \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m} \text{ dir. Ayrıca,}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m} \text{ olur.}$$

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için
 $a \equiv b \pmod{m}$ ve
 $c \equiv d \pmod{m}$ ise
 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
 $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ dir.

Örnek : $12^{45} + 32^{55}$ sayısının 7 ye bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm :

12^{45} ile 32^{55} sayılarının kalanlarını ayrı ayrı bulup toplayabiliriz.

$$12^1 \equiv 5 \pmod{7},$$

$$12^2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$12^3 \equiv 6 \pmod{7},$$

$$12^4 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$12^6 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$(12^6)^7 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$12^{42} \equiv 1 \pmod{7} \text{ ile } 12^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

taraf tarafa çarpılırsa

$$12^{45} \equiv 6 \pmod{7} \text{ olur.}$$

$$32^1 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$32^2 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$32^3 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$32^4 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$(32^3)^{17} \equiv 1 \pmod{7},$$

$$32^{51} \equiv 1 \pmod{7} \text{ ile } 32^4 \equiv 4 \pmod{7}$$

taraf tarafa çarpılırsa

$$32^{55} \equiv 4 \pmod{7} \text{ olur.}$$

Öyleyse $12^{45} + 32^{55} \equiv 6 + 4 \equiv 10 \equiv 3 \pmod{7}$ olur ve kalan 3 tür.

Örnek : 1453^{1881} sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm : 1453^{1881} sayısının birler basamağındaki rakamı bulabilmek için bu sayının 10 ile bölümünden kalanı bulmamız gerekir.

$$1453^1 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$1453^2 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$1453^3 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$1453^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

$$(1453^4)^{470} \equiv 1 \pmod{10} \text{ olur.}$$

$$1453^{1880} \equiv 1 \pmod{10} \text{ ile } 1453^1 \equiv 3 \pmod{10} \text{ taraf tarafa çarpılırsa}$$

$1453^{1881} \equiv 3 \pmod{10}$ elde edilir. O hâlde 1453^{1881} sayısının birler basamağındaki rakam 3 tür.

Örnek : $3^{125} + 5^{152}$ sayısının 6 ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

Çözüm : $3 \equiv 3 \pmod{6},$

$$5 \equiv 5 \pmod{6},$$

$$3^2 \equiv 3 \pmod{6},$$

$$5^2 \equiv 1 \pmod{6},$$

$$3^3 \equiv 3 \pmod{6},$$

$$(5^2)^{76} \equiv 1 \pmod{6},$$

\vdots

$$5^{152} \equiv 1 \pmod{6} \text{ dir.}$$

$$3^{125} \equiv 3 \pmod{6} \text{ dir.}$$

$3^{125} \equiv 3 \pmod{6}$ ile $5^{152} \equiv 1 \pmod{6}$ taraf tarafa toplanırsa $3^{125} + 5^{152} \equiv 4 \pmod{6}$ elde edilir. O hâlde $3^{125} + 5^{152}$ sayısının 6 ile bölümünden kalan 4 tür.

Örnek : $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $54 \equiv 4 \pmod{a}$ denkleğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm : $54 \equiv 4 \pmod{a} \Rightarrow 54 - 4 \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow 50 \equiv 0 \pmod{a}$ dir. Yani a tam sayısı 50'yi tam bölmelidir.

$a \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan 50 nin doğal sayı bölenleri 1, 2, 5, 10, 25 ve 50 dir. a nın alabileceği değerlerin toplamı, $2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 92$ olarak bulunur.

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{m}$$

Örnek : $666^{777} + 999^{888}$ sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm : $666^{777} + 999^{888}$ sayılarının birler basamağındaki rakamı bulalım.

$$\begin{aligned} 666^1 &\equiv 6 \pmod{10}, & 999^1 &\equiv 9 \pmod{10}, \\ 666^2 &\equiv 6 \pmod{10}, & 999^2 &\equiv 1 \pmod{10}, \\ 666^3 &\equiv 6 \pmod{10}, & \underbrace{(999^2)^{444}} &\equiv 1^{444} \pmod{10}, \\ &\vdots & 999^{888} &\equiv 1 \pmod{10} \text{ dur.} \\ 666^{777} &\equiv 6 \pmod{10} \text{ dur.} \end{aligned}$$

$666^{777} + 999^{888}$ sayısının birler basamağındaki rakam $6 + 1 = 7$ olur.

Örnek : $\overline{2x} + \overline{4} \equiv \overline{2} \pmod{6}$ olduğuna göre x in yerine gelebilecek en küçük doğal sayıyı bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} \overline{2x} + \overline{4} &\equiv \overline{2} \pmod{6} \\ \overline{2x} + \overline{4} + \overline{2} &\equiv \overline{2} + \overline{2} \pmod{6} \\ \overline{2x} &\equiv \overline{4} \pmod{6} \\ \overline{2x} &\equiv \overline{2} \cdot \overline{2} \pmod{6} \\ x &\equiv \overline{2} \pmod{6} \end{aligned} \right\} \text{ dir. O hâlde } x \text{ in alabileceği en küçük doğal sayı } 2 \text{ dir.}$$

Örnek : $14^{2006} \equiv x \pmod{6}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulalım.

$$\left. \begin{aligned} 14^1 &\equiv 2 \pmod{6} \\ 14^2 &\equiv 4 \pmod{6} \\ 14^3 &\equiv 2 \pmod{6} \\ 14^4 &\equiv 4 \pmod{6} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &14 \text{ ün tek kuvvetleri } 2 \text{ ye, çift kuvvetleri } 4 \text{ e denk olduğundan} \\ &14^{2006} \equiv 4 \pmod{6} \text{ yazabiliriz.} \end{aligned}$$

Örnek : $25^y \equiv 1 \pmod{9}$ olduğuna göre y nin en küçük değerini bulalım.

$$\left. \begin{aligned} 25^1 &\equiv 7 \pmod{9} \\ 25^2 &\equiv 4 \pmod{9} \\ 25^3 &\equiv 1 \pmod{9} \end{aligned} \right\} \text{ o hâlde } y = 3 \text{ olur.}$$

Örnek : $2346^{2345} \equiv x \pmod{8}$ olduğuna göre x in en küçük doğal sayı değerini bulalım.

Çözüm :

$$2346^1 \equiv 2 \pmod{8},$$

$$2346^2 \equiv 4 \pmod{8},$$

$$2346^3 \equiv 0 \pmod{8} \text{ dir.}$$

$$2346^3 \equiv 0 \pmod{8} \text{ ile } 2346^{2342} \equiv a \pmod{8} \text{ taraf tarafa çarpılırsa, } 2346^3 \cdot 2346^{2342} \equiv 0 \pmod{8} \text{ dir.}$$

O hâlde 2346^{2345} sayısı 8 e tam bölünür.

Örnek : a sayısının 7 ye bölümünden kalan 4 ve b sayısının 7 ye bölümünden kalan 3 ise $a^2b^3 + 41$ sayısının 7 ye bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 4 \pmod{7} \\ a^2 \equiv 2 \pmod{7} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \equiv 3 \pmod{7} \\ b^2 \equiv 2 \pmod{7} \\ b^3 \equiv 6 \pmod{7} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2b^3 \equiv 2 \cdot 6 \equiv 5 \pmod{7} \\ a^2b^3 + 41 \equiv 5 + 6 \equiv 4 \pmod{7} \end{array}$$

$a^2b^3 + 41$ sayısının 7 ye bölümünden kalan 4 tür.

Örnek : $35^{36} + 45^{45} + 55^{75} + 60^{60}$ toplamının 6 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{lll} 35^1 \equiv 5 \pmod{6} & 45^1 \equiv 3 \pmod{6} & 55^1 \equiv 1 \pmod{6} \\ 35^2 \equiv 1 \pmod{6} & 45^2 \equiv 3 \pmod{6} & 55^{75} \equiv 1 \pmod{6} \\ (35^2)^{18} \equiv 1^{18} \pmod{6} & 45^3 \equiv 3 \pmod{6} & 60^1 \equiv 0 \pmod{6} \\ & \vdots & \\ 35^{36} \equiv 1 \pmod{6} & 45^{45} \equiv 3 \pmod{6} & 60^{60} \equiv 0 \pmod{6} \end{array}$$

O hâlde $35^{36} + 45^{45} + 55^{75} + 60^{60} \equiv 1 + 3 + 1 + 0 = 5 \pmod{6}$ dir ve kalan 5 tir.

Örnek : $7^{4k+1} + 3^{4k+2}$ toplamının birler basamağında hangi rakam vardır?

Çözüm :

$$\begin{array}{ll} 7 & \equiv 7 \pmod{10}, \\ 7^2 & \equiv 9 \pmod{10}, \\ 7^3 & \equiv 3 \pmod{10}, \\ 7^4 & \equiv 1 \pmod{10}, \\ 7^{4k} & \equiv 1^k \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}, \\ 7^{4k+1} & \equiv 7 \pmod{10} \text{ dur.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3 & \equiv 3 \pmod{10}, \\ 3^2 & \equiv 9 \pmod{10}, \\ 3^3 & \equiv 7 \pmod{10}, \\ 3^4 & \equiv 1 \pmod{10}, \\ 3^{4k} & \equiv 1^k \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}, \\ 3^{4k+2} & \equiv 9 \pmod{10} \text{ dur.} \end{array}$$

O hâlde, $7^{4k+1} + 3^{4k+2} \equiv (7 + 9) \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10}$ bulunur.

Örnek : 11 ile bölünebilme kuralını modüler aritmetik yardımıyla gösterelim.

Çözüm :

x doğal sayısı $a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1 a_0$ şeklinde n + 1 basamaklı sayı olsun. x sayısı,

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ yazılabilir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10^0 \equiv 1 \pmod{11} \\ 10^1 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11} \\ 10^2 \equiv 1 \pmod{11} \\ 10^3 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11} \\ 10^4 \equiv 1 \pmod{11} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mod 11 e göre bir sayıya 11 in katlarını ekleyerek ya da çıkararak bu} \\ \text{sayıya denk sayılar elde edilir.} \\ 10 \equiv 10 - 11 \equiv -1 \pmod{11} \text{ dir.} \\ \text{Görüldüğü gibi 10 un tek kuvvetleri } -1 \text{ e, çift kuvvetleri } +1 \text{ e denktir.} \\ \text{O hâlde,} \end{array}$$

$x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} 10^{n-1} + a_n 10^n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n \pmod{11}$ olur. Bu durumda $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ toplamı 0 ya da 11 in katı olduğundan bu sayı 11 ile tam bölünür. Çünkü bu sayı x in 11 ile bölümünden kalana eşittir.

Örnek : 5 756 542 sayısının 11 e bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm :

$$\{ \begin{array}{r} 5 \ 756 \ 542 \\ \underline{5} \ \underline{7} \ \underline{5} \ \underline{6} \ \underline{5} \ \underline{4} \ \underline{2} \\ \hline \end{array} \} \Rightarrow 2 - 4 + 5 - 6 + 5 - 7 + 5 = 0 \text{ olduğundan bu sayı 11 e tam bölünür, kalan 0 (sıfır) dir.}$$

Z / m Kümesinde İşlemler



* Z / 5 te toplama ve çarpma işlemlerinin tablolarında bırakılan boşlukları doldurunuz.

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$			$\bar{2}$		$\bar{4}$
$\bar{1}$					
$\bar{2}$				$\bar{0}$	
$\bar{3}$		$\bar{4}$			
$\bar{4}$			$\bar{1}$		

\otimes	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$			$\bar{0}$
$\bar{1}$					
$\bar{2}$			$\bar{4}$		
$\bar{3}$		$\bar{3}$			
$\bar{4}$			$\bar{2}$		

* Tablolara göre, toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçları yine Z / 5 in elemanı mıdır?

➤ Z / 5 te toplama ve çarpma işlemlerinin kapalılık özelliği var mıdır? Açıklayınız.

* Z / 5 toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği var mıdır? Açıklayınız.

* $\bar{2} \oplus (\bar{3} \oplus \bar{4})$ ve $(\bar{2} \oplus \bar{3}) \oplus \bar{4}$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştırınız.

➤ Z / 5 te toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliği var mıdır? Açıklayınız.

* Tablolarda boş bırakılan kısımlara işlemlerin sonuçlarını yazınız.

$\bar{3} \oplus \bar{0}$	
$\bar{0} \oplus \bar{2}$	

* İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı hangisidir?

➤ Z / m de toplamamanın sonucunu etkilemeyen eleman hangisidir? Açıklayınız.

$\bar{4} \otimes \bar{1}$	
$\bar{2} \otimes \bar{1}$	

* İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı hangisidir?

➤ Z / m de çarpmanın sonucunu etkilemeyen eleman hangisidir? Açıklayınız?

$\bar{2} \oplus \bar{x}$	$\bar{0}$
$\bar{4} \oplus \bar{x}$	$\bar{0}$

* $\bar{2}$ ile toplandığında $\bar{0}$ sayısına eşit olan bir sayı var mıdır?

* $\bar{4}$ ile toplandığında $\bar{0}$ sayısına eşit olan bir sayı var mıdır? $\bar{0}$ in işlevini açıklayınız.

➤ Z / 5 te toplama işlemine göre bir elemanın tersi bulunabilir mi? Araştırınız.

Örnek : $Z/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ kümesinde aşağıdaki \oplus ve \otimes işlemlerini yapalım.

a. $\bar{3} \oplus \bar{4}$ b. $\bar{1} \oplus \bar{2} \oplus \bar{3}$ c. $\bar{2} \otimes \bar{3}$ ç. $(\bar{4} \otimes \bar{2}) \oplus \bar{2}$

Çözüm : $Z/5$ kümesinde tanımlanan işlemler için (mod 5) ifadesini kullanalım.

- a. $\bar{3} \oplus \bar{4} \equiv \bar{7} \equiv \bar{2} \pmod{5}$
b. $\bar{1} \oplus \bar{2} \oplus \bar{3} \equiv \bar{6} \equiv \bar{1} \pmod{5}$
c. $\bar{2} \otimes \bar{3} \equiv \bar{6} \equiv \bar{1} \pmod{5}$
ç. $(\bar{4} \otimes \bar{2}) \oplus \bar{2} \equiv \bar{8} \oplus \bar{2} \equiv \bar{10} \equiv \bar{0} \pmod{5}$
 \oplus ve \otimes işlemlerinin tabloları da yapılabilir.

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

\otimes	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Örnek : Yukarıdaki tablolara göre;

a. $(\bar{3} \oplus \bar{a}) \oplus \bar{2} \equiv \bar{4}$ b. $(\bar{2} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{3} \equiv \bar{1}$ işlemlerindeki \bar{a} ve \bar{b} yi bulalım.

Çözüm :

- a. $(\bar{3} \oplus \bar{a}) \oplus \bar{2} \equiv \bar{4} \Rightarrow (\bar{3} \oplus \bar{a}) \equiv \bar{2} \Rightarrow \bar{a} \equiv \bar{4}$ olur.
b. $(\bar{2} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{3} \equiv \bar{1} \Rightarrow (\bar{2} \otimes \bar{b}) \equiv \bar{2} \Rightarrow \bar{b} \equiv \bar{1}$ olur.

Toplama ve Çarpma İşleminin Özellikleri

1. Z/m kümesi \oplus ve \otimes işlemlerine göre kapalıdır.

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in Z/m$ için $\bar{a} \oplus \bar{b} \in Z/m$ ve $\bar{a} \otimes \bar{b} \in Z/m$ dir.

2. Z/m kümesinde değişme ve birleşme özellikleri vardır.

$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in Z/m$ için $\bar{a} \oplus \bar{b} \equiv \bar{b} \oplus \bar{a}$ ve $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} \equiv \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$
 $\bar{a} \otimes \bar{b} \equiv \bar{b} \otimes \bar{a}$ ve $(\bar{a} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{c} \equiv \bar{a} \otimes (\bar{b} \otimes \bar{c})$ dir.

3. $\bar{0}$, \oplus işleminde; $\bar{1}$, \otimes işleminde etkisiz elemandır.

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in Z/m$ için $\bar{0} \oplus \bar{a} \equiv \bar{a} \oplus \bar{0} \equiv \bar{a}$ ve $\bar{1} \otimes \bar{a} \equiv \bar{a} \otimes \bar{1} \equiv \bar{a}$ dir.

4. \oplus işlemine göre Z/m kümesinde her elemanın tersi vardır.

Örneğin, $Z/5$ te $\bar{1}$ tersi $\bar{4}$ tür. Çünkü $\bar{1} \oplus \bar{4} \equiv \bar{0}$ dir. $Z/5$ te $\bar{3}$ ün tersi ise $\bar{3} \oplus \bar{2} \equiv \bar{0}$ olduğundan $\bar{2}$ dir.

5. \otimes işlemine göre Z/m kümesinde her elemanın tersi yoktur.

Örneğin $Z/5$ te $\bar{1}$ in tersi $\bar{1}$ dir. $\bar{1} \otimes \bar{1} \equiv \bar{1}$ dir.

$\bar{2}$ in tersi $\bar{3}$ tür. $\bar{2} \otimes \bar{3} \equiv \bar{1}$ dir.

$\bar{4}$ ün tersi $\bar{4}$ tür. $\bar{4} \otimes \bar{4} \equiv \bar{1}$ dir.

$Z/4$ te $\bar{3}$ ün tersi $\bar{3}$ tür. $\bar{3} \otimes \bar{3} \equiv \bar{1}$ dir.

Fakat $\bar{2} \otimes \bar{a} = \bar{1}$ denklemini sağlayan \bar{a} olmadığından $\bar{2}$ nin tersi yoktur.

Örnek : $\mathbb{Z} / 5$ te $\overline{2}x + \overline{4} = \overline{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\overline{2}x + \overline{4} = \overline{3}$$

$$\overline{2}x + \overline{4} + \overline{1} = \overline{3} + \overline{1} \quad , \quad (\overline{4} + \overline{1} = \overline{5} \equiv 0)$$

$$\overline{2}x = \overline{4}$$

$$\overline{3} \cdot \overline{2}x = \overline{4} \cdot \overline{3} \quad , \quad (\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} \equiv \overline{1})$$

$$x = \overline{2}$$

$\mathbb{C} = \{\overline{2}\}$ dir.

Örnek : $\mathbb{Z} / 5$ te sayıların karelerini ve kareköklerini bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{0}^2 = \overline{0} \cdot \overline{0} = \overline{0} \\ \overline{1}^2 = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1} \\ \overline{2}^2 = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} \\ \overline{3}^2 = \overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{4} \\ \overline{4}^2 = \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1} \end{array} \right\} \text{ O hâlde } \begin{array}{l} \sqrt{\overline{1}} \equiv \overline{1} \text{ ve } \overline{4}, \\ \sqrt{\overline{4}} \equiv \overline{2} \text{ ve } \overline{3}, \\ \sqrt{\overline{0}} \equiv \overline{0} \text{ olur.} \end{array}$$

$\mathbb{Z} / 5$ te $\overline{2}$ ve $\overline{3}$ ün karekökü yoktur.

Örnek : $\mathbb{Z} / 5$ te $x + \overline{3} = \overline{1}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} x + \overline{3} = \overline{1} \\ x + \overline{3} + \overline{2} = \overline{1} + \overline{2} \\ x = \overline{3} \end{array} \right\} \text{ ise } \mathbb{C} = \{\overline{3}\} \text{ olur.}$$

Örnek : $\mathbb{Z} / 5$ te $\overline{2}x + \overline{1} = \overline{0}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{2}x + \overline{1} = \overline{0} \\ \overline{2}x + \overline{1} + \overline{4} = \overline{0} + \overline{4} \\ \overline{2}x = \overline{4} \\ \overline{3} \cdot \overline{2}x = \overline{3} \cdot \overline{4} (\overline{3} \cdot \overline{2} \equiv \overline{6} \equiv \overline{1}, \overline{4} \cdot \overline{3} \equiv \overline{12} = \overline{2}) \\ x = \overline{2} \end{array} \right\} \mathbb{C} = \{\overline{2}\} \text{ olur.}$$

Örnek : $\mathbb{Z} / 5$ te $f(x) = \overline{3}x + \overline{2}$ ise $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm :

$$y = \overline{3}x + \overline{2}$$

$$y + \overline{3} = \overline{3}x + \overline{2} + \overline{3}$$

$$y + \overline{3} = \overline{3}x$$

$$\overline{2} \cdot \overline{3}x = \overline{2}(y + \overline{3})$$

$$\overline{x} = \overline{2}y + \overline{1} = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \overline{2}x + \overline{1} \text{ olur. } [f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$$



ALİŞTIRMALAR

1. $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/5$ ve $\mathbb{Z}/12$ kümelerini yazınız.
2. $40 \equiv 4 \pmod{x}$ denliğini sağlayan kaç tane $x > 1$ doğal sayısı vardır?
3. $\overline{6}x + \overline{5} \equiv \overline{3} \pmod{7}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulunuz.
4. $7^{26} + 8^{27} + 9^{28} + 10^{29}$ toplamının 6 ya bölümünden kalanı bulunuz.
5. 114^{228} sayısı $\pmod{7}$ ye göre kaçta denktir?
6. $17^{2006} \equiv x \pmod{11}$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri kaçtır?
7. Saat 5:00 dan 2006^{2006} saat sonra saatin kaç olacağını bulunuz?
8. $\mathbb{Z}/7$ de karekökü olan sayıları bulunuz.
9. $2x + \overline{5} \equiv \overline{3} \pmod{9}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
10. $\mathbb{Z}/12$ de $f(x) = \overline{2}x + \overline{10}$ ise $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.
11. 777^{889} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?
12. x üç basamaklı bir sayı olmak üzere, $x \equiv 3 \pmod{8}$ ve $x \equiv 7 \pmod{9}$ ise x in alabileceği en küçük değer kaçtır?
13. 5^{1976} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?
14. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $3^{4k+2} + 5^{6k+5}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?
15. a sayısının 6 ile bölümünden kalan 2 ve b sayısının 6 ile bölümünden kalan 5 ise $a^4 \cdot b^3$ sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?
16. $\mathbb{Z}/6$ kümesinde $\overline{5} \cdot (\overline{4} + \overline{5}) + \overline{3} + \overline{4} \cdot \overline{3}$ işleminin sonucu kaçtır?
17. $8^{43} \cdot 7^{36}$ sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
18. $\mathbb{Z}/5$ kümesinde $\overline{3}x + \overline{1} = \overline{4}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
19. 2^{71} in 5 ile bölümünden kalan kaçtır?
20. $1 < x \leq 10$ olmak üzere, $18 - x \equiv 0 \pmod{x}$ denliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?



RASYONEL SAYILAR



Kadınbudu köfte:

$\frac{1}{2}$ kg yağsız koyun veya dana kıyması

$\frac{1}{2}$ su bardağı pirinç

3 adet yumurta ve 1 adet yumurtanın akı

$\frac{2}{3}$ büyük soğan

$\frac{1}{2}$ demet maydanoz

Tuz

Karabiber

$\frac{1}{2}$ su bardağı kızartma yağı

$\frac{3}{2}$ çay bardağı un

✓ Yukarıda kadınbudu köfte yapmak için gerekli olan malzemeler verilmiştir. Kesirli sayılar olmasaydı bu yemek tarifi verilirken ne gibi güçlüklerle karşılaşılırdı?

Rasyonel Sayı Kavramı



* Yukarıda tarifi verilen yemeği yapmak isteyen bir kişi 1 kg kıyma, 1 demet maydanoz ve bir soğan almıştır.

* Kıyma, maydanoz ve soğanın ne kadarını kullanacaktır? Hesaplayınız.

* Kullandığı soğanın, bütün soğanın ne kadarı olduğunu nasıl ifade edersiniz?

Örnek : Tam sayılar kümesinde; $3x = 12$, $5x = -15$ ve $3x = 7$ denklemlerinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $3x = 12 \Rightarrow x = 4 \in \mathbb{Z}$ dir. O hâlde $\mathbb{C} = \{4\}$,

$5x = -15 \Rightarrow x = -3 \in \mathbb{Z}$ dir. O hâlde $\mathbb{C} = \{-3\}$,

$3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$ dir. O hâlde $\mathbb{C} = \{ \}$,

$5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ dir. O hâlde $\mathbb{C} = \{ \}$ olur.

$3x = 7$ ve $5x = -1$ denklemlerinin tam sayılar kümesinde çözümü boş kümedir. Bu denklemlerin çözülebilmesi için tam sayılar kümesinden daha geniş bir kümeye ihtiyaç vardır.

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ biçimindeki sayılar rasyonel sayılardır.

Rasyonel sayılar kümesi \mathbb{Q} ile gösterilir.

Tam sayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesinin alt kümesidir. Yani $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dur.

Örnek : $\frac{3}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{8}{1}, \frac{-5}{1}$ sayıları birer rasyonel sayıdır. $\frac{8}{1} = 8$ ve $\frac{-5}{1} = -5$ sayılarında görüldüğü gibi her tam sayıyı rasyonel sayı olarak yazabiliriz.

$a \neq 0$ olmak üzere $0 = \frac{0}{a} \in \mathbb{Q}$ dur.

$a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{0}$ tanımsızdır.

Örnek : $\frac{2}{3}, \frac{-9}{21}, \frac{10}{15}$ ve $\frac{-3}{7}$ rasyonel sayılarından hangilerinin birbirine denk olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \text{ olup } \frac{2}{3} \equiv \frac{10}{15} \text{ dur.}$$

$$\frac{-9}{21} = \frac{-3 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{-3}{7} \text{ olup } \frac{-9}{21} \equiv \frac{-3}{7} \text{ tür.}$$

Bir rasyonel sayının pay ve paydası aynı tam sayı ile çarpılırsa ya da aynı sayı ile bölünürse sayının değeri değişmez.

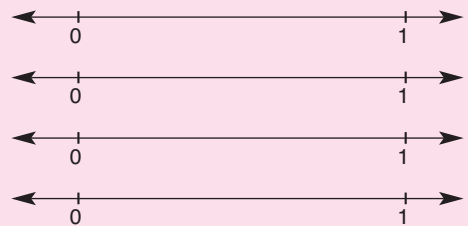
Çarpma işlemiyle rasyonel sayı genişletilmiş, bölme işlemiyle sayı sadeleştirilmiş olur.



✧ Yandaki sayı doğruları üzerinde $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ ve $\frac{4}{8}$ sayılarını gösteriniz.

✧ Her bir sayının karşılık geldiği yerleri karşılaştırınız.

➤ Bu sayılardan birini diğerinin yerine kullanabilir misiniz? Bu durumu matematiksel olarak nasıl ifade edersiniz?



Örnek : $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} \Leftrightarrow 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$ dir.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $a \cdot d = c \cdot b$ oluyorsa $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayıları birbirine denktir. Yani;

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b \text{ dir.}$$

Örnek : Bir kesrin değeri $\frac{2}{5}$ dir. Bu kesrin payına 4 eklenirse ve paydasından 4 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{10}{11}$ oluyor. Bu kesri bulalım.

Çözüm : Değeri $\frac{2}{5}$ olan kesri $\frac{2 \cdot k}{5 \cdot k}$ şeklinde yazabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{2k+4}{5k-4} &= \frac{10}{11} \Rightarrow 11(2k+4) = 10(5k-4) \\ &\Rightarrow 22k+44 = 50k-40 \\ &\Rightarrow 28k = 84 \Rightarrow k = 3 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde kesir $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$ dir.

Örnek : $\frac{x+1}{3}$ ve $\frac{2x-1}{5}$ rasyonel sayılarının eşit olması için x in hangi değeri alacağını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3} &= \frac{2x-1}{5} \Rightarrow 5(x+1) = 3(2x-1) \\ &\Rightarrow 5x+5 = 6x-3 \\ &\Rightarrow x = 8 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi



* Selda evinin $\frac{1}{5}$ sini maviye, $\frac{3}{4}$ ünü sarıya boyatıyor.

- $\frac{1}{5}$ ve $\frac{3}{4}$ sayıları hangi sayı kümesine aittir?
- Selda evinin ne kadarlık bölümünü boyatmıştır?
- Evin kaçta kaç boyatılmamıştır?
- Rasyonel sayılarda toplama işlemi yaparken nelere dikkat ettiniz? Açıklayınız.

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\frac{-7}{11} + \frac{3}{11}$ b. $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$ c. $\frac{-1}{4} + \frac{3}{8}$ ç. $\frac{-3}{5} + \frac{-2}{3}$ d. $\frac{2}{3} + 4$

Çözüm :

a. $\frac{-7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{-7+3}{11} = \frac{-4}{11}$

b. $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{31}{35}$

c. $\frac{-1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{(-1) \cdot 2 + 3}{8} = \frac{1}{8}$

ç. $\frac{-3}{5} + \frac{-2}{3} = \frac{(-3) \cdot 3 + (-2) \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{-19}{15}$

d. $\frac{2}{3} + 4 = \frac{2+4 \cdot 3}{3} = \frac{14}{3}$ tür.

Paydaları eşit olan rasyonel sayılar toplanırken ortak payda altında paylar toplanıp paya yazılır.

Paydaları eşit olmayan rasyonel sayılar toplanırken önce paydalar eşitlenir ve ortak payda altında paylar toplanıp paya yazılır.

Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri



✱ Aşağıdaki boş bırakılan kutulara işlemlerin sonuçlarını yazınız.

$1 + \frac{1}{2}$	
$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$	

✱ Bulduğunuz sayılar hangi sayı kümesine aittir?

➤ İki rasyonel sayının toplamı yine bir rasyonel sayı mıdır? Açıklayınız.

$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$	
$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$	
$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6}$	
$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$	

✱ Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

➤ Rasyonel sayılar toplanırken toplanan sayıların sırası önemli midir? Açıklayınız.

$\frac{1}{3} + 0$	
$0 + \frac{1}{4}$	

✱ İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı hangisidir?

➤ Rasyonel sayılar kümesinde toplamı etkilemeyen sayı kaçtır? Açıklayınız.

$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)$	
$\left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$	

✱ İşlemlerin sonucunda bulduğunuz sayılar için ne söyleyebilirsiniz?

➤ Toplama işleminde bir elemanın tersini nasıl bulursunuz?

1. Kapalılık Özelliği

Örnek : $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ işleminin sonucu bir rasyonel sayı mıdır? Herhangi iki rasyonel sayının toplamı yine bir rasyonel sayı olur mu? İnceleyelim.

Çözüm :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{15} = \frac{19}{15} \in \mathbb{Q} \text{ dur.}$$

İki rasyonel sayının toplamı ya bir tam sayıdır ya da bir rasyonel sayıdır. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ olduğundan iki rasyonel sayının toplamı daima rasyonel sayı olacaktır.

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

Örnek : $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ işlemlerinin sonuçlarını bularak karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{1}{4} &= \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20} = \frac{13}{20} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{5} &= \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{20} = \frac{13}{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

Örnek : $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$ ve $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 2 + 1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3 + 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} &= \left(\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \text{O hâlde } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

4. Etkisiz Eleman

Örnek : $\frac{2}{5} + \frac{0}{1}$ ve $\frac{0}{1} + \frac{2}{5}$ işlemlerinin sonuçlarını bularak karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{5} + \frac{0}{1} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 5}{5} = \frac{2+0}{5} = \frac{2}{5} \\ \frac{0}{1} + \frac{2}{5} = \frac{0 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{0+2}{5} = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde toplama işleminin birim elemanı vardır ve sıfırdır.

5. Bir Elemanın Tersİ

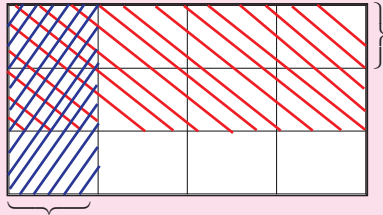
Örnek : $\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)$ ve $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2+(-2)}{3} = \frac{0}{3} = 0 \\ \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = \frac{(-2)+2}{3} = \frac{0}{3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0 \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ve 0 etkisiz eleman olmak üzere $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = 0$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde toplama işlemine göre her elemanın tersi vardır.

Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi



- * Yandaki tabloda kırmızı ile taranmış bölgeyi rasyonel sayı olarak ifade ediniz.
- * Mavi ile taranmış bölgeyi rasyonel sayı olarak ifade ediniz.
- Taranmış kısımların kesişiminden elde edilen bölge tüm bölgenin kaçta kaçıdır?

- Bu sonucu $\frac{2}{3}$ ve $\frac{1}{4}$ rasyonel sayıları cinsinden nasıl ifade edersiniz?
- İki rasyonel sayı nasıl çarpılır? Açıklayınız.

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$

b. $\frac{-2}{7} \cdot \frac{3}{5}$

c. $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}$

ç. $-5 \cdot \frac{1}{15}$

Çözüm :

$$a. \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$$

$$b. \frac{-2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{-6}{35}$$

$$c. \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$d. -5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{-5 \cdot 1}{15} = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Rasyonel sayılar çarpılırken paylar çarpımı paya, paydalar çarpımı paydaya yazılır. Tam sayılı kesirlerde çarpma işlemi yapılmadan önce her bir kesir bileşik kesre çevrilir.

Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri



✱ Aşağıdaki boş bırakılan kutulara işlemlerin sonuçlarını yazınız.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$	
$3 \cdot \frac{1}{2}$	
$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}$	

✱ Bulduğunuz sayılar hangi sayı kümesine aittir?

➤ iki rasyonel sayının çarpımı yine bir rasyonel sayı mıdır? Açıklayınız.

$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5}$	
$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8}$	
$\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)$	
$\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$	

✱ Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

➤ Rasyonel sayılar çarpılırken çarpılan sayıların sırası önemli midir? Açıklayınız.

$\frac{2}{3} \cdot 1$	
$1 \cdot \frac{5}{8}$	

✱ İşlemlerin sonucunu etkilemeyen sayı hangisidir?

➤ Rasyonel sayılar kümesinde çarpımı etkilemeyen sayı kaçtır? Açıklayınız.

$\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}$	
$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$	

✱ İşlemlerin sonucunda bulduğunuz sayılar için ne söyleyebilirsiniz?

➤ Çarpma işleminde bir elemanın tersini nasıl bulursunuz?

$\frac{3}{4} \cdot 0$	
$0 \cdot \frac{2}{7}$	

✱ Yandaki işlemleri inceleyerek 0'ın işlevini açıklayınız.

1. Kapalılık Özelliği

Örnek : $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3}$ işleminin sonucu bir rasyonel sayı mıdır? Herhangi iki rasyonel sayının çarpımı yine bir rasyonel sayı olur mu? İnceleyelim.

Çözüm :

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{35}{6} \in \mathbb{Q} \text{ olur.}$$

Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalı olduğundan pay ve paydadan elde edilecek sayılar daima tam sayı olacaktır. Ayrıca payda hiçbir zaman sıfır olamayacağından çarpma işleminden elde edilecek sayı her zaman rasyonel sayı olacaktır.

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

Örnek : $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$ ve $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} &= \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} &= \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

Örnek : $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)$ ve $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$ işlemlerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{12} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} &= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

4. Etkisiz Eleman

Örnek : $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1}$ ve $\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2}$ işlemlerini yaparak sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin birim elemanı vardır ve 1 dir.

5. Yutan Eleman

Örnek : $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{2}$ işleminin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = 0 \\ \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ dir.}$$

Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \cdot \frac{a}{b} = 0$ olduğundan rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı vardır ve sıfırdır.

6. Dağılma Özelliği

Örnek : $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right)$ ve $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \right)$ işlemlerinin sonuçlarını bularak karşılaştıralım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 + 1}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}, \\ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) &= \left(\frac{2}{6} \right) + \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{12} = \frac{5}{12} \text{ tir.} \\ \text{O hâlde } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \right)$ olduğundan rasyonel sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır. Benzer biçimde sağdan dağılma özelliği de vardır.

7. Bir Elemanın Tersİ

Örnek : $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$ ve $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$ işlemlerinin sonuçlarını bularak karşılaştıralım.

Çözüm : $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$, $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1$ dir. O hâlde $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$ olur.

Her $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ve $a \neq 0$ için $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ olduğundan $\frac{a}{b}$ nin çarpma işlemine göre tersi $\frac{b}{a}$ dir.

Rasyonel Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Örnek : $\frac{3}{5}$ rasyonel sayısı ile bu sayının toplama işlemine göre tersini toplayalım.

Çözüm : $\frac{3}{5}$ rasyonel sayısının toplama işlemine göre tersi $-\frac{3}{5}$ tir. Buna göre,

$$\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3+(-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0 \text{ dir.}$$

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayısının toplama işlemine göre tersi $-\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$ dir.

Toplama işleminde olduğu gibi çıkarma işleminde de paydalar eşit değil ise önce paydalar eşitlenir.

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

b. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

c. $-5 - \frac{2}{5}$

ç. $3 - \frac{1}{4}$

Çözüm :

a. $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{7}{15}$,

b. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-3 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{4 \cdot 2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$,

c. $-5 - \frac{2}{5} = \frac{-5 \cdot 5 - 2 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{-27}{5}$,

ç. $3 - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{11}{4}$ tür.

Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi



✻ Aşağıdaki tabloda verilen noktalı yerleri örneklerden yararlanarak doldurunuz.

$5 : 2 = \frac{5}{2}$	$4 : \frac{3}{7} = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$	$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$
$7 : 3 = \dots\dots\dots$	$5 : \frac{2}{3} = \dots\dots\dots$	$\frac{5}{4} : 2 = \dots\dots\dots$	$\frac{4}{5} : \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$
$6 : 11 = \dots\dots\dots$	$4 : \frac{3}{8} = \dots\dots\dots$	$\frac{2}{7} : 3 = \dots\dots\dots$	$\frac{4}{7} : \frac{8}{21} = \dots\dots\dots$

➤ $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının $\frac{c}{d}$ rasyonel sayısına bölümü ne olur? Açıklayınız.

Örnek : $\frac{3}{5}$ rasyonel sayısı ile $\frac{2}{5}$ rasyonel sayısının çarpma işlemine göre tersinin çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm : $\frac{2}{5}$ işleminin çarpma işlemine göre tersi $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$ dir. Buna göre

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \text{ tür.}$$

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{c}{d} \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$ çarpımı, $\frac{a}{b}$ nin $\frac{c}{d}$ ye bölümüdür.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \text{ dir.}$$

Örnek : Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\frac{5}{8} : \frac{3}{2}$ b. $3 : \frac{1}{3}$ c. $\frac{-2}{3} : 3$ ç. $\frac{-7}{2} : \frac{-5}{8}$ d. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}$ e. $\frac{5}{\frac{-2}{5}}$ f. $\frac{\frac{2}{3}}{4}$

Çözüm :

$$a. \frac{5}{8} : \frac{3}{2} = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2^1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12}$$

$$b. 3 : \frac{1}{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$c. \frac{-2}{3} : 3 = \frac{-2}{3} \cdot (3)^{-1} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{-2}{9}$$

$$\text{ç. } \frac{-7}{2} : \frac{-5}{8} = \frac{-7}{2} \cdot \left(\frac{-5}{8}\right)^{-1} = \frac{-7}{2} \cdot \frac{8^4}{-5} = \frac{-7 \cdot 4}{1 \cdot (-5)} = \frac{-28}{-5} = \frac{28}{5}$$

$$d. \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

$$e. \frac{5}{\frac{-2}{5}} = 5 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^{-1} = 5 \cdot \left(\frac{5}{-2}\right) = \frac{5 \cdot 5}{1 \cdot (-2)} = -\frac{25}{2}$$

$$f. \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \cdot (4)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4_2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6} \text{ dir.}$$

Örnek : Rasyonel sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin özelliklerini kullanarak aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

$$a. \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}$$

$$b. 2 + \frac{3 - \frac{1}{5}}{3 + \frac{1}{5}}$$

$$c. \left(8 - 5\frac{1}{2}\right) : \left(3\frac{1}{2} : \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{ç. } \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$d. 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$$

$$e. \frac{\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{20}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right)}$$

Çözüm :

$$a. \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{12}}{\frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{3 \cdot 4}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1\cancel{5}}{1\cancel{12}} \cdot \frac{1\cancel{2}^1}{\cancel{5}_1} = 1$$

$$b. 2 + \frac{3 - \frac{1}{5}}{3 + \frac{1}{5}} = 2 + \frac{\frac{3 \cdot 5 - 1}{5}}{\frac{3 \cdot 5 + 1}{5}} = 2 + \frac{\frac{14}{5}}{\frac{16}{5}} = 2 + \left(\frac{7\cancel{14}}{1\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{16}_8} \right) = 2 + \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 7}{8} = \frac{23}{8}$$

$$c. \left(8 - 5\frac{1}{2} \right) : \left(3\frac{1}{2} : \frac{7}{4} \right) = \left(8 - \frac{11}{2} \right) : \left(\frac{7}{2} : \frac{7}{4} \right) = \frac{5}{2} : \left(\frac{1\cancel{7}}{1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{7}_1} \right) = \frac{5}{2} : 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \right) : \left(1 + \frac{1}{2} \right)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right) : \left(\frac{3}{2} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2^1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$d. 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{1 + 1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{1 + 2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$e. \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{20} \right)}{\left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{20} \right)} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{21}{20}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20}} = \frac{\frac{21}{3}}{\frac{2}{20}} = \frac{7}{\frac{1}{10}} = 7 \cdot 10 = 70 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $2 - \frac{5}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } 2 - \frac{5}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} &= 2 - \frac{5}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 2 - \frac{5}{1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}} \\ &= 2 - \frac{5}{1 + \frac{1}{\frac{1}{3}}} = 2 - \frac{5}{1 + 3} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek : $\frac{15a - 80}{5a}$ ifadesini doğal sayı yapan kaç tane a tam sayısının olduğunu bulalım.

$$\text{Çözüm : } \frac{15 \cdot a - 80}{5 \cdot a} = \frac{15 \cdot \cancel{a}^1}{5 \cdot \cancel{a}_1} - \frac{80^{16}}{1\cancel{5} \cdot a} = 3 - \frac{16}{a} \text{ ifadesinin doğal sayı olabilmesi için } \frac{16}{a} \text{ kesrini tam}$$

sayı yapan a değerlerini incelememiz gerekir. Buna göre a sayısı -16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16 değerlerinden herhangi biri olabilir. Fakat verilen ifadenin doğal sayı olabilmesi için a tam sayıları, -16, -8, -4, -2, -1, 8, 16 sayıları olmalıdır.

Örnek : $\frac{6}{2 - \frac{3}{x - 2}}$ kesrini tanımsız yapan x değerlerini bulalım.

Çözüm : Paydayı sıfır yapan değerler, kesri tanımsız yapacaktır. Buna göre, $\frac{3}{x-2}$ kesrini tanımsız yapan değer $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ değeridir. Ayrıca,

$$\frac{6}{2 - \frac{3}{x-2}} = \frac{6}{\frac{2x-4-3}{x-2}} = 6 \cdot \frac{x-2}{2x-7} = \frac{6x-12}{2x-7} \text{ olduğundan,}$$

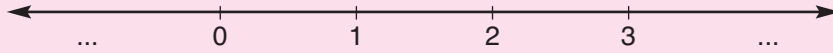
$\frac{6x-12}{2x-7}$ kesrini tanımsız yapan değer $2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ değeridir. O hâlde,

$$\frac{6}{2 - \frac{3}{x-2}} \text{ kesrini } 2 \text{ ve } \frac{7}{2} \text{ sayıları tanımsız yapar.}$$

Rasyonel Sayılarda Sıralama



❄ $\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$ sayılarını aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.



- Sayı doğrusundan yararlanarak bu sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
- Paydaları veya payları eşit olan pozitif rasyonel sayıları sıralamak için bir kural belirleyiniz.
- Negatif rasyonel sayıları sıralarken, pozitif rasyonel sayılar için belirlediğiniz kurallardan yararlanabilir misiniz? Tartışınız.

Örnek : $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}$ rasyonel sayılarını sayı doğrusu üzerinde göstererek bu sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayalım. Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayıları bir eşitsizlik zinciri içinde sıralayabilmek için genel bir kural bulmaya çalışalım.

Çözüm :



Yukarıdaki sayı doğrusundan, $\frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < \frac{7}{4} < \frac{11}{4}$ olduğu görülebilir. Bu rasyonel sayıları sıralarken bu sayıların paydaları eşit olduğundan sayıların paylarına bakarak genel bir kural bulabiliriz.

Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan, payı küçük olan daha küçüktür.
Paydaları eşit olan **negatif rasyonel sayılar** sıralanırken işaretler paya yazılır ve pozitif sayılardaki kural uygulanır.

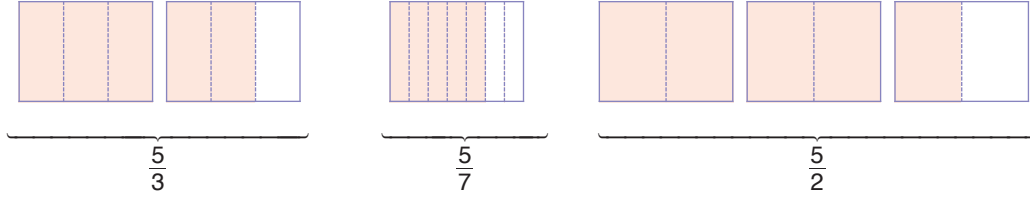
Örnek : $\frac{-2}{7}, \frac{5}{-7}, \frac{3}{-7}, \frac{-11}{7}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm : $\frac{-2}{7}, \frac{5}{-7}, \frac{3}{-7}, \frac{-11}{7}$ sayıları $\frac{-2}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-11}{7}$ biçiminde yazılır.

$-2 > -3 > -5 > -11$ olduğundan $\frac{-2}{7} > \frac{-3}{7} > \frac{-5}{7} > \frac{-11}{7}$ dir.

Örnek : $\frac{5}{3}, \frac{5}{7}, \frac{5}{2}$ rasyonel sayılarını modelleyerek bu sayıları büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Payları eşit olan pozitif rasyonel sayıları, bir eşitsizlik zinciri içinde sıralayabilmek için genel bir kural bulmaya çalışalım.



Model üzerinde de görüldüğü gibi $\frac{5}{2} > \frac{5}{3} > \frac{5}{7}$ dir. Bu sayıların payları eşit olduğundan sayıların paydalarına bakarak genel bir kural bulabiliriz.

Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan, paydası büyük olan daha küçüktür.

Payları eşit olan **negatif rasyonel sayılar** sıralanırken işaretler paydaya yazılır ve pozitif sayılardaki kural uygulanır.

Örnek : $\frac{-6}{2}$, $\frac{-6}{7}$, $\frac{6}{-11}$, $\frac{6}{-5}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm : $\frac{-6}{2}$, $\frac{-6}{7}$, $\frac{6}{-11}$, $\frac{6}{-5}$ sayıları $\frac{6}{-2}$, $\frac{6}{-7}$, $\frac{6}{-11}$, $\frac{6}{-5}$ biçiminde yazılır.

$-2 > -5 > -7 > -11$ olduğundan $\frac{-6}{2} < \frac{6}{-5} < \frac{-6}{7} < \frac{6}{-11}$ dir.

Örnek : $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ ve $\frac{1}{2}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm : Verilen sayıların paydalarını eşitlenirse

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12} \\ \frac{1}{6} &= \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12} \\ \frac{3}{4} &= \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} \end{aligned} \right\}$$

sayıları elde edilir. Paydaları eşit olan rasyonel sayılardan, payı büyük olan sayı daha büyük olacağından

$\frac{20}{12} > \frac{9}{12} > \frac{6}{12} > \frac{2}{12}$ dir. O hâlde $\frac{5}{3} > \frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$ bulunur.

Örnek : $\frac{3}{14}$, $\frac{6}{25}$ ve $\frac{9}{35}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm : Verilen sayıların paylarını eşitleyelim.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{14} &= \frac{18}{84} \\ \frac{6}{25} &= \frac{18}{75} \\ \frac{9}{35} &= \frac{18}{70} \end{aligned} \right\}$$

sayıları elde edilir. Payları eşit olan rasyonel sayılardan, paydası büyük olan sayı daha

küçük olacağından $\frac{18}{84} < \frac{18}{75} < \frac{18}{70}$ dir. O hâlde $\frac{3}{14} < \frac{6}{25} < \frac{9}{35}$ bulunur.

Rasyonel Sayıların Yoğunluğu



- * 0 ile 1 sayılarının ortasındaki sayıyı bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
- * $\frac{1}{2}$ ile 1 sayılarının ortasındaki sayıyı bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
- * $\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$ sayılarının ortasındaki sayıyı bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
- * $\frac{5}{8}$ ile $\frac{3}{4}$ sayılarının ortasındaki sayıyı bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
- Bu işleme devam edildiğinde, her zaman iki rasyonel sayı arasında bu sayılardan farklı başka bir rasyonel sayı bulunabilir mi? Açıklayınız.

Örnek : $-\frac{5}{8}$ ile $\frac{3}{4}$ rasyonel sayılarının ortasındaki rasyonel sayıyı bulalım.

Çözüm : Bu iki rasyonel sayının ortasındaki sayı a olsun. O hâlde

$$a = \frac{-\frac{5}{8} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{-\frac{5}{8} + \frac{6}{8}}{2} = \frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \text{ bulunur.}$$

Farklı iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. Bu yüzden rasyonel sayılar kümesi yoğundur.

Örnek : $\frac{1}{3} < x < y < z < \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayabilecek x, y, z rasyonel sayılarını bulalım.

$$\text{Çözüm : } \frac{1}{3} < x < y < z < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{6} < x < y < z < \frac{3}{6}$$

2 ile 3 arasında tam sayı olmadığından kesirleri genişletelim.

$$\frac{2}{6} < x < y < z < \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{8}{24} < x < y < z < \frac{12}{24} \text{ olup,}$$

$$\frac{8}{24} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{11}{24} < \frac{12}{24} \text{ tür. Buna göre } x = \frac{9}{24}, y = \frac{10}{24} \text{ ve } z = \frac{11}{24} \text{ olabilir.}$$

Örnek : $\frac{5}{12} < \frac{x}{4} < \frac{5}{6}$ koşulunu sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır? Bulalım.

$$\text{Çözüm : } \frac{5}{12} < \frac{x}{4} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{24} < \frac{6x}{24} < \frac{20}{24} \Rightarrow 10 < 6x < 20 \text{ dir.}$$

O hâlde x = 2 veya x = 3 olur. Bu durumda bu koşulu sağlayan 2 tane x doğal sayısı vardır.

Rasyonel Sayıların Ondalık Açılımı



- * Yandaki tabloda verilen noktalı yerleri örnekten yararlanarak doldurunuz.
- Her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı olur mu? Tartışınız.
- Her devirli ondalık açılım rasyonel sayı olur mu? Tartışınız.
- Rasyonel sayıların ondalık açılımını nasıl bulabilirsiniz? Açıklayınız.

$\begin{array}{r} 4 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \\ \vdots \end{array}$	$\frac{4}{3} = 1,3 \dots = 1, \bar{3}$
$8 \overline{) 11}$	$\frac{8}{11} = \dots \dots = \dots$
$9 \overline{) 4}$	$\frac{9}{4} = \dots \dots = \dots$

Örnek : Aşağıdaki bölme işlemlerinin sonuçlarını inceleyelim.

a. $\frac{3}{4} = 0,750000 \dots = 0,75\overline{0}$

b. $\frac{3}{5} = 0,600000 \dots = 0,6\overline{0}$

c. $\frac{1}{3} = 0,333333 \dots = 0,\overline{3}$

ç. $\frac{26}{99} = 0,262626 \dots = 0,\overline{26}$

d. $\frac{112}{90} = 1,24444 \dots = 1,2\overline{4}$

Ondalık sayılarda ondalık kısmının tekrar eden bölümüne devirli kısım deriz. Yukarıda görüldüğü gibi tüm rasyonel sayıların ondalık açılımı devirlidir. Her devirli ondalık açılım bir rasyonel sayıya karşılık gelir. Sayıyı uzun yazmamak için devreden sayı üzerine “ – ” işareti konur.

Örnek : Aşağıdaki devirli ondalık sayıları rasyonel sayı olarak yazalım.

a. $1,2\overline{8}$

b. $0,3\overline{2}$

c. $3,\overline{4}$

ç. $0,\overline{21}$

d. $6,2\overline{5}$

Çözüm :

a. $x = 1,2\overline{8}$ olsun. Buna göre $100x = 128,\overline{8}$ ve $10x = 12,\overline{8}$ elde edilir.

$$\begin{array}{r} 100x = 128,\overline{8} \\ - 10x = 12,\overline{8} \\ \hline \end{array}$$

$$90x = 128 - 12 \Rightarrow x = \frac{128 - 12}{90} = \frac{116}{90} \text{ olur.}$$

b. $x = 0,3\overline{2}$ olsun. Buna göre $100x = 32,\overline{32}$ elde edilir.

$$\begin{array}{r} 100x = 32,\overline{32} \\ - x = 0,\overline{32} \\ \hline \end{array}$$

$$99x = 32 - 0 \Rightarrow x = \frac{32 - 0}{99} = \frac{32}{99} \text{ olur.}$$

c. $x = 3,\overline{4}$ olsun. Buna göre $10x = 34,\overline{4}$ elde edilir.

$$\begin{array}{r} 10x = 34,\overline{4} \\ - x = 3,\overline{4} \\ \hline \end{array}$$

$$9x = 34 - 3 \Rightarrow x = \frac{34 - 3}{9} = \frac{31}{9} \text{ olur.}$$

ç. $x = 0,\overline{21}$ olsun. Buna göre $100x = 21,\overline{21}$ elde edilir.

$$\begin{array}{r} 100x = 21,\overline{21} \\ - x = 0,\overline{21} \\ \hline \end{array}$$

$$99x = 21 - 0 \Rightarrow x = \frac{21 - 0}{99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33} \text{ olur.}$$

d. $x = 6,2\overline{5}$ olsun. $100x = 625,\overline{5}$ ve $10x = 62,\overline{5}$ olur.

$$\begin{array}{r} 100x = 625,\overline{5} \\ - 10x = 62,\overline{5} \\ \hline \end{array}$$

$$90x = 625 - 62 \Rightarrow x = \frac{625 - 62}{90} = \frac{563}{90} \text{ olur.}$$

Bir önceki sayfadaki işlemlerin sonucunda $k = a, b\bar{c}$ devirli ondalık sayısının $k = \frac{abc - ab}{90}$ şeklinde rasyonel sayıya çevrildiği görülür. Bunu genel olarak şöyle ifade edebiliriz: Bir ondalık açılıma karşılık gelen rasyonel sayıyı bulurken virgöl atılarak devretmeyen ve devreden kısım birlikte alınır. Bu sayıdan devretmeyen kısım çıkarılarak paya yazılır. Paydaya ise sayının ondalık kısmındaki devreden basamak sayısı kadar 9, devretmeyen basamak sayısı kadar 0 yazılır.

Örnek : Aşağıdaki sayıları rasyonel sayı olarak yazalım.

- a. $0,75\bar{0}$ b. $2,1$ c. $3,14$ ç. $6,2\bar{8}$ d. $12,0\bar{1}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \text{a. } 0,75\bar{0} &= \frac{750 - 75}{900} = \frac{675}{900} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \text{ olur.} & \text{b. } 2,1 &= \frac{21 - 2}{9} = \frac{19}{9} \text{ olur.} \\ \text{c. } 3,14 &= \frac{314 - 31}{90} = \frac{283}{90} \text{ olur.} & \text{ç. } 6,2\bar{8} &= \frac{628 - 62}{90} = \frac{566}{90} \text{ olur.} \\ \text{d. } 12,0\bar{1} &= \frac{1201 - 12}{99} = \frac{1189}{99} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek : $m = 1,1\bar{3}$ ve $n = 1,7$ ise $\frac{m+n}{m \cdot n}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm :

$$m = \frac{13 - 1}{90} = \frac{12}{90} \text{ ve } n = \frac{17 - 1}{9} = \frac{16}{9} \text{ dir.}$$

$$\frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{m}{mn} + \frac{n}{mn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{16}{9}} + \frac{1}{\frac{12}{90}} = \frac{9}{16} + \frac{90}{12} = \frac{9}{16} + \frac{90}{12} = \frac{9 \cdot 3 + 90 \cdot 4}{48} = \frac{387}{48} \text{ edilir.}$$

Örnek : $m = 2,9$ ve $n = 3,9$ olduğuna göre $m^n + n^m$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm :

$$m = 2,9 = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3 \text{ ve } n = 3,9 = \frac{39 - 3}{9} = \frac{36}{9} = 4 \text{ tür.}$$

$$m^n + n^m = 3^4 + 4^3 = 81 + 64 = 145 \text{ elde edilir.}$$

Devirli ondalık sayının devreden kısmı 9 ise solundaki rakamın sayısal değerini bir artırır.

Örnek : $5,9$; $0,2\bar{9}$; $0,9\bar{9}$; $6,1\bar{9}$; $0,11\bar{9}$; $7,125\bar{9}$ sayılarını yuvarlayalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5,9 &= 6 & ; & & 0,2\bar{9} &= 0,3 & ; & & 0,9\bar{9} &= 1 \\ 6,1\bar{9} &= 6,2 & ; & & 0,11\bar{9} &= 0,12 & ; & & 7,125\bar{9} &= 7,126 \text{ dir.} \end{aligned}$$



ALİŞTIRMALAR

1. $\frac{8}{5a+3}$ ifadesinin bir rasyonel sayı olabilmesi için a'nın alamayacağı değeri nedir?
2. $\frac{5}{6 - \frac{3}{x+3}}$ kesrini tanımsız yapan x değerlerini bulunuz.
3. Bir kesrin değeri $\frac{2}{3}$ dir. Bu kesrin payına 1 eklenir ve paydasından 3 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{11}{12}$ oluyor. Bu kesri bulunuz.
4. $\frac{45x-15}{5x}$ ifadesini tam sayı yapan x doğal sayılarını bulunuz.
5. $a = \frac{-3}{5}$ ve $b = \frac{2}{5}$ olduğuna göre $\frac{a^{-1}:b^{-1}}{a-b}$ ifadesinin değerini bulunuz.
6. $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
7. $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
8. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ işleminin sonucunu bulunuz.
9. $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?
10. Bir sayıyı 0,0625 ile çarpmak o sayıyı kaçta bölmek demektir?
11. $a < 0$ olduğuna göre $x = \frac{a}{5}$, $y = \frac{a}{3}$ ve $z = \frac{a}{8}$ rasyonel sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
12. $a = \frac{1000}{41}$, $b = \frac{10}{401}$ ve $c = \frac{10000}{411}$ sayılarını büyükten küçüğe sıralayınız.
13. $\frac{14}{9}$, $\frac{21}{5}$ ve $\frac{7}{3}$ rasyonel sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
14. $-\frac{7}{3}$, $-\frac{8}{18}$, $\frac{6}{15}$, $-\frac{5}{10}$, $\frac{3}{12}$ sayılarından hangisi en küçüktür?
15. $-\frac{4}{15}$ ve $\frac{11}{7}$ rasyonel sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
16. $a, b, c \in \mathbb{Z}^-$ ve $-\frac{1}{9} < \frac{a}{18} < \frac{b}{18} < \frac{c}{18} < -\frac{1}{3}$ olmak üzere a, b ve c yi bulunuz.
17. x, y, z ve t negatif tam sayıları arasında $5x = 2y$, $4y = 3z$ ve $4z = 3t$ bağıntıları olduğuna göre a, b, c ve d sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.
18. $\frac{3}{5} < \frac{x}{6} < \frac{7}{9}$ koşulunu sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır?
19. 4,1818 ... devirli ondalık sayısı en küçük hangi tam sayı ile çarpılırsa sonuç yine bir tam sayı olur?
20. $6 \cdot 4,1\overline{6} + 1980 \cdot 0,32\overline{8}$ ifadesinin değerini bulunuz.

GERÇEK SAYILAR

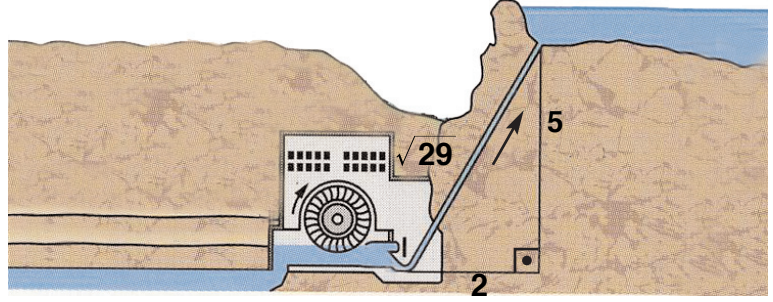


Şekilde yer altında çalışan bir su pompası vardır.

✓ Su pompası ile belirlenen bölgedeki suyun çekilebilmesi için ne kadar borunun uzatılması gerektiği hesaplanabilir.

✓ $\sqrt{29}$ sayısı bugüne kadar öğrendiğiniz sayı kümelerinden hangisine dâhildir?

✓ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{29}$... gibi sayılar ile şimdiye kadar öğrendiğiniz en geniş sayı kümesi olan rasyonel sayılar kümesinin birleşimi, tüm sayı doğrusunu oluşturur mu (rasyonel sayıların sayı doğrusunu doldurmadığını hatırlayınız.)?

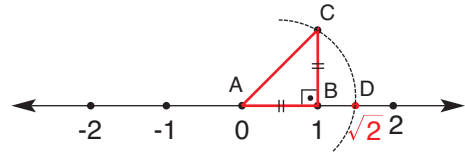


- 0,18; -31,2; 0,003 sayılarını iki tam sayının oranı şeklinde yazınız.
- İki tam sayının oranı şeklinde yazdığınız sayılar hangi sayı kümesine aittir?
- $\sqrt{3}$; $1,\overline{3}$; 2,15320124... sayılarını iki tam sayının oranı şeklinde yazabilir misiniz?
- ✱ İki tam sayının oranı şeklinde yazılmayan sayılara ne ad verilir? Tartışınız.

Örnek : Sayı doğrusu üzerinde, $\sqrt{2}$ sayısının hangi noktaya karşılık geldiğini bularak bu sayının bir rasyonel sayı olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm :

Yandaki şekilde, sayı doğrusu üzerine dik kenar uzunlukları 1 birim olan ikizkenar dik üçgen yerleştirilim. ABC ikizkenar dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa



$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{2} \text{ br bulunur.}$$

Pergelin sivri ucu A noktasına koyulup $|AC|$ kadar açılarak bir yay çizilir. Bu yayın kestiği D noktası, $\sqrt{2}$ ye karşılık gelen nokta olur.

Şimdi $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve a, b aralarında asal olmak üzere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dır.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \text{ dir. } a^2 = 2b^2 \text{ olduğundan } a^2 \text{ çifttir. } a^2 \text{ çift ise } a \text{ çifttir ve } a = 2p, p \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

$$a^2 = 2b^2 \text{ eşitliğinde } a \text{ yerine } 2p \text{ yazalım. } a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2p)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4p^2 = 2b^2 \Rightarrow 2p^2 = b^2 \text{ elde edilir.}$$

$$b^2 = 2p^2 \text{ olduğundan } b^2 \text{ çifttir. } b^2 \text{ çift ise } b \text{ çifttir ve } b = 2r, r \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

a ve b yi çift sayı bulduk. Başta a ile b yi aralarında asal kabul etmiş olmamıza rağmen ortak bir çarpanının 2 olduğu sonucuna ulaştık. Dolayısıyla $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olması ile ilgili çelişki elde ettik. O hâlde $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel bir sayı değildir.

Sayı doğrusu üzerinde yer alan fakat $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... gibi rasyonel olmayan sayılar, irrasyonel sayılardır. İrrasyonel sayılar Q' ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi gerçekte sayılar kümesidir. Gerçek sayılar kümesi R ile gösterilir.

$N \subset Z \subset Q \subset R$ ve $Q \cup Q' = R$ olduğundan gerçekte sayılar kümesi en geniş sayı kümesidir. Gerçek sayılar kümesi sayı doğrusunu doldurur. Bu yüzden gerçekte sayılar kümesi ile sayı doğrusu arasında bire bir ve örten bir eşleme vardır.

Örnek :

$x = 0,5$, $y = 1,333...$, $z = \sqrt{2} = 1,4142136...$, $e = 2,718281828...$ ve $\pi = 3,141592653...$ sayılarının ondalık açılımları arasındaki farkı belirterek rasyonel ve irrasyonel olanları belirleyelim.

Çözüm :

$x = 0,5 = 0,5000... = 0,5\bar{0}$ ve $y = 1,333... = 1,\bar{3}$ ondalık sayıları devirli olarak ifade edilebilir. Her devirli ondalık açılımın bir rasyonel sayı olduğunu biliyoruz. O hâlde x ve y sayıları birer rasyonel sayıdır.

$z = \sqrt{2} = 1,4142136...$, $e = 2,718281828...$ ve $\pi = 3,141592653...$ sayılarının ondalık açılımları sınırsız ve devirsizdir. O hâlde bu sayılar rasyonel sayı değildir. $\sqrt{2}$, e ve π sayıları birer irrasyonel sayıdır.

Devirli ondalık açılımı olmayan sayılar irrasyonel sayılardır. Bir gerçekte sayının irrasyonel olup olmadığına ondalık açılımına bakarak karar verebiliriz. Ondalık açılımları sınırsız ve devirsiz olan sayılar rasyonel değildir.

Örnek :

$\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ sayılarının kesin değeri bilinseydi aşağıdakilerden hangilerinin değerinin bulunabileceğini inceleyelim.

- a. $\sqrt{8}$ b. $\sqrt{27}$ c. $\sqrt{15}$ ç. $\sqrt{24}$

Çözüm :

a. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ tir. $\sqrt{2}$ nin kesin değeri bilinseydi bu sayının 2 katı $\sqrt{8}$ in değerini verirdi.

b. $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ tür. $\sqrt{3}$ ün kesin değeri bilinseydi, $\sqrt{3}$ sayısının 3 katı $\sqrt{27}$ nin değerini verirdi.

c. $\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ tir. Sadece $\sqrt{3}$ ün kesin değeri bilinseydi, $\sqrt{5}$ in değeri bilinmediğinden $\sqrt{15}$ in değerini bulamazdık.

ç. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ dir. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ ün kesin değeri bilinseydi, $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ ün çarpımının 2 katı $\sqrt{24}$ ün değerini verirdi.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri



✱ Aşağıdaki tabloda istenilen işlemleri yaparak noktalı yerlere yazınız.

$2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \dots$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \dots$	$0,5 - \frac{1}{3} = \dots$	$2 + \frac{1}{3} = \dots$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \dots$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \dots$	$\left(-\frac{1}{5}\right) + 3 = \dots$	$3 + \left(-\frac{1}{5}\right) = \dots$
$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \dots$	$\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \dots$	$(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + \sqrt{3} = \dots$	$\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \dots$
$\sqrt{5} + 0 = \dots$	$0 + \sqrt{5} = \dots$	$\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \dots$	$0 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots$
$\frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right) = \dots$	$\left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{2}{7} = \dots$	$\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = \dots$	$(-\sqrt{7}) + \sqrt{7} = \dots$

✱ Tablonun ilk üç satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz.

➤ Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin kapalılık, değişme ve birleşme özellikleri var mıdır? Açıklayınız.

✱ Tablonun dördüncü satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz.

➤ Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı var mıdır? Varsa nedir?

✱ Tablonun beşinci satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz.

➤ Gerçek sayılar kümesinde toplama işlemine göre bir gerçək sayının tersi var mıdır? Açıklayınız.

Örnek : Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin özelliklerini örnekler üzerinde inceleyelim.

Çözüm : Herhangi iki gerçək sayının toplamı yine bir gerçək sayıdır. $3, 5 \in \mathbb{R}$ için $3 + 5 = 8 \in \mathbb{R}$ olur.

İki gerçək sayı toplanırken sayıların yerinin değişmesi, sonucu değıştirmez. $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ dir.

$(3 + 5) + \frac{1}{7}$ ile $3 + \left(5 + \frac{1}{7}\right)$ işleminin sonuçları eşittir. Bu yüzden toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Sıfır ile herhangi bir gerçək sayının toplamı yine bu gerçək sayıya eşittir. $\sqrt{3} + 0 = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$ tür.

Her gerçək sayı ile o sayısının negatif işaretlisinin toplamı sıfırdır. Her gerçək sayının negatif işaretlisi bu gerçək sayının toplama işlemine göre tersidir.

Örnek : $(-\sqrt{5}) + a = 0$, $b + \frac{3}{5} = 0$, $c + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$ olduğuna göre a, b, c değerini bulalım.

Çözüm : $(-\sqrt{5}) + a = 0 \Rightarrow a = +\sqrt{5}$, $b + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{5}$, $c + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} \Rightarrow c = 0$ dir. Buradan $a \cdot b \cdot c = \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 0 = 0$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki eşitliklerdeki bilinmeyenleri bulalım.

a. $3 + [(-4) + 5] = [3 + (-4)] + m$

b. $n + (-8) = (-8)$

c. $(\sqrt{7}) + k = 0$

Çözüm : a. $3 + [(-4) + 5] = [3 + (-4)] + m \Rightarrow m = 5$ tir. (Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliğinden)

b. $n + (-8) = (-8) \Rightarrow n = 0$ dir. (Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 olduğundan)

c. $(\sqrt{7}) + k = 0 \Rightarrow k = -\sqrt{7}$ dir.

Gerçek sayılar kümesinden toplama işlemi tıpkı rasyonel sayılar kümesinde olduğu gibi tanımlanır. O hâlde,

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x + y \in \mathbb{R}$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin toplama işlemine göre kapalılık özelliği vardır.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x + y = y + x$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin toplama işlemine göre değişme özelliği vardır.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin toplama işlemine göre birleşme özelliği vardır.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x + 0 = 0 + x$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin toplama işlemine göre etkisiz elemanı 0 dir.
5. $x \in \mathbb{R}$ için $(-x) \in \mathbb{R}$ ve $x + (-x) = (-x) + x = 0$ dir. Buradaki $(-x)$ sayısı x in toplama işlemine göre tersidir.

Gerçek Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri



➤ Aşağıdaki tabloda istenilen işlemleri yaparak noktalı yerlere yazınız.

$5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \dots$	$\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \dots$	$(-0,1) \cdot 10 = \dots$
$6 \cdot \frac{1}{8} = \dots$	$\frac{1}{8} \cdot 6 = \dots$	$(-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = \dots$	$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2}) = \dots$
$(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{7} = \dots$	$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}) = \dots$	$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \sqrt{3} = \dots$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{3}\right) = \dots$
$\sqrt{5} \cdot 1 = \dots$	$1 \cdot \sqrt{5} = \dots$	$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \dots$	$1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots$
$\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6} = \dots$	$\frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7} = \dots$	$\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \dots$
$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right) = \dots$	$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \dots$	$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \dots$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \dots$
$\sqrt{7} \cdot 0 = \dots$	$0 \cdot \frac{1}{5} = \dots$	$0 \cdot 4 = \dots$	$(-6) \cdot 0 = \dots$

- ✱ Tablonun ilk üç satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin kapalılık, değişme ve birleşme özellikleri var mıdır? Açıklayınız.
- ✱ Tablonun dördüncü satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı var mıdır? Varsa nedir?
- ✱ Tablonun beşinci satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz. Gerçek sayılar kümesinde her elemanın çarpma işlemine göre ters elemanı var mıdır? Açıklayınız.
- ✱ Tablonun altıncı satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği var mıdır? Açıklayınız.
- ✱ Tablonun yedinci satırında yaptığınız işlemleri inceleyiniz. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı var mıdır? Açıklayınız.

Örnek : Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin özelliklerini örnekler üzerinde inceleyelim.

Çözüm :

Herhangi iki gerçek sayının çarpımı yine bir gerçek sayıdır. $4, 7 \in \mathbb{R}$ için $4 \cdot 7 = 28 \in \mathbb{R}$ dir.

İki gerçek sayının çarpma işlemi yapılırken sayıların yer değiştirmesi, sonucu değiştirmez. $5 \cdot 9 = 9 \cdot 5 = 45$ tir.

$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ olduğundan $\frac{3}{4}$ sayısının gerçek sayılar kümesinde çarpma işlemine göre tersi $\frac{4}{3}$ tür.

$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{6} + \sqrt{10}$ ve $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{10}$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Gerçek sayılar kümesinde çarpma işlemi rasyonel sayılar kümesinde olduğu gibi tanımlanır. O hâlde;

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \cdot y \in \mathbb{R}$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin çarpma işlemine göre kapalılık özelliği vardır.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x \cdot y = y \cdot x$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin çarpma işlemine göre değişme özelliği vardır.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin çarpma işlemine göre birleşme özelliği vardır.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı 1 dir.
5. $x \neq 0$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ dir. Burada $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ olup $\frac{1}{x}$ sayısı x in çarpma işlemine göre tersidir.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ olup $0 \in \mathbb{R}$ çarpma işleminin yutan elemanıdır.
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ ve $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$ olduğundan reel sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Gerçek Sayılarda Eşitsizliğin Özellikleri



- $2 < 5$ eşitsizliğinin her iki tarafını 3 sayısı ile toplayınız.
- ✱ Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı gerçek sayı ile toplandığında eşitsizlik değişir mi? Açıklayınız.
- $1 < 3$ eşitsizliğinin her iki tarafını 2 sayısı ile çarpınız.
- $1 < 3$ eşitsizliğinin her iki tarafını -2 sayısı ile çarpınız.
- ✱ Bir eşitsizliğin her iki tarafının pozitif veya negatif bir gerçek sayı ile çarpılması arasında nasıl bir farklılık vardır? Açıklayınız.

- ✱ Kemal'in yaşı, Sinem'in yaşından küçük; Sinem'in yaşı ise Burak'ın yaşından küçüktür. O hâlde Kemal'in yaşı ile Burak'ın yaşını karşılaştırdığınızda ne söyleyebilirsiniz? Bu durum için gerçek sayılar kümesinde bir genelleme yapılabilir mi? Tartışınız.
- ✱ İrem'in boyu Ceren'in boyundan küçüktür. Ceyda'nın boyu Ece'nin boyundan küçüktür. Bu durumda İrem ile Ceyda'nın boyları toplamını, Ceren ile Ece'nin boyları toplamı ile karşılaştırdığınızda ne söyleyebilirsiniz? Bu durum için gerçek sayılar kümesinde bir genelleme yapılabilir mi? Tartışınız.
- ✱ $\left. \begin{array}{l} 3 < 7 \\ 2 < 5 \end{array} \right\}$ eşitsizliklerini taraf tarafa çarparak yeni bir eşitsizlik elde ediniz.
- Pozitif gerçek sayılar için $a < b$ ve $c < d$ ise $a.c < b.d$ olur mu? Tartışınız.

Örnek : $5 < 11$ eşitsizliğinin her iki yanına 3 sayısını ekleyelim.

$5 < 11 \Rightarrow 5 + 3 < 11 + 3 \Rightarrow 8 < 14$ tür. Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı gerçek sayıyı eklersek eşitsizlik yön değiştirmez.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ için } a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \text{ dir.}$$

Örnek : $3 < 4$ eşitsizliğinin her iki yanını 5 sayısı ile çarpalım.

$3 < 4 \Rightarrow 3 \cdot 5 < 4 \cdot 5 \Rightarrow 15 < 20$ dir. Bir eşitsizliğin her iki yanını aynı pozitif reel sayı ile çarparsak eşitsizlik yön değiştirmez.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ve } c > 0 \text{ için } a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \text{ dir.}$$

Örnek : $-\frac{1}{2} < \frac{4}{3}$ eşitsizliğinin her iki yanını -6 sayısı ile çarpalım.

$$\text{Çözüm : } \left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{4}{3} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-6) > \frac{4}{3} \cdot (-6) \Rightarrow 3 > -8 \text{ dir.}$$

Bir eşitsizliğin her iki yanını aynı negatif reel sayı ile çarparsak eşitsizlik yön değiştirir.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ve } c < 0 \text{ için } a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \text{ dir.}$$

Örnek : $3 < 11$ ve $4 < 5$ aynı yönlü eşitsizliklerinin her iki yanını taraf tarafa toplayalım.

$$3 < 11 \text{ ve } 4 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 11 + 5 \Rightarrow 7 < 16 \text{ dir.}$$

Verilen aynı yönlü iki eşitsizliğin her iki yanını taraf tarafa toplarsak eşitsizlik yön değiştirmez.

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ için } (a < b \wedge c < d) \Rightarrow a + c < b + d \text{ dir.}$$

Örnek : $2 < 7$ ve $7 < 9$ ise $2 < 9$ dur.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \text{ ve } (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c \text{ dir.}$$

Örnek : $5 < 10$ ve $3 < 7$ eşitsizliğinin her iki yanını taraf tarafa çarpalım.

$$5 < 10 \text{ ve } 3 < 7 \Rightarrow 5 \cdot 3 < 10 \cdot 7 \Rightarrow 15 < 70 \text{ tir.}$$

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } (a < b \wedge c < d) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d \text{ dir.}$$

Örnek : x ve y aynı işaretli sayılar olmak üzere, $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : x ve y aynı işaretli olduğundan $x \cdot y > 0$ olur. $x < y$ eşitsizliğinin her iki yanını $\frac{1}{x \cdot y}$ ile çarpalım.

$$x < y \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x \cdot y} < y \cdot \frac{1}{x \cdot y} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

Örnek : $2x - 1 < 5x - 2$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $2x - 1 < 5x - 2 \Rightarrow 2x - 5x < -2 + 1 \Rightarrow -3x < -1 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ tür.

$$\mathcal{C} = \left\{ x \mid x > \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left(\frac{1}{3}, \infty \right) \text{ olur.}$$

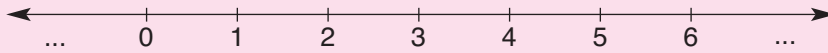
Gerçek Sayı Aralıkları



➤ 2 ile 4 arasında kalan gerçekte sayılar kümesini ortak özellik yöntemi ile gösteriniz. Bu kümeyi A ile isimlendiriniz.

✱ 2 ve 4 sayıları A kümesine ait midir?

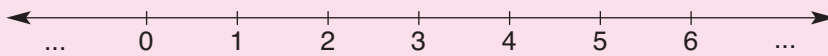
✱ A kümesini aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.



✱ A kümesi başka bir gösterimle ifade edilebilir mi?

➤ 2 ile 4 arasında kalan gerçekte sayılar kümesine 2 ile 4 sayıları ilave edildiğinde oluşan B kümesini ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.

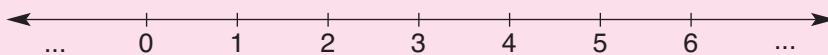
✱ B kümesini aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.



✱ B kümesi başka bir gösterimle ifade edilebilir mi?

➤ 2 ile 4 arasında kalan gerçekte sayılar kümesine sadece 2 sayısı ilave edildiğinde oluşan C kümesini ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.

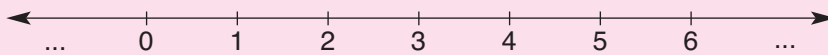
✱ C kümesini aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.



✱ C kümesi başka bir gösterimle ifade edilebilir mi?

➤ 2 ile 4 arasında kalan gerçekte sayılar kümesine sadece 4 sayısı ilave edildiğinde oluşan D kümesini ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.

✱ D kümesini aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.



✱ D kümesi başka bir gösterimle ifade edilebilir mi?

Örnek : $\{x \mid 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine karşılık gelen aralığı yazıp sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm : $\{x \mid 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\} = [3, 5]$ olup sayı doğrusu üzerinde,



şeklinde gösterilir. Bu aralık, 3 ile 5 sayıları arasındaki (3 ve 5 dâhil) tüm gerçekte sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır.

Sayı doğrusu üzerinde a ve b sayıları arasındaki tüm gerçekte sayıların kümesine a, b aralığı denir. Uç noktaların dahil olup olmaması aralığı kapalı ya da açık yapar.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi a ve b gerçekte sayılarıyla oluşturulan **kapalı aralıktır**. $[a, b]$ biçiminde gösterilir.

Örnek : $\{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine karşılık gelen aralığı yazıp sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm : $\{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\} = (-2, 3)$ olup sayı doğrusu üzerinde,



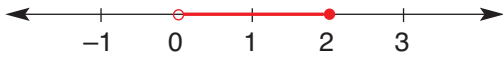
şeklinde gösterilir. Bu aralık -2 ile 3 sayıları arasındaki (-2 ve 3 dâhil değil) tüm gerçekte sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi a ve b gerçekte sayılarıyla oluşturulan **açık aralıktır**. (a, b) biçiminde gösterilir.

Örnek : $\{x \mid 0 < x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ ve $\{x \mid 1 \leq x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ kümelerine karşılık gelen aralıkları yazıp sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

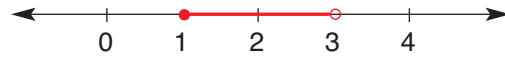
Çözüm :

$$\{x \mid 0 < x \leq 2, x \in \mathbb{R}\} = (0, 2]$$



Bu aralık 0 ile 2 sayıları arasındaki (0 dâhil değil, 2 dâhil) tüm gerçekte sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır.

$$\{x \mid 1 \leq x < 3, x \in \mathbb{R}\} = [1, 3)$$



Bu aralık 1 ile 3 sayıları arasındaki (1 dâhil, 3 dâhil değil) tüm gerçekte sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$ ve $\{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$ kümeleri a ve b reel sayılarıyla oluşturulan **yarı açık aralıklardır**. Sırasıyla $[a, b)$ ve $(a, b]$ biçiminde gösterilir.

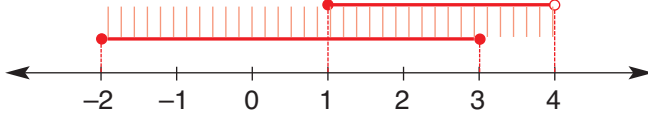
Örnek : $[-2,3] = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ ve $[1,4) = \{x \mid 1 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ sayı aralıkları veriliyor.

a. $[-2,3] \cup [1,4)$ b. $[-2,3] \cap [1,4)$

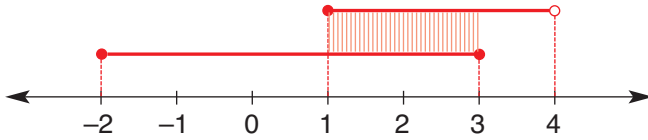
kümelerini bulup sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm :

a. $[-2,3] \cup [1,4) = \{x \mid -2 \leq x \leq 3 \vee 1 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x \mid -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\} = [-2,4)$ olarak bulunur.



b. $[-2,3] \cap [1,4) = \{x \mid -2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x \mid 1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\} = [1,3]$ olarak bulunur.



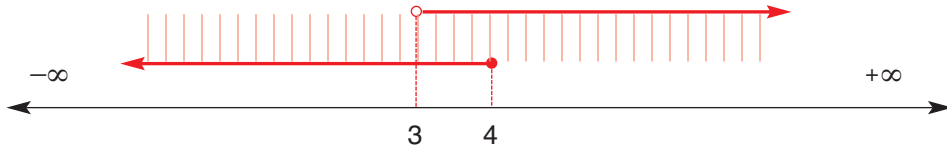
Örnek : $A = (-\infty, 4]$ ve $B = (3, +\infty)$ aralıkları veriliyor.

a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. $A \setminus B$ ç. $B \setminus A$

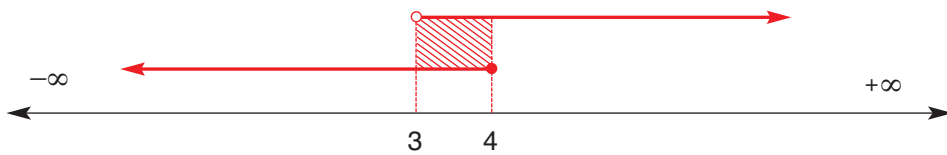
kümelerini bulup sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm :

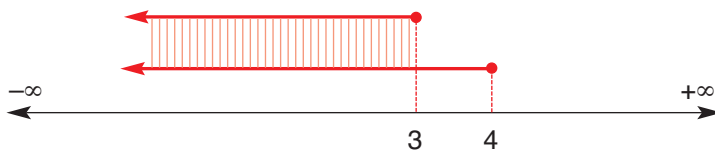
a. $A \cup B = \{x \mid -\infty < x \leq 4 \vee 3 < x < +\infty, x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$



b. $A \cap B = \{x \mid -\infty < x \leq 4 \wedge 3 < x < +\infty, x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid 3 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\} = (3,4]$



c. $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \mid -\infty < x \leq 4 \wedge x \leq 3, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 3]$



$$\text{ç. } B \setminus A = B \cap A^c = \{x \mid 3 < x < \infty \wedge x > 4, x \in \mathbb{R}\} = (4, +\infty)$$



Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler



➤ $2x - 5 = -10$ denklemini çözünüz.

✱ Bu denklemin doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçekte sayılar kümelerindeki çözüm kümelerini yazınız. Bulduğunuz çözüm kümelerini karşılaştırınız.

➤ $3x + 7 \leq -2$ eşitsizliğini çözünüz.

✱ Bu eşitsizliğin doğal sayılar, tam sayılar ve gerçekte sayılar kümelerindeki çözüm kümesini yazınız. Bulduğunuz çözüm kümelerini karşılaştırınız.

Örnek : $7 \cdot (x - 4) + 2x + 15 = 3x + 4$ denkleminin çözüm kümesini doğal sayılar, tam sayılar ve gerçekte sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm :

$$7 \cdot (x - 4) + 2x + 15 = 3x + 4 \Rightarrow 7x - 28 + 2x + 15 = 3x + 4$$

$$\Rightarrow 9x - 13 = 3x + 4 \Rightarrow 6x = 13 + 4 \Rightarrow 6x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{6} \text{ olarak bulunur.}$$

$\frac{17}{6} \notin \mathbb{N}$ olduğundan denklemin doğal sayılar kümesinde çözümü yoktur. $\mathbb{C} = \{ \}$ dir.

$\frac{17}{6} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. $\mathbb{C} = \{ \}$ dir.

$\frac{17}{6} \in \mathbb{R}$ olduğundan denklemin gerçekte sayılar kümesinde çözümü vardır. $\mathbb{C} = \left\{ \frac{17}{6} \right\}$ dir.

Örnek : $\frac{x-2}{3} + \frac{3x+5}{2} = \frac{2x+3}{4} + \frac{1}{12}$ denklemini sağlayan x sayısını bulalım.

Çözüm :

$$\frac{x-2}{3} + \frac{3x+5}{2} = \frac{2x+3}{4} + \frac{1}{12} \Rightarrow 4 \cdot (x-2) + 6 \cdot (3x+5) = 3 \cdot (2x+3) + 1$$

$$\Rightarrow 4x - 8 + 18x + 30 = 6x + 9 + 1$$

$$\Rightarrow 22x + 22 = 6x + 10$$

$$\Rightarrow 16x = -12$$

$$\Rightarrow x = -\frac{12}{16} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $\frac{x-2}{5} + \frac{x+1}{4} = 1$ denkleminin çözüm kümesini doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçekte sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{5} + \frac{x+1}{4} &= \frac{1}{1} \Rightarrow 4x - 8 + 5x + 5 = 20 \\ \Rightarrow 9x &= 23 \\ \Rightarrow x &= \frac{23}{9} \text{ dur.}\end{aligned}$$

Bu durumda, bu denklemin doğal sayılar ve tam sayılar kümelerinde çözümü yoktur. $\mathbb{C} = \{ \}$ dir. Rasyonel sayılar ve gerçekte sayılar kümelerinde çözümü vardır. $\mathbb{C} = \left\{ \frac{23}{9} \right\}$ dur.

Örnek : $(a+7)x - 2a + 2x = 36$ denkleminin çözüm kümesi $\{5\}$ ise a sayısını bulalım.

Çözüm :

Denklemdede x yerine 5 yazılırsa

$$\begin{aligned}(a+7) \cdot 5 - 2a + 2 \cdot 5 &= 36 \Rightarrow 5a + 35 - 2a + 10 = 36 \\ \Rightarrow 3a &= -9 \\ \Rightarrow a &= -3 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek : $5(x+2) - 3 + 2x = 7x + 7$ denkleminin çözüm kümesini gerçekte sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}5(x+2) - 3 + 2x &= 7x + 7 \Rightarrow 5x + 10 - 3 + 2x = 7x + 7 \\ \Rightarrow 7x + 7 &= 7x + 7 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu durumda “ $0 = 0$ ” şeklinde doğru bir önerme elde edilir. O hâlde bu denklemin çözüm kümesi, $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ dir.

Örnek : $2(x-1) + 3x - 4 = 3(x+8) + 2x$ denkleminin çözüm kümesini gerçekte sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}2(x-1) + 3x - 4 &= 3(x+8) + 2x \Rightarrow 2x - 2 + 3x - 4 = 3x + 24 + 2x \\ \Rightarrow 5x - 6 &= 5x + 24 \\ \Rightarrow -6 &= 24 \text{ tür.}\end{aligned}$$

Bu durumda, “ $-6 = 24$ ” şeklinde yanlış bir önerme elde edilir. O hâlde bu denklemin çözüm kümesi, $\mathbb{C} = \emptyset$ dir.

Örnek : $b \cdot (x + 1) = 3x + 2b - 2$ denkleminde hangi b değeri için x in bulunamayacağını bulalım.

Çözüm :

$$b(x + 1) = 3x + 2b - 2 \Rightarrow bx + b = 3x + 2b - 2$$

$$\Rightarrow bx - 3x = b - 2$$

$$\Rightarrow x(b - 3) = b - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{b - 2}{b - 3} \text{ olur.}$$

O hâlde, $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ değeri için payda sıfır olacağından bu değer için x bulunamaz.

Örnek : $\frac{0,44}{x} = \frac{0,11}{0,33}$ olduğuna göre x in değerini bulalım.

Çözüm :

$$\frac{0,44}{x} = \frac{0,11}{0,33} \Rightarrow \frac{0,44}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 0,44 \cdot 3$$

$$\Rightarrow x = 1,32 \text{ dir.}$$

Örnek :

$$\frac{1 + \frac{1}{1+x}}{1 - \frac{2}{1+x}} = \frac{1}{3} \text{ ise } x \text{ in değerini bulalım.}$$

Çözüm :

$$\frac{1 + \frac{1}{1+x}}{1 - \frac{2}{1+x}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1+x+1}{1+x}}{\frac{1+x-2}{1+x}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x + 6 = x - 1$$

$$\Rightarrow 2x = -7$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\frac{4x-7}{5} < -2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini doğal sayılar ve tam sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 4x - 7 < -10 &\Rightarrow 4x < -3 \\ &\Rightarrow x < -\frac{3}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin doğal sayılardaki çözüm kümesi, $\emptyset = \{ \}$ ve tam sayılardaki çözüm kümesi, $\emptyset = \{-1, -2, -3, \dots\}$ tür.

Örnek : $-x - 4(2 - x) \leq 4x - 6 < 3x + 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini;

- a. Doğal sayılar kümesinde, b. Tam sayılar kümesinde,
c. Rasyonel sayılar kümesinde, ç. Gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} -x - 4(2 - x) &\leq 4x - 6 < 3x + 1 \Rightarrow -x - 8 + 4x \leq 4x - 6 < 3x + 1 \\ &\Rightarrow 3x - 8 \leq 4x - 6 < 3x + 1 \Rightarrow -3x + 3x - 8 \leq -3x + 4x - 6 < -3x + 3x + 1 \\ &\Rightarrow -8 \leq x - 6 < 1 \Rightarrow -8 + 6 \leq x - 6 + 6 < 1 + 6 \Rightarrow -2 \leq x < 7 \text{ bulunur. O hâlde;} \end{aligned}$$

- a. Doğal sayılarda çözüm kümesi,

$$\emptyset = \{x \mid -2 \leq x < 7, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ dir.}$$

- b. Tam sayılarda çözüm kümesi,

$$\emptyset = \{x \mid -2 \leq x < 7, x \in \mathbb{Z}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ dir.}$$

- c. Rasyonel sayılar kümesinde çözüm kümesi,

$$\emptyset = \{x \mid -2 \leq x < 7, x \in \mathbb{Q}\} \text{ dir.}$$

- ç. Gerçek sayılarda çözüm kümesi,

$$\emptyset = \{x \mid -2 \leq x < 7, x \in \mathbb{R}\} = [-2, 7) \text{ dir.}$$

Örnek : $-4 < a < 1$ ve $-3 < b < 5$ ise $b - 2a$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm :

$$-4 < a < 1 \Rightarrow 2 \cdot (-4) < 2 \cdot a < 2 \cdot 1 \Rightarrow -8 < 2a < 2 \Rightarrow -2 < -2a < 8 \text{ dir. Öyleyse,}$$

$$\begin{array}{r} -3 < b < 5 \\ + \quad -2 < -2a < 8 \\ \hline -5 < b - 2a < 13 \end{array}$$

O hâlde $b - 2a$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 12 ve en küçük tam sayı değeri -4 olduğundan sonuç $(+12) + (-4) = 8$ olarak bulunur.

Örnek : $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-5 \leq a \leq 2$ ve $-4 < b \leq 3$ olduğuna göre $a^2 - b^2$ ifadesinin reel sayılar kümesindeki çözümünü bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{rclcl} -5 \leq a \leq 2 & \Rightarrow & 0 \leq a^2 \leq 25 & \Rightarrow & 0 \leq a^2 \leq 25 \\ -4 < b \leq 3 & \Rightarrow & 0 \leq b^2 < 16 & \Rightarrow & + \frac{-16 < -b^2 \leq 0}{-16 < a^2 - b^2 \leq 25} \end{array}$$

elde edilir. Öyleyse $\mathcal{C} = \{a, b \mid -16 < a^2 - b^2 \leq 25, a, b \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek : $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $-2 \leq x < 6$ ve $-5 < y < 0$ olduğuna göre $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm :

x ve y tam sayı olduğundan $3x - 2y$ ifadesinin en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulurken verilen aralıklardan seçim yapabiliriz. O hâlde,

$x = 5$ ve $y = -4$ için $3x - 2y$ ifadesinin en büyük değeri $3 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) = 23$,

$x = -2$ ve $y = -1$ için $3x - 2y$ ifadesinin en küçük değeri $3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = -4$ bulunur.

Örnek : $\left. \begin{array}{l} 3x - 4 \leq -10 \\ -7 < 2x - 1 < 7 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminin tam sayılar kümesinde ve gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulalım.

Çözüm :

$$3x - 4 \leq -10 \Rightarrow 3x \leq -10 + 4 \Rightarrow 3x \leq -6 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ve}$$

$$-7 < 2x - 1 < 7 \Rightarrow -7 + 1 < 2x < 7 + 1 \Rightarrow -6 < 2x < 8 \Rightarrow -3 < x < 4 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -2 \\ -3 < x < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 < x \leq -2 \text{ olarak bulunur.}$$



Bu eşitsizliğin tam sayılar kümesindeki çözümü $\mathcal{C} = \{x \mid -3 < x \leq -2, x \in \mathbb{Z}\} = \{-2\}$,

gerçek sayılar kümesindeki çözümü ise $\mathcal{C} = \{x \mid -3 < x \leq -2, x \in \mathbb{R}\} = (-3, -2]$ olur.

Örnek : $-5 < 3 - 2x < 9$ eşitsizliğinin çözüm kümesini, doğal sayılar, tam sayılar ve gerçekte sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}-5 < 3 - 2x < 9 &\Rightarrow -8 < -2x < 6 \\ &\Rightarrow -6 < 2x < 8 \\ &\Rightarrow -3 < x < 4 \text{ tür.}\end{aligned}$$

Bu durumda verilen denklemin;

Doğal sayılardaki çözüm kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$,

Tam sayılardaki çözüm kümesi $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ve

Gerçek sayılardaki çözüm kümesi $\{x \mid -3 < x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ olarak bulunur.

Örnek : $-33 < 2 \cdot (x + 1) - 3 \leq 37$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}-33 < 2(x + 1) - 3 \leq 37 &\Rightarrow -33 < 2x + 2 - 3 \leq 37 \\ &\Rightarrow -32 < 2x \leq 38 \\ &\Rightarrow -16 < x \leq 19 \text{ dur.}\end{aligned}$$

Bu durumda x tam sayılarının toplamı

$$(-15) + (-14) + \dots + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 70 \text{ olur.}$$

Örnek : $5x + y - 3 = 0$ ve $-2 < x < 3$ olduğuna göre y nin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}5x + y - 3 = 0 &\Rightarrow x = \frac{3 - y}{5} \text{ tir.} \\ -2 < x < 3 &\Rightarrow -2 < \frac{3 - y}{5} < 3 \\ &\Rightarrow -10 < 3 - y < 15 \\ &\Rightarrow -13 < -y < 12 \\ &\Rightarrow -12 < y < 13 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek : $\frac{x}{0,05} = a$ ve $1 < x < 3$ ise a nın hangi aralıkta olacağını bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}\frac{x}{0,05} = a &\Rightarrow x = 0,05 \cdot a \text{ dir.} \\ 1 < x < 3 &\Rightarrow 1 < 0,05 \cdot a < 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{0,05} < a < \frac{3}{0,05} \\ &\Rightarrow 20 < a < 60 \text{ olarak bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek : x ve y birer pozitif tam sayı olmak üzere, $x > 2$, $3x + 2y = 25$ olduğuna göre y nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}3x + 2y = 25 &\Rightarrow 3x = 25 - 2y \Rightarrow x = \frac{25 - 2y}{3} \text{ tür.} \\ x > 2 &\Rightarrow \frac{25 - 2y}{3} > 2 \Rightarrow 25 - 2y > 6 \\ &\Rightarrow 25 - 6 > 2y \\ &\Rightarrow 19 > 2y \\ &\Rightarrow \frac{19}{2} > y \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu durumda y nin alabileceği en büyük değer 9 dur.

Örnek : $3(x + 2) - 2(x - 1) > 23$ eşitsizliğini sağlamayan kaç tane doğal sayı vardır? Bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}3(x + 2) - 2(x - 1) > 23 &\Rightarrow 3x + 6 - 2x + 2 > 23 \\ &\Rightarrow x > 15 \text{ tir.}\end{aligned}$$

O hâlde bu eşitsizliği sağlamayan doğal sayılar 0, 1, 2, ... , 15 olup 16 tanedir.

Örnek : $-5 < 2x + 1 \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı ile en küçük tam sayının çarpımı kaçtır? Bulalım.

Çözüm :

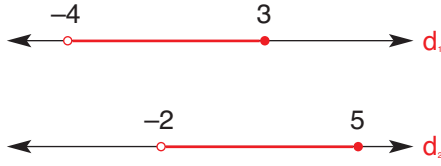
$$\begin{aligned}-5 < 2x + 1 \leq 5 &\Rightarrow -6 < 2x \leq 4 \\ &\Rightarrow -3 < x \leq 2 \text{ dir.}\end{aligned}$$

O hâlde bu eşitsizliği sağlayan en büyük tam sayı ile en küçük tam sayının çarpımı $(-2) \cdot (2) = -4$ tür.



ALİŞTIRMALAR

1. $a > 0$, $a = -2b$ ve $5b = 3c$ olduğuna göre a , b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
2. $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $-2 < x < 3$ ve $-3 < y < 4$ ise $x - 3y$ nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?
3. $x - 5 \leq 3x + 2 < x + 7$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?
4. $-5 < x \leq 3$ olduğuna göre x^2 hangi sayı aralığındadır?
- 5.



d_1 sayı doğrusunda belirtilen aralık, Ali'nin denizde ine-bileceği en dip nokta ile karada tırmanabileceği en üst noktaları (metre cinsinden); d_2 sayı doğrusu ise Fatma'nın denizde ine-bileceği en dip nokta ile karada tırmanabileceği en üst noktaları (metre cinsinden) ifade etmektedir. Kemal, Ali kadar derine dalabiliyor ve Fatma kadar yükseğe tırmanabiliyor ise Kemal'in denizde dalabileceği ve karada tırmanabileceği aralığı sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

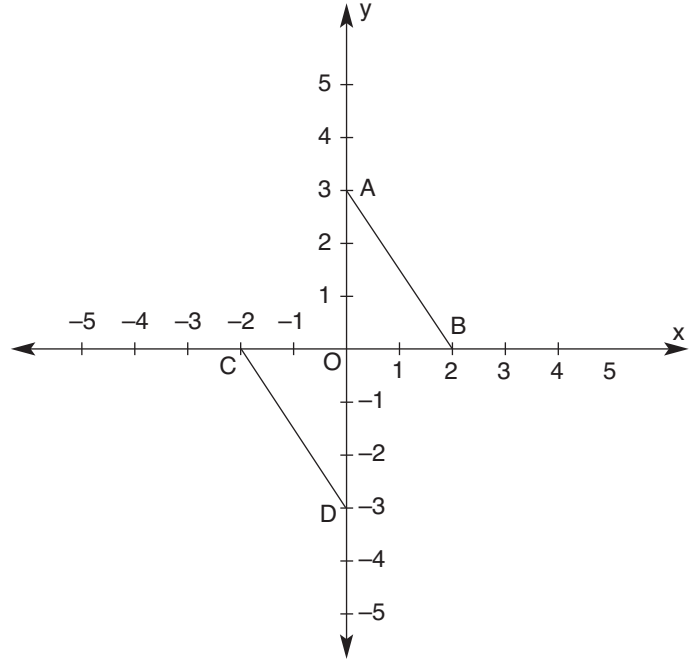
6. a , b ve c sıfırdan farklı gerçekte sayılar olmak üzere $b \cdot a^4 < 0$, $b^2 \cdot c > 0$ ve $4a = 5b$ ise a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
7. $-4 < a < 3$ ve $-2 < b \leq 6$ ise $a \cdot b$ hangi sayı aralığındadır?
8. Bir firma a TL ye aldığı bir malı b TL ye satmaktadır. a ile b arasında $a = 7b - 48$ bağıntısı vardır. Firmanın zarar etmemesi için malın maliyeti en fazla kaç lira olmalıdır?
9. a ve b gerçekte sayılar olmak üzere; $-4 < a < 5$ ve $-4 < b < 3$ olduğuna göre $a^2 + b^2$ nin alabileceği kaç tane tam sayı değeri vardır?
10. x ve y gerçekte sayılar, $-2 < x < 3$ ve $x - 2y = 3$ olduğuna göre y nin hangi aralıkta olduğunu bulunuz.
11. $x < 0$ ve $\frac{3x+2}{x} < 2$ ise x hangi aralıktadır?
12. $2 < x < 5$ ve $4 < y < 10$ olmak üzere, x ve y tam sayıları için $\frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.
13. $2(2 - x) + 3(x + 1) = x + 7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
14. $\frac{3x - a}{2} + \frac{x + a}{5} = 1$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\{2\}$ ise a kaçtır?
15. $x = \frac{3y - 1}{2y + 1}$ ifadesinde x in hangi değeri için y bulunamaz?
16. $\frac{4 - 6x}{12} - \frac{2x - 6}{6} = 6$ olduğuna göre x kaçtır?
17. $\frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{2 + \frac{1}{x}} = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

MUTLAK DEĞER

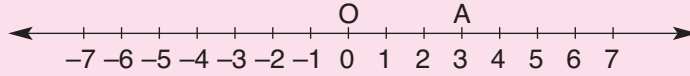


Yanda verilen koordinat düzlemindeki B ve C noktalarının başlangıç noktasına olan uzaklıkları ile ilgili ne söyleyebilirsiniz? Uzaklığı negatif olarak ifade edebilir misiniz?

✓ Koordinat düzleminde verilen \widehat{AOB} ve \widehat{DOC} dik üçgenlerdir. Bu dik üçgenlerin dik kenar uzunlukları, hipotenüse ait yükseklikleri ve alanları ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?

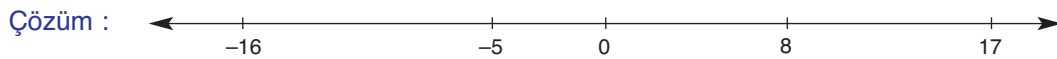


Mutlak Değer Kavramı



- ✱ Yukarıda verilen sayı doğrusundan yararlanarak -6 ile +6'nın 0 noktasına olan uzaklıklarını hesaplayınız.
- Bulduğunuz sonuçların pozitif olmasının sebebi nedir?
- ✱ A noktasına uzaklığı 5 birimden az olan noktaların oluşturduğu kümeyi eşitsizlik cinsinden ifade ediniz.
- Sayı doğrusu üzerinde A noktasına uzaklığı 5 birimden az olan noktaların oluşturduğu kümeyi mutlak değer kullanarak nasıl ifade edersiniz?

Örnek : Sayı doğrusu üzerinde -5, +8, +17 ve -16 sayılarının başlangıç noktasına olan uzaklığını bulalım.



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde görüldüğü gibi,

-16'nın başlangıç noktasına uzaklığı 16 birim, -5'in başlangıç noktasına uzaklığı 5 birim, +8'in başlangıç noktasına uzaklığı 8 birim, 17'nin başlangıç noktasına uzaklığı 17 birimdir.

$|-16| = 16$, $|+8| = 8$ olduğunu gösterdik.

$$\left. \begin{array}{l} |-16| = -(-16) = +16 \\ |+8| = +(8) = +8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Görüldüğü gibi negatif sayıların mutlak değeri bulunurken mutlak değerin içindeki sayı (-) ile, pozitif sayıların mutlak değeri bulunurken mutlak değerin içindeki sayı (+) ile çarpılır.} \end{array}$$

Yani, $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ dir.

Bir gerçek sayının, sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün başlangıç noktasına olan uzaklığına, bu gerçek sayının mutlak değeri deriz ve a gerçek sayısının mutlak değerini $|a|$ biçiminde gösterilir.

Mutlak Değerin Özellikleri



- Sayı doğrusu üzerindeki hangi sayıların 0 a uzaklığı 3 birimdir?
- ✳ $|x| = 3$ eşitliğini sağlayan x gerçek sayılarının kümesini yazınız.
- ✳ $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ için $|x| = a$ şeklindeki denklemlerin çözümü için bir genelleme yapınız.
- $|x| = -1$ eşitliğini sağlayan x gerçek sayısı bulunabilir mi? Neden?
- ✳ $x \neq 0$ ve $|x| = a$ ise a gerçek sayısının işareti için ne söylenebilir? Açıklayınız.
- Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.
- | Eşitsizlik | Mutlak Değerle İfadesi |
|--------------------|------------------------|
| $-3 \leq x \leq 3$ | $ x \leq 3$ |
| | $ x \leq 8$ |
| $-7 \leq x \leq 7$ | |
- ✳ $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \leq a$ şeklindeki eşitsizliklerin çözümü için bir genelleme yapınız.
- Başlangıç noktasına olan uzaklığı 5 birim ve 5 birimden büyük noktaların kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.
- ✳ Bu noktalara eşlenen sayıların mutlak değerleri için ne söylenebilir? Tartışınız.
- ✳ $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq a$ şeklindeki eşitsizliklerin çözümü için bir genelleme yapınız.
- Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.
- | | |
|---|---|
| $ 2.3 = 6 = 6$ | $ 2 \cdot 3 = 2.3 = 6$ |
| $ (-2) \cdot 3 = \dots\dots\dots$ | $ -2 \cdot 3 = \dots\dots\dots$ |
| $ 5 \cdot (-\sqrt{3}) = \dots\dots\dots$ | $ 5 \cdot -\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ |
- ✳ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ midir? Tartışınız.
- | | |
|---|--|
| $\left \frac{8}{2}\right = 4 = 4$ | $\left \frac{8}{2}\right = \frac{8}{2} = 4$ |
| $\left -\frac{6}{3}\right = \dots\dots\dots$ | $\frac{ -6 }{3} = \dots\dots\dots$ |
| $\left \frac{12}{8}\right = \dots\dots\dots$ | $\frac{ 12 }{ 8 } = \dots\dots\dots$ |
- Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.
- ✳ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ için $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ midir? Tartışınız.
- | | |
|---|--|
| $ 3^2 = 9 = 9$ | $ 3^2 = 3 \cdot 3 = 3.3 = 9$ |
| $ (-2)^3 = \dots\dots\dots$ | $ -2 ^3 = \dots\dots\dots$ |
| $\left \left(\frac{1}{2}\right)^5\right = \dots\dots\dots$ | $\left \frac{1}{2}\right ^5 = \dots\dots\dots$ |
- Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.
- ✳ $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x^n| = |x|^n$ midir? Tartışınız.

Örnek : $|2x + 1| = 7$ ise x in alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm :

$2x + 1 = 7$ veya $2x + 1 = -7$ dir. O hâlde, $2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$ ve $2x + 1 = -7 \Rightarrow x = -4$ olur.

Örnek : $||x - 4| - 2| = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$||x - 4| - 2| = 1 \Rightarrow |x - 4| - 2 = +1 \quad \vee \quad |x - 4| - 2 = -1$$

$$\Rightarrow |x - 4| = +3 \quad \vee \quad |x - 4| = +1$$

$$\Rightarrow x - 4 = +3 \quad \vee \quad x - 4 = -3 \quad \vee \quad x - 4 = +1 \quad \vee \quad x - 4 = -1$$

$$\Rightarrow x = 7 \quad \vee \quad x = +1 \quad \vee \quad x = 5 \quad \vee \quad x = 3 \text{ olur.}$$

O hâlde $\mathcal{C} = \{1, 3, 5, 7\}$ olur.

Örnek : $|4x - 2| \leq 10$ ise x in hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm : $|4x - 2| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq 4x - 2 \leq 10$ yazılabilir. Bu durumda,

$$-10 \leq 4x - 2 \leq 10 \Rightarrow -8 \leq 4x \leq 12 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \text{ tür.}$$

O hâlde $\mathcal{C} = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ olur.

Örnek : $|x + 3| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $|x + 3| = 8 \Rightarrow \begin{matrix} x + 3 = +8 \Rightarrow x = 5 \\ x + 3 = -8 \Rightarrow x = -11 \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{C} = \{-11, 5\}$ olur.



➤ Aşağıdaki verilen denklem ve eşitsizliğin çözümleri için gerekli boşlukları sırayla doldurunuz.

Denklem	Çözümü
$ x + 2 - 2 = 5$	$ x + 2 - 2 = \dots\dots\dots \quad \vee \quad x + 2 - 2 = \dots\dots\dots$
	$ x + 2 = \dots\dots\dots \quad \vee \quad x + 2 = \dots\dots\dots$
	$x + 2 = \dots\dots\dots \quad \vee \quad x + 2 = \dots\dots\dots$
	çözüm kümesi $\dots\dots\dots$
Eşitsizlik	Çözümü
$ x + 3 \leq 7$	$\dots\dots \leq x + 3 \leq \dots\dots\dots$
	$\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots$
	çözüm kümesi $\dots\dots\dots$

➤ Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir veya iki mutlak terim içeren denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümeleri nasıl bulunur? Tartışınız.

Örnek : $5|2x - 1| - 4 = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5|2x - 1| - 4 = 6 &\Rightarrow 5|2x - 1| = 10 \Rightarrow |2x - 1| = 2 \\ &\Rightarrow 2x - 1 = 2 \quad \vee \quad 2x - 1 = -2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. O hâlde $\mathcal{C} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ dir.

Örnek : $|2x - 1| \leq |2x + 5|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : Her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned} |2x - 1| \leq |2x + 5| &\Rightarrow |2x - 1|^2 \leq |2x + 5|^2 \\ &\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq 4x^2 + 20x + 25 \\ &\Rightarrow -24x \leq 24 \\ &\Rightarrow x \geq -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{C} = \{x | x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek : $|x - 3| + x = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} |x - 3| + x = 7 &\Rightarrow |x - 3| = 7 - x \text{ tir.} \\ \Rightarrow x - 3 < 0 &\Rightarrow -(x - 3) = 7 - x \\ &\Rightarrow -x + 3 = 7 - x \Rightarrow 3 = 7 \text{ olur.} \\ x - 3 > 0 &\Rightarrow x - 3 = 7 - x \\ &\Rightarrow x + x = 7 + 3 \Rightarrow 2x = 10 \\ &\Rightarrow x = 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$3 \neq 7$ olduğundan denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{5\}$ olur.

Örnek : $|x + 5| \leq 7$ ve $y = 3x + 1$ ise y nin alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm :

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y - 1}{3} \text{ tür. } |x + 5| \leq 7 \text{ olduğundan } x \text{ yerine } \frac{y - 1}{3} \text{ yazılırsa}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{y - 1}{3} + 5 \right| \leq 7 &\Rightarrow \left| \frac{y + 14}{3} \right| \leq 7 \Rightarrow \frac{|y + 14|}{3} \leq 7 \Rightarrow |y + 14| \leq 21 \\ &\Rightarrow -21 \leq y + 14 \leq 21 \\ &\Rightarrow -35 \leq y \leq 7 \text{ olur.} \end{aligned}$$

O hâlde $\mathcal{C} = \{y | -35 \leq y \leq 7, y \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek : $|3x - 9|$ ifadesini en küçük yapan x değerini bulalım.

Çözüm :

$|3x - 9| \geq 0$ dir. O hâlde $|3x - 9|$ ifadesinin en küçük değeri sıfırdır. Bu durumda,

$$3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ bulunur.}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

1. $|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$ dir.
2. $|x| \geq 0$ ve $-|x| \leq x \leq |x|$ tir (mutlak değerin tanımından görülebilir.).
3. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ ve $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ dir.
4. $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow a \leq x \leq b \vee -b \leq x \leq -a$ dir.
5. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ dir.
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$ ve $|x|^n = |x^n|$, $n \in \mathbb{Z}^+$ dir.

Örnek : $A = |x - 3| + |x + 7|$ ise A nın en küçük değerini bulalım.

Çözüm :

$|x - 3|$ ifadesini en küçük yapan x değeri, $x - 3 = 0$ dan $x = 3$ bulunur. $|x + 7|$ ifadesini en küçük yapan x değeri, $x + 7 = 0$ dan $x = -7$ bulunur.

$$x = 3 \Rightarrow A = |3 - 3| + |3 + 7| = 10 \text{ dur.}$$

$$x = -7 \Rightarrow A = |-7 - 3| + |-7 + 7| = 10 \text{ dur.}$$

O hâlde, A nın en küçük değeri 10 dur.

Örnek : $A = |x + y - 3| + |y - 5| = 0$ ise x ve y değerlerini bulalım.

Çözüm :

$$|x + y - 3| + |y - 5| = 0 \Rightarrow |x + y - 3| = 0 \text{ ve } |y - 5| = 0 \text{ dir.}$$

$$|x + y - 3| = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 3 ;$$

$$|y - 5| = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \text{ ve } x + 5 = 3 \text{ den}$$

$$x = -2 \text{ dir.}$$

Örnek : $3|x - 2| + 10 = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$3|x - 2| + 10 = 1 \Rightarrow 3 \cdot |x - 2| = -9 \Rightarrow |x - 2| = -3 \text{ tür.}$$

Hiçbir sayının mutlak değeri negatif olamayacağından bu denklemin çözüm kümesi \emptyset dir.

Örnek : $||x - 3| - 7| = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$||x - 3| - 7| = 3 \Rightarrow |x - 3| - 7 = 3 \text{ veya } |x - 3| - 7 = -3 \text{ tür.}$$

$$|x - 3| - 7 = 3 \Rightarrow |x - 3| = 10 \Rightarrow x - 3 = 10 \text{ veya } x - 3 = -10 \text{ dur.}$$

$$\Rightarrow x = 13 \text{ veya } x = -7 \text{ dir.}$$

$$|x - 3| - 7 = -3 \Rightarrow |x - 3| = 4 \Rightarrow x - 3 = 4 \text{ veya } x - 3 = -4 \text{ tür.}$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ veya } x = -1 \text{ dir.}$$

O hâlde bu denklemin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \{-7, -1, 7, 13\}$ tür.

Örnek : $|x - 11| = 11 - x$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$|x - 11| = 11 - x \text{ ise } x - 11 \leq 0 \text{ dir.}$$

$$x - 11 \leq 0 \Rightarrow x \leq 11 \text{ olur. Denklemin çözüm kümesi } \mathbb{C} = (-\infty, -11] \text{ aralığıdır.}$$

Örnek : $|x + 3| \leq -1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : Bir sayının mutlak değerinin sıfır ya da sıfırdan büyük bir pozitif sayı olduğunu biliyoruz. O hâlde hiçbir sayının mutlak değeri negatif bir sayıya eşit ya da negatif bir sayıdan küçük olamaz. O hâlde bu denklemin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \emptyset$ dir.

Örnek : $|x - 2| \leq 3$ ve $2x + 3y = 1$ olduğuna göre y nin en geniş çözüm aralığını bulalım.

$$\text{Çözüm : } 2x + 3y = 1 \Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1 - 3y}{2} \text{ dir.}$$

$$|x - 2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5 \text{ tir.}$$

$$x = \frac{1 - 3y}{2} \text{ olduğundan } -1 \leq \frac{1 - 3y}{2} \leq 5$$

$$\Rightarrow -2 \leq 1 - 3y \leq 10$$

$$\Rightarrow -3 \leq -3y \leq 9$$

$$\Rightarrow 1 \geq y \geq -3 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\frac{|x + 1| - 2}{|x + 2|} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarını bulalım.

Çözüm :

$$|x + 2| \geq 0 \text{ olduğundan } |x + 1| - 2 \leq 0 \text{ olmalıdır. O hâlde,}$$

$$|x + 1| - 2 \leq 0 \Rightarrow |x + 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 1 \text{ dir.}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ paydayı sıfır ve eşitsizliği de tanımsız yaptığından çözüm kümesine alınamaz.}$$

Bu durumda bu eşitsizliği sağlayan tam sayılar $\{-3, -1, 0, 1\}$ dir.

Örnek : $\left| \frac{-8}{x - 2} \right| \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\left| \frac{-8}{x - 2} \right| \geq 2 \Rightarrow \frac{8}{|x - 2|} \geq 2 \Rightarrow 8 \geq 2 \cdot |x - 2|$$

$$\Rightarrow |x - 2| \leq 4$$

$$\Rightarrow -4 \leq x - 2 \leq 4$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 6$$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ paydayı sıfır ve eşitsizliği tanımsız yaptığından çözüm kümesine alınamaz. Bu durumda bu eşitsizliği sağlayan tam sayılar kümesi ; $\{-2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}$ dir.

Örnek : $f(x) = |x - 3| + |x|$ olduğuna göre $f(-2) + f(0) + f(2)$ toplamını bulalım.

Çözüm :

$$f(-2) = |-2 - 3| + |-2| = |-5| + |-2| = 5 + 2 = 7,$$

$$f(0) = |0 - 3| + |0| = |-3| + |0| = 3 + 0 = 3,$$

$$f(2) = |2 - 3| + |2| = |-1| + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ tür.}$$

O hâlde, $f(-2) + f(0) + f(2) = 7 + 3 + 3 = 13$ bulunur.

Örnek : $a < 0 < b$ olduğuna göre, $\frac{4 \cdot |a - b|}{||a| + b|}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$a < 0$ ise $|a| = -a$ dir. Ayrıca $b - a > 0$ ise $|b - a| = b - a$ ve $a - b < 0$ olduğundan $|a - b| = -a + b$ dir. O hâlde,

$$\frac{4 \cdot |a - b|}{||a| + b|} = \frac{4 \cdot (-a + b)}{|-a + b|} = \frac{4 \cdot (b - a)}{b - a} = 4 \text{ tür.}$$

Örnek : $3|x + 4| + 1 \geq 7$ ise x in hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm :

$$3|x + 4| + 1 \geq 7 \Rightarrow 3|x + 4| \geq 6 \Rightarrow |x + 4| \geq 2 \text{ dir.}$$

$$|x + 4| \geq 2 \Rightarrow x + 4 \geq 2 \quad \vee \quad x + 4 \leq -2$$

$$\Rightarrow x \geq -2 \quad \vee \quad x \leq -6 \text{ bulunur.}$$

O hâlde $\mathcal{C} = (-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$ olur.

Örnek : $2 < |x + 2| < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$x + 2 > 0 \Rightarrow 2 < x + 2 < 5 \Rightarrow 0 < x < 3$$

$$x + 2 < 0 \Rightarrow 2 < -x - 2 < 5 \Rightarrow 4 < -x < 7 \Rightarrow -4 > x > -7 \text{ olur.}$$

$$\mathcal{C} = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 3 \vee -7 < x < -4\} \text{ olur.}$$

Örnek : $|x^2 + x| - 2|x + 1| = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}|x^2 + x| - 2|x + 1| = 0 &\Rightarrow |x(x + 1)| - 2|x + 1| = 0 \Rightarrow |x| \cdot |x + 1| - 2|x + 1| = 0 \\&\Rightarrow |x + 1| (|x| - 2) = 0 \Rightarrow |x + 1| = 0 \text{ veya } |x| - 2 = 0 \\&\Rightarrow x + 1 = 0 \text{ veya } |x| = 2 \\&\Rightarrow x = -1 \text{ veya } x = 2, x = -2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda $\mathcal{C} = \{-1, -2, 2\}$ olarak bulunur.

Örnek : $a < 0 < b < c$ olduğuna göre $|b - c| + |b - a| - |c - a| + |a - b|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm : $a < 0 < b < c$ ise $b - c < 0$, $b - a > 0$, $c - a > 0$ ve $a - b < 0$ dır.

Bu durumda

$$\begin{aligned}|b - c| &= -(b - c) = c - b, \quad |b - a| = +(b - a) = b - a, \\|c - a| &= +(c - a) = c - a, \quad |a - b| = -(a - b) = b - a, \\|b - c| + |b - a| - |c - a| + |a - b| &= c - b + b - a - (c - a) + b - a \\&= \cancel{c} - \cancel{b} + \cancel{b} - \cancel{a} - \cancel{c} + \cancel{a} + b - a \\&= b - a \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek : $|a + 1| < 2$ ise $|a - 1| + |a + 4|$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm :

$|a + 1| < 2 \Rightarrow -2 < a + 1 < +2 \Rightarrow -3 < a < 1$ olduğundan $|a - 1| + |a + 4| = 1 - a + a + 4 = 5$ olur.

Örnek : $\frac{30}{|x - 3| + |x + 2|}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm :

Kesirli ifadenin en büyük değerini alabilmesi için payda en küçük değerini almalıdır. O hâlde

$$x = -2 \Rightarrow \frac{30}{|-2 - 3| + |-2 + 2|} = \frac{30}{|-5|} = \frac{30}{5} = 6$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{30}{|3 - 3| + |3 + 2|} = \frac{30}{|5|} = \frac{30}{5} = 6 \text{ olur.}$$

Kesrin en büyük değeri 6 dır.



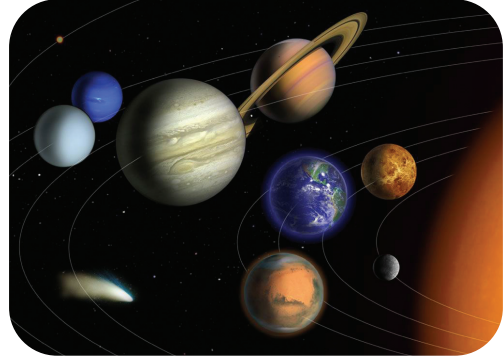
ALİŞTIRMALAR

1. $a < b < c$ ise $|a - b| - |b - c| + |c - a|$ ifadesinin eşitini bulunuz.
2. $|x + 7| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
3. $2 \cdot |x - 2| + 4 = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
4. $|x^2 + 4x| - 3|x + 4| = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
5. $|x + 3| - x = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
6. $||2x - 1| + 2| = 15$ ise x hangi aralıktadır?
7. $|3x + 1| < |3x - 4|$ eşitsizliğini çözünüz.
8. $|x - 4| < 5$ ve $2x + y = 10$ ise y nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.
9. $|3x - 4| \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılar kaç tanedir?
10. $|4x + 1| \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
11. $\left| \frac{2}{x+1} \right| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
12. $|3x - 4| + |y - 5| = 0$ ise $3x - 7y$ nin değerini bulunuz.
13. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.
a. $|-10|$ b. $|+20|$ c. $|\sqrt{3} - 1|$ ç. $|\sqrt{2} - \sqrt{7}|$
d. $|1 - \sqrt{2}|$ e. $|\pi - 10|$ f. $|x + 1|, (x \geq 0)$
14. $-a < 0 < b$ olmak üzere, $|a| + |b| + |a + b| + |2b|$ ifadesinin değerini bulunuz.
15. $|6 - |5 - x|| = 2$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamını bulunuz.
16. $A = |x + 4| - |x - 6|$ ifadesinin en küçük değerini bulunuz.
17. $\left| \frac{x}{4} - 1 \right| = \frac{1}{4}$ olduğuna göre x in alacağı değerler toplamı kaçtır?
18. $|x + 7| = x + 7$ denklemini sağlayan en küçük x tam sayı değerini bulunuz.
19. $|x - 5| = 5 - x$ ve $|x + 5| = x + 5$ olduğuna göre x in kaç farklı tam sayı değeri vardır?
20. $|x + 5| + |x - y + 3| = 0$ olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?
21. $|x^2 - 25| + |x + 5| = 0$ olduğuna göre x in çözüm kümesini bulunuz.

ÜSLÜ SAYILAR



Merkür, Güneş'e uzaklığı yaklaşık $46 \cdot 10^6$ ile $7 \cdot 10^7$ km arasında değişen oldukça eliptik bir yörünge izler. Plüton'dan sonra Güneş sisteminin gezegenleri arasında gözlenen en yüksek dış merkezlik değerine sahip bu yörüngenin, milyonlarca yıllık bir çevrim içinde zaman zaman daha da basıklaşarak dış merkezlik derecesinin günümüzdeki 0,21 den 0,5 düzeyine yükseldiği sanılmaktadır.



- ✓ Yukarıdaki metinde uzaklıkları üslü sayıları kullanmadan ifade edebilir misiniz?
- ✓ Üslü sayıları kullanmak günlük yaşamda bize ne gibi kolaylıklar sağlamaktadır?



✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri yapınız.

- Bir gerçekte sayının pozitif tam sayı ve negatif tam sayı kuvvetini nasıl hesapladığınızı açıklayınız.

$(-2)^1 = \dots\dots\dots$	$(-2)^2 = \dots\dots\dots$
$(-2)^3 = \dots\dots\dots$	$(-2)^4 = \dots\dots\dots$
$(2)^{-1} = \dots\dots\dots$	$(2)^{-2} = \dots\dots\dots$
$(2)^{-3} = \dots\dots\dots$	$(2)^{-4} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri yapınız.

- ✳ $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^m \cdot a^n$ işleminin sonucunu bulunuz.

$2^3 \cdot 2^5 = \dots\dots\dots$	$(-3)^5 \cdot (-3)^7 = \dots\dots\dots$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \dots\dots\dots$	$(-7)^2 \cdot (-7)^3 = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri yapınız.

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^m \cdot b^n$ ile $(a \cdot b)^n$ arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

$(2 \cdot 3)^2 = \dots\dots\dots$	$2^2 \cdot 3^2 = \dots\dots\dots$
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 = \dots\dots\dots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \dots\dots\dots$
$\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^4 = \dots\dots\dots$	$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri yapınız.

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a^m)^n$ ile $a^{m \cdot n}$ arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

$(3^3)^2 = \dots\dots\dots$	$3^{3 \cdot 2} = \dots\dots\dots$
$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \dots\dots\dots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 2} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri örnekteki gibi yapınız.

- $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{a^m}{a^n}$ işleminin sonucunu bulunuz.

$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2$	$\frac{3^6}{3^4} = \dots\dots\dots$
$\frac{7^{15}}{7^8} = \dots\dots\dots$	$\frac{5^8}{5^3} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen işlemleri yapınız.

- $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{a^n}{b^n}$ ile $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

$\frac{4^3}{5^3} = \dots\dots\dots$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \dots\dots\dots$
$\frac{2^4}{3^4} = \dots\dots\dots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \dots\dots\dots$

Örnek : 2^{-1} , 2 sayısının çarpmaya göre tersi olmak üzere $2^{-1} + 3^{-1}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : 2^{-1} , 2 nin çarpmaya göre tersi ise 2 ile tersinin çarpımı, çarpma işleminin etkisiz elemanı olan 1 sayısını vermelidir.

$$2 \cdot 2^{-1} = 1 \Rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ dir. O hâlde } 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$$2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

Genel olarak $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a^{-1} \cdot a = 1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$ olur.

O hâlde a^{-n} ifadesini a^{-1} yardımıyla $a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ şeklinde bulabiliriz.

Örnek : $2^{-2} + 3^{-2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$2^{-2} + 3^{-2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36} \text{ olur.}$$

Örnek : $5^2 \cdot 5^3$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $5^2 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ tir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ olur.

Örnek : $2^3 \cdot 3^3$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ tür.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için, $a^m \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ olur.

Örnek : $(3^2)^3$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ dir.

Örnek : $\frac{7^4}{7^2} \cdot \frac{7^6}{7^3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{7^4}{7^2} \cdot \frac{7^6}{7^3} = 7^4 \cdot \frac{1}{7^2} \cdot 7^6 \cdot \frac{1}{7^3} = 7^4 \cdot 7^{-2} \cdot 7^6 \cdot 7^{-3} = 7^{4-2+6-3} = 7^5 \text{ olur.}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot (a^m \cdot a^{-n}) a^{-n} = a^{m-n}$ olur. Aynı şekilde $b \neq 0$ için, $\frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m} = a^m \cdot (b^{-1})^m = (a \cdot b^{-1})^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ olur.

Örnek : $\frac{-a^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^4 \cdot a^{10}}{-a^5 \cdot (-a^3) \cdot (-a)^6}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{-a^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^4 \cdot a^{10}}{-a^5 \cdot (-a^3) \cdot (-a)^6} = \frac{(-a^2) \cdot (-a^3) \cdot a^4 \cdot a^{10}}{(-a^5) \cdot (-a^3) \cdot a^6} = \frac{a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^{10}}{a^5 \cdot a^3 \cdot a^6} = a^{2+3+4+10-5-3-6} = a^5 \text{ olur.}$$

Örnek : $\frac{(-a)^{-2} \cdot (-a)^3 \cdot a^{-2}}{a^{-4} \cdot (-a^4) \cdot (-a)^{10}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$(-a)^{-2} = \frac{1}{(-a)^2} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} ; (-a)^3 = -a^3 ; (-a^4) = -a^4 ; (-a)^{10} = a^{10}$$

$$\text{Bu durumda } \frac{a^{-2} \cdot (-a^3) \cdot a^{-2}}{a^{-4} \cdot (-a^4) \cdot a^{10}} = \frac{-a^{-1}}{-a^{10}} = -a^{-1-10} = -a^{-11} \text{ olur.}$$

Örnek : $3^x = a$, $2^{-x} = b$ ise 36^{2x} ifadesinin a ve b cinsinden değerini bulalım.

Çözüm :

$$2^{-x} = b \Rightarrow (2^{-x})^{-1} = b^{-1} \Rightarrow 2^x = b^{-1} \text{ olur.}$$

$$36^{2x} = (2^2 \cdot 3^2)^{2x} = 2^{4x} \cdot 3^{4x} = (2^x)^4 \cdot (3^x)^4 = (b^{-1})^4 \cdot a^4 = \left(\frac{1}{b}\right)^4 \cdot a^4 = \left(\frac{a^4}{b^4}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ olur.}$$

Örnek : $3^{a+1} = x$ ise 9^{a-1} ifadesinin x cinsinden değerini bulalım.

Çözüm :

$$3^{a+1} = x \Rightarrow 3^a \cdot 3 = x \Rightarrow 3^a = \frac{x}{3} \text{ dir. Bu durumda}$$

$$9^{a-1} = 9^a \cdot 9^{-1} = (3^a)^2 \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{x^2}{81} \text{ dir.}$$

Örnek : $\frac{18^{x-2}}{3^{x-2}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{18^{x-2}}{3^{x-2}} = \left(\frac{18}{3}\right)^{x-2} = 6^{x-2} \text{ dir.}$$

Örnek : $\frac{(-x^4)^8}{x^8}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{(-x^4)^8}{x^8} = \left(-\frac{x^4}{x}\right)^8 = (-x^3)^8 = x^{24} \text{ tür.}$$

Örnek : $\frac{5^x}{(0,5)^x}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\frac{5^x}{(0,5)^x} = \left(\frac{5}{0,5}\right)^x = \left(\frac{5}{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(5 \cdot \frac{2}{1}\right)^x = 10^x \text{ tir.}$$

Örnek : $\frac{5^6 \cdot x^{7-a}}{5^3 \cdot x^{1-2a}}$ ifadesinin kısaltılmış biçimini bulalım.

Çözüm :

$$\frac{5^6 \cdot x^{7-a}}{5^3 \cdot x^{1-2a}} = 5^{6-3} \cdot x^{7-a-1+2a} = 5^3 \cdot x^{6+a} = 125 \cdot x^{6+a} \text{ olur.}$$

Örnek : $(3^{-1} + 3^0)^{-2} \cdot 4^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} (3^{-1} + 3^0)^{-2} \cdot 4^2 &= \left(\frac{1}{3} + 1\right)^{-2} \cdot 4^2 \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 4^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4^2 \\ &= \frac{9}{16} \cdot 16 = 9 \text{ dur.} \end{aligned}$$

Üslü Sayıların Eşitliği



➤ Aşağıdaki tabloda verilen örneği inceleyiniz. İstenen işlemleri yaparak noktalı yerlere yazınız.

$2^5 = 2^x \Leftrightarrow x = 5$	$2^{x+1} = 2^8 \Leftrightarrow x = \dots$
$3^x = (3)^8 \Leftrightarrow x = \dots$	$7^{2x-1} = 7^{11} \Leftrightarrow x = \dots$
$(-5)^3 = (-5)^x \Leftrightarrow x = \dots$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^x \Leftrightarrow x = \dots$

* $a \in \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere her zaman $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ olur mu? Açıklayınız.

➤ Aşağıdaki tabloda verilen örnekleri inceleyiniz. Boşluklara hangi sayı veya sayılar gelebilir?

$2^6 = x^6$ ise $x = 2$ v $x = -2$	$(\dots)^4 = 5^4$
$(-5)^6 = x^6$ ise $x = 5$ v $x = -5$	$(\dots)^8 = (-7)^8$
$2^5 = x^5$ ise $x = 2$	$(\dots)^7 = 4^7$
$(-4)^7 = x^7$ ise $x = -4$	$(\dots)^5 = (-6)^5$

✱ $n \neq 0$ olmak üzere $a^n = b^n$ eşitliğinde, n nin tek veya çift olma durumlarına göre a ile b arasında nasıl bir ilişki olur? Açıklayınız.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a^{2n} = 5^{2n}$ denkleminin çözüm kümesini inceleyelim.

$2n$ sayısı çift ve negatif sayıların çift kuvvetleri pozitif olduğundan,

$$a^{2n} = 5^{2n} \Rightarrow a = 5 \text{ veya } a = -5 \text{ olur.}$$

$a \notin \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ dir.

$$n \neq 0 \text{ olmak üzere } a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} a = b, & n \text{ tek ise} \\ a = \mp b, & n \text{ çift ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek : $3^x - 3 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} = 135$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$3^x - 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 3^x \cdot 3 = 135 \Rightarrow 3^x - 3^x + 15 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow (1 - 1 + 15) \cdot 3^x = 135 \\ \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \text{ olur.}$$

O hâlde $\mathbb{C} = \{ 2 \}$ olur.

Örnek : $5^x = 64$, $4^y = 625$ ise $x \cdot y$ çarpımını bulalım.

Çözüm : Eşitlikleri taraf tarafa çarpalım.

$$5^x \cdot 4^y = 64 \cdot 625 \Rightarrow 5^x \cdot 2^{2y} = 2^6 \cdot 5^4 \Rightarrow x = 4 \text{ ve } 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \text{ olur. O hâlde, } x \cdot y = 4 \cdot 3 = 12 \text{ olur.}$$

Örnek : $32^{x+5} = (0,25)^{3x+1}$ ise x sayısını bulalım.

Çözüm :

$$32^{x+5} = (0,25)^{3x+1} \Rightarrow (2^5)^{x+5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} \Rightarrow 2^{5x+25} = (2^{-2})^{3x+1} \Rightarrow 2^{5x+25} = 2^{-6x-2} \\ \Rightarrow 5x + 25 = -6x - 2 \Rightarrow x = \frac{-27}{11} \text{ olur.}$$

Örnek : $4 \cdot 6^x + 2 \cdot 6^{x+1} - 8 \cdot 6^{x-1} = 88$ olduğuna göre x sayısını bulalım.

Çözüm :

$$4 \cdot 6 \cdot 6^{x-1} + 2 \cdot 6^{x-1} \cdot 6^2 - 8 \cdot 6^{x-1} = 88 \Rightarrow 24 \cdot 6^{x-1} + 72 \cdot 6^{x-1} - 8 \cdot 6^{x-1} = 88 \\ \Rightarrow 88 \cdot 6^{x-1} = 88 \Rightarrow 6^{x-1} = 1 \Rightarrow 6^{x-1} = 6^0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ olur.}$$

Örnek : $15^x + 15^x + 15^x + 15^x + 15^x = 3^x$ ise x in alacağı değeri bulalım.

Çözüm :

$$5 \cdot 15^x = 3^x \Rightarrow 5 \cdot (3 \cdot 5)^x = 3^x \Rightarrow 5 \cdot 3^x \cdot 5^x = 3^x \\ \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1 \text{ dir.}$$

Örnek : $(5x + 10)^{2x+2} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$5x + 10 \neq 0$ iken $2x + 2 = 0$ için $(5x + 10)^{2x+2} = 1$ dir. Buradan,

$2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ bulunur. $(5x + 10)^{2x+2} = (5 \cdot (-1) + 10)^0 = 5^0 = 1$ olduğundan $x = -1$ denklemin bir çözümüdür.

$5x + 10 = 1$ için $(5x + 10)^{2x+2} = 1$ dir. Buradan,

$$5x + 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{-9}{5} \text{ tir.}$$

$5x + 10 = -1$ iken $(2x + 2)$ çift ise $(5x + 10)^{2x+2} = 1$ dir. Buradan,

$$5x + 10 = -1 \Rightarrow x = \frac{-11}{5} \text{ bulunur. Şimdi } x = \frac{-11}{5} \text{ için } (2x + 2) \text{ nin çift olup olmadığına bakalım.}$$

$2x + 2 = 2 \cdot \left(\frac{-11}{5}\right) + 2 = \frac{-12}{5}$ olup $\frac{-12}{5}$ sayısı bir çift sayı değildir. Bu yüzden $x = \frac{-11}{5}$ denklemin çözümü değildir.

O hâlde bu denklemin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \left\{-1, -\frac{9}{5}\right\}$ tir.

Örnek : $(x^2 - 2x + 2)^{x^2+7x+12} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{c} x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x+3) = 0 \text{ veya } x+4 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ veya } x = -4 \text{ tür.} \\ \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ x & x & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

-3 ve -4 değerleri için $x^2 - 2x + 2$ sıfır olamaz. Bu yüzden bu sayılar çözüm kümesine dâhil edilir.

$$x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow \begin{array}{c} x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.} \\ \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x & x \end{array} \quad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -1 & -1 \end{array} \end{array}$$

$x^2 - 2x + 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin kökleri rasyonel değildir ve bu nedenle $x^2 + 7x + 12$ ifadesini çift sayı yapmayacağından çözüm kümesine dâhil edilemez.

O hâlde bu denklemin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \{-4, -3, 1\}$ dir.

Örnek : $\frac{1}{5^{x-y}+1} + \frac{1}{5^{y-x}+1}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5^{x-y}+1} + \frac{1}{5^{y-x}+1} &= \frac{1}{\frac{5^x}{5^y}+1} + \frac{1}{\frac{5^y}{5^x}+1} = \frac{1}{\frac{5^x+5^y}{5^y}} + \frac{1}{\frac{5^y+5^x}{5^x}} \\ &= \frac{5^y}{5^x+5^y} + \frac{5^x}{5^x+5^y} = \frac{5^x+5^y}{5^x+5^y} = 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek : $\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2x} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2x} = \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{3-2x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3} \text{ olur. Bu durumda,}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} \Rightarrow 2x-3 \leq x+2 \Rightarrow x \leq 5 \text{ bulunur.}$$

O hâlde bu eşitsizliğin çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \{x \mid x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek :

$3^{3a-4} < \left(\frac{1}{9}\right)^{a+10}$ eşitsizliğini sağlayan a nın en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 3^{3a-4} < \left(\frac{1}{9}\right)^{a+10} &\Rightarrow 3^{3a-4} < (3^{-2})^{a+10} \\ &\Rightarrow 3^{3a-4} < 3^{-2a-20} \\ &\Rightarrow 3a-4 < -2a-20 \Rightarrow 5a < -16 \\ &\Rightarrow a < -\frac{16}{5} \text{ dır.} \end{aligned}$$

O hâlde a nın alabileceği en büyük tam sayı değeri -4 olur.

Örnek :

$(0,5)^{2x+5} < 16^{x-2}$ ise x in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} (0,5)^{2x+5} < 16^{x-2} &\Rightarrow \left(\frac{5}{10}\right)^{2x+5} < 16^{x-2} \Rightarrow (2^{-1})^{2x+5} < (2^4)^{x-2} \\ &\Rightarrow 2^{-2x-5} < 2^{4x-8} \Rightarrow -2x-5 < 4x-8 \\ &\Rightarrow -6x < -3 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

O hâlde x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 1 olur.

Örnek :

$5^{n+2} - 2 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^{n+1} \leq 40$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5^{n+2} - 2 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^{n+1} &\leq 40 \Rightarrow 5^n (25 - 2 - 3 \cdot 5) \leq 40 \\ &\Rightarrow 8 \cdot 5^n \leq 40 \Rightarrow 5^n \leq 5 \\ &\Rightarrow n \leq 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde eşitsizliğin çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \{n \mid n \leq 1, n \in \mathbb{R}\}$ dir.



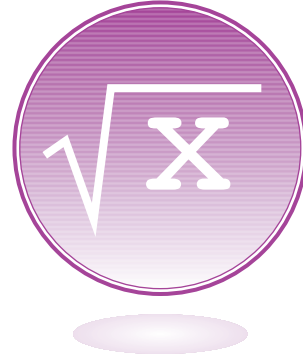
ALİŞTIRMALAR

1. $\frac{(-a)^5 \cdot a^6 \cdot a^5 \cdot (-a)^{-2}}{(a^{-5})^2 \cdot (-a^3)^2 \cdot a^{-4}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{x+2} = 44$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
3. $(x + 5)^{2x-2} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
4. $2^x = a$, $3^{-x} = b$ ise 18^{-2x} ifadesini a ve b cinsinden ifade ediniz.
5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3x} \geq 2^{2x+7}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
6. $25^x = 9$, $9^y = 3125$ ise x . y değerini bulunuz.
7. $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x+1} = 414$ ise x sayısını bulunuz.
8. $\frac{(3^4 + 3^4 + 3^4) \cdot 3^{-1}}{5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3}$ işleminin sonucu kaçtır?
9. $\frac{(0,04)^4}{(0,02)^3} \cdot \frac{2^{-7}}{4^{-8}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
10. $\frac{5^{10} + 5^{11} - 5^{12}}{5^3 + 5^4 - 5^5}$ işleminin sonucunu bulunuz.
11. $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x+1} = \left(\frac{25}{9}\right)^{4x-2}$ ise x kaçtır?
12. $\frac{3^{n-1} + 4 \cdot 3^n}{3^{n+1} + 5 \cdot 3^n}$ işleminin sonucu kaçtır?
13. 128^{10} sayısının yarısı kaçtır?
14. $\frac{8^5 + 8^7 + 8^9}{8^8 + 8^{10} + 8^{12}}$ işleminin sonucu kaçtır?
15. $(x - 2)^{x^2-9} = 1$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?
16. $(0,04)^{x-2} < 125^{3x+2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
17. $3^{|x|-1} = 81$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?
18. $x^{\frac{4}{3}} = 16$ ise x kaçtır?

KÖKLÜ SAYILAR



Karekök sembolü ($\sqrt{\quad}$) ilk olarak 16. yüzyılda kullanılmaya başlandı. Latince kök demek olan radix kelimesinin baş harfinden, yani küçük r harfinden türetildiği söylenir.



➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{x^2}$ neye eşit olur?

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$$

$$\sqrt{5^2} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \dots\dots\dots$$

➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

✱ $a \in \mathbb{R}^+$ için her zaman $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ olur mu? Tartışınız.

$$\sqrt{36} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\sqrt{64} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{7} = \dots\dots\dots$$

➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

✱ $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ midir? Açıklayınız.

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{100} \cdot \sqrt{49} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{100 \cdot 49} = \dots\dots\dots$$

➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

✱ $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ile $\sqrt{\frac{a}{b}}$ arasında bir ilişki var mıdır? Açıklayınız.

$$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{\frac{81}{9}} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{\frac{625}{25}} = \dots\dots\dots$$

➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

✱ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ midir? Açıklayınız.

$$(\sqrt{16})^2 = (4)^2 = 16$$

$$\sqrt{16^2} = 16$$

$$(\sqrt{4})^3 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4^3} = \dots\dots\dots$$

$$(\sqrt{9})^4 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{9^4} = \dots\dots\dots$$

➤ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

✱ $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ olur mu? Açıklayınız.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{75} = \dots\dots\dots$$

Örnek : “9 un karekökü 3 tür.” veya “3 ün veya -3 ün karesi 9 dur.” cümleleri aynı eşitliği ifade etmektedir. Farklı olan sadece ifade ediliş şeklidir.

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 ; 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 ; \sqrt{9} = 3$$

Yani $a > 0$ olmak üzere karesi a olacak biçimde biri negatif diğeri pozitif olan iki gerçekte sayı vardır.

Karesi $a \in \mathbb{R}^+$ e eşit olan iki sayıdan negatif olanına a nın negatif karekökü, pozitif olanına a nın pozitif karekökü denir. Negatif karekök “ $-\sqrt{a}$ ”; pozitif karekök “ \sqrt{a} ” ile gösterilir.

$$\text{Yani } (\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a \text{ dır.}$$

Örnek : $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ ve $c^2 = 81$ eşitliklerini sağlayan a , b ve c değerlerinin neler olabileceğini inceleyelim.

Çözüm :

$$a = 5 \text{ ve } a = -5 \text{ için } 5^2 = (-5)^2 = 25 \text{ tir.}$$

$$b = 4 \text{ ve } b = -4 \text{ için } 4^2 = (-4)^2 = 16 \text{ dır.}$$

$$c = 9 \text{ ve } c = -9 \text{ için } 9^2 = (-9)^2 = 81 \text{ dir.}$$

Buradan görülmektedir ki bir sayı ve bu sayının negatif işaretlisinin karesi aynı sayıya eşittir.

$$\text{Her } a \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \text{ yazılabilir. Başka bir ifadeyle } \sqrt{a^2} = |a| \text{ dır.}$$

Örnek : $\sqrt{(-7)^2}$, $\sqrt{(-5)^2} - \sqrt{(-1)^2}$, $-\sqrt{(3-x)^2}$ ifadelerinin en sade değerini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{(-7)^2} &= |-7| = 7 & , & & \sqrt{(-5)^2} &= |-5| = 5 \\ -\sqrt{(-1)^2} &= -|-1| = -1 & , & & -\sqrt{(3-x)^2} &= -|3-x| = -|x-3| \text{ tür.} \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \text{ olmak üzere } \sqrt{x} \text{ ifadesi için } \sqrt[2]{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

Örnek : $\sqrt{7^n} = 7^{12}$ ise n sayının değerini bulalım.

Çözüm :

$$\sqrt[2]{7^n} = 7^{\frac{n}{2}} = 7^{12} \Rightarrow \frac{n}{2} = 12 \Rightarrow n = 12 \cdot 2 = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\sqrt{(\sqrt{8}-4)^2} + \sqrt{(\sqrt{8}-2)^2}$ işleminin değerini hesaplayalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{8}-4)^2} + \sqrt{(\sqrt{8}-2)^2} &= |\sqrt{8}-4| + |\sqrt{8}-2| \\ &= -(\sqrt{8}-4) + (\sqrt{8}-2) = -\sqrt{8} + 4 + \sqrt{8} - 2 = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Köklü İfadelere Ait Bazı Özellikler

Örnek : Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazalım.

- a. $\sqrt{48}$ b. $\sqrt{50}$ c. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ ç. $3\sqrt{45} - 4\sqrt{20}$
d. $\sqrt{7 + \sqrt{4}}$ e. $5\sqrt{8} - 2\sqrt{45} - \sqrt{50} + 2\sqrt{48} + 3\sqrt{72} - \sqrt{75}$

Çözüm :

- a. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
b. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
c. $\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (2 + 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
ç. $3\sqrt{45} - 4\sqrt{20} = 3\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{4 \cdot 5} = 3 \cdot 3\sqrt{5} - 4 \cdot 2\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = \sqrt{5}$
d. $\sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{7 + \sqrt{2^2}} = \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = 3$
e. $5\sqrt{8} - 2\sqrt{45} - \sqrt{50} + 2\sqrt{48} + 3\sqrt{72} - \sqrt{75}$
 $= 5\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 2} + 2\sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 3}$
 $= 5\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$
 $= 5 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{3} + 3 \cdot 6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$
 $= 10\sqrt{2} - 6\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 18\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$
 $= 23\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

$c, d \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aşağıdaki temel özellikler geçerlidir.

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$
4. $c\sqrt{a} + c\sqrt{b} = c(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
5. $c\sqrt{a} + d\sqrt{a} = (c + d)\sqrt{a}$
6. $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$

Örnek : $\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $\frac{4}{3 - \sqrt{2}}$ ifadelerini sırasıyla $\sqrt{7}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ve $3 + \sqrt{2}$ ifadeleri ile genişletelim.

Çözüm :

$$\frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$
$$\frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{5^2 - \sqrt{3^2}}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$
$$\frac{5 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3^2 - \sqrt{2^2}}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$
$$\frac{4 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{3^2 - \sqrt{2^2}} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{7}$$

$a > 0, b > 0$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\frac{k}{\sqrt{a}}$ ifadesinde paydanın rasyonel olması için sayı \sqrt{a} ile genişletilir.

$\frac{k}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ ifadesinde paydanın rasyonel olması için sayı $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ ile genişletilir ($b > a$).

$\frac{k}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ ifadesinde paydanın rasyonel olması için sayı $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ ile genişletilir ($b > a$).

Paydanın rasyonel olması işlemlerde kolaylık sağlar.

Örnek : $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ işleminin sonucunu en sade biçimde yazalım.

Çözüm : $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ olsun. Öyleyse,

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2 \\ &= (\sqrt{3 + \sqrt{5}})^2 - 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} + (\sqrt{3 - \sqrt{5}})^2 \\ &= 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5} \\ &= 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} \\ &= 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Buna göre $x^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |x| = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ veya $x = -\sqrt{2}$ dir. Fakat x ifadesi birincisi büyük olan pozitif iki sayının farkı olduğundan $x = +\sqrt{2}$ olur. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$ dir.

Örnek : $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6} + 2}$ işleminin sonucunu en sade şekilde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)} - \frac{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2) \cdot (\sqrt{6} - 2)} &= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6} - 2)}{6 - 4} \\ &= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5} + 1)}{4} - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6} - 2)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5} + 1) - \sqrt{5}(\sqrt{6} - 2)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{30} + \sqrt{6} - \sqrt{30} + 2\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{5}}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek : $(\sqrt{5} - 6)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6)^{100}$ işleminin sonucunu en sade şekilde bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} - 6)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6)^{100} &= (\sqrt{5} - 6)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6) \\ &= [(\sqrt{5} - 6) \cdot (\sqrt{5} + 6)]^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6) \\ &= [(-1)(6 - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} + 6)]^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6) \\ &= (-1)^{99} \cdot (6^2 - \sqrt{5}^2)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6) \\ &= -(36 - 5)^{99} \cdot (\sqrt{5} + 6) \\ &= -31^{99} (\sqrt{5} + 6) \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\frac{3}{\sqrt{2}-1} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} - \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} &= \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^2-1^2} - \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2-1^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}+3}{1} = \frac{6}{1} = 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ifadesini $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ biçiminde yazalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{2+2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}+3} = \sqrt{\sqrt{2}^2+2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}+\sqrt{3}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{3}| = \sqrt{2}+\sqrt{3} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ifadesini $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ biçiminde yazalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{8-2\sqrt{15}} &= \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}+5} = \sqrt{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}+\sqrt{5}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-\sqrt{3} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k \mp 2\sqrt{m}} \text{ ifadesinde } m \text{ sayısının iki çarpanı } a \text{ ve } b \text{ için } k = a + b \text{ olmak üzere,} \\ \sqrt{k \mp 2\sqrt{m}} = \sqrt{a} \mp \sqrt{b} \text{ dir (} a > b \text{).} \end{aligned}$$

Örnek : Aşağıdaki ifadeleri $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ biçiminde yazalım.

a. $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ b. $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ c. $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$ ç. $\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}$ d. $\sqrt{7+\sqrt{13}}$

Çözüm :

a. $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7} + \sqrt{3},$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 7+3 & 7 \cdot 3 \end{array}$

b. $\sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{7} - \sqrt{1} = \sqrt{7} - 1,$
 $\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 7+1 & 7 \cdot 1 \end{array}$

c. $\sqrt{9-6\sqrt{2}} = \sqrt{9-2 \cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{9-2\sqrt{18}} = \sqrt{6} - \sqrt{3},$

ç. $\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{7+\sqrt{4 \cdot 6}} - \sqrt{7-\sqrt{4 \cdot 6}} = \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$
 $= \sqrt{7} + 1 - (\sqrt{7} - 1)$
 $= \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} + 1 = 2,$

d. $\sqrt{7+\sqrt{13}} = \sqrt{7+\sqrt{\frac{4}{4} \cdot 13}} = \sqrt{7+2\sqrt{\frac{13}{4}}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ olur.}$
 $\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \frac{13}{2} + \frac{1}{2} & \frac{13 \cdot 1}{2 \cdot 2} \end{array}$

Bir Gerçek Sayının n. Kuvvetten Kökü



❄ Yandaki tabloyu doldurunuz.

- Her zaman bir gerçek sayının pozitif tam kuvvetten kökünü, üslü biçimde yazabilir misiniz?
- Yandaki tablodan yola çıkarak üslü sayılarla köklü sayılar arasında bir bağlantı bulabilir misiniz?

Köklü Biçim	Üslü Biçim	Değeri
$\sqrt{9}$	$9^{1/2}$	3
		9
	$(121)^{1/2}$	
$\sqrt{225}$		
$\sqrt[3]{(-27)}$	$(-27)^{1/3}$	-3
$\sqrt[3]{729}$		
	$(8)^{2/3}$	
$\sqrt[4]{(25)^2}$	$(25)^{2/4}$	5
	$\sqrt[5]{(32)^2}$	

Örnek : $x^2 = 4$ denkleminin çözümü üzerinde bir gerçek sayının n. kuvvetten kökünü inceleyelim.

Çözüm : $x^2 = 4$ denkleminin kökleri $x = \pm \sqrt{4}$ tür.

$x^3 = a$, $x^4 = b$, $x^5 = c$, ... gibi denklemleri de $x^2 = 4$ denklemini çözdüğümüz gibi çözebiliriz. Bu durumda karşımıza pozitif kuvvetten farklı kökler de çıkacaktır. Örneğin,

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2, \quad x^4 = 81 \Rightarrow x = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3, \quad x^5 = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \text{ dir.}$$

Yukarıdaki işlemler yardımıyla $x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ olduğu görülebilir.

Ayrıca, $\sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ olduğundan $\sqrt[n]{x^1} = x^{\frac{1}{n}}$ dir.

Buradan da $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow (\sqrt[n]{x})^m = (x^{\frac{1}{n}})^m \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ elde edilir.

Yukarıdaki işlemi sözel ifade edecek olursak “köklü bir sayıyı üslü sayı olarak ifade ederken sayının üssünün kökün derecesine bölümü sayıya üs olarak yazılır.” diyebiliriz.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ ve } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ olur. } \sqrt[n]{a} \text{ ya da } a^{\frac{1}{n}} \text{ ifadesine a sayısının n. kuvvetten kökü denir.}$$

Örnek : $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{3125}$ ve $\sqrt[3]{512}$ sayılarının eşitlerini bulalım.

Çözüm :

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3 ; \quad \sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{5^5} = 5^{\frac{5}{5}} = 5^1 = 5 ; \quad \sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8 \text{ olur.}$$

n. Kuvvetten Kökle İlgili Bazı Özellikler



✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek boş bırakılan yerleri doldurunuz.

➤ $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^n}$, $\sqrt[n]{a}$ ve $\sqrt[n]{a^m}$ için bir kural belirleyebilir misiniz? Tartışınız.

Köklü Biçim	Üslü Biçim	Değeri
$\sqrt[3]{8}$	$8^{1/3}$	2
$\sqrt[5]{-32}$		
	$(128)^{1/7}$	

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek boş bırakılan yerleri doldurunuz.

➤ $a \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[n]{a^{m \cdot r}}$ için bir kural belirleyebilir misiniz? Tartışınız.

Köklü Biçim	Üslü Biçim	Değeri
$2.5\sqrt[3]{32^{2.3}}$	32	8
$3.4\sqrt[4]{81^{3.2}}$		
	$625^{\frac{2.3}{3.4}}$	

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $a \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[r]{b}$ ile $\sqrt[n]{a \cdot b}$ her zaman birbirine eşit olur mu? Açıklayınız.

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$
$\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = \dots\dots\dots$	$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ile $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ her zaman birbirine eşit olur mu? Açıklayınız.

$\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = \frac{3}{2}$
$\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{81}} = \dots\dots\dots$	$\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $(\sqrt[n]{a})^m$ ile $\sqrt[n]{a^m}$ her zaman birbirine eşit olur mu? Açıklayınız.

$(\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
$(\sqrt[4]{3})^4 = \dots\dots\dots$	$\sqrt[4]{3^4} = \dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[n]{a^n \cdot b}$ ile $a\sqrt[n]{b}$ ifadeleri her zaman birbirine eşit olur mu? Açıklayınız.

$\sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$
$\sqrt[4]{16 \cdot 3} = \dots\dots\dots$	$\sqrt[4]{16 \cdot 3} = \dots\dots\dots$

✳ Yandaki tabloda verilen örneği inceleyerek noktalı yerleri doldurunuz.

➤ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ ile $\sqrt[m \cdot n]{a}$ ifadeleri her zaman birbirine eşit olur mu? Açıklayınız.

$\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{16} = 2$	$\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4 \cdot 2]{2^8} = 2$
$\sqrt[4]{\sqrt{6561}} = \dots\dots\dots$	$\sqrt[4]{\sqrt{6561}} = \sqrt[4 \cdot 2]{6561} = \dots\dots$

Örnek : $\sqrt[4]{(-2)^8}$ ve $\sqrt[4]{2^8}$ ifadelerinin eşitini bulalım.

Çözüm : $\sqrt[4]{(-2)^8} = |-2|^2 = 4$; $\sqrt[4]{2^8} = (2)^2 = 4$ olarak bulunur.

$x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{(-x)^n} = |-x|^{\frac{n}{n}} = x$ olur.

n tek ise $(-x)^n \neq x^n$ olduğundan $\sqrt[n]{(x)^n} = x^{\frac{n}{n}} = x$ olur.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & , n \text{ çift ise} \\ x & , n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek : Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{12^4}$

b. $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} + \sqrt[3]{\frac{5}{8}} + \sqrt[3]{\frac{5}{125}}$

c. $(\sqrt[3]{108})^4$

ç. $\sqrt[2]{3^5 \sqrt[2]{1024}}$

d. $\sqrt[2]{3^4 \sqrt[4]{2^{48}}} \cdot \sqrt[6]{2^{15} \sqrt[4]{2^{12}}}$

Çözüm :

a. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{12^4} = \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{12^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{12^{1 \cdot 2}} \cdot \sqrt[6]{12^4} = \sqrt[6]{12^2 \cdot 12^4} = \sqrt[6]{12^6} = 12$,

b. $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} + \sqrt[3]{\frac{5}{8}} + \sqrt[3]{\frac{5}{125}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} + \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \sqrt[3]{5} = \frac{31}{30} \cdot \sqrt[3]{5}$$

c. $(\sqrt[3]{108})^4 = \sqrt[3]{(3^3 \cdot 2^2)^4} = \sqrt[3]{3^{12} 2^8} = 3^4 \sqrt[3]{2^6 2^2} = 3^4 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 81 \cdot 4 \sqrt[3]{4} = 324 \sqrt[3]{4}$,

ç. $\sqrt[2]{3^5 \sqrt[2]{1024}} = \sqrt[2]{3^{10} \sqrt[2]{1024}} = \sqrt[2]{3^{10} 2^{10}} = \sqrt[2]{6^{10}} = \sqrt[2]{6^5} = \sqrt[2]{6^5}$,

d. $\sqrt[2]{3^4 \sqrt[4]{2^{48}}} \cdot \sqrt[6]{2^{15} \sqrt[4]{2^{12}}} = \sqrt[2]{2^{24}} \cdot \sqrt[6]{2^{60} \cdot 2^{12}} = \sqrt[2]{2^{48}} \sqrt[6]{2^{72}}$

$$= \sqrt[2]{2^{48}} \cdot \sqrt[6]{2^{72}}$$

$$= \sqrt[2]{2^{120}} = 2^5 = 32 \text{ olur.}$$

$x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$ için,

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{n}{n}}} = \sqrt[n]{(a^{\frac{1}{n}})^n} = a^{\frac{1}{n}}$ ve $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{m \cdot \frac{n}{n}}} = \sqrt[n]{(a^{\frac{m}{n}})^n} = a^{\frac{m}{n}}$ dir.

2. $\sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}} = a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dir.

3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$ dir.

4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ dir.

5. $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dir.

6. $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a^{\frac{n}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = a \sqrt[n]{b}$ dir.

7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$ dir.

Örnek : $\frac{\sqrt[2]{3^4 \cdot 9 \sqrt{2}}}{\sqrt[8]{9 \cdot 81}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\frac{\sqrt[2]{3^4 \cdot 9 \sqrt{2}}}{\sqrt[8]{9 \cdot 81}} = \frac{\sqrt[2]{3^4 \cdot 3^2 \cdot 9 \sqrt{2}}}{\sqrt[8]{3^2 \cdot 3^4}} = \frac{\sqrt[2]{3^4 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt[8]{3^6}} = \sqrt[8]{\frac{3^6 \sqrt{2}}{3^6}} = \sqrt[8]{2} \text{ dir.}$

Örnek : $\sqrt[4]{\frac{30^{12} - 15^{12}}{10^{12} - 5^{12}}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\sqrt[4]{\frac{30^{12} - 15^{12}}{10^{12} - 5^{12}}} = \sqrt[4]{\frac{(2 \cdot 15)^{12} - 15^{12}}{(2 \cdot 5)^{12} - 5^{12}}} = \sqrt[4]{\frac{15^{12}(2^{12} - 1)}{5^{12}(2^{12} - 1)}} = \sqrt[4]{\frac{3^{12} 5^{12}}{5^{12}}} = 3^3 = 27 \text{ dir.}$

Örnek : $\sqrt[2]{8}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{32}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[2]{8} &= \sqrt[6 \cdot 2]{8^6} = \sqrt[12]{8^6} = \sqrt[12]{(2^3)^6} = \sqrt[12]{2^{18}} \\ \sqrt[3]{8} &= \sqrt[4 \cdot 3]{8^4} = \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{(2^3)^4} = \sqrt[12]{2^{12}} \\ \sqrt[4]{32} &= \sqrt[3 \cdot 4]{32^3} = \sqrt[12]{32^3} = \sqrt[12]{(2^5)^3} = \sqrt[12]{2^{15}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[2]{8} > \sqrt[4]{32} > \sqrt[3]{8} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $3^{-1/4}$, $4^{-1/3}$, $12^{-1/2}$ sayılarını sıralayalım.

Çözüm :

$$3^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^3}} , \quad 4^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[12]{4^4}} , \quad 12^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{12^6}}$$

$\sqrt[12]{12^6} > \sqrt[12]{4^4} > \sqrt[12]{3^3}$ olduğundan $\frac{1}{\sqrt[12]{3^3}} > \frac{1}{\sqrt[12]{4^4}} > \frac{1}{\sqrt[12]{12^6}}$ dır. O hâlde, $3^{-1/4} > 4^{-1/3} > 12^{-1/2}$ olur.

Örnek : $\sqrt[6]{3^4} + 2\sqrt[3]{9}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\sqrt[6]{3^4} + 2\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2} + 2\sqrt[3]{3^2} = (1 + 2) \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9} \text{ olur.}$

Örnek : $x < 0$ ise $\sqrt[6]{x^6} + \sqrt[7]{x^7} + \sqrt[8]{x^8}$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm : $\sqrt[6]{x^6} = |x| = -x$, $\sqrt[7]{x^7} = x$, $\sqrt[8]{x^8} = |x| = -x$ olur.

Buradan $\sqrt[6]{x^6} + \sqrt[7]{x^7} + \sqrt[8]{x^8} = -x + x + (-x) = -x$ bulunur.

Örnek : $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[5]{5^5} - \sqrt[3]{(-6)^6}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[5]{5^5} - \sqrt[3]{(-6)^6} = |-3| + 5 - 6^2 = 3 + 5 - 36 = -28 \text{ dir.}$

Örnek : $\sqrt[24]{2^{12}} \cdot \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^6}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\sqrt[24]{2^{12}} \cdot \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^6} = 2^{\frac{12}{24}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{6}{7}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{6}{7}} = 2^{\frac{35 + 42 + 60}{70}} = 2^{\frac{137}{70}} \text{ olur.}$

Örnek : Aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazalım.

$$\text{a. } \sqrt[4]{16\sqrt{2}} \quad \text{b. } \left(81^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{c. } \left((64)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{8}} \quad \text{ç. } \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{256}}}$$

Çözüm :

$$\text{a. } \sqrt[4]{16 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{16^2} \cdot 2} = \sqrt[8]{(2^4)^2 \cdot 2} = \sqrt[8]{2^9} = 2\sqrt[8]{2} \text{ dir.} \quad \text{b. } \left(81^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \text{ tür.}$$

$$\text{c. } \left((64)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{8}} = (2^6)^{\frac{1}{16}} = 2^{\frac{6}{16}} = 2^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{2^3} \text{ tür.} \quad \text{ç. } \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{256}}} = \sqrt[12]{256} = \sqrt[12]{2^8} = 2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \text{ tür.}$$

Örnek : $\frac{9}{5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm : $\frac{9}{5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{3}} = \frac{3^2}{5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3}} = \frac{3^2}{19\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{19} \cdot 3^{2-\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{5}{3}}}{19} = \frac{\sqrt[3]{3^5}}{19}$ dur.

Örnek : $\sqrt{x+5} = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $\sqrt{x+5} = 4 \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2 = 4^2 \Rightarrow x+5 = 16 \Rightarrow x = 11$ olur.

Örnek : $\sqrt{-x-1} = \frac{x}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}\sqrt{-x-1} = \frac{x}{2} &\Rightarrow (\sqrt{-x-1})^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow -x-1 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow -4x-4 = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (x+2) \cdot (x+2) = 0 \\ &\Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

O hâlde $\mathcal{C} = \{-2\}$ dir.

Örnek : $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm : Sonsuza giden bölümlere x diyelim.

$$\sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_x} = x \Rightarrow \sqrt{2+x} = x \Rightarrow (\sqrt{2+x})^2 = x^2 \Rightarrow 2+x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ve } x = -1 \text{ bulunur.}$$

Kareköklü bir ifade negatif olamaz. O hâlde, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$ olur.

Örnek : Aşağıdaki ifadeleri hesaplayalım.

a. $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \dots}}}$

b. $\sqrt{3 : \sqrt{3 : \sqrt{3 : \dots}}}$

c. $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$

Çözüm :

a. $\sqrt{2 \cdot \underbrace{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \dots}}}_x} = x \Rightarrow \sqrt{2 \cdot x} = x \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 2$ olur.

b. $\sqrt{3 : \underbrace{\sqrt{3 : \sqrt{3 : \dots}}}_x} = x \Rightarrow \sqrt{3 : x} = x \Rightarrow \frac{3}{x} = x^2 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ olur.

c. $\sqrt{6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}_x} = x \Rightarrow \sqrt{6+x} = x \Rightarrow 6+x = x^2 \Rightarrow \underbrace{x^2}_{\frac{x^2}{x}} - x - \underbrace{6}_{-\frac{3}{2}} = 0$
 $\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -2 \text{ bulunur.}$

Sonuç negatif olamayacağından ifade $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} = 3$ olur.

Örnek : $\sqrt[4]{0,0016} + \sqrt{0,16} - \sqrt[3]{0,001}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16 \cdot 10^{-4}} + \sqrt{16 \cdot 10^{-2}} - \sqrt[3]{10^{-3}} &= 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-1} - 10^{-1} \\ &= 0,2 + 0,4 - 0,1 = 0,5 = \frac{1}{2} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek : $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{\sqrt[3]{27a^9b^3c} \cdot \sqrt{a^7b^8}}{\sqrt[3]{c^9} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{27a^9b^3c} \cdot \sqrt{a^7b^8}}{\sqrt[3]{c^9} \cdot b^{-\frac{1}{2}}} &= \frac{3^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{9}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{7}{2}} \cdot b^{\frac{8}{2}}}{c^{\frac{9}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{3 \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}}{c^3 \cdot b^{-\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{3 \cdot a^6 \cdot b^5 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}}{c^3} = \frac{3 \cdot a^6 \cdot b^5}{c^3} \cdot \sqrt[6]{a^3 \cdot c^2 \cdot b} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek : $b \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\frac{\sqrt{32a^4b^2} \cdot \sqrt[3]{8b^3a^6}}{\sqrt[5]{4^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot a^{20} \cdot b^{20}}}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm :

$$\frac{\sqrt{32a^4b^2} \cdot \sqrt[3]{8b^3a^6}}{\sqrt[5]{4^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot a^{20} \cdot b^{20}}} = \frac{4\sqrt{2}a^2b \cdot 2 \cdot b \cdot a^2}{4 \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot a^4 \cdot b^4} = \frac{2\sqrt{2}}{2^{\frac{5}{2}} \cdot b^2} = \frac{2}{b^2} \text{ dir.}$$



ALİŞTIRMALAR

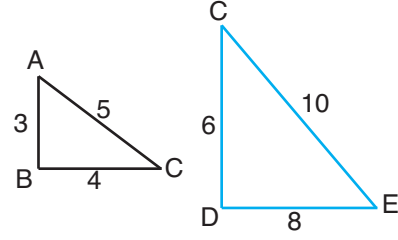
- $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{(-6)^2}$ toplamının değerini bulunuz.
- $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$ işleminin en sade değerini bulunuz.
- $4\sqrt{8} - 3\sqrt{45} - \sqrt{50} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{72} - \sqrt{75}$ işleminin en sade değerini bulunuz.
- $\frac{5}{\sqrt{2}-1} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$ işleminin sonucu kaçtır?
- $\sqrt{16+2\sqrt{15}} - \sqrt{18-6\sqrt{45}}$ işleminin en sade değerini bulunuz.
- Aşağıdaki köklü ifadeleri üslü biçimde yazınız.
 - $\sqrt{5}$
 - $\sqrt[3]{4^5}$
 - $\sqrt[3]{x}$
 - $\sqrt[4]{(x+y)^2}$
 - $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$
- $\sqrt[7]{(-7)^7} - \sqrt[4]{(-5)^4}$ işleminin en sade şeklini bulunuz.
- $\frac{21}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{12}}{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$ işleminin en sade değerini bulunuz.
- $\frac{\sqrt{a^3\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}} = 5$ ise a değerini bulunuz.
- $\sqrt[5]{\frac{6^{10} - 4^{10}}{18^{10} - 12^{10}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$ ve $\sqrt[6]{12}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
- $3^{-\frac{1}{2}}$, $4^{-\frac{1}{3}}$ ve $6^{-\frac{1}{4}}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.
- $\sqrt{3x-2} = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- $\sqrt{(2x-6)^2} = 6-2x$ eşitliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamını bulunuz.
- $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ ve $c = \sqrt{5}$ olmak üzere $\sqrt{10800}$ sayısının a, b ve c cinsinden değerini bulunuz.
- $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}} + \sqrt{8 \cdot 8\sqrt{8} \cdot \dots}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ORAN VE ORANTI



Yandaki iki üçgeni, kenar uzunlukları açısından inceleyiniz.

- ✓ Üçgenlerin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
- ✓ Bu ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz.



Yandaki tablo bir makinanın dakikada bastığı kitap sayısını göstermektedir.

- * Tablodaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.
- * Her satırı $\frac{\text{süre}}{\text{kitap sayısı}}$ şeklinde ifade ediniz.
- Bulduğunuz sonuçları karşılaştırırsanız nasıl bir genelleme yapabilirsiniz? Açıklayınız.

Süre (dk)	Kitap sayısı
1	4
2	...
3	12
4	...
5	...

Örnek : a. 8 parçaya ayrılmış bir pastanın 3 parçasını,
 b. 3 bölü 4 ü yenmiş bir ekmeğin 2 katını,
 c. 7 parçadan oluşan bir buz kütlesinin eriyen 3 parçasını,
 ç. 15 hektar ormanın yanan 4 hektarı ile 30 mil denizin kirlenen 8 milinin eşitliğini, kesir ile ifade edelim.

Çözüm : a. $\frac{3}{8}$ b. $2 \cdot \frac{3}{4}$ c. $\frac{3}{7}$ ç. $\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$

İki çokluğun birbirine bölümü bu iki çokluğun birbirine oranıdır.

O hâlde $\frac{a}{b}$ ifadesi a'nın b'ye oranıdır.

$\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ gibi iki oran birbirine eşit ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ veya $a:b = c:d$ dir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısında k orantı sabitidir. ($k > 0$)

Örnek : 45 hektarlık bir ormandaki sedir ağaçlarının bulunduğu alanın bütün ormanın yüz ölçümüne oranı, 9 hektarlık başka bir ormandaki 7 hektarlık meşe ağaçlarının bulunduğu alana oranına eşit ise sedir ağaçlarının bulunduğu alanı hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{s}{45} = \frac{7}{9} \Rightarrow s \cdot 9 = 7 \cdot 45 \Rightarrow s = \frac{7 \cdot 45}{9} = 35$ hektardır.

Örnek : $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$ ve $x + 3y - z = 40$ olduğuna göre x, y ve z değerlerini bulalım.

Çözüm : Verilen orantının orantı sabiti k olsun. O hâlde,

$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} = k \Rightarrow x = 3k, y = 5k, z = 2k$ dir. Bu değerler $x + 3y - z = 40$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$x + 3y - z = 40 \Rightarrow 3k + 3 \cdot 5k - 2k = 40 \Rightarrow 16k = 40 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$ olarak bulunur. O hâlde,

$x = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$, $y = 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$ ve $z = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ bulunur.

Orantının Bazı Özellikleri

1. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k$ orantısında $\frac{a \cdot x + b \cdot z}{a \cdot y + b \cdot t} = k$ dir.
2. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k$ ise $\frac{x \cdot z}{y \cdot t} = k^2$ dir.
3. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k$ ise $\frac{x^n}{y^n} = \frac{z^n}{t^n} = k^n$ veya $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{t}} = \sqrt[n]{k}$ dir.

Orantı Çeşitleri

1. Doğru Orantılı Çokluklar



✱ Duru, bir kalemin tanesini 1,5 TL den alıyor. Aşağıdaki tabloda a alınan kalem sayısını, b ise alınan kalemlere ödenen parayı göstermektedir. Buna göre tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a	1	2	3	4	5	6	7
b	1,5						

- a değerleri artıktıkça b değerlerinde nasıl bir değişiklik olmuştur?
- ✱ Tablodaki her bir sütun için $\frac{a}{b}$ oranını yazınız. Yazdığınız oranları karşılaştırınız.
- Bu orandan yararlanarak 27 kalem için kaç TL ödeyeceğinizi bulabilir misiniz?

Örnek : a ile b doğru orantılıdır. a = 3 iken b = 12 ise a = 4 iken b nin kaç olacağını bulalım.

Çözüm : $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere a ile b doğru orantılı olduğundan

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow \frac{3}{12} = k \Rightarrow k = \frac{1}{4} \text{ tür. O hâlde } \frac{4}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 4 \cdot 4 = 16 \text{ olarak bulunur.}$$

Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de artıyor veya biri azalırken diğeri de azalıyor ise bu çokluklar doğru orantılıdır.

a ile b doğru orantılı ise $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{a}{b} = k$ veya $a = k \cdot b$ dir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında $\frac{a}{b}$ ile $\frac{c}{d}$ doğru orantılı ise $a \cdot d = b \cdot c$ dir.

Örnek : 2 usta bir günde 48 m² duvar boyarsa aynı nitelikte 5 ustanın bir günde kaç m² duvar boyacağını bulalım.

Çözüm : Usta sayısı arttığında yapılan iş de artacağından bu iki oran doğru orantıdır. O hâlde,

$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ usta} & \searrow & 48 \text{ m}^2 \\ 5 \text{ usta} & \nearrow & x \text{ m}^2 \\ \hline 2 \cdot x & = & 48 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{48 \cdot 5}{2} = 120 \text{ m}^2 \text{ duvar boyar.} \end{array}$$

Örnek : 48 fındık üç çocuğa; 3, 4 ve 5 sayıları ile doğru orantılı olarak paylaştırılıyor. En fazla fındık alan çocuk kaç fındık alır? Bulalım.

Çözüm : Çocukların aldığı fındık sayıları a, b ve c olsun. O hâlde $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ dir. Buradan a = 3k, b = 4k ve c = 5k olur.

$$3k + 4k + 5k = 12k = 48 \Rightarrow k = 4 \text{ tür. En fazla fındık alan çocuk, } c = 5 \cdot k = 5 \cdot 4 = 20 \text{ fındık alır.}$$

2. Ters Orantılı Çokluklar



✱ Antalya'dan hareket eden bir araç saatte 110 km hızla 6 saatte Ankara'ya varıyor. Aşağıdaki tabloda a bu aracın hızını, b ise yolu ne kadar sürede gittiğini göstermektedir. Bu araç aynı yolu saatte 60, 55 ve 30 km hızla gidecek olursa Ankara'ya varış süresi her bir hız için sırasıyla ne olur. Bulduğunuz sonuçları tablodaki ilgili yerlere yazınız.

a (km)	110	60	55	30
b (saat)	6			

✱ a değerleri azaldıkça b değerlerinde nasıl bir değişiklik olmuştur?

- Tablodaki her bir sütun için $a \cdot b$ değerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız?
- Bu çarpımdan yararlanarak aracın saatte 150 km hızla kaç saatte Ankara'ya varacağını hesaplayabilir misiniz?

Örnek : x ile y ters orantılıdır. x = 6 iken y = 3 ise x = 9 iken y nin kaç olacağını bulalım.

Çözüm : $k = x \cdot y \Rightarrow k = 6 \cdot 3 = 18$ orantı sabittir. O hâlde $18 = 9 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{9} = 2$ olarak bulunur.

Orantılı iki çokluğun biri artarken diğeri azalıyorsa bu çokluklar ters orantıdır.
a ile b ters orantılı ise $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k = a \cdot b$ dir.

Örnek : Şekildeki gibi birbirini çeviren iki makine dişlisinden birincisi dakikada 360 devir, ikincisi dakikada 240 devir yapmaktadır. Bu iki dişlideki toplam diş sayısı 540 ise büyük dişlideki diş sayısı kaçtır?



Çözüm : Dişli sayısı arttıkça devir sayısı azalacağından dişli sayısı ile devir sayısı arasında ters orantı vardır. Büyük dişlideki diş sayısı a, küçük dişlideki diş sayısı b olmak üzere $a + b = 540$ tır.

$$\begin{array}{l} a \longleftrightarrow 240 \\ b \longleftrightarrow 360 \\ \hline a \cdot 240 = b \cdot 360 \Rightarrow 2 \cdot a = 3 \cdot b \Rightarrow a = 3k \text{ ve } b = 2k \text{ dir. O hâlde,} \end{array}$$

$$a + b = 540 \Rightarrow 2k + 3k = 540 \Rightarrow 5k = 540 \Rightarrow k = 108 \text{ dir.}$$

Büyük dişlideki diş sayısı : $a = 3 \cdot k = 3 \cdot 108 = 324$ olarak bulunur.

Örnek : a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 4 ve 5 ile ters orantılı ise a, b ve c sayılarının hangi tam sayılarla doğru orantılı olacağını bulalım.

Çözüm : a, b ve c sayıları 3, 4 ve 5 ile ters orantılı ise $3a = 4b = 5c$ dir.

Bu eşitliğin her bir terimini OKEK (3, 4, 5) = 60 sayısına bölelim.

$$\text{Bu durumda } \frac{3a}{60} = \frac{4b}{60} = \frac{5c}{60} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} \text{ olur. O hâlde,}$$

a, b ve c sayıları sırasıyla 20, 15 ve 12 ile doğru orantılıdır.

Birleşik Orantı

Bir çokluğun aynı anda bir çoklukla doğru orantılı ve başka bir çoklukla da ters orantılı ise iki durumu birlikte değerlendirmek gerekir. Böyle durumları bileşik orantıyla ifade ederiz.

Örnek : 3 işçi, 18 m² halıyı 4 günde dokursa aynı kapasitedeki 2 işçi 24 m² halıyı kaç günde dokur?

Çözüm : Bu soruda görüldüğü gibi işçi sayısı (1. çokluk) gün sayısı (2. çokluk) ile ters orantılı ve dokunan halı alanı (3. çokluk) ile doğru orantılıdır. Bu yüzden her iki durumu birlikte düşünmek gerekir. Bu durumda bileşik orantı kullanabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ters orantı} & \text{Doğru orantı} & \\ 3 \text{ işçi} \rightarrow 4 \text{ günde} & \nearrow & 18 \text{ m}^2 \text{ halı} \\ 2 \text{ işçi} \rightarrow x \text{ günde} & \searrow & 24 \text{ m}^2 \text{ halı} \\ \hline & \text{Birleşik orantı} & \\ 3 \cdot 4 \cdot 24 = 2 \cdot x \cdot 18 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4 \cdot 24}{2 \cdot 18} = 8 \text{ günde dokurlar.} \end{array}$$

a sayısı b ile doğru, c ile ters orantılı ise $k \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{a \cdot c}{b} = k$ dir.

Örnek : a, b ile doğru orantılı ve c ile ters orantılıdır. b = 2 iken a = 3 ve c = 8 dir. b = 2 ve c = 4 iken a nın kaç olacağını bulalım.

Çözüm : Verilen ifadeye göre $\frac{a \cdot c}{b} = k$ dir. Öyleyse orantı sabiti, $k = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ dir. Buna göre,

$$\frac{a \cdot 4}{2} = 12 \Rightarrow a = \frac{12 \cdot 2}{4} = 6 \text{ olarak bulunur.}$$

Aritmetik Ortalama

a_1, a_2, \dots, a_n gibi n tane sayının aritmetik ortalaması $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ dir.

Örnek : Bir öğrencinin matematik dersinden girdiği ilk iki yazılısının toplamı 5 tir. Bu öğrenci üçüncü sınavdan 4, sözlüden ise 5 almıştır. Yıl sonu ortalaması 3 olan bu öğrencinin matematik dersi için hazırladığı projeden aldığı notu bulalım.

Çözüm : Üç yazılı, bir sözlü ve bir proje ödevinin ortalaması 3 olduğundan,

$$\frac{5 + 4 + 5 + x}{5} = 3 \Rightarrow 14 + x = 15 \Rightarrow x = 1 \text{ bu öğrencinin hazırladığı projeden aldığı nottur.}$$

Örnek : 12 erkek ve 8 kızın bulunduğu bir sınıfta erkeklerin not ortalaması 4,5 ; kızların not ortalaması 4,75 olduğuna göre sınıfın not ortalamasının kaç olacağını bulalım.

Çözüm :

$$\text{Erkeklerin notları toplamı } e \text{ olmak üzere } \frac{e}{12} = 4,5 \Rightarrow e = 4,5 \cdot 12 = 54,$$

$$\text{Kızların notları toplamı } k \text{ olmak üzere } \frac{k}{8} = 4,75 \Rightarrow k = 4,75 \cdot 8 = 38,$$

$$\text{Sınıf not ortalaması } \frac{e + k}{12 + 8} = \frac{54 + 38}{20} = \frac{92}{20} = 4,6 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : x ile y nin aritmetik ortalaması 7 ; x, y ve z nin aritmetik ortalaması 11 olduğuna göre z yi bulalım.

Çözüm : $\frac{x+y}{2} = 7 \Rightarrow x+y = 14$

$$\frac{x+y+z}{3} = 11 \Rightarrow \underbrace{x+y}_{14} + z = 33$$

$$\Rightarrow 14 + z = 33$$

$$\Rightarrow z = 19 \text{ bulunur.}$$

Örnek : 4 sayının aritmetik ortalaması 21 dir. Bu sayılara birbirine eşit 3 sayı daha katılırsa sayıların aritmetik ortalaması 15 e iniyor. Eklenen sayılardan birinin kaç olacağını bulalım.

Çözüm : $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = 21 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 84$ tür.

Bu dört sayıya katılan sayıların her biri x olsun. Bu durumda,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x + x + x}{7} = 15 \Rightarrow 84 + 3x = 7 \cdot 15$$

$$\Rightarrow 3x = 105 - 84$$

$$\Rightarrow 3x = 21$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ bulunur.}$$

Geometrik Ortalama

a_1, a_2, \dots, a_n gibi n tane sayının geometrik ortalaması $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ dir.

Örnek : 125, 8 ve 64 sayılarının geometrik ortalamasını bulalım.

Çözüm : Verilen sayıların geometrik ortalaması $G = \sqrt[3]{125 \cdot 8 \cdot 64} = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ olarak bulunur.

Örnek : x ve y nin geometrik ortalaması 3 tür. x, y ve z nin geometrik ortalaması 6 olduğuna göre z yi bulalım.

Çözüm : $\sqrt{x \cdot y} = 3 \Rightarrow x \cdot y = 9$ dur.

$$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = 6 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 6^3 \Rightarrow 9 \cdot z = 216 \Rightarrow z = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek : x ile y nin geometrik ortalaması 1 ; x ile z nin geometrik ortalaması 3 ; y ile z nin geometrik ortalaması 9 dur. Buna göre x, y ve z nin geometrik ortalamasını bulalım.

$$\sqrt{x \cdot y} = 1 \Rightarrow x \cdot y = 1 ;$$

Çözüm : $\sqrt{x \cdot z} = 3 \Rightarrow x \cdot z = 3^2 ;$

$$\sqrt{y \cdot z} = 9 \Rightarrow y \cdot z = 9^2 \text{ dir.}$$

Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ x \cdot z = 3^2 \\ y \cdot z = 9^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3^2 \cdot 9^2 \Rightarrow (x \cdot y \cdot z)^2 = (27)^2 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 27 \text{ dir.}$$

$$x, y \text{ ve } z \text{ nin geometrik ortalaması ; } \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ bulunur.}$$

Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısı verilmiş olsun.

1. $\frac{a}{b} = k \Rightarrow a = bk$ ve $\frac{c}{d} = k \Rightarrow d = \frac{c}{k}$ olur.

$$a \cdot d = bk \cdot d = b \cdot k \frac{c}{k} = bc \Rightarrow ad = bc \text{ olur.}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow ad = bc$ dir. Buna içler çarpımının dışlar çarpımına eşitliği denir.

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ için içler dışlar çarpımı dışlar çarpımına eşitse çarpmanın değişme özelliği kullanılarak yeni orantılar elde edilebilir. Şöyle ki:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

$$ad = bc \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a},$$

$$ad = bc \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \text{ olur.}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısı verilmiş olsun. O hâlde,

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ ve } \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \text{ dir.}$$

3. $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ve $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ olduğundan $\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{c}{d} = k$ olur.

4. $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ve $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$ olduğundan $\frac{a:m}{b:m} = \frac{c}{d} = k$ olur.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısı verilmiş olsun. O hâlde,

$$m, n \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ olmak üzere } \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{c}{d} = k \text{ ve } \frac{a:m}{b:m} = \frac{c}{d} = k \text{ dir.}$$



ALİŞTIRMALAR

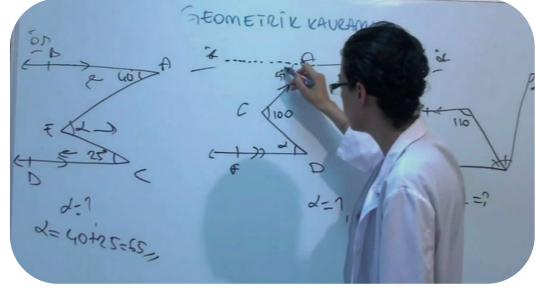
1. $2a = 3b = 4c$ ise $\frac{a+3b}{b+c}$ oranını bulunuz.
2. $\frac{a}{7} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ ve $a + 2b + c = 36$ ise a yı bulunuz.
3. $a + 1$ sayısı $b - 2$ ile doğru $b + 3$ ile ters orantılıdır. $b = 3$ iken $a = 3$ ise $b = 7$ için a kaçtır?
4. a, b, c sayıları sırasıyla 5 ve 6 ile doğru 3 ile ters orantılıdır. Bu üç sayının toplamı 680 ise a, b, c kaçtır?
5. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ ve $2x + y + 3z = 360$ ise $x - y + z$ kaçtır?
6. Boyu 160 cm olan Ahmet, boyu 145 cm olan kardeşi Ferhat ile fotoğraf çekilmiştir. Ahmet'in boyu fotoğrafta 8 cm olduğuna göre kardeşinin boyu kaç cm'dir?
7. 10 kişilik bir grupta 3 kişi 160 cm, 4 kişi 165 cm, 2 kişi 185 cm ve 1 kişi de 150 cm boyundadır. Grubun boy ortalaması kaçtır?
8. $x, 3x, 9x$ sayılarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortasını bulunuz.
9. $x, 6, 9$ sayılarının geometrik ortası 3 olduğuna göre x kaçtır?
10. 8 kişi 12 m^2 halıyı 9 saatte dokuyorsa 6 kişi 24 m^2 halıyı kaç saatte dokur?

PROBLEMLER



Matematikle uğraşmanın insanların muhakeme kabiliyetine çok büyük katkısı olduğu bilinmektedir.

- ✓ Matematik derslerinde matematik problemlerini çözmeye çalışmakla günlük hayattaki sosyal, ekonomik, psikolojik problemleri çözme arasında nasıl bir ilişki olduğunu düşünüyorsunuz? Açıklayınız.



Sayı Problemleri

Örnek : Bir sayının $\frac{1}{3}$ i ile $\frac{1}{4}$ inin toplamı 35 ise bu sayıyı bulalım.

Çözüm : Sayı x olsun. O hâlde bu sayı için,

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 35 \Rightarrow \frac{4x + 3x}{12} = 35 \Rightarrow 7x = 35 \cdot 12 \Rightarrow x = 60 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : Bir top kumaşın önce $\frac{2}{5}$ si, sonra kalanın $\frac{2}{3}$ si satılıyor. Geriye 24 metre kumaş kaldığına göre, kumaşın tamamı kaç metredir?

Çözüm : Kumaşın tamamı x metre olsun. Önce satılan kumaş $\frac{2x}{5}$ metredir. Bu durumda kalan kumaş,

$x - \frac{2x}{5} = \frac{5x - 2x}{5} = \frac{3x}{5}$ metre bulunur. Daha sonra satılan kumaş $\frac{3x}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2x}{5}$ metre bulunur. Toplam satılan kumaş, $\frac{2x}{5} + \frac{2x}{5} = \frac{4x}{5}$ metre olur. Geriye 24 metre kumaş kaldığından kumaşın tamamı

$$x - \frac{4x}{5} = 24 \Rightarrow \frac{5x - 4x}{5} = 24 \Rightarrow \frac{x}{5} = 24 \Rightarrow x = 120 \text{ metre bulunur.}$$

Örnek : Bir sayının 5 katının 7 eksiğinin yarısı, aynı sayının 26 eksiğinin 2 katına eşit oluyor. Bu sayıyı bulalım.

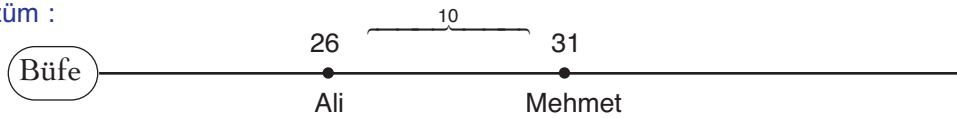
Çözüm : Sayı x olsun. Sayının 5 katının 7 eksiğinin yarısı $\frac{5x - 7}{2}$ olur.

Sayının 26 eksiğinin 2 katı ise $2(x - 26)$ olur. O hâlde

$$\frac{5x - 7}{2} = 2(x - 26) \Rightarrow 5x - 7 = 4x - 104 \Rightarrow x = -104 + 7 \Rightarrow x = -97 \text{ olur.}$$

Örnek : Halk ekmek kuyruğunda Ali önden 26. ve Mehmet arkadan 31. sırada yer alıyor. Ali sırada Mehmet'ten önde ve Ali ile Mehmet arasında 10 kişi varsa kuyrukta kaç kişi vardır? Bulalım.

Çözüm :



Şekilden görüldüğü gibi kuyruktaki kişi sayısı: $26 + 10 + 31 = 67$ olur.

Örnek : Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikiyeşerli otursa 3 öğrenci ayakta kalıyor. Üçerli otursa 2 sıra boş kalıyor. Bu sınıftaki öğrencilerin sayısını bulalım.

Çözüm : Sınıftaki sıra sayısı x olsun.

İkiyeşerli oturulduğunda 3 öğrenci ayakta kalıyorsa sınıf mevcudu, $2x + 3$ tür.

Üçerli oturulduğunda 2 sıra boş kalıyorsa sınıf mevcudu, $3 \cdot (x - 2)$ dir.

O hâlde $2x + 3 = 3(x - 2)$ den $x = 9$ bulunur.

Bu durumda sınıf mevcudu, $2x + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$ dir.

Örnek : Bahadır'ın 33 tane madenî parası vardır. 25 ve 50 kuruşluklardan oluşan bu paraların toplamı 14 TL olduğuna göre Bahadır'ın 50 kuruşlukları kaç tanedir? Bulalım.

Çözüm : 50 kuruşlukların sayısı x alınırsa 25 kuruşlukların sayısı $33 - x$ olur. Bu paraların toplamı 14 TL = 1400 Kr olduğundan,

$$50 \cdot x + 25 \cdot (33 - x) = 1400 \Rightarrow 50x + 825 - 25x = 1400$$

$$\Rightarrow 25x = 575 \Rightarrow x = 23 \text{ bulunur}$$

Örnek : 13 katı ile 11 katının farkı 1200 olan sayı kaçtır? Bulalım.

Çözüm : Sayı x olsun. O hâlde $13x - 11x = 1200$ dır.

Buradan $2x = 1200$ den $x = 600$ bulunur.

Örnek : Bir defter ile bir kalem 8 TL, bir kalem ile bir silgi 4 TL, bir defter ile bir silgi 6 TL olduğuna göre bir kalem kaç TL dir? Bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} D + K = 8 \\ K + S = 4 \\ D + S = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2D + 2K + 2S = 18 \Rightarrow D + K + S = 9 \text{ bulunur.}$$

$$\frac{D + S}{6} + K = 9 \Rightarrow 6 + K = 9 \Rightarrow K = 3 \text{ tür.}$$

Örnek : Hangi sayının karesinin $\frac{1}{3}$ ine kendisi ilave edildiğinde sayının 5 katı elde edilir? Bulalım.

Çözüm : Aradığımız sayı x olsun. O hâlde,

$$x^2 \cdot \frac{1}{3} + x = 5 \cdot x \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{3} = 5x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x = 15x$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 12) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 12 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir kesrin paydası payının 4 katıdır. Kesrin payına 1 eklenir, paydasından 1 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{1}{3}$ oluyor. Bu kesrin pay ve paydasının çarpımını bulalım.

Çözüm : Kesrin değeri $\frac{x}{4x}$ tir. O hâlde $\frac{x+1}{4x-1} = \frac{1}{3}$ dir. Buradan $3x + 3 = 4x - 1 \Rightarrow x = 4$ bulunur. Bu

durumda kesir $\frac{4}{16}$ tür. Bu kesrin pay ve paydasının çarpımı $4 \cdot 16 = 64$ olur.

Örnek : Ardışık üç tek doğal sayıdan en büyüğünün 4 katı ile en küçüğünün 2 katının farkı ortanca sayının 3 katının 5 fazlasına eşittir. Bu üç sayının toplamı kaçtır? Bulalım.

Çözüm :

n tek sayı olmak üzere ardışık üç tek sayı n, n + 2 ve n + 4 olsun. O hâlde,

$$4.(n + 4) - 2n = 3(n + 2) + 5 \Rightarrow 4n + 16 - 2n = 3n + 6 + 5$$

$$\Rightarrow 2n + 16 = 3n + 11$$

$$\Rightarrow n = 5 \text{ tir.}$$

Buna göre ardışık tek sayılar 5,7 ve 9 dur. Bu sayıların toplamı $5 + 7 + 9 = 21$ dir.

Yüzde-Faiz Problemleri

a sayısının % b si $a \cdot \frac{b}{100}$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla

Faiz = Ana para . yüzde oranı . zaman olur. Sembolik olarak bu formül

$F = A . n . t$ şeklinde gösterilir.

Örnek : Mustafa Bey'in şirketinin günlük cirosu 5600 TL dir. Hasan Bey'in cirosu Mustafa Bey'in cirosunun % 15 i kadardır. Buna göre Hasan Bey'in 3 aylık cirosunu hesaplayalım.

Çözüm : Hasan Bey'in günlük cirosu x olsun.

Hasan Bey'in cirosu 5600 TL nin % 15 ise

$$x = 5600 \cdot \frac{15}{100} = 840 \text{ TL olur.}$$

3 aylık ciro ise

$$840 \cdot 90 = 48.600 \text{ TL olarak bulunur.}$$

Örnek : Ahmet Bey 3250 TL sini yıllık % 5 faizle 3 yıllığına bankaya yatırıyor. 3 yıl sonra toplam kaç TL si olacağını bulalım.

Çözüm : $F = 3250 \cdot \frac{5^1}{100} \cdot 3 = \frac{975}{2} = 487,5$ TL olur. Bankadaki toplam para miktarı

$$T = 3250 + 487,5 = 3737,5 \text{ TL olur.}$$

Örnek : Veli amca 7 aylığına yıllık % 4 faizle bankaya yatırdığı parasını 7 ay sonunda 1228 TL olarak geri alıyor. Veli amcanın bankaya yatırdığı miktarı bulalım.

Çözüm : Bankaya yatırılan miktar x olsun.

$$x + x \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{7}{12} = 1228 \Rightarrow \frac{1228x}{1200} = 1228 \Rightarrow x = 1200 \text{ TL}$$

Örnek : 120 günlüğüne yıllık % 5 faizle bankaya yatırılan bir miktar paranın 125 TL faizi varsa bankaya yatırılan ana paranın kaç TL olduğunu bulalım.

Çözüm : Ana para A olsun.

$$F = A \cdot n \cdot t \Rightarrow 125 = A \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{120}{360} \Rightarrow 125 = \frac{A}{60}$$

$$\Rightarrow A = 125 \cdot 60 \Rightarrow A = 7500 \text{ TL olur.}$$

Örnek : Bankaya yıllık % 2 faizle yatırılan 1200 TL nin 3 yıllık faiz getirisi ile yıllık % 5 faizle 3 aylığına yatırılan bir miktar paranın faiz getirisi eşit ise bankaya yatırılan para kaç TL dir? Bulalım.

Çözüm :

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = 1200 \cdot \frac{2}{100} \cdot 3 = 72 \text{ TL} \\ F_2 = x \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{3}{12} = \frac{15x}{1200} \text{ TL} \end{array} \right\} F_1 = F_2 \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{15x}{1200} = 72 \Rightarrow x = \frac{72 \cdot 1200}{15} = 5760 \text{ TL olur.}$$

Örnek : % 30 u 282 olan sayının %15 inin kaç olacağını bulalım.

Çözüm : Sayı x olsun.

$$\frac{30}{100} \cdot x = 282 \Rightarrow x = 940 \text{ olarak bulunur. Bu sayının \%15 i, } 940 \cdot \frac{15}{100} = 141 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : Bir miktar paranın yıllık % 60 tan 3 yılda getirdiği faiz, aynı paranın yıllık % 70 faiz oranıyla 2 yılda getirdiği faizden 200 TL fazladır. Bu paranın kaç TL olduğunu hesaplayalım.

Çözüm : Paranın x TL olduğu düşünülürse,

$$\text{verilen ifadeye uygun denklem } \frac{60}{100} \cdot 3 \cdot x = \frac{70}{100} \cdot 2 \cdot x + 200 \text{ olacaktır. O hâlde,}$$

$$\frac{18x}{10} = \frac{14x}{10} + 200 \Rightarrow \frac{4x}{10} = 200 \Rightarrow x = 500 \text{ TL dir.}$$

Örnek : Bir kasabanın nüfusu her yıl % 10 azalıyor. Kasabanın 3 yıl sonraki nüfusunun bugünkü nüfusuna oranı % kaçtır? Bulalım.

Çözüm : Kasabanın nüfusu 100x olsun.

$$1. \text{ yıl sonundaki nüfus : } 100x - \frac{10}{100} \cdot 100x = 90x \text{ tir.}$$

$$2. \text{ yıl sonundaki nüfus : } 90x - \frac{10}{100} \cdot 90x = 81x \text{ tir.}$$

$$3. \text{ yıl sonundaki nüfus : } 81x - \frac{10}{100} \cdot 81x = 72,9x \text{ tir.}$$

$$3. \text{ yıl sonundaki nüfusun bugünkü nüfusa oranı } \frac{72,9x}{100x} = \% 72,9 \text{ olur.}$$

Örnek : Hangi sayının % 40 ının 3 fazlası, aynı sayının % 60 ına eşittir? Bulalım.

Çözüm :

$$\begin{aligned}x \cdot \frac{40}{100} + 3 &= x \cdot \frac{60}{100} \Rightarrow \frac{40 \cdot x + 300}{100} = \frac{60x}{100} \\&\Rightarrow 40x + 300 = 60x \\&\Rightarrow 300 = 20x \\&\Rightarrow x = 15 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek : % 40 tan 2 yılda faiziyle birlikte 2970 TL olan paranın kaç lirasının faiz olduğunu bulalım.

Çözüm : Ana para A, faiz F olsun.

$$F = A \cdot n \cdot t \Rightarrow F = A \cdot \frac{40}{100} \cdot 2 \Rightarrow F = \frac{4A}{5} \text{ tir.}$$

$$F + A = 2970 \Rightarrow \frac{4A}{5} + A = 2970$$

$$\Rightarrow \frac{9A}{5} = 2970 \Rightarrow A = 1650 \text{ TL dir.}$$

2 yılda oluşan faiz miktarı 2970 TL – 1650 TL = 1320 TL dir.

Örnek : Yanda bir bankanın günlük, aylık ve yıllık faiz oranları verilmiştir. Buna göre problemler kuralım.

Günlük	%0,05
Aylık	%1,6
Yıllık	%20

Çözüm : Tabloya göre aşağıdaki problemler kurulabilir.

a. 5000 TL bankaya yatırılırsa 3 aylık faizi ne olur?

b. 70 000 TL bankaya yatırılırsa 4 yıl sonra toplam para ne kadar olur?

c. 31 000 TL günlük faizle 30 000 TL aylık faizle bankaya yatırılıyor. Aynı süre için hangisi daha fazla faiz getirir?

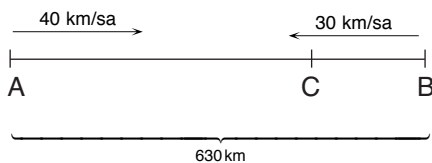
Hareket Problemleri

x yol, t zaman ve v hızı göstermek üzere,

$$x = v \cdot t \text{ (Yol = Hız \cdot zaman) } \text{ ve Ortalama Hız} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} \text{ olarak ifade edilir.}$$

Örnek : Aralarında 630 km uzaklık bulunan iki araçtan biri saatte 30 km hızla, diğeri saatte 40 km hızla birbirine doğru harekete geçiyor. Kaç saat sonra karşılaşacaklarını bulalım.

Çözüm : A ve B noktalarından hareket eden araçlar t saat sonra karşılaşsınlar. Bu durumda $|AC| = 40 \cdot t$ ve $|BC| = 30 \cdot t$ olur.



$$40 \cdot t + 30 \cdot t = 630$$

$$\Rightarrow 70t = 630 \Rightarrow t = 9 \text{ saat bulunur.}$$

Örnek : Bir araç A dan B ye 20 km hızla gidip hiç beklemeden 30 km hızla geri dönüyor. Gidiş-dönüş toplam 15 saat sürdüğüne göre $|AB|$ yolunun kaç km olduğunu bulalım.

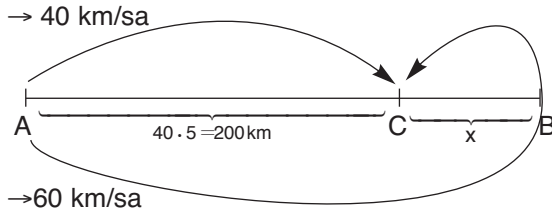
Çözüm : Gidiş için t saat, dönüş için $(15 - t)$ saat kullanılır ve gidiş-dönüş yolunun birbirine eşit olduğu düşünülürse verilen ifadeye ait denklem,

$$20t = 30 \cdot (15 - t) \Rightarrow 2t = 3(15 - t) \Rightarrow 2t = 3 \cdot 15 - 3t \Rightarrow 5t = 45 \Rightarrow t = 9 \text{ olur.}$$

$|AB|$ uzunluğundaki yol, $20 \cdot 9 = 180$ km olarak bulunur.

Örnek : Hızları saatte 60 km ve 40 km olan iki araç aynı anda A dan B ye doğru hareket ediyorlar. Hızlı giden araç B ye varıp hiç beklemeden geri dönüyor. Hareketlerinden 5 saat sonra karşılaştıklarına göre A ile B arası kaç km dir? Bulalım.

Çözüm : A noktasından hareket eden araçlar 5 saat sonra C noktasında karşılaşırlar. Hızı 40 km olan aracın aldığı yol $|AC| = 40 \cdot 5 = 200$ km, hızı 60 km olan aracın aldığı yol ise $|BC| = x$ için $200 + 2x$ tir. Bu araç bu yolu 5 saatte aldığından,

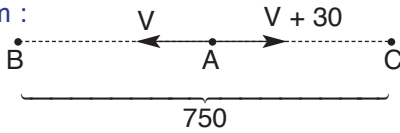


$$\begin{aligned} 60 \cdot 5 &= 200 + 2x \\ 300 &= 200 + 2x \\ 100 &= 2x \\ x &= 50 \text{ km olur.} \end{aligned}$$

$|AB| = 200 + 50 = 250$ km dir.

Örnek : Hızları farkı saatte 30 km olan 2 araç, aynı anda aynı noktadan ters yönlerde doğru harekete başlıyorlar. 5 saat sonra aralarındaki mesafe 750 km olacağına göre hızlı giden aracın hızı saatte kaç km dir?

Çözüm :

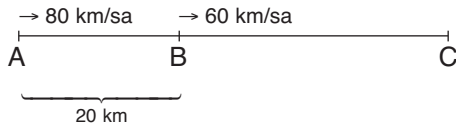


$$\begin{aligned} |BA| + |AC| &= 750 \\ 5 \cdot V + 5(V + 30) &= 750 \\ 5V + 5V + 150 &= 750 \\ 10V &= 600 \\ V &= 60 \text{ km/sa.} \end{aligned}$$

Bu durumda, hızlı giden aracın hızı; $V + 30 = 60 + 30 = 90$ km/sa. tir.

Örnek : Aralarında 20 km mesafe bulunan iki araçtan arkadakinin hızı saatte 80 km, öndekinin hızı saatte 60 km dir. Bu iki araç aynı anda, aynı yöne doğru harekete başlarsa arkadakinin kaç saat sonra öndekine yetişeceğini bulalım.

Çözüm :



Arkadan gelen araç öndeki aracı t saat sonra C de yakalasın. Bu durumda,

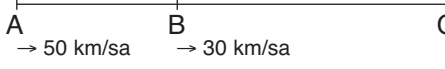
$$\begin{aligned} |AC| &= 80 \cdot t ; |BC| = 60 \cdot t \\ |AB| &= |AC| - |BC| = 20 \\ 80t - 60t &= 20 \\ t &= 1 \text{ saat bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : Durgun sudaki hızı saatte 50 km olan bir deniz aracı, akıntı hızı saatte 5 km olan bir nehirde belli bir süre gidiyor ve hiç durmadan başladığı yere geri dönüyor. Gidiş–dönüş süresi 10 saat olduğuna göre aracın aldığı toplam yolu bulalım.

Çözüm : Deniz aracı akıntı yönünde t saat gitmiş olsun. Bu durumda, dönüş süresi 10 – t olur. Bu aracın akıntı yönündeki hızı, 50 + 5 = 55 km/sa ve akıntıya ters yöndeki hızı, 50 – 5 = 45 km/sa tir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 55 \cdot t &= 45(10 - t) \Rightarrow 11t = 9(10 - t) \\ &\Rightarrow 11t = 90 - 9t \\ &\Rightarrow 20t = 90 \\ &\Rightarrow t = 4,5 \text{ saat} \end{aligned}$$

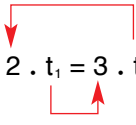
O hâlde gidiş ve dönüşteki aldığı toplam yol $2 \cdot (55 \cdot 4,5) = 495$ km dir.

Örnek :  A ve B den aynı anda ve aynı yönde hareket eden iki aracın saatteki hızları sırasıyla 50 ve 30 km dir. İki araç aynı anda C ye vardıklarına göre $\frac{|BC|}{|AB|}$ oranı kaçtır?

Çözüm : $|AC| = 50 \cdot t$; $|BC| = 30 \cdot t$ ve $|AB| = |AC| - |BC| = 20t$ dir.

$$\text{Bu durumda, } \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{30t}{20t} = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Örnek : Bir araç A dan B ye 30 km hızla gidiyor ve 45 km hızla geriye dönüyor. A dan B ye gidip tekrar dönen bu aracın gidiş ve dönüşteki ortalama hızını hesaplayalım.

Çözüm :  $30 \cdot t_1 = 45 \cdot t_2 \Rightarrow 2 \cdot t_1 = 3 \cdot t_2 \Rightarrow t_1 = 3k$, $t_2 = 2k$ olur.

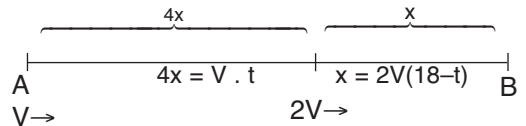
Alınan Yol : $|AB| = 30 \cdot t_1 = 30 \cdot 3k = 90k$ dir.

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{180k}{5k} = 36 \text{ km/sa.}$$

Örnek : Bir otomobil gideceği yolun $\frac{4}{5}$ ünü gittikten sonra hızını ilk hızının 2 katına çıkararak 18 saatte yolu tamamlamıştır. Bu otomobil hızını artırmadan önce aldığı yolu kaç saatte almıştır? Bulalım.

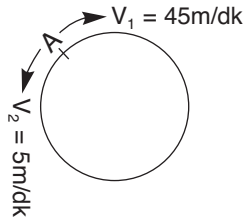
Çözüm : Yolun tamamı 5x birim olsun.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x &= 2v \cdot (18 - t) \\ 4x &= v \cdot t \end{aligned} \right\} &\Rightarrow 4 \cdot 2v \cdot (18 - t) = v \cdot t \\ &\Rightarrow 8 \cdot (18 - t) = t \\ &\Rightarrow 144 - 8t = t \Rightarrow 144 = 9t \Rightarrow t = 16 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$



Örnek : Çevresi 650 m olan dairesel bir pistte aynı noktadan aynı anda zıt yönde harekete başlayan iki hareketlinin hızları sırasıyla 45m/dk ve 5m/dk dir. Bu iki hareketlinin kaç dakika sonra karşılaşacaklarını bulalım.

Çözüm :



Çember üzerinde aynı noktadan zıt yönde hareket eden iki hareketli karşılaştıkları anda pistin uzunluğu kadar yol alırlar. O hâlde,

$$650 = (45 + 5) \cdot t$$

$$\Rightarrow 650 = 50 \cdot t \Rightarrow t = 13 \text{ dk. bulunur.}$$

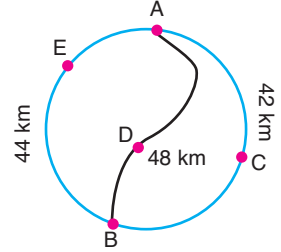
Örnek : Yanda bir pist ve pistte yarışacak arabaların hızları verilmiştir. Buna göre problemler kuralım.

Çözüm : Yandaki yarışçıların hızları ve pist göz önünde bulundurularak aşağıdaki problemler kurulabilir.

a. A, D ve C den geçip tekrar A ya gelerek yapılan bir yarışta birinci yarışçı ikinciye ne kadar fark atar?

b. Aynı anda yarışa başlayan yarışçılar arasında en az 80 km fark olması için en az kaç km yol almaları gerekir?

c. 2. ve 3. yarışçılar A dan ters yönde yarışa başlarsa en erken kaç dakika da karşılaşırlar?



$$\begin{aligned} V_1 &= 200 \text{ km/h} \\ V_2 &= 180 \text{ km/h} \\ V_3 &= 220 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Yaş Problemleri

- Bir kişinin bugünkü yaşı x ise; k yıl sonraki yaşı $x + k$ ve k yıl önceki yaşı : $x - k$ dir.
- İki kişi arasındaki yaş farkı hiçbir zaman değişmez.
- İki kişinin k yıl sonraki yaşları toplamı $x + 2k$ dir.
- İki kişinin k yıl önceki yaşları toplamı $x - 2k$ dir.

Örnek : Bir anne çocuğu doğduğunda 28 yaşında idi. Kaç yıl sonra annenin yaşı çocuğunun yaşının 5 katı olur? Bulalım.

Çözüm :

	Anne	Çocuk
Bugünkü yaşları :	28	0
k yıl sonraki yaşları :	$28 + k$	$0 + k$

$$28 + k = 5k \Rightarrow 28 = 4k \Rightarrow k = 7 \text{ yıl olarak bulunur.}$$

Örnek : Bir babanın yaşı 3 yıl arayla doğmuş iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katından 5 eksiktir. Bu baba 8 yıl sonra 45. yaş gününü kutlayacağına göre küçük çocuğun kaç yaşında olduğunu bulalım.

Çözüm :

	Baba	Küçük Çocuk	Büyük Çocuk
Bugünkü yaşları :	$2(x + x + 3) - 5$	x	$x + 3$
8 yıl sonra :	$2(2x + 3) - 5 + 8$		

$$2(2x + 3) + 3 = 45 \Rightarrow 4x + 6 = 42 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9 \text{ dur. Öyleyse küçük çocuğun bugünkü yaşı 9 olur.}$$

Örnek : 15 yıl sonra yaşları farkı 21 olacak olan iki arkadaşın büyüğün yaşı küçüğün yaşının 4 katı olduğuna göre şimdi büyüğün kaç yaşında olacağını bulalım.

Çözüm :

Büyük	Küçük
$4x$	x

İki kişi arasındaki yaş farkı değişmeyeceğinden,

$$4x - x = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7 \text{ bulunur. Buna göre büyüğün yaşı } 4 \cdot 7 = 28 \text{ dir.}$$

Örnek : 28 yaşındaki bir babanın kızı 6 yaşındadır. Kaç yıl sonra yaşları oranının $\frac{18}{7}$ olacağını bulalım.

Çözüm :

	Baba	Kızı	
Bugün	28	6	$\frac{28+k}{6+k} = \frac{18}{7} \Rightarrow 7 \cdot (28+k) = 18 \cdot (6+k)$
k yıl sonra	28 + k	6 + k	$\Rightarrow 196 + 7k = 108 + 18k$
			$\Rightarrow 88 = 11k$
			$\Rightarrow k = 8$ bulunur.

Örnek : Yaşları birbirinden farklı 5 kardeşin yaşlarının aritmetik ortalaması 10 dur. Kardeşlerden hiçbiri 12 yaşından büyük olmadığına göre en küçük kardeşin yaşının en az kaç olabileceğini hesaplayalım.

Çözüm : 5 kardeşin yaşlarının aritmetik ortalaması 10 olduğundan,

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 10 \Rightarrow a+b+c+d+e = 50 \text{ olur.}$$

Yaşları toplamı 50 olan kardeşlerden hiçbiri 12 yaşından büyük olmadığından,

$$a + \underset{\substack{\uparrow \\ 9}}{b} + \underset{\substack{\uparrow \\ 10}}{c} + \underset{\substack{\uparrow \\ 11}}{d} + \underset{\substack{\uparrow \\ 12}}{e} = 50 \text{ seçimiyle en küçük kardeşin yaşı } 50 - 42 = 8 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : Gonca'nın yaşı, Canan'ın 4 yıl sonraki yaşına eşittir. 3 yıl sonra Gonca'nın yaşı, Canan'ın yaşının 2 katından 3 eksik olacağına göre Gonca ile Canan'ın bugünkü yaşları toplamını bulalım.

Çözüm :

	Gonca	Canan
Bugün :	x + 4	x
3 yıl sonra :	x + 7	x + 3
4 yıl sonra :		x + 4

$$x + 7 = 2(x + 3) - 3 \Rightarrow x + 7 = 2x + 3 \Rightarrow x = 4$$

Gonca ile Canan'ın bugünkü yaşları toplamı $x + 4 + x = 4 + 4 + 4 = 12$ olur.

Örnek : Ece ve Burak'ın bugünkü yaşları toplamı 18 dir. Buna göre 8 yıl sonraki yaşları toplamının kaç olacağını bulalım.

Çözüm :

$$18 + 2 \cdot 8 = 18 + 16 = 34 \text{ tür.}$$

Örnek : Kemal ile ablasının bugünkü yaşları oranı $\frac{1}{4}$ dir. 8 yıl sonra bu oran $\frac{3}{4}$ olacaktır. Buna göre Kemal ile ablasının bugünkü yaşları farkı kaçtır? Bulalım.

Çözüm :

	Kemal	Abla	
Bugün :	x	4x	$\frac{x+8}{4x+8} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x + 32 = 12x + 24$
8 yıl sonra :	x + 8	4x + 8	$\Rightarrow 8 = 8x$
			$\Rightarrow x = 1$

O hâlde Kemal ile ablasının bugünkü yaşları farkı : $3x = 3 \cdot 1 = 3$ tür.

Örnek : Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları toplamının 3 katından 25 fazladır. Kaç yıl sonra babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamının 3 katına eşit olur? Bulalım.

Çözüm :

	Baba	İki çocuk
Bugün :	$3x + 25$	x
k yıl sonra :	$3x + 25 + k$	$x + 2k$

$$3x + 25 + k = 3 \cdot (x + 2k) \Rightarrow 3x + 25 + k = 3x + 6k$$

$$\Rightarrow 25 + k = 6k \Rightarrow 25 = 5k \Rightarrow k = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Yandaki tabloda verilen bilgilerle problemler kuralım.

Çözüm :

- Anne-baba ve en küçük çocuğun yaşları toplamı 56 olduğuna göre en büyük çocuk en az kaç yaşında olabilir?
- Anne 26 yaşında ve ebeveynin yaşları toplamı çocukların yaşları toplamının 4 katı ise en küçük çocuk kaç yaşındadır?
- Büyük çocuk 10, baba 36 yaşında ise aile fertlerinin yaşları toplamı kaç olur?

- Anne-baba yaş farkı 4
- 3 çocuklu bir aile
- Çocuklar arası yaş farkı en az 2 yaş

Karışım Problemleri

Örnek : Şeker oranı % 20 olan 30 kg lık karışıma kaç kg şeker eklenirse karışımın yeni şeker oranı %70 olur? Bulalım.

Çözüm : 30 kg lık karışımda $30 \cdot \frac{20}{100} = 6$ kg şeker vardır.

$$\frac{6 + x}{30 + x} = \frac{70}{100} \Rightarrow \frac{6 + x}{30 + x} = \frac{7}{10} \Rightarrow 60 + 10x = 210 + 7x$$

$$\Rightarrow 3x = 150 \Rightarrow x = 50 \text{ kg şeker eklenmelidir.}$$

Örnek : % 60 ı su olan 30 g şekerli su ile % 20 si şeker olan 170 g şekerli su karıştırılırsa karışımın şeker oranı ne olur? Bulalım.

Çözüm :

$$30 \text{ g şekerli suyun } 30 \cdot \frac{60}{100} = 18 \text{ g sudur. O hâlde } 30 - 18 = 12 \text{ gramı şekerdir.}$$

$$170 \text{ g şekerli suyun } 170 \cdot \frac{20}{100} = 34 \text{ gramı şekerdir.}$$

$$\text{Bu durumda şeker oranı } \frac{12 + 34}{170 + 30} = \frac{46}{200} = \frac{23}{100} = \% 23 \text{ olur.}$$

Örnek : % 20 lik H_2SO_4 çözeltisinin 250 gramını % 40 lık yapmak için ne kadar H_2SO_4 eklenmesi gerektiğini bulalım.

Çözüm : Çözeltide $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$ g H_2SO_4 vardır. Çözeltinin % 40 lık olması için

$$(250 + x) \cdot \frac{40}{100} = 50 + x \text{ olmalıdır. Öyleyse,}$$

$$(250 + x) \cdot \frac{40}{100} = 50 + x \Rightarrow 2(250 + x) = 5(50 + x)$$

$$\Rightarrow 500 + 2x = 250 + 5x \Rightarrow 3x = 250 \Rightarrow x = \frac{250}{3} \text{ g eklenmelidir.}$$

Örnek : % 30 luk 150 g tuzlu su güneşte bırakılınca 120 g kalıyor. Bu durumda yeni karışımın tuz oranının ne olacağını bulalım.

Çözüm : Karışımındaki tuz miktarı $150 \cdot \frac{30}{100} = 45$ g olur.

Güneşte kaldığında tuz miktarı değişmeyeceğinden

120 g tuzlu suda	45 g tuz varsa
100 g tuzlu suda	x g tuz vardır.

$$x = \frac{45 \cdot 100}{120} = \frac{45 \cdot 10}{12} = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ g dır.}$$

Dolayısıyla karışım % 37,5 luk olmuştur.

Örnek : 80 gr altın-gümüş karışımında %40 gümüş vardır. Bu karışıma 6 gr daha gümüş ekleniyor. Elde edilen bu karışıma ne kadar altın katılırsa gümüş oranı %20 olur? Bulalım.

Çözüm : 80 gr lık karışımında $80 \cdot \frac{40}{100} = 32$ gr gümüş vardır. Karışıma 6 gr gümüş ve x gram altın eklenirse

$$\frac{32 + 6}{80 + 6 + x} = \frac{20}{100} \text{ olur. Öyleyse } \frac{38}{86 + x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 190 = 86 + x$$

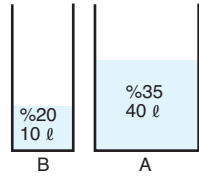
$$\Rightarrow x = 104 \text{ gr altın katılmalıdır.}$$

Örnek : Yandaki karışımlara göre problem kuralım.

Çözüm : a. Yandaki iki karışım birleştirilirse karışım yüzde kaçlık bir karışım olur?

b. A kabına 20 litre su eklense karışım yüzde kaçlık olur?

c. B kabının derişimi yarıya indirebilmek için kaç litre su harcamak gerekir?



Kâr-Zarar Problemleri

Kâr = (alış fiyatı) . (kâr yüzdesi) = (satış fiyatı) – (alış fiyatı)

Zarar = (alış fiyatı) . (zarar yüzdesi) = (alış fiyatı) – (satış fiyatı)

İndirim = (satış fiyatı) . (indirim yüzdesi) dir.

Örnek : % 20 kârla satılırken satış fiyatı üzerinden % 10 indirim yapılarak satılan bir maldan % kaç kâr elde edilir? Bulalım.

Çözüm : Malın alış fiyatı 100x olsun.

$$100x \xrightarrow{\%20 \text{ kâr}} \left(100x + 100x \cdot \frac{20}{100} \right) = 120x \xrightarrow{\%10 \text{ indirim}} \left(120x - 120x \cdot \frac{10}{100} = 108x \right)$$

Bu durumda alış fiyatı 100x olan bir mal 108x e satılacağından % 8 kâr elde edilir.

Örnek : % 30 kârla satılan bir mal, satış fiyatı üzerinden % 20 lik bir indirim yapılarak 5200 TL ye satılıyor. Bu malın maliyetinin kaç TL olduğunu bulalım.

Çözüm : Malın alış fiyatı 100x olsun.

$$100x \xrightarrow{\%30 \text{ kâr}} \left(100x + 100x \cdot \frac{30}{100} \right) = 130x \xrightarrow{\%20 \text{ zarar}} \left(130x - 130x \cdot \frac{20}{100} \right) = 104x$$

Bu durumda satış fiyatı $104x = 5200 \Rightarrow x = 50$ bulunur.

Malın maliyeti $100 \cdot 50 = 5000$ TL dir.

Örnek : Bir satıcı malının $\frac{2}{5}$ sini % 30 kârla, geri kalanını % 20 zararla satıyor. Bu malın tamamı için kâr - zarar durumunu inceleyelim.

Çözüm : Malın tamamı 100x olsun.

$$\begin{array}{l} \text{Malın } \frac{2}{5} \text{ si : } 100x \cdot \frac{2}{5} = 40x \quad 40x \xrightarrow{\%30 \text{ kâr}} \left(40x + 40x \cdot \frac{30}{100} \right) = 52x \\ \text{Malın } \frac{3}{5} \text{ ü : } 100x \cdot \frac{3}{5} = 60x \quad 60x \xrightarrow{\%20 \text{ zarar}} \left(60x - 60x \cdot \frac{20}{100} \right) = 48x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 40x \\ 60x \end{array}} \right\} 52x + 48x = 100x$$

Bu durumda alış fiyatı 100x olan bir mal 100x TL ye satılmıştır. Satıcı ne kâr ne de zarar etmiştir.

Örnek : % 10 kârla 330 TL ye satılan bir mal, % 10 zararla kaç TL ye satılır? Bulalım.

Çözüm : Malın alış fiyatı 100x olsun.

$$100x \xrightarrow{\%10 \text{ kâr}} \left(100x + 100x \cdot \frac{10}{100} \right) = 110x \text{ tir.}$$

$110x = 330 \Rightarrow x = 3$ tür. O hâlde malın alış fiyatı $100 \cdot x = 100 \cdot 3 = 300$ dür.

$$300 \xrightarrow{\%10 \text{ zarar}} \left(300 - 300 \cdot \frac{10}{100} \right) = 270 \text{ TL ye satılır.}$$

Örnek : % 40 zararla 120 TL ye satılan bir mal, % 20 kârla kaç TL ye satılır? Bulalım.

Çözüm : Malın alış fiyatı 100x olsun.

$$100x \xrightarrow{\%40 \text{ zarar}} \left(100x - 100x \cdot \frac{40}{100} \right) = 60x \text{ tir.}$$

$60x = 120 \Rightarrow x = 2$ dir. O hâlde malın alış fiyatı $100x = 100 \cdot 2 = 200$ dür.

$$200 \xrightarrow{\%20 \text{ kâr}} \left(200 + 200 \cdot \frac{20}{100} \right) = 240 \text{ TL ye satılır.}$$

Örnek : Bir satıcı aldığı bir malı % 20 kârla 1800 TL ye, başka bir malı da % 20 zararla yine 1800 TL ye satıyor. Bu satıcının bu iki satıştan sonraki kâr-zarar durumu nedir? Bulalım.

Çözüm : % 20 kârla satılan malın maliyeti 100x olsun.

$$100x \xrightarrow{\%20 \text{ kâr}} 120x = 1800 \Rightarrow x = 15 \text{ tir. O hâlde malın maliyeti } 1500 \text{ TL dir.}$$

% 20 zararla satılan malın maliyeti 100y olsun.

$$100y \xrightarrow{\%20 \text{ zarar}} 80y = 1800 \Rightarrow y = 22.5 \text{ tir. O hâlde malın maliyeti } 2250 \text{ TL dir.}$$

Bu satıcı bu iki malı $1500 + 2250 = 3750$ TL den alıp $1800 + 1800 = 3600$ TL ye satmıştır. O hâlde satıcı $3750 - 3600 = 150$ TL zarar etmiştir.

Örnek : Yandaki tabloda bir mağazadaki kaban fiyatları ve yapılan indirimler verilmiştir. Buna göre problemler kuralım.

Çözüm : a. Hangi tarife daha uygundur?

b. En ucuz ve en pahalı kabanlar kaç liraya satılırlar?

c. En fazla indirim hangi üründe olmuştur?

1. 200 TL \rightarrow %30
2. 190 TL \rightarrow %10
3. 250 TL \rightarrow %40

İşçi-Havuz Problemleri

Örnek : Bir havuzu doldurmak için A, B, C muslukları yapılmıştır. A musluğu boş havuzu 12 saatte, B musluğu 18 saatte, C musluğu ise 24 saatte doldurmaktadır. Buna göre;

- 3 musluğun bu havuzu kaç saatte dolduracağını,
- A musluğu 3 saat, B musluğu 4,5 saat açık kaldıktan sonra kalan kısmı C musluğunun kaç saatte dolduracağını bulalım.

Çözüm : a. 1 saatte A havuzun $\frac{1}{12}$ sini, B $\frac{1}{18}$ ini, C $\frac{1}{24}$ ünü doldurur. 1 saatte toplamda havuzun

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{13}{72} \text{ si dolar.}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ saatte havuzun } \frac{13}{72} \text{ si doluyor.} \\ x \text{ saatte havuzun } \frac{72}{72} \text{ si dolar.} \end{array}$$

$$x \cdot \frac{13}{72} = \frac{72}{72} \Rightarrow x = \frac{72}{13} \cong 6 \text{ saatte dolar.}$$

Yandaki çözüm değişkenlerle ifade edilecek olursa

$$\begin{array}{l} 1 \text{ saatte } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \text{ lik kısım dolar.} \\ x \text{ saatte } 1 \text{ (tamamı) dolar.} \end{array}$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{x} \text{ elde edilir}$$

Bir havuzu sırasıyla A, B, C saat sürede dolduran muslukların hepsi aynı anda açıldığında havuz x saatte doluyorsa, x,A,B,C arasında $\frac{1}{x} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ bağıntısı vardır.

b. 3 saatte A musluğu havuzun $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ünü doldurur.

4,5 = $\left(\frac{9}{2}\right)$ saatte B musluğu havuzun $\frac{9/2}{18} = \frac{1}{4}$ ünü doldurur.

Toplamda havuzun $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ si dolmuş olur. C musluğu havuzun tamamını 24 saatte doldurursa yarısı dolu olan havuzu $\frac{24}{2} = 12$ saatte doldurur.

Örnek : Bir halıyı Hasan 6 günde, Hüseyin 4 günde, kağan ise 12 günde dokumaktadır.

- Üçü birlikte halıyı kaç günde dokurlar?
- Hüseyin 1 gün çalıştıktan sonra üçü birlikte kaç günde dokurlar.
- Hasan 1,5 gün, Hüseyin 2 gün çalışırsa geriye Kağan'a kaç günlük iş kalır?
- İşin tamamının 1 günde bitmesi için 4. kişinin işin tamamını kaç günde bitiren bir kişi olması gerekir?

Çözüm : a. Hüseyin işin tamamını 4 günde bitirebiliyorsa üçü birlikte çalıştığında iş 4 günden daha kısa sürede biter.

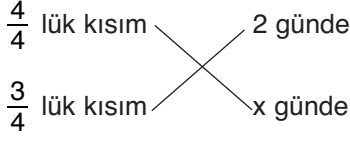
1 günde işin $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ si biter. O hâlde işin tamamı

$$\begin{array}{l} 1 \text{ günde } \frac{1}{2} \text{ si} \\ x \text{ günde } \frac{2}{2} \text{ si} \end{array}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ günde biter.}$$

b. Hepsı birlikte işin tamamını 2 günde bitiriyorlarsa Hüseyin 1 gün tek çalışırsa işin tamamı 2 günden fazla sürer.

Hüseyin 1 günde işin $\frac{1}{4}$ ünü yapar geriye $\frac{3}{4}$ lük kısım kalır.



$$x = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ günde işin tamamı biter.}$$

O hâlde toplamda $1 + 1,5 = 2,5$ günde biter.

c. Hasan 1,5 günde işin $\frac{3/2}{6} = \frac{1}{4}$ ünü bitirir. Hüseyin 2 günde işin $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ sini bitirir. Geriye işin $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ lük kısmı kalır. Kağan işin tamamını 12 günde bitiriyorsa 4 te birini $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ günde bitirir.

ç. Üç işçi işin tamamını 2 günde bitirmektedir. 1 günde işin yarısı biter yarısı $\left(\frac{1}{2}\right)$ lik kısmını 1 günde yapabilecek 4. bir işçi gerekir.

1 günde işin $\frac{1}{2}$ sini yapan 4. işçi, işin tamamını $\frac{1}{1/2} = 2$ günde bitirir.

O hâlde 4. işçinin işin tamamını 2. günde yapabilecek olması gerekir.

Örnek : Yandaki tabloda bir sınıftaki öğrencilerin soru çözme hızları verilmiştir. Buna göre problemler kuralım.

Çözüm :

1. Ahmet'in 1 günde çözdüğü testleri Mehmet kaç günde çözer?
2. Ali ve Veli'nin birlikte 2 günde çözdüğü sayıda test sorusunu Tunç kaç günde çözer?

	Gün
Ahmet	x
Mehmet	5x
Ali	2x
Veli	3x
Tunç	4x

3. Aynı süre içinde öğrencilerin en fazla soru çözendene, en az soru çözene doğru sıralayınız.



ALİŞTIRMALAR

1. Hangi sayının yarısının 2 eksiğinin $\frac{1}{4}$ 'i, 5 olur?
2. Bilet gişesindeki kuyrukta, Ceren önden dokuzuncu, Ceyda arkadan on birinci sıradadır. Ceren ile Ceyda arasında 5 kişi bulunup Ceyda gişeye daha yakın olduğuna göre bu kuyrukta kaç kişi vardır?
3. Zeliha ile Arzu'nun yaşları toplamı 30 dur. Zeliha, Arzu'nun yaşında iken Arzu 12 yaşında idi. Buna göre Zeliha bugün kaç yaşındadır?
4. 30 yaşındaki bir babanın, 2 çocuğunun yaşları toplamı 10 dur. Kaç yıl sonra, babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamına eşit olur?
5. Aralarında 300 km mesafe bulunan A ve B kentlerinden aynı anda iki araç birbirlerine doğru saatte 40 km ve saate 60 km hızlarıyla harekete başlıyorlar. Kaç saat sonra karşılaşırlar?
6. A dan saatteki hızı 40 km olan bir araçla, B den saatteki hızı 50 km olan başka bir araç aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar. Araçlar birbirleriyle karşılaştıklarında A ya gidenin 4 saatlik yolu kaldığına göre A ile B arası kaç km dir?

7. 4 sayısı, 16'nın yüzde kaçındır?
8. % 40 kârla satılırken satış fiyatı üzerinden % 10 indirim yapılarak satılan bir maldan % kaç kâr edilir?
9. 2000 TL'nin % 80'den 3 aylık faizi ne kadardır?
10. Tuz oranı % 70 olan 600 g tuzlu su karışımının yarısı dökülüyor. Dökülen miktar kadar % 10 u tuz olan başka bir karışım ilave ediliyor. Yeni karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?
11. Bir havuza açılan 2 musluktan bir havuzu 9 günde değeri 6 günde doldurmaktadır. İlk musluk 6 saat açık kaldıktan sonra diğeri de açılıyor, havuz kaç günde dolar?

4. TEST

1. $2^7 \cdot 8^3 \cdot 25^8$ çarpımının en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?
A. 10^{15} B. 10^{16} C. 10^{17} D. 10^{18} E. 10^{19}
2. $(443)_x = 227$ ise x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
A. 7 B. 6 C. 5 D. 4 E. 3
3. $(123)_4 + (234)_5$ toplamının 6 tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
A. $(200)_6$ B. $(210)_6$ C. $(230)_6$ D. $(240)_6$ E. $(250)_6$
4. $a > 2$ olmak üzere $2a^3 + a$ sayısının a tabanındaki yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?
A. $(21)_a$ B. $(201)_a$ C. $(2010)_a$ D. $(2011)_a$ E. $(2111)_a$
5. 24^x sayısının 96 tane doğal sayı böleni olduğuna göre x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7
6. $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $27! \cdot 15 = k \cdot 6^n$ olmak üzere n sayısının en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?
A. 12 B. 13 C. 14 D. 15 E. 16
7. $1! + 3! + 5! + 7! + \dots + 157!$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?
A. 0 B. 2 C. 4 D. 6 E. 7
8. $2a3b$ dört basamaklı sayısı, 9 ile tam bölünebilmekte ve 5 ile bölümünden 3 kalanını vermektedir. Buna göre a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?
A. 18 B. 16 C. 12 D. 9 E. 6
9. 24 litre su, 32 litre meyve suyu ve 36 litre limonata hacimleri eşit şişelere hiç artmamak koşuluyla doldurulacaktır. En az kaç şişe kullanılır?
A. 6 B. 8 C. 9 D. 17 E. 23
10. 12, 15 ve 18 sayılarına tam bölünebilen üç basamaklı en büyük sayı kaçtır?
A. 900 B. 960 C. 980 D. 990 E. 996
11. $[(-5 - 5) : (+5 - 3)] - [-8 - (-7)]$ işleminin sonucu kaçtır?
A. -7 B. -5 C. -4 D. -1 E. 4
12. a, b, c ardışık üç çift sayı olmak üzere, $a < b < c$ ise $(b - a)^3 + (a - c)^2$ ifadesinin eşiti kaçtır?
A. 12 B. 18 C. 24 D. 28 E. 30
13. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $a^2 - b^2 = 23$ ise $a + b$ kaçtır?
A. 13 B. 15 C. 20 D. 23 E. 33
14. $12^{33} + 64^{21}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4
15. 1976^{1978} sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?
A. 2 B. 3 C. 5 D. 6 E. 8
16. x sayısının 6 ya bölümünden kalan 5 ve y sayısının 6 ya bölümünden kalan 4 ise $x^2 \cdot y^2$ sayısının 6 ya bölümünden kalan kaçtır?
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

17. $\frac{0,8}{\frac{1}{0,2} - 0,8}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A. -1 B. $-\frac{4}{21}$ C. $\frac{4}{21}$ D. 1 E. $\frac{21}{4}$

18. $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{14}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A. $\frac{1}{42}$ B. $\frac{7}{42}$ C. $\frac{11}{42}$ D. $\frac{13}{42}$ E. $\frac{17}{42}$

19. a ve b aralarında asal sayılardır. $\frac{a}{b} = 0,75$ ise a . b kaçtır?

- A. 12 B. 48 C. 108 D. 120 E. 150

20. Aşağıdakilerden hangisi $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{2}$ sayısı arasında değildir?

- A. $\frac{11}{30}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{13}{30}$ D. $\frac{7}{15}$ E. $\frac{8}{15}$

21. $A = (-\infty, 3)$ ve $B = [2, +\infty)$ olduğuna göre $B \setminus A$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A. $[3, 5)$ B. $(3, 5]$ C. $(3, 5)$ D. $[3, 5]$ E. $[3, +\infty)$

22. $(a + 1)x - \frac{x}{3} + 5 = 2a - 1$ denkleminin çözüm kümesi $\{1\}$ ise a sayısı kaçtır?

- A. 6 B. $\frac{19}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. 7 E. 8

23. $\frac{2 - \frac{1}{2-x}}{3 + \frac{1}{2-x}} = 1$ ise x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

24. $-1 \leq x \leq 3$ ve $-2 \leq y \leq 1$ ise $x - 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A. -36 B. -32 C. -27 D. -24 E. -21

25. $a = \frac{2b-1}{3b+2}$ ifadesinde a nın hangi değeri için b bulunamaz?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$ E. 2

26. $|a + b - 3| + |2a - b - 3| = 0$ ise a + b kaçtır?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

27. $3|x + 1| + 5 = 2$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A. $\{0\}$ B. $\{-2\}$ C. $\{0, -2\}$ D. $\{1\}$ E. \emptyset

28. $|a - 3| + |a + 5| + |a - 1|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14 E. 16

29. $1 \leq |x - 1| \leq 4$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. 12

30. $(5^{-1})^2 \cdot (-5^{-3})^4 \cdot (-5)^3$ işleminin eşiti kaçtır?
 A. -5^{-11} B. -5^{11} C. -5^{11} D. 5^{-11} E. 5^{-12}
31. $(3^{-1} + 2^{-2})^{-2}$ işleminin sonucu kaçtır?
 A. $\frac{48}{144}$ B. $\frac{49}{144}$ C. 1 D. 2 E. $\frac{144}{49}$
32. $2^x = a$ ise $\frac{4^{x-2}}{8^{-x-1}}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A. $\frac{a^5}{2}$ B. $2a^5$ C. a^6 D. $\frac{1}{3}a^5$ E. $3a^5$
33. $\frac{7^n \cdot 7^n \cdot 7^n \dots 7^n}{n+1 \text{ tane}} = 49^3$ ise n kaçtır?
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5
34. $\frac{3^x \cdot 3^x \cdot 3^x \cdot 3^x}{3^x + 3^x + 3^x} = 0,3$ ise x aşağıdakilerden hangisidir?
 A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$ E. 2
35. $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,64} - \sqrt{0,01}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
 A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{9}{5}$ E. 2
36. $\frac{\sqrt{4^{x-2}}}{\sqrt[4]{16^{5x-2}}} = \frac{1}{64}$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?
 A. $-\frac{3}{2}$ B. -1 C. 0 D. $\frac{3}{2}$ E. 1
37. $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{5}$ E. $2\sqrt{5}$
38. $\frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2-\sqrt{2}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
 A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 0 D. $\sqrt{2}$ E. $2\sqrt{2}$
39. $\frac{a}{3} = \frac{b}{5}$ ve $\frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ ise $\frac{a}{c}$ oranı kaçtır?
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{4}{5}$ E. $\frac{9}{10}$
40. 12 işçi 6, parça işi 2 günde bitirebiliyorsa 8 işçi 30 parça işi kaç günde bitirebilir?
 A. 12 B. 13 C. 14 D. 15 E. 16
41. Bir havuzun, biri 6 diğeri 8 saatte havuzu dolduran iki vanası ile 12 saatte boşaltan bir vanası vardır. Hepsi birlikte açılırsa havuz kaç saatte dolar?
42. 172 TL ye satılan mal önce %10 zam daha sonra son satış fiyatı üzerinden %9 indirimle satılıyor. Malın son fiyatı ilk fiyatından ne kadar fazla veya azdır?

SÖZLÜK

A

açık önerme: İçerisinde değişken bulunan ve bu değişkenin alacağı değerle doğruluğu veya yanlışlığı kesinleşen önerme.

aksiyom: Doğruluğu ispatsız kabul edilen önerme.

analitik düzlem: Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

apsis: Koordinat düzlemindeki bir noktanın birinci bileşeni (x).

apsisler eksen: Koordinat düzlemini oluşturan yatay eksen (x eksen).

aralarında asal sayılar: “1”den başka ortak böleni olmayan doğal sayı çifti.

asal sayı: “1” ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük tam sayı.

asal çarpanlara ayırma: Herhangi bir sayma sayısını, asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazma.

ayrık kümeler: Ortak elemanları olmayan kümeler.

B

bağıntı: Bir kartezyen çarpımının alt kümesi.

bazı (en az bir) niceleyicisi: Önüne geldiği önerme kalıbını, en az bir değer için doğrulaması gereken niceleyici (“ \exists ” sembolü ile gösterilir.).

bileşik önerme: En az iki önermenin “ve, veya, ise, ancak ve ancak” bağlaçları ile birleşmesinden oluşan önerme.

birim fonksiyon: Tanım kümesinin her elemanını, yine kendisine eşleyen fonksiyon.

boş küme: Hiç elemanı olmayan küme.

Ç

çarpanlara ayırma: Bir ifadeyi kendisinden daha basit ifadelerin çarpımı biçiminde yazma.

çelişki: Doğruluk değeri daima 0 (sıfır) olan önerme.

çift gerektirme: Her zaman doğru olan iki yönlü koşullu önerme.

D

denk önermeler: Doğruluk değeri aynı olan önermeler.

etkisiz (birim) eleman: A kümesi üzerinde bir “ \star ” işlemi verilsin. $\forall x \in A$ için, $x \star e = e \star x = x$ eşitliğini sağlayan e elemanı.

E

evrensel küme: Üzerinde çalışılan konu ile ilgili tüm elemanları içeren küme.

evrensel niceleyici: “ \forall ” ile gösterilen ve “her” veya “bütün” diye okunan sembol.

F

fonksiyonun değer kümesi: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonundaki B kümesi.

fonksiyonun görüntü kümesi: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonundaki $f(A)$ kümesi.

fonksiyonun tanım kümesi: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonundaki A kümesi.

G

gerçek sayılar: Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan kümenin elemanları. Reel sayılar.

gerektirme: Her zaman doğru olan koşullu önerme.

H

hipotez: $p \Rightarrow q$ biçimindeki teoremden, p önermesi (verilenler).

hüküm: $p \Rightarrow q$ biçimindeki teoremden, q önermesi (istenilen).

i

irrasyonel sayılar: Rasyonel olmayan (devirli ondalık açılımları olmayan) sayılar.

ispat: Bir teoremin hükmünün doğru olduğunun gösterilmesi.

işlem: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times A$ 'nın bir alt kümesinden herhangi bir $B \subset R$ ye tanımlanan iki değişkenli fonksiyon.

K

kartezyen çarpım: Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden seçilerek oluşturulan ikililerin kümesi ($A \times B$).

koşullu önerme: $p \Rightarrow q$ biçimindeki önerme.

M

matematiksel sistem: Bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış bir veya daha fazla işlemin oluşturduğu sistem.

modüler aritmetik: Tam sayıların 1'den büyük bir doğal sayı ile bölümünden elde edilen kalan sınıfları ile yapılan aritmetik.

muhakeme: Usa vurma. Bir sorunu çözmek için çıkar yol arama.

mutlak değer: Sayı doğrusu üzerinde sayının orijine uzaklığı.

O

OBEB: Sıfırdan farklı, en az iki sayıyı bölebilen en büyük sayı.

OKEK: Sıfırdan farklı, en az iki sayının bölebildiği en küçük sayı.

ordinat: Koordinat düzlemindeki bir noktanın ikinci bileşeni (y).

Ö

önerme: Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren cümle.

öz alt küme: Bir kümenin kendisi dışındaki alt kümelerinin her biri.

T

teorem: $p \equiv 1$ iken doğru olan $p \Rightarrow q$ gerektirmesi.

totoloji: Doğruluk değeri daima 1 olan bileşik önerme.

V

varlıksal niceleyici: "∃" sembolü ile gösterilen bazı niceleyicisi.

Venn şeması: Bir kümenin elemanlarının, kapalı bir eğri içinde yazılarak gösterimi.

KAYNAKÇA

Foresma, Scott, **Exploring Mathematics**, USA, 1994.

Halıcı, Emrehan, **Zekâ Oyunları**, TÜBİTAK Yayınları, Ankara, 2005.

Real Life Math, **Scholastics Professional Books**, Jefferson City, 2003.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, **Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu (9-12. Sınıflar)**, MEB, Ankara, 2005.

Türk Dil Kurumu, **Türkçe Sözlük**, Ankara, 2005.

Türk Dil Kurumu, **Yazım Kılavuzu**, Ankara, 2008.

SEMBOLLER

\wedge	ve	$a \equiv b(\text{mod}m)$	a denktir b modül m
\vee	veya	$[a, b]$	a, b kapalı aralığı
\Rightarrow	ise	(a, b)	a, b açık aralığı
\Leftrightarrow	ancak ve ancak	\bar{a}	a'nın denklik sınıfı
p'	p önermesinin değili	N	doğal sayılar kümesi
\neq	eşit değildir	N^+	pozitif doğal sayılar kümesi
\equiv	denktir	Z	tam sayılar kümesi
\neq	denk değil	Z^+	pozitif tam sayılar kümesi
\in	elemanıdır	Z^-	negatif tam sayılar kümesi
\notin	elemanı değildir	Q	rasyonel sayılar kümesi
\subset	alt küme	Q'	irrasyonel sayılar kümesi
$\not\subset$	alt küme değil	R	gerçek sayılar kümesi
\cup	birleşim	$\sqrt{\quad}$	karekök
\cap	kesişim	$\sqrt[n]{\quad}$	n inci dereceden kök
$\emptyset, \{ \}$	boş küme	$<$	küçüktür
$A / B, A - B$	A kümesinin B kümesinden farkı	\leq	küçüktür veya eşittir
\exists	bazı, en az bir	$>$	büyüktür
\forall	her, bütün	\geq	büyüktür veya eşittir
A'	A kümesinin tümleyeni	$ x $	x in mutlak değeri
$A \times B$	A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı		
$f: A \rightarrow B$	A'dan B'ye f fonksiyonu		
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi		
$g \circ f$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi		

CEVAP ANAHTARLARI

1. TEST

1	D
2	B
3	C
4	A
5	B
6	C
7	B
8	C
9	D
10	E
11	B
12	C
13	D
14	C
15	E

2. TEST

1	E
2	C
3	D
4	B
5	D
6	D
7	D
8	C
9	D
10	C
11	D
12	E
13	B
14	E
15	C

3. TEST

1	A
2	D
3	B
4	C
5	A
6	C
7	A
8	B
9	C
10	B
11	D
12	E
13	C
14	A
15	C
16	D
17	C
18	B
19	D
20	D
21	A

4. TEST

1	B
2	A
3	D
4	C
5	C
6	C
7	E
8	E
9	E
10	A
11	C
12	C
13	D
14	A
15	D
16	C
17	C
18	C
19	A
20	E
21	E
22	C
23	B
24	A
25	B
26	C
27	E
28	A
29	C
30	A
31	E
32	A
33	B
34	A
35	B
36	D
37	E
38	B
39	E
40	D