

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

10. SINIF

DERS KİTABI

YAZARLAR

KOMİSYON



DEVLET KİTAPLARI

İKİNCİ BASKI

....., 2012

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI: 5659
DERS KİTAPLARI DİZİSİ: 1524

12.?.Y.0002.4170

Her hakkı saklıdır ve Milli Eğitim Bakanlığı aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri
kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayınlanamaz.

EDİTÖR

Prof. Dr. Hüseyin ALKAN

DİL UZMANI

Dr. Şerife KAÇMAZ

GÖRSEL TASARIM

Aysun ORAN

ÖLÇME-DEĞERLENDİRME UZMANI

Nuray SUNAR

PROGRAM GELİŞTİRME UZMANI

Didem AKBULUT

REHBERLİK UZMANI

Ahmet SEYREK

ISBN 978-975-11-3561-2

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 17.12.2010 gün ve 230 sayılı kararı ile
ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 19.03.2012 gün ve
3398 sayılı yazısı ile ikinci defa 144.448 adet basılmıştır.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl...
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
"Medeniyet!" dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş! Yurduma alçakları uğratma, sakın.
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın...
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri "toprak!" diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da, bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki fedâ?
Şühedâ fışkıracak toprağı sıksan, şühedâ!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüdâ.

Ruhumun senden, İlâhi, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar-ki şahadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerâhamdan, İlâhi, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerred gibi yerden na'sım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalar sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl:
Hakkıdır, hür yaşamış, bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır, Hakk'a tapan, milletimin istiklâl!

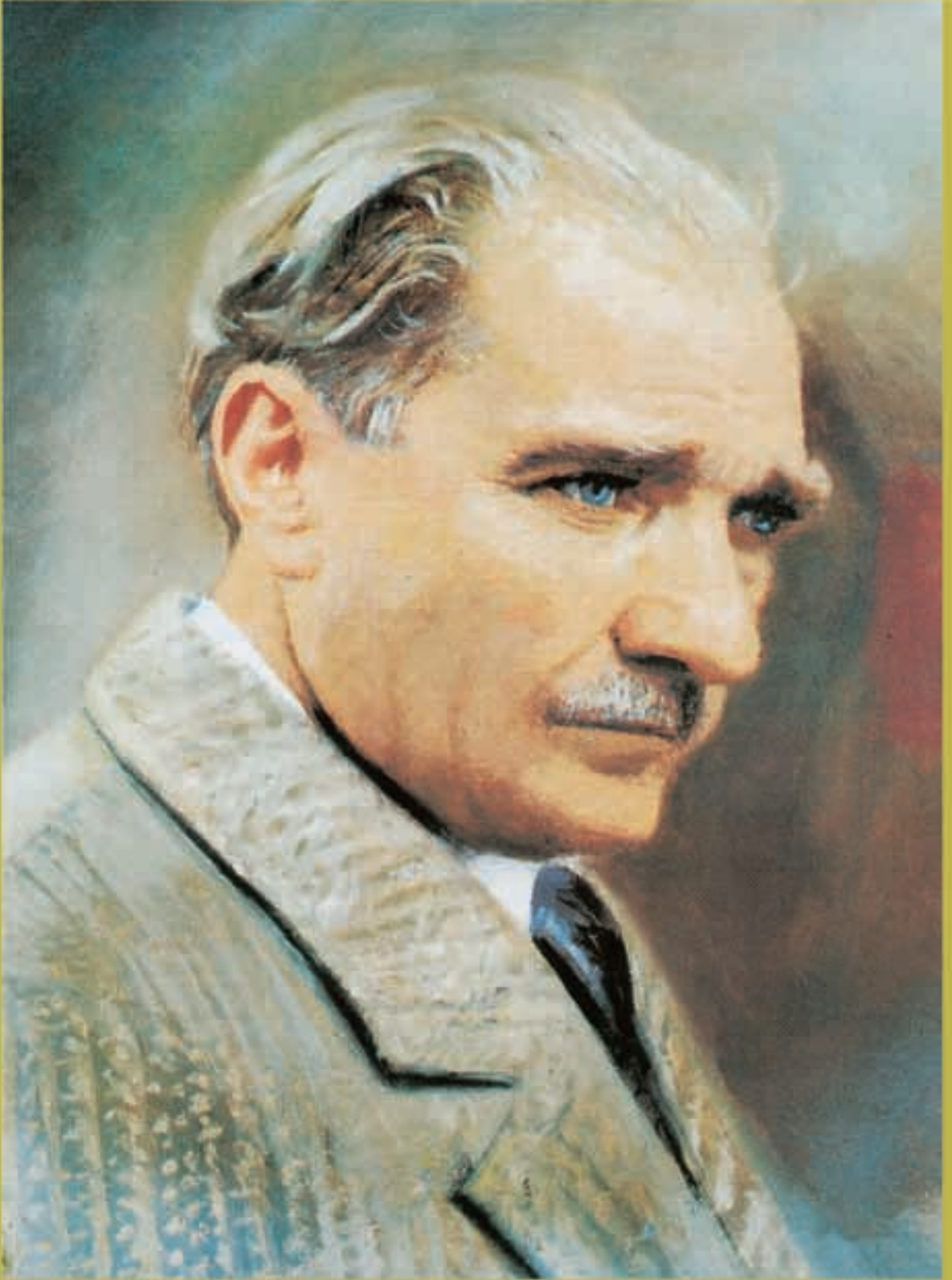
Mehmet Âkif ERSOY

ATATÜRK'ÜN GENÇLİĞE HİTABESİ

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk cumhuriyetini, ilelebet, muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin, en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni, bu hazineden, mahrum etmek isteyecek, dahilî ve haricî, bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok nâmüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın, bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dahilinde, iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlilerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi, vazifen; Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır! Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asîl kanda, mevcuttur!



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

MATEMATİKSEL SEMBOLLER.....	9
ORGANİZASYON ŞEMASI.....	10

1.BÖLÜM

POLİNOMLAR

POLİNOM KAVRAMI.....	12
POLİNOMLARLA FONKSİYONLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	15
SABİT POLİNOM VE SIFIR POLİNOMU.....	17
İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ.....	18
POLİNOMLAR KÜMESİNDE İŞLEMLER.....	20
POLİNOMLAR KÜMESİNDE TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ.....	21
POLİNOMLARIN TOPLAMA İŞLEMİNE GÖRE ÖZELLİKLERİ.....	24
POLİNOMLARDA ÇARPMA İŞLEMİ.....	26
POLİNOMLARIN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE ÖZELLİKLERİ.....	28
POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ.....	31
$P(X)$ POLİNOMUNUN $Q(X)$ POLİNOMUNA BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA.....	34
$P(X)$ POLİNOMUNUN $AX+B$ İLE BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA.....	34
$P(X)$ POLİNOMUNUN X^n-A İLE BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA.....	37
BİR $P(X)$ POLİNOMUNUN $(X-A)$ VE $(X-B)$ İLE AYRI AYRI BÖLÜMÜNDEN KALAN İLE $(X-A).(X-B)$ İLE BÖLÜMÜNDEN KALAN ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	39
ÇARPANLARA AYIRMA.....	41
İNDİRGENEMEYEN POLİNOMLAR VE ASAL POLİNOMLAR.....	41
ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ.....	43
ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA YÖNTEMİ.....	43
GRUPLANDIRARAK ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA YÖNTEMİ.....	45
X^2+BX+C VE AX^2+BX+C BİÇİMİNDEKİ POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI.....	48
ÖZDEŞLİKLERDEN YARARLANARAK ÇARPANLARA AYIRMA.....	51
TERİM EKLEYEREK VEYA ÇIKARARAK ÇARPANLARA AYIRMA.....	60
$X^N.Y^N$ VE X^N+Y^N ($N \in \mathbb{N}$ VE $N \geq 2$) BİÇİMİNDE POLİNOMLARININ ÇARPANLARINA AYRILMASI.....	61
DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİYLE ÇARPANLARA AYIRMA.....	62
İKİ YA DA DAHA ÇOK POLİNOMUN ORTAK BÖLENLERİNİN EN BÜYÜĞÜ (OBEB) VE ORTAK KATLARININ EN KÜÇÜĞÜ (OKEK).....	64
RASYONEL İFADELER VE DENKLEMLER.....	65
RASYONEL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ.....	66
RASYONEL DENKLEMLER.....	69
RASYONEL İFADENİN BASİT RASYONEL İFADELERİN TOPLAMI OLARAK YAZILMASI.....	71
BÖLÜM SONU SORULARI.....	73
POLİNOMLAR TESTİ.....	75

2.BÖLÜM

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER VE FONKSİYONLAR

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER.....	79
İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİ VE ÇÖZÜM KÜMESİ.....	79
İKİNCİ DERECEDEN BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİ VEREN BAĞINTI.....	83
İKİNCİ DERECEDEN BİR DENKLEMİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR.....	87
KÖKLERİ VERİLEN İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMİ KURMA.....	91
İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜM KÜMELERİNİN BULUNMASI.....	93
İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ.....	96
EŞİTSİZLİKLER.....	99

$f(x) = ax+b$ FONKSİYONUNUN ALACAĞI DEĞERLERİN İŞARETİ VE BİRİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER.....	98
ax^2+bx+c FONKSİYONUNUN ALACAĞI DEĞERLERİN İŞARETİNİN İNCELENMESİ VE İKİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER.....	101
BİRİNCİ VE İKİNCİ DERECEDEEN POLİNOMLARIN ÇARPIMI VEYA BÖLÜMÜ BİÇİMİNDE VERİLEN EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜMÜ.....	106
BİRİNCİ VEYA İKİNCİ DERECEDEEN EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	110
İKİNCİ DERECEDEEN BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİN VARLIĞI VE İŞARETİNİN İNCELENMESİ.....	112
PARAMETRE İÇEREN İKİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİN VARLIĞININ İNCELENMESİ.....	114
İKİNCİ DERECEDEEN FONKSİYONLAR.....	116
İKİNCİ DERECEDEEN FONKSİYONLARIN EN BÜYÜK YADA EN KÜÇÜK DEĞERİNİ BULMA.....	116
İKİNCİ DERECEDEEN FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ.....	118
BAZI NOKTALARI VERİLEN İKİNCİ DERECEDEEN FONKSİYONUN BULUNMASI.....	122
İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİK VE EŞİTSİZLİK SİSTEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİNİN GRAFİK ÜZERİNDE GÖSTERİLMESİ.....	127
BÖLÜM SONU SORULARI.....	130
İKİNCİ DERECEDEEN DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER VE FONKSİYONLAR TESTİ.....	133

3.BÖLÜM

TRİGONOMETRİ

DİKÜÇGEDE DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI.....	138
$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ LİK AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI.....	140
TÜMLER AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	142
BİR DAR AÇININ TRİGONOMETRİK ORANLARINDAN BİRİ BELLİ İKEN DİĞER TRİGONOMETRİK ORANLARININ BULMA.....	144
YÖNLÜ AÇILAR.....	146
BİRİM ÇEMBER.....	149
AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ.....	150
AÇININ ESAS ÖLÇÜSÜNÜN BULUNMASI.....	154
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR.....	155
SİNÜS VE KOSİNÜS FONKSİYONLARI.....	156
TANJANT VE KOTANJANT FONKSİYONLARI.....	159
SEKANT VE KOSEKANT FONKSİYONLARI.....	162
İKİNCİ, ÜÇÜNCÜ VE DÖRDÜNCÜ BÖLGEDEKİ AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI.....	166
BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR ALTINDAKİ GÖRÜNTÜSÜNÜ TRİGONOMETRİK DEĞER TABLOSUNDA BULMA.....	171
TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU.....	177
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI.....	173
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ.....	175
TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR.....	179
ÜÇGEDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR.....	183
SİNÜS, KOSİNÜS TEOREMLERİ VE ÜÇGENİN ALANI.....	183
TOPLAM VE FARK FORMÜLLERİ.....	195
İKİ SAYININ TOPLAM VE FARKLARININ TRİGONOMETRİK ORANLARI.....	195
YARIM AÇI FORMÜLLERİ.....	202
DÖNÜŞÜM VE TERS DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ.....	206
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER.....	212
$\sin x = a, \cos x = a, \tan x = a, \cot x = a$ BİÇİMİNDEKİ TRİGONOMETRİK DENKLEMLER.....	212
$a \cos x + b \sin x = c$ BİÇİMİNDEKİ TRİGONOMETRİK DENKLEMLER.....	217
BÖLÜM SONU SORULARI.....	219
TRİGONOMETRİ TESTİ.....	222

Matematiksel Semboller**Matematiksel Sembollerin Anlamları**

\wedge	: ve
\vee	: veya
\forall	: her, bütün (evrensel niceleyici)
\exists	: en az bir, bazı (varlıksal niceleyici)
\Rightarrow	: ise, gerektirme
\Leftrightarrow	: çift gerektirme (ancak ve ancak)
\emptyset	: boş küme
\in	: elemanı
\notin	: elemanı değil
\subset	: alt küme
$\not\subset$: alt küme değil
\cup	: birleşim işlemi
\cap	: kesişim işlemi
$=$: eşittir
\neq	: eşit değildir
$<$: eşitsizlik (küçüktür)
\leq	: eşitsizlik (küçük veya eşittir)
$>$: eşitsizlik (büyüktür)
\geq	: eşitsizlik (büyük veya eşittir)
\mathbb{N}^+	: sayma sayıları kümesi
\mathbb{N}	: doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^+	: pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}^-	: negatif tam sayılar kümesi
\mathbb{Q}	: rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{Q}'	: irrasyonel sayılar kümesi
\mathbb{R}	: gerçek sayılar kümesi
$ x $: x'in mutlak değeri
$[a, b]$: kapalı aralık
(a, b)	: açık aralık
$[a, b)$: a'dan kapalı, b'den açık aralık
$(a, b]$: a'dan açık, b'den kapalı aralık
$A \times B$: A kartezyen çarpım B
$A - B$ veya A/B	: A fark B
$f: A \rightarrow B$: A'dan B'ye, f fonksiyonu
$b a$: b, a'yı tam böler
$a \equiv b \pmod{m}$: a denktir b, modül m
\bar{a}	: denklik sınıfı
\mathbb{Z}/m	: m modülüne göre kalan sınıflarının kümesi
$\sqrt{\quad}$: karekök
$\sqrt[n]{\quad}$: n'inci dereceden kök

ORGANİZASYON ŞEMASI

İçindekiler bölümünde iki saatlik matematik programına ait olan konular

Kazanıma ait başlık

Kazanıma ait keşfettirici çalışma

Etkinlikte sorgulama basamağı

Etkinlikte sonuç basamağı

İşlenişe ait çözümlü örnek

Bilgi notu

İşlenişe ait pekiştirme soruları

Ünite ile ilgili sorular

Motive edici çalışma

İki saatlik matematik programına ait olan sayfalar

İki saatlik matematik programına ait olan bölüm sonu soruları

EŞİTSİZLİKLER.....97

TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU

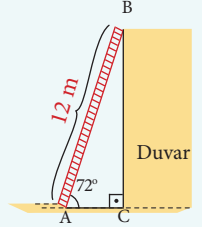


Etkinlik

Yandaki şekilde 12 m uzunluğundaki bir merdiven, taban düzlemiyle 72° lik açı yapacak şekilde duvara yaslanmıştır.

- Trigonometrik değerler tablosundan 72° lik açının sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.

☞ F Bulduğunuz bu değerler yardımıyla duvarın yüksekliğini ve IACI nu bulunuz.



Örnek

$\sin 42^\circ + \cos 24^\circ$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

Trigonometrik değerler tablosundan yararlanarak

$\sin 42^\circ = 0,6691$, $\cos 24^\circ = 0,9135$ bulunur.

Buradan, $\sin 42^\circ + \cos 24^\circ = 0,6691 + 0,9135 = 1,5826$ olur.



Tanım ve Bilgi

İki terimin küplerinin toplamı $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$,
iki terimin küplerinin farkı $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ dir.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen değerleri trigonometri cetveli ya da hesap makinesi yardımıyla bulunuz.

a) $\sin 47^\circ$

b) $\tan 512^\circ$

c) $\cos (-147^\circ)$

POLİNOMLAR TESTİ

15. $x-y = y-z = 5$ ise $x^2-2y^2+z^2$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 0

B) 25

C) 50

D) 75

E) 100



Motivasyon



Piri Reis'in trigonometri bilmeden böyle bir harita hazırlamasının mümkün olmadığı günümüz bilim insanlarının da dile getirdiği bir gerçektir.

Bugün bile bazı haritalardaki yanlışların Piri Reis'in haritasına bakılarak düzeltiliği bilinmektedir.

1. BÖLÜM

POLİNOMLAR

ALT ÖĞRENME ALANLARI

- Polinom kavramı
- Polinomlar kümesinde işlemler
- Çarpanlara ayırma
- Rasyonel ifadeler ve denklemler
- Ölçme ve değerlendirme soruları

Eski çağlardan beri polinom kavramı konusunda çalışmalar yapıldığı ve polinomların çözümleri hususunda pek çok araştırmacının çalıştığı bilinmektedir. Örneğin, W.G.Horner (Hornır) 18. yüzyılda polinomların sayısal çözümleri ile ilgili kendi adıyla bilinen kuralı ortaya koymuştur. 19. yüzyılda B. Bolzano polinom fonksiyonlarının her yerde sürekli olduğunu kanıtlamıştır. Günümüzde ise özellikle fonksiyonların yaklaşık değerlerini bulmada ve bazı diferansiyel denklemlerin çözümünde polinomları kullanmanın gerekliliği bilinmektedir.

POLİNOM KAVRAMI



Motivasyon



Bir voleybol topuna yerden 1 m yüksekten yukarıya doğru vuruluyor. Topun t sn. sonraki yerden yüksekliğini veren bağıntı $-2t^2+9t+1$ olsun. Vurulduktan 1 sn. sonra topun yerden yüksekliğini bulunuz. Burada kullanılan modeli, ilköğretimde öğrendiğiniz cebirsel ifadeler ve lise 1. sınıfta öğrendiğiniz fonksiyon konusu ile ilişkilendiriniz.



Etkinlik

Aşağıda iki farklı grupta verilen fonksiyonların terimlerinin derecelerini inceleyiniz.

I. GRUP

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$f_2(x) = 4x^2 + 2x + 6$$

$$f_3(x) = 12x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

$$f_4(x) = \frac{3x+1}{2}$$

$$f_5(x) = \sqrt{2} x^2 + 7x - 2$$

II. GRUP

$$g_1(x) = \sqrt{x} + 3$$

$$g_2(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-2} + 2$$

$$g_3(x) = 2x^4 - 3x^{-1} + 4\sqrt{x} - 5$$

$$g_4(x) = \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$g_5(x) = 2x^3 - \sqrt[3]{x} + 4x^{-\frac{1}{2}} + 1$$

- Bütün terimlerinin dereceleri doğal sayı olan fonksiyonlar hangi grupta bulunmaktadır?
- Birinci grupta verilen fonksiyonların en büyük dereceli terimlerini, bu terimlerin katsayılarını ve sabit terimini bulunuz.

☞ Bu iki gruptaki fonksiyonları incelediğinizde grupları birbirinden ayıran temel özelliğin ne olabileceğini tartışınız.



Örnek

Aşağıda verilen fonksiyonları inceleyelim. Terimlerinin dereceleri, doğal sayı olan fonksiyonları gösterelim.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $m(x) = x + \frac{1}{x} + x^{-2}$ c) $p(x) = 2x^4 + 8x - 1$ ç) $h(x) = \sqrt{x} + 5$

ÇÖZÜM

a) $f(x)$ in $3x^2$ teriminin derecesi 2 dir.

b) $m(x)$ in x , x^{-1} ve x^{-2} terimlerinin dereceleri sırasıyla 1, -1 ve -2 dir.

c) $p(x)$ in $2x^4$, $8x$ ve -1 terimlerinin dereceleri sırasıyla 4, 1 ve 0 dir.

ç) $h(x)$ in \sqrt{x} ve 5 terimlerinin dereceleri sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve 0 dir.

Terimlerinin dereceleri doğal sayı olan fonksiyonlar $f(x)$ ve $p(x)$ dir.



Tanım ve Bilgi

n doğal sayı ve katsayılar gerçekteki sayıyı göstermek üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

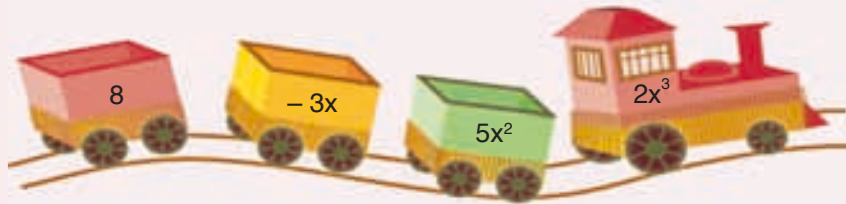
ifadesine n . dereceden gerçekteki katsayılı polinom (çok terimli) denir.

Gösterdiğimiz bu polinomda:

a_n : Polinomun başkatsayısıdır.

a_0 : Polinomun sabit terimidir.

n : Polinomun derecesidir; $\text{der}[P(x)] = n$ biçiminde gösterilir.



En Büyük Dereceli Terim

Sabit Terim

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 8$$

Polinomun Başkatsayısı

Polinomun Derecesi : $\text{der}[P(x)]$



Örnek

1. $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ polinomunun;

- a) derecesini,
- b) başkatsayısını,
- c) sabit terimini,
- ç) katsayılar toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

- a) En büyük dereceli terim $4x^3$ olduğundan polinomun derecesi 3 olup, $\deg[P(x)] = 3$ tür.
- b) En büyük dereceli terimin katsayısı başkatsayı olduğundan $P(x)$ polinomunun başkatsayısı 4 tür.
- c) $P(x)$ polinomunun değişkeni x olduğundan x in olmadığı terim olan -7 sabit terimdir.
- ç) Katsayıları toplamı $4 + (-2) + 3 + (-7) = -2$ dir.

2. $P(x) = x^{\frac{6}{m}} + 2x + 1$ ifadesi m nin hangi tam sayı değerleri için polinom olacağını gösterelim.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun terimlerinin dereceleri doğal sayı olacağından $\frac{6}{m}$ ifadesi bir doğal sayı olmalıdır. Bu durumda m nin alacağı tam sayı değerleri kümesi $\{1, 2, 3, 6\}$ dir.

3. $P(x) = (x - 1)^3$ polinomunun katsayılar toplamını ve sabit terimini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunu $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ biçiminde de yazabiliriz. Bu polinomun katsayıları toplamı $1 + (-3) + (+3) + (-1) = 0$ ve sabit terimi -1 dir.

$P(x) = (x - 1)^3$ polinomunun katsayılar toplamı bir başka yoldan x yerine 1 yazılarak da bulunur. Katsayılar toplamı $P(1) = (1 - 1)^3$

$$P(1) = 0 \text{ dir.}$$

Benzer yaklaşımla sabit terim x yerine 0 (sıfır) yazılarak bulunur. Sabit terim,

$$P(0) = (0 - 1)^3$$

$$P(0) = -1 \text{ olur.}$$

4. $P(x) = (x^2 + x - 1)^2$ polinomunda;

- a) Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamını,
- b) tek dereceli terimlerin katsayıları toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$ polinomunda,

$$x = 1 \text{ için } P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

$$x = -1 \text{ için } P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

ifadeleri taraf tarafa toplanıp ikiye bölündüğünde çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı, taraf tarafa çıkarıp ikiye bölüğümüzde ise tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı bulunur.

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2} = a_0 + a_2 + a_4 + \dots$$

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots \text{ Buradan yararlanarak,}$$

$$\text{a) } \frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{(1+1)}{2} = 1$$

$$\text{b) } \frac{P(1)-P(-1)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \text{ bulunur.}$$

POLİNOMLARLA FONKSİYONLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

Her polinom gerçekte sayılardan gerçekte sayılara tanımlı bir fonksiyondur. Her fonksiyon bir polinom değildir.



Örnek

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ polinomu veriliyor. Buna göre;

- a) $P(2)$ değerini ve
- b) $P(x - 1)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

Fonksiyonlarda olduğu gibi,

- a) Polinomda x yerine 2 değeri yazılırsa,

$$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9 \text{ bulunur.}$$

- b) Polinomda x yerine $x - 1$ yazılırsa,

$$P(x - 1) = 3 \cdot (x - 1)^2 - 2 \cdot (x - 1) + 1 = 3x^2 - 8x + 6 \text{ bulunur.}$$



Örnek

$P(x + 2) = x^2 + 3x + 5$ polinomu veriliyor. Buna göre;

- a) $P(5)$ değerini ve
- b) $P(x)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

Fonksiyonlarda olduğu gibi,

- a) Polinomda x yerine 3 yazılırsa,

$$P(5) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 5 = 23 \text{ bulunur.}$$

- b) $x + 2$ fonksiyonunun tersi olan $x - 2$, polinomda x yerine yazılırsa,

$$P(x) = (x - 2)^2 + 3 \cdot (x - 2) + 5$$

$$P(x) = x^2 - x + 3 \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki tabloyu inceleyip boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyon	Polinom mu? (E/H)	Polinomun derecesi	Polinomun Başkatsayısı	Polinomun Sabit Terimi
$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$	E	3	4	2
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{x}$	H	–	–	–
$f(x) = 2x^2 + 3x + \sqrt{2}$				
$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^5 - \sqrt{2}x$				
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4 + 5x$				
$f(x) = \frac{9x^2 - 2x}{7}$				
$f(x) = 3x - 2x^{\frac{1}{2}} + 3$				
$f(x) = 4$				

2. $P(x) = 4x^{\frac{18}{m}} + 3x^{\frac{m}{2}} - 5x^{m-3} + 3$ ifadesi m nin hangi tam sayı değerleri için bir polinom belirtir?

3. Derecesi 4, başkatsayısı –3 ve sabit terimi 6 olan üç terimli beş tane polinom yazınız.

4. $P(x) = (a + 1)x^{c-2} + 2x^2 - 7x - b + 3$ ifadesi başkatsayısı – 3, sabit terimi 12 olan beşinci dereceden bir polinom olduğuna göre a.b – c işleminin sonucunu bulunuz.

5. $P(x) = (x^2 - x + 1)^3$ polinomunun katsayılar toplamını ve sabit terimini bulunuz.

6. $P(x) = (2x - 3)^7 + ax + 3$ polinomunun katsayılar toplamı 7 ise a değerini bulunuz.

7. $P(x) = 3x^2 - (2a+5)x - 2 - a$ polinomunun katsayılar toplamı 10 ise bu polinomun sabit terimini bulunuz.

8. $P(x) = (2x^2 + 3x - 1)^2$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

9. $P(2x - 1) = 5x - 8$ polinomu veriliyor. Buna göre;

a) $P(-3)$ değerini ve

b) $P(x)$ polinomunu bulunuz.



René Descartes (Dekart), (1596-1650) Descartes matematiğe önemli katkılarda bulunmuştur. Cebirin geometriye uygulanması üzerine çalışmıştır. "Kartezyen koordinat kavramı"nı ortaya koymuştur.



Ömer Hayyam (1040-1122) Parabol ve çemberi kestirerek 3. dereceden bir polinom denkleminin çözümü için geometrik bir yöntem geliştirmiştir.

SABİT POLİNOM VE SIFIR POLİNOMU



Etkinlik

Aşağıda $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları için verilen boşlukları örneklere uygun biçimde doldurunuz.

$$P(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$P(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$$

$$P(2) = \dots\dots\dots$$

$$P(-3) = \dots\dots\dots$$

$$P(0) = \dots\dots\dots$$

$$Q(x) = 5$$

$$Q(-1) = 5$$

$$Q(2) = \dots\dots\dots$$

$$Q(-3) = \dots\dots\dots$$

$$Q(0) = \dots\dots\dots$$

$$R(x) = 0$$

$$R(-1) = 0$$

$$R(2) = \dots\dots\dots$$

$$R(-3) = \dots\dots\dots$$

$$R(0) = \dots\dots\dots$$

☞ Değişen x değerleri için değerleri değişmeyen polinomlar hangileridir? Bu polinomların değerlerinin değişmemesinin katsayılarla ilişkisini tartışınız.



Örnek

$P(x) = 10$ polinomunda $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(10)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = 10$ polinomunda $P(1) = 10, P(2) = 10, \dots, P(10) = 10$ değerleri bulunur.

Bu durumda $P(1) + P(2) + \dots + P(10) = \underbrace{10+10+\dots+10}_{10 \text{ tane}} = 100$ olur.



Tanım ve Bilgi

Sabit terimi dışında bütün katsayıları 0 olan polinoma **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi 0'dır.

Sabit terimi dahil, bütün katsayıları 0 olan polinoma **sıfır polinomu** denir. Sıfır polinomunun derecesinden söz edilemez.



Örnek

1. $P(x) = (a - 1)x^2 + (b + 2)x + 7$ polinomu sabit polinom ise a ve b değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

Sabit polinom olabilmesi için sabit terimi dışında bütün katsayıları 0 olacağından, $a - 1 = 0$ ve $b + 2 = 0$ olmalıdır. Buradan, $a = 1$ ve $b = -2$ bulunur.

2. $P(x) = (a - b + 2)x^3 - (a - c)x + b - 3$ polinomu sıfır polinom ise a, b ve c değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ sıfır polinom ise sabit terim dahil bütün katsayıları sıfırdır. Bu durumda, $a - b + 2 = 0, -a + c = 0$ ve $b - 3 = 0$ olur. Buradan, $b = 3, a = 1$ ve $c = 1$ değerleri bulunur.

İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ

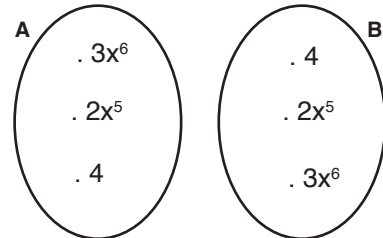


Etkinlik

Yandaki A ve B kümelerini kullanarak

- A ve B kümelerinin elemanlarını karşılaştırınız.
- A kümesinin bütün elemanlarını toplayarak $P(x)$ polinomunu yazınız.
- B kümesinin bütün elemanlarını toplayarak $Q(x)$ polinomunu yazınız.

☞ $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını karşılaştırınız. Bu iki polinom hakkında ne söylenebilir? Sizce bu iki polinom birbirinden farklı mıdır?





Örnek

Aşağıda verilen karşılıklı eşlemelerde, harflerin yerine gelecek sayı değerlerini bulalım.

- $P(x) = 4x^2 - 6x + a$ \longleftrightarrow $P(x) = 4x^2 - 6x + 2$
- $Q(x) = 7x^2 + cx + d$ \longleftrightarrow $Q(x) = bx^2 + 3x - 1$
- $R(x) = ex^2 + fx + g$ \longleftrightarrow $R(x) = 5x^2 + 2x + 4$

ÇÖZÜM

Verilen eşlemelerde polinomlar eşit olduğundan

$a = 2, b = 7, c = 3, d = -1, e = 5, f = 2$ ve $g = 4$ bulunur.



Tanım ve Bilgi

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ ve $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$ polinomları için,

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow m = n$ ve $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_m$ olmalıdır.



Örnek

1. $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ve $Q(x) = (a+1)x^3 - (a-b)x^2 + (c+2)x - 2a + d$ polinomları için $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre a, b, c, d değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = Q(x)$ ise aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olmalıdır. Buradan,

$a + 1 = 3, -a + b = -4, c + 2 = 5$ ve $-2a + d = -2$ eşitliklerinden,

$a = 2, b = -2, c = 3$ ve $d = 2$ bulunur.

2. $P(x) = (m+1)x^3 - 2x^2 - (2n-1)x + 7$ ve $Q(x) = ax^2 + 5x - b$ polinomları eşit olduğuna göre; $m + n + a + b$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$m + 1 = 0, a = -2, -2n + 1 = 5$ ve $-b = 7$ eşitliklerinden,

$m = -1, a = -2, n = -2$ ve $b = -7$ bulunur.

Buradan $m + n + a + b = -12$ olur.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki polinomların sabit polinom olduğu bilindiğine göre a, b, c değerlerini bulunuz.

a) $P(x) = (a - 1)x^2 + (b + 4)x - 4$

b) $Q(x) = (a + 2)x^3 + (3a - b)x^2 + 3$

c) $R(x) = (a - b + 4)x^3 - (a + b + 6)x^2 - 3(c + 5)x$

2. Aşağıdaki polinomları sıfır polinom olduğu bilindiğine göre a, b, c ve d değerlerini bulunuz.

a) $P(x) = (2a - 4)x^2 + (3b + 9)x + 2c - 8$

b) $Q(x) = (a - 4b + 2)x^3 - (a + b + 7)x^2 - a \cdot b + c$

c) $R(x) = (a + 2b)x^4 + (b - 2c)x^3 - (c + 3d)x^2 - d + 1$

3. $P(x) = (2m - 8)x^2 + (n + 3)x - m \cdot n + 2$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(100)$ kaçtır?

4. $P(x) = (m - 2)x^3 + (4 + n)x^2 - 8 + p$ ve $Q(x) = 7x^3 - 3x^2 + 1$ polinomları eşit olduğuna göre $m + n - p$ değeri kaçtır?

5. $P(x) = ax^3 - 4x^2 + 5x - 3x^3 + bx^2 - 2$ ve $Q(x) = -2x^3 + 7x^2 - cx + d$ polinomları eşit olduğuna göre $a + b + c + d$ değeri kaçtır?

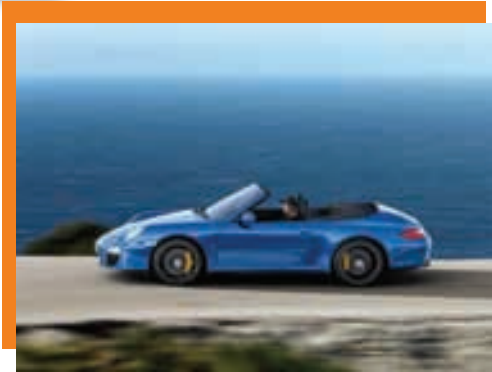
6. $P(x) = (x^2 + x - 1)^2$ ve $Q(x) = x^4 + ax^3 - x^2 - 2x + 1$ polinomları eşit olduğuna göre a değeri kaçtır?

7. $P(x - 2) = x^3 + 2x + 3$ ise $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

POLİNOM KÜMESİNDE İŞLEMLER



Motivasyon



Bir döşeme kumaşı fabrikasında spor otomobiller için üretilen x metre kumaşın maliyeti $2x^2 + 5x$ TL dir. Otomobil firmaları x metre kumaşı bu fabrikadan $3x^2 + 2x + 9$ TL ye satın almaktadır. Buna göre $10x^2$ m kumaş satan bu fabrikanın satıştan elde ettiği kâr yüzde kaçtır? Problemi çözerken cebirsel ifadeler için dört işemin nasıl kullanıldığını düşünerek problemi çözünüz.

POLİNOMLAR KÜMESİNDE TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ



Etkinlik

Tablodaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

Katsayılar Polinomlar	x^3 lü terimin katsayısı	x^2 li terimin katsayısı	x li terimin katsayısı	Sabit terim
$P(x) = 2x^2 + x - 3$	0			
$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$	1	-3		
Aynı dereceli terimlerin katsayıları toplamı	+	+	+	+

$$R(x) = \boxed{1} x^3 + \boxed{} x^2 + \boxed{} x + \boxed{}$$

• En alt satırda elde ettiğimiz katsayıları yukarıdaki kutulara örnekteki gibi yazınız.

☞ $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarını karşılaştırınız.

☞ Benzer şekilde $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının farkını bulmaya çalışınız.



Örnek

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ ve $Q(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ polinomları için,

$P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ işlemlerini yapalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
 P(x) + Q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + 5x - 3) + (-x^3 + 4x^2 + 3x + 6) \\
 &= (3x^3 - x^3) + (-2x^2 + 4x^2) + (5x + 3x) + (-3 + 6) \\
 &= (3 - 1)x^3 + (-2 + 4)x^2 + (5 + 3)x + (-3 + 6) \\
 &= 2x^3 + 2x^2 + 8x + 3 \text{ şeklinde toplanır.}
 \end{aligned}$$

Bu iki polinomun toplamında, dereceleri aynı olan terimlerin katsayılarının toplandığına dikkat ediniz. Benzer yaklaşımla,

$$\begin{aligned}
 P(x) - Q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + 5x - 3) - (-x^3 + 4x^2 + 3x + 6) \\
 &= 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 + x^3 - 4x^2 - 3x - 6 \\
 &= (3 + 1)x^3 + (-2 - 4)x^2 + (5 - 3)x + (-3 - 6) \\
 &= 4x^3 - 6x^2 + 2x - 9 \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

Bu iki polinomun farkı alındığında, dereceleri aynı olan terimlerin katsayılarının farkının alındığına dikkat ediniz.



Örnek

$P(x) = x^2 - x + 4$ ve $Q(x) = -3x + 1$ polinomları için $P(x+1) + Q(x-1)$ işlemini yapalım.

ÇÖZÜM

$$P(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 4, \quad Q(x-1) = -3(x-1) + 1$$

$$= x^2 + x + 4 \quad \quad \quad = -3 + 4$$

$$P(x+1) + Q(x-1) = x^2 + x + 4 - 3x + 4 = x^2 - 2x + 8 \text{ bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

Polinomlarda toplama işlemi yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır, aynı dereceli terime katsayı olarak yazılır.

Polinomlarda çıkarma işlemi yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayılarının farkı alınır, aynı dereceli terime katsayı olarak yazılır.



Örnek

1. $P(x) = x^6 + 3x^3 - 4x^2 + 5$ ve $Q(x) = x^5 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 1$ polinomları için, $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) + Q(x) = (x^6 + 3x^3 - 4x^2 + 5) + (x^5 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 1)$$

$$= (1 + 0)x^6 + (0 + 1)x^5 + (0 + 0)x^4 + (3 + 4)x^3 + (-4 + 7)x^2 + (0 - 8)x + (5 + 1)$$

$$= x^6 + x^5 + 7x^3 + 3x^2 - 8x + 6 \text{ bulunur.}$$

Bu işlemde $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının bazı terimlerinin katsayılarının sıfır olduğuna dikkat ediniz.

$$P(x) - Q(x) = (x^6 + 3x^3 - 4x^2 + 5) - (x^5 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 1)$$

$$= x^6 + 3x^3 - 4x^2 + 5 - x^5 - 4x^3 - 7x^2 + 8x - 1$$

$$= x^6 - x^5 - x^3 - 11x^2 + 8x + 4 \text{ bulunur.}$$

$\text{der}[P(x)] = 6$ ve $\text{der}[Q(x)] = 5$ iken $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 6$ ve $\text{der}[P(x) - Q(x)] = 6$ olduğu görülür.

Dereceleri farklı olan iki polinomun toplamının ve farkının derecesi büyük olan polinomun derecesine eşittir.

2. $P(x) = x^2 + 3x - 4$ ve $Q(x) = x^2 + 6x + 10$ polinomlarının toplamının ve farkının derecelerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 6x + 10) \\ &= 2x^2 + 9x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 6x + 10) \\ &= -3x - 14 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Dereceleri aynı olan iki polinomun toplamının ve farkının derecesi bulunurken önce işlemler yapılmalı, daha sonra bunların dereceleri yazılmalıdır. Bu durumda, $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 2$ ve $\text{der}[P(x) - Q(x)] = 1$ olur.

3. $\text{der}[P(x)] = 6$ ve $\text{der}[Q(x)] = 7$ ise $\text{der}[P(x) + Q(x)]$ nin kaç olacağını bulalım.

ÇÖZÜM

$\text{der}[P(x)] = 6$ ve $\text{der}[Q(x)] = 7$ ise $P(x) + Q(x)$ polinomunun derecesi $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının derecesinden büyük olanı ile aynıdır. Bu durumda $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 7$ bulunur.

4. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\text{der}[P(x)] = 3m + 4$ ve $\text{der}[Q(x)] = 2m + 2$ veriliyor. $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 19$ ise $\text{der}[Q(x)]$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

m bir doğal sayı olduğuna göre,

$3m + 4 > 2m + 2$ dir. Bu durumda $\text{der}[P(x) + Q(x)] = 3m + 4$ olur.

$3m + 4 = 19$ ise $m = 5$ bulunur. $\text{der}[Q(x)] = 12$ dir.

5. $P(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 1$ ve $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + cx + d$ polinomları veriliyor. $P(x) + Q(x) = 4x^3 - 8x^2 + 6x - 2$ olduğuna göre $a + b + c + d$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Önce $P(x) + Q(x)$ toplamını bulalım.

$$P(x) + Q(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 1 + 2x^3 - 4x^2 + cx + d$$

$$= (a + 2)x^3 + (b - 4)x^2 + (4 + c)x + (-1 + d) \text{ aynı zamanda,}$$

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 8x^2 + 6x - 2 \text{ olduğuna göre bu iki polinom eşitliğinden}$$

$$a + 2 = 4, b - 4 = -8, c + 4 = 6 \text{ ve } -1 + d = -2$$

$$a = 2, b = -4, c = 2 \text{ ve } d = -1 \text{ bulunur. Buradan,}$$

$$a + b + c + d = 2 + (-4) + 2 + (-1) = -1 \text{ bulunur.}$$

6. $P(x) = mx + n$ olmak üzere,

$$P(x - 1) + P(x + 1) = 6x + 4 \text{ eşitliğini sağlayan } P(x) \text{ polinomunu bulalım.}$$

ÇÖZÜM

$$P(x) = mx + n \text{ ise,}$$

$$P(x - 1) = m(x - 1) + n = mx - m + n \text{ ve } P(x + 1) = m(x + 1) + n = mx + m + n \text{ bulunur.}$$

$$P(x - 1) + P(x + 1) = mx - m + n + mx + m + n$$

$$= 2mx + 2n \text{ elde edilir. İki polinomun eşitliğinden}$$

$$6x + 4 = 2mx + 2n$$

$m = 3$ ve $n = 2$ olur. Elde edilen bu değerleri polinomda yerine yazarak

$$P(x) = 3x + 2 \text{ bulunur.}$$

POLİNOMLARIN TOPLAMA İŞLEMİNE GÖRE ÖZELLİKLERİ

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

$$R(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots$$

$T(x) = 0$ şeklindeki polinomların toplama işlemine göre özelliklerini inceleyelim.

1. Kapalılık Özelliği

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom iken

$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$ iki polinomun toplamı da polinom olduğu için polinomlar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

$$Q(x) + P(x) = (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)x^n + \dots$$

eşitliklerinden,

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x) \text{ olduğu görülür.}$$

Bu durumda polinomlar kümesinin toplama işlemine göre değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]x + \dots + [(a_n + b_n) + c_n]x^n + \dots$$

$$P(x) + [Q(x) + R(x)] = [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x + \dots + [a_n + (b_n + c_n)]x^n + \dots \text{ eşitliklerinden}$$

$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)] \text{ olduğu görülür.}$$

Bu durumda polinomlar kümesinin toplama işlemine göre birleşme özelliği vardır.

4. Birim Eleman

$$P(x) + T(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + 0$$

$$= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$= P(x)$$

$T(x) + P(x) = P(x) + T(x) = P(x)$ olduğundan $T(x) = 0$ polinomu toplama işleminin birim elemanıdır.

5. Ters Eleman

$$P(x) + [-P(x)] = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + (-a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n \dots)$$

$$= (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x + \dots + (a_n - a_n)x^n$$

$$= 0$$

$P(x) + [-P(x)] = [-P(x)] + P(x) = 0$ olduğundan $-P(x)$ polinomu, $P(x)$ polinomunun toplama işlemine göre tersidir.



Uygulamalar

1. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 7$

$$Q(x) = -x^3 + x^2 + x + 4$$

$$R(x) = -3x^4 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$T(x) = 6$$

polinomları için aşağıdaki işlemleri yaparak derecelerini bulunuz.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $Q(x) + R(x)$

c) $P(x) + R(x)$

ç) $P(x) - Q(x)$

d) $Q(x) + T(x)$

e) $P(x) - R(x)$

2. $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları için,

$\text{der}[P(x)] = 5$, $\text{der}[Q(x)] = 4$ ve $\text{der}[R(x)] = 6$ olduğuna göre aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\text{der}[P(x) + Q(x)]$

b) $\text{der}[P(x + 1)]$

c) $\text{der}[P(x)] + \text{der}[Q(x)]$

ç) $\text{der}[P(x + 2) + Q(x - 1)]$

d) $\text{der}[P(x) - R(x)]$

e) $\text{der}[P(3x - 1) + 2]$

f) $\text{der}[P(x)] - \text{der}[R(x)]$

g) $(\text{der}[P(x)])^2$

3. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için,

$$\text{der}[P(x) + Q(x)] = 10 \text{ ve } \text{der}[Q(x)] = 7 \text{ ise } \text{der}[P(x)] \text{ kaçtır?}$$

4. $P(x) = 3x^2 - 2x + ax + b$ ve $Q(x) = cx^2 + 6x + d$ polinomları veriliyor.

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 + 12x - 4 \text{ ise } a + b + c + d \text{ kaçtır?}$$

5. $P(x) = ax + b$ olduğuna göre,

$$P(x + 1) + P(x - 2) = 4x - 12 \text{ ise } P(x) \text{ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.}$$

6. $m \in \mathbb{N}$ ve $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere $\text{der}[P(x)] = 7m + 4$ ve

$$\text{der}[Q(x)] = 3m + 1 \text{ dir.}$$

$$\text{der}[P(x) + Q(x)] = 32 \text{ ise } \text{der}[Q(x)] \text{ kaçtır?}$$

7. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\text{der}[P(x)] = 2m - 3$ ve $\text{der}[Q(x)] = 5m + 1$ dir. $P(x)$ ikinci dereceden bir polinomdur. $P(x) - Q(x)$ polinomunun derdcesi 26 ise m değerini bulunuz.

8. $P(x + 1) + P(x - 1) = x^2 + 4x + 8$ ise $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamını bulunuz.

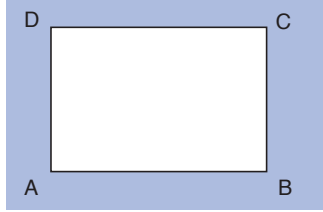
9. $P(x)$ polinomunun derecesi 5 olduğuna göre $2x^2 + x + 1 + P(3x - 4)$ polinomunun derecesi kaçtır?

10. $\text{der}[P(x)] = 3$ ve $\text{der}[Q(x)] = 2$ ise $\text{der}[8 \cdot P(5x^2) - 3 \cdot Q(x^4)]$ kaçtır?

POLİNOMLARDA ÇARPMA İŞLEMİ



Etkinlik



ABCD dikdörtgensel bölgesinde

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|AB| = 3x^2 + 2 \text{ birim}$$

$$|BC| = 2x^2 + 1 \text{ birim olarak veriliyor.}$$

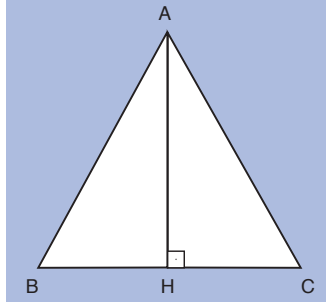
- Dikdörtgensel bölgenin kenar uzunlukları bir polinom belirtir mi? Neden?
- Dikdörtgensel bölgenin alanını bulunuz.

☞ Alanı veren matematiksel ifade bir polinom belirtir mi? Tartışınız.



Örnek

1.



Şekilde ABC üçgeninde,

$$[AH] \perp [BC]$$

$$|AH| = 4x \text{ birim}$$

$$|BC| = 3x^2 \text{ birim olduğuna göre,}$$

ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

Üçgensel bölgenin alanı taban uzunluğu ile o tabana ait yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısıdır. Buna göre,

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{3x^2 \cdot 4x}{2} = \frac{12x^3}{2} = 6x^3 \text{ olur. Burada polinomların katsayılarının birbirleriyle}$$

çarpıldığına ve değişkenlerin üslerinin toplandığına dikkat ediniz.

2. Boyutları $(x + 3)$ birim, $(x + 2)$ birim ve 5 birim olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun hacmini veren polinomu bulalım.

ÇÖZÜM

Boyutları a, b, ve c birim olan dikdörtgenler prizmasının hacmi $V = a \cdot b \cdot c$ ifadesiyle bulunduğundan istenen hacim,

$$V = (x + 3) \cdot (x + 2) \cdot 5$$

$$V = [x(x + 2) + 3(x + 2)] \cdot 5$$

$$V = [x^2 + 2x + 3x + 6] \cdot 5$$

$$V = (x^2 + 5x + 6) \cdot 5$$

$$V = 5x^2 + 25x + 30 \text{ birim olur.}$$



Tanım ve Bilgi

$P(x) \cdot Q(x)$ polinomu, $P(x)$ polinomunun her terimi $Q(x)$ polinomunun her terimi ile ayrı ayrı çarpılarak elde edilen terimlerin toplamıdır.



Örnek

1. $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ polinomu ile $Q(x) = 3x + 2$ polinomunun çarpımını bulup çarpım polinomunun derecesini bulalım.

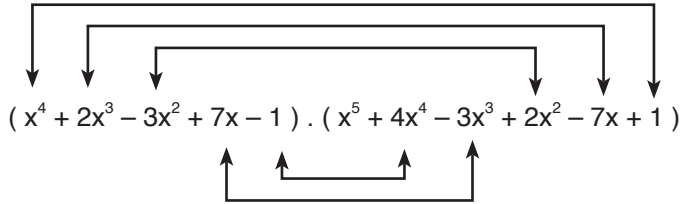
ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3x + 1) \cdot (3x + 2) \\ &= 2x^2(3x + 2) - 3x(3x + 2) + 1(3x + 2) \\ &= 6x^3 + 4x^2 - 9x^2 - 6x + 3x + 2 \\ &= 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 \text{ bulunur. Buradan,} \end{aligned}$$

$\text{der}[P(x)] = 2$ ve $\text{der}[Q(x)] = 1$ olduğundan $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = 2 + 1 = 3$ olur. Buna göre $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = \text{der}[P(x)] + \text{der}[Q(x)]$ dir.

2. $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1) \cdot (x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 1)$ çarpımı yapıldığında x^4 lü terimin katsayısını bulalım.

ÇÖZÜM



Verilen çarpımda x^4 lü terimi

x^4 ile 1

$2x^3$ ile $-7x$

$-3x^2$ ile $2x^2$

$7x$ ile $-3x^3$

-1 ile $4x^4$ terimlerinin çarpımlarının toplamından elde edilir.

$$x^4 \cdot 1 + 2x^3(-7x) + (-3x^2) \cdot 2x^2 + 7x \cdot (-3x^3) + (-1) \cdot 4x^4$$

$$x^4 - 14x^4 - 6x^4 - 21x^4 - 4x^4 = -44x^4 \text{ olur.}$$

Bu durumda x^4 lü terimin katsayısı -44 tür.

3. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ ve $Q(x) = x^3 + 2x$ polinomları için aşağıdaki polinomların derecelerini bulalım.

a) $Q^2(x)$ b) $P(x^2)$ c) $x^2 \cdot P(x)$ d) $x^3 P(x) + 3 \cdot Q(x^4)$

ÇÖZÜM

a) $Q^2(x) = (x^3 + 2x)^2 = x^6 + 4x^4 + 4x^2$ dir. Burada $\text{der}[Q^2(x)] = 6$ dir.

der $[A(x)] = m$ iken der $[A^n(x)] = m \cdot n$ olur.

b) $P(x)$ polinomunda x yerine x^2 yazarsak,

$$P(x^2) = x^6 - x^4 + x^2 + 1 \text{ polinomu elde edilir.}$$

Burada, $\text{der}[P(x^2)] = 6$ olduğu görülür.

der $[A(x)] = m$ iken der $[A(x^n)] = m \cdot n$ olur.

c) $x^2 \cdot P(x) = x^2 \cdot (x^3 - x^2 + x + 1) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2$ dir. Bu durumda,

$$\text{der}[x^2 \cdot P(x)] = \text{der}[x^2] + \text{der}[P(x)] = 2 + 3 = 5 \text{ olur.}$$

d) $x^3 \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x^4)$ polinomunun derecesi, $x^3 \cdot P(x)$ ve $3 \cdot Q(x^4)$ polinomlarının derecelerinden en büyük olanı ile aynıdır.

$$\text{der}[x^3 P(x)] = \text{der}[x^3] + \text{der}[P(x)] = 3 + 3 = 6$$

$$\text{der}[3 \cdot Q(x^4)] = \text{der}[3] + \text{der}[Q(x^4)] = 0 + 4 \cdot 3 = 12$$

Bu durumda,

$$\text{der}[x^3 \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x^4)] = 12 \text{ olur.}$$

4. $P(x) = x^2 + 1$ ve $Q(2x + 1) = 4x + 3$ veriliyor. $P(2x - 3) + Q(x - 1)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

x yerine $2x - 3$ yazarak $P(2x - 3)$ polinomunu bulalım.

$$P(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10 \text{ dur.}$$

x yerine $2x + 1$ in tersi olan $\frac{x-1}{2}$ yazarak önce $Q(x)$ polinomunu bulalım.

$$Q(x) = 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2} \right) + 3 = 2x + 1 \text{ olur.}$$

Buradan,

$$x \text{ yerine } x - 1 \text{ yazarak } Q(x - 1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1 \text{ şeklinde bulunur.}$$

$$\text{Sonuç olarak, } P(2x - 3) + Q(x - 1) = 4x^2 - 12x + 10 + 2x - 1 = 4x^2 - 10x + 9 \text{ olur.}$$

POLİNOMLARIN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE ÖZELLİKLERİ



Örnek

$P(x) = x + 3$, $Q(x) = x^2 + x$, $R(x) = x^3$, $H(x) = 1$ ve $T(x) = 0$ polinomları veriliyor.

Bu polinomlar yardımıyla çarpma işleminin özelliklerini inceleyelim.

ÇÖZÜM

1. **Kapalılık Özelliği** : $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom iken,

$P(x) \cdot Q(x) = (x + 3)(x^2 + x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ çarpımı da bir polinom olduğundan polinomlar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özelliği

$$Q(x) \cdot R(x) = (x^2 + x) \cdot x^3 = x^5 + x^4$$

$$R(x) \cdot Q(x) = x^3 (x^2 + x) = x^5 + x^4$$

$Q(x) \cdot R(x) = R(x) \cdot Q(x)$ olduğundan polinomlar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

3. Birleşme Özelliği

$$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = [(x+3)(x^2+x)] \cdot x^3 = (x^3+4x^2+3x)x^3 = x^6+4x^5+3x^4$$

$$P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)] = (x+3) \cdot [(x^2+x) \cdot x^3] = (x+3)(x^5+x^4) = x^6+4x^5+3x^4$$

$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$ olduğundan polinomlar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

4. Dağılma Özelliği

$$P(x) \cdot [R(x) + H(x)] = (x+3) \cdot (x^3+1) = x^4+3x^3+x+3$$

$$P(x) \cdot R(x) + P(x) \cdot H(x) = (x+3) \cdot x^3 + (x+3) \cdot 1 = x^4+3x^3+x+3$$

$$P(x) \cdot [R(x) + H(x)] = P(x) \cdot R(x) + P(x) \cdot H(x)$$

$P(x) \cdot [R(x) - H(x)] = P(x) \cdot R(x) - P(x) \cdot H(x)$ olduğundan polinomlar kümesinde çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

5. Etkisiz Eleman

$$Q(x) \cdot H(x) = (x^2+x) \cdot 1 = x^2+x = Q(x)$$

$$P(x) \cdot H(x) = (x+3) \cdot 1 = x+3 = P(x) \text{ işlemlerinden görüldüğü üzere,}$$

$H(x) = 1$ polinomu, polinomlar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanıdır.

6. Yutan Eleman

$$P(x) \cdot T(x) = (x+3) \cdot 0 = 0$$

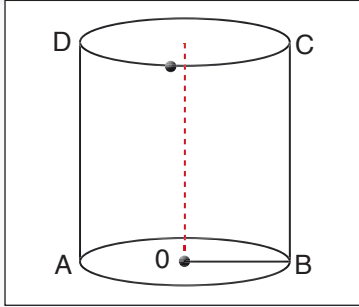
$Q(x) \cdot T(x) = (x^2+x) \cdot 0 = 0$ olduğundan $T(x) = 0$ polinomu, polinomlar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanıdır.

☞ Polinomlar kümesinde çarpma işleminin ters elemanının olup olmadığını araştırınız.



Uygulamalar

1.



Şekildeki silindirin yarıçap uzunluğu $(x + 2)$ birim, yüksekliği $(2x - 1)$ birim olduğuna göre silindirin hacmini veren polinomu yazınız.

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $(x - 2) \cdot (x + 1)$

b) $(x + 2)^3$

c) $(x - 3) \cdot (2x + 1)x$

ç) $(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1$

d) $(3x - 1)^2$

e) $(x^2 + 6x + 1) \cdot (-2x^2 - x - 5)$

f) $(x + 4)^2 + 3(x - 1) \cdot (x + 3)$

g) $(x^2 - 8x + 3) \cdot (x^3 - 1)$

3. $(x^3 - mx^2 + 4x + 2) \cdot (x^4 + 2x^2 - 8x + 1)$ çarpımı yapıldığında x^3 lü terimin katsayısı 10 ise m kaçtır?

4. $P(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 4$, $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ ve $R(x) = x^2 + 2$ polinomları veriliyor. Buna göre aşağıdaki polinomların derecelerini bulunuz.

a) $P(x) \cdot x$

b) $P^2(x)$

c) $P[Q(x)]$

ç) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $Q(x^3)$

e) $xP^2(3x - 1)$

f) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$

g) $R^2(x^4)$

ğ) $Q^3(2x - 1) \cdot R^2(x)$

h) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

ı) $P^3(x) \cdot Q(x^2)$

i) $R[P(x)] + P[R(x)]$

5. $\text{der}[P(x)] = 4$ ve $\text{der}[x^2 \cdot P^2(x) \cdot Q^3(x)] = 19$ ise $\text{der}[Q(x)]$ kaçtır?

6. $P(x) = x^2 + 3x - 1$ ve $Q(x) = 2x - 1$ ise aşağıdaki polinomları bulunuz.

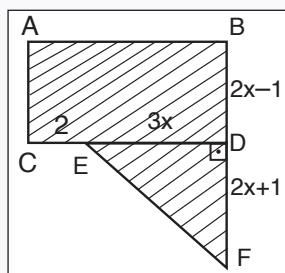
a) $P(x - 1) + Q(x + 2)$

b) $P(2x + 3) + Q(x + 4)$

c) $P(2x - 1) - Q(x - 3)$

ç) $P(x + 1) - Q(x^2 - 1)$

7.



Yanda ABCD dikdörtgeni ve DEF dik üçgeni verilmiştir. Buna göre, taralı alanı veren polinomu yazınız.

POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ



Etkinlik



Şekildeki dikdörtgensel bölge biçimindeki televizyonun ön yüzünün alanı $(x^2 + 5x + 6)$ birim kare ve $|AB| = (x + 3)$ birim olduğuna göre,

- Dikdörtgensel bölgenin BD kenarının uzunluğu $x^2 + 5x + 6$ polinomunun hangi çarpanıdır?
- Bu çarpanı bölme işlemi yaparak bulunuz.
- ☞ Bölme işleminde bölünen polinomun derecesi, bölen polinomun derecesinden büyük veya eşit olduğunda bölüm ve kalan da birer polinomdur. Sizce iki polinomun bölümünden elde edilen bölüm her zaman bir polinom olur mu? Tartışınız.



Örnek

1. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 1$ polinomunun $Q(x) = x + 2$ polinomuna bölündüğünde elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Bölme işlemine başlamadan önce $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının terimlerini derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralamalıyız.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+6x-1 & x+2 \\ \hline \cancel{x^3}+3x^2+6x-1 & x+2 \\ \cancel{x^3}+2x^2 & x^2 \\ \hline x^2+6x-1 & \end{array}$$

- Bölme işleminde $Q(x)$ polinomunun en büyük dereceli terimi olan x i, x^2 ile çarparsak $P(x)$ polinomunun en büyük dereceli terimi olan x^3 terimini elde ederiz.

Bulunan x^2 ile $x + 2$ terimi çarpılarak bölünen polinomun altına yazılarak birbirinden çıkarılır.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}+3x^2+6x-1 & x+2 \\ \cancel{x^3}+2x^2 & x^2+x+4 \\ \hline x^2+6x-1 & \\ \hline x^2+2x & \\ \hline 4x-1 & \\ \hline 4x+8 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

- Kalan polinomun derecesi bölen polinomun derecesinden büyük olduğundan bölme işlemi aynı yaklaşımla, kalan polinomun derecesi bölen polinomun derecesinden küçük oluncaya kadar devam ettirilir.

Görüldüğü gibi,

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 + 6x - 1}_{\text{bölünen}} = \underbrace{(x + 2)}_{\text{bölen}} \cdot \underbrace{(x^2 + x + 4)}_{\text{bölüm}} - \underbrace{9}_{\text{kalan}} \text{ olur.}$$

Burada bölen polinomun birinci dereceden olması nedeniyle kalanın sabit polinom olduğuna dikkat ediniz.



Tanım ve Bilgi

$P(x)$ polinomunu sıfır polinomdan farklı bir $Q(x)$ polinomuna böldüğümüzde bölüm polinomu $B(x)$, kalan polinomu da $K(x)$ iken,

$$\begin{array}{r|l} P(x) & A(x) \\ \hline & B(x) \\ \hline - & K(x) \end{array}$$

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) + K(x) \text{ ve}$$

$$\deg [K(x)] < \deg [A(x)] \text{ dir.}$$



Örnek

1. $P(x) = x^3 - x + 4$ polinomunun $Q(x) = x^2 + x + 3$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomunu ve derecesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x + 4 & x^2 + x + 3 \\ \hline - x^3 + x^2 + 3x & \\ \hline -x^2 - 4x + 4 & \\ \hline -x^2 - x - 3 & \\ \hline -3x + 7 & \end{array}$$

Burada bölüm polinomu $B(x) = x - 1$, kalan polinomu

$K(x) = -3x + 7$ olarak bulunur.

$\deg [P(x)] = 3$ ve $\deg [Q(x)] = 2$ iken,

$\deg [B(x)] = \deg [P(x)] - \deg [Q(x)] = 3 - 2 = 1$ olduğu görülür.

Öyleyse $\frac{P(x)}{Q(x)}$ polinomunun bölüm polinomu $B(x)$ ise $\deg[B(x)] = \deg[P(x)] - \deg[Q(x)]$ olur.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & B(x) \\ \hline - & K(x) \end{array}$$

Yandaki bölme işleminde,

$\deg [P(x) \cdot Q(x)] = 12$ ve $\deg [B(x)] = 2$ ise $\deg [Q(x)]$ i bulalım.

ÇÖZÜM

$$\deg [P(x) \cdot Q(x)] = \deg [P(x)] + \deg [Q(x)] = 12$$

$$\deg [B(x)] = \deg [P(x)] - \deg [Q(x)] = 2 \text{ denklemlerinin ortak çözümünden,}$$

$$\deg [P(x)] + \deg [Q(x)] = 12$$

$$\deg [P(x)] - \deg [Q(x)] = 2$$

2. $\deg [P(x)] = 14$ ise $\deg [P(x)] = 7$ ve $\deg [Q(x)] = 5$ bulunur.

3. Bir $P(x)$ polinomunun $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu $B(x) = 2x - 1$, kalan polinomu $K(x) = 4$ ise $P(x)$ polinomunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x) \text{ olduğundan,}$$

$$P(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (2x - 1) + 4 \text{ işlemi yapıldığında}$$

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5x + 5 \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

$$\text{a) } \begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \\ x + 2 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 3 \\ x^2 + 1 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 5x^4 - 5x + 1 \\ -x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

2. $P(x)$ polinomu için,

$(x - 2) \cdot P(x) = x^3 + 4x - 16$ eşitliği veriliyor. Buna göre $P(2)$ değerini bulunuz.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \\ - \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} Q(x) \\ x + 2 \\ 1 \end{array}$$

Yanda verilen bölme işlemine göre, $Q(x)$ polinomunu bulunuz.

4. $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinom olmak üzere, $\text{der}[P(x)] = 4$, $\text{der}[Q(x)] = 3$ ve $\text{der}[R(x)] = 1$ dir.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

$$\text{a) } \text{der} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \right]$$

$$\text{b) } \text{der} \left[\frac{P^2(x) \cdot R^3(x)}{Q(x)} \right]$$

$$\text{c) } \text{der} \left[\frac{Q(x)}{R(x)} \right]$$

$$\text{ç) } \text{der} \left[\frac{x^2 \cdot Q^2(x^3)}{P(x)} \right]$$

$$\text{d) } \text{der} \left[\frac{P(x) \cdot Q(x)}{R(x)} \right]$$

$$\text{e) } \text{der} \left[\frac{3x \cdot P(x) + Q(x^2)}{R(x)} \right]$$

5. $(x + 1) \cdot P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + m$ eşitliğinde $P(x)$ polinomunu bulunuz.

6. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için,

$\text{der}[P(x^2) \cdot Q^3(x)] = 12$ ve $\text{der} \left[\frac{P^3(x)}{Q(x)} \right] = 7$ olduğuna göre $\text{der}[P(x)]$ değerini bulunuz.

7. $x \cdot P(x) - 2x = 4x^3 - 6x^2$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden elde edilen bölüm polinomunu bulunuz.

8. $(x - 1)(x + 2) \cdot P(x) = x^4 + ax + b$ eşitliğinde $P(x)$ polinomunu bulunuz.

9. $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 5$ polinomunun $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ polinomuna bölümünden kalan $2x + 5$ ise a değerini bulunuz.

P(x) POLİNOMUNUN Q(x) POLİNOMUNA BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA

P(x) POLİNOMUNUN $ax + b$ İLE BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA



Etkinlik

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ ve $Q(x) = x - 2$ polinomları için aşağıda verilen bölme işleminde kalan polinomu bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 7x - 1 & x - 2 \\ \hline & B(x) \\ \hline & K \end{array}$$

Bu bölme işleminden yararlanarak $x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ eşitliğini $(x - 2)$, $B(x)$ ve K cinsinden yazınız.

- Bu eşitlikte K değerini bulmak için x yerine hangi sayının yazılabileceğini tartışınız.
- Bölme işlemi yaparak bulduğunuz K değeri ile değer vererek bulduğunuz K değerini karşılaştırınız.

☞ Bir $P(x)$ polinomunun $ax + b$ polinomuna bölümünden elde edilen kalanı bölme işlemi yapmadan bulabilmek için neler yapılması gerektiğini tartışınız.



Örnek

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bölme işlemi yapmadan bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden bölüm $B(x)$ ve kalan K olsun.

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1).B(x) + K \text{ yazılır.}$$

Burada $(x + 1).B(x)$ ifadesini sıfır yapan -1 değeri x yerine yazıldığında,

$$(-1)^3 - 3.(-1)^2 + 2.(-1) - 1 = (-1 + 1).B(-1) + K$$

$-1 - 3 - 2 - 1 = 0 + K$ olur. Bu eşitlikten kalan $K = -7$ olarak bulunur.



Tanım ve Bilgi

$P(x)$ polinomunun $ax + b$ polinomu ile bölümünden kalanı bulmak için, $\frac{b}{a}$
 $P(x) = (ax + b) B(x) + K$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $ax + b = 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$ değeri için,

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = K \text{ değeri elde edilir.}$$

Burada, bölen polinom birinci dereceden bir polinom olduğundan kalan polinomun sabit polinom olduğuna dikkat ediniz.



Örnek

1. $P(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 3 ve $x + 2$ ile bölümünden kalan 4 ise a ve b değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 3 ise $P(1) = 3$,

$P(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(-2) = 4$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri $P(x)$ polinomunda yerine yazdığımızda

$$P(1) = 1 - a + b + 2 = 3 \text{ ise } -a + b = 0 \text{ ve}$$

$$P(-2) = -8 - 4a - 2b + 2 = 4 \text{ ise } -2a - b = 5 \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } a = -\frac{5}{3} \text{ ve } b = -\frac{5}{3} \text{ tür.}$$

2. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -3 ve 4 tür.
 $x \cdot P^3(x) + a \cdot Q(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan -10 ise $a \in \mathbb{R}$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Burada $P(-2) = -3$ ve $Q(-2) = 4$ tür.

$$x \cdot P^3(x) + a \cdot Q(x) = (x + 2) \cdot B(x) - 10 \text{ ise}$$

$x + 2 = 0$ için $x = -2$ değeri eşitlikte yerine yazıldığında,

$$-2 \cdot P^3(-2) + a \cdot Q(-2) = -10 \text{ olur.}$$

$$-2 \cdot (-3)^3 + a \cdot 4 = -10$$

$$54 + 4a = -10$$

$$4a = -64$$

$$a = -16 \text{ olarak bulunur.}$$

3. $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x + m$ polinomunun çarpanlarından biri $x - 2$ ise m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun çarpanlarından biri $x - 2$ ise $P(x)$ polinomu $x - 2$ ile tam bölünüyor demektir.

$P(x) = (x - 2) \cdot B(x) + 0$ dır. Öyleyse $P(2) = 0$ dır.

$$P(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + m = 0 \text{ eşitliğinden } 6 + m = 0 \text{ ise } m = -6 \text{ olarak bulunur.}$$

4. $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ polinomu veriliyor. $P(x + 1)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 8 ve $P(3x)$ polinomunun x ile bölümünden kalan 12 ise m ve n değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$P(x + 1) = (x - 1) \cdot B(x) + 8 \text{ ise } x = 1 \text{ için } P(2) = 8 \text{ ve}$$

$P(3x) = x \cdot C(x) + 12$ ise $x = 0$ için $P(0) = 12$ değerleri bulunur. Bu değerleri $P(x)$ polinomunda yerine yazdığımızda,

$$P(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + m \cdot 0 + n = 12 \text{ ise } n = 12 \text{ olur.}$$

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2m + n = 8 \text{ eşitliğinde } n = 12 \text{ yazılarak } m = -10 \text{ değeri bulunur.}$$



Uygulamalar

1. $x^2 - x + 3$ birim uzunluğundaki bir tel $x + 2$ birim uzunluğunda eşit parçalara ayrıldığında kalan parçanın uzunluğu kaç birimdir?
2. Aşağıda her bir şıkta verilen $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden kalanı bölme işlemi yapmadan bulunuz.
 - a) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 6$
 $Q(x) = x + 1$
 - b) $P(x) = 4x^2 - 6x + 2$
 $Q(x) = 2x - 1$
 - c) $P(x) = x^3 + 4x^2 - x + 2$
 $Q(x) = -x + 3$
 - ç) $P(x) = 27x^3 + 9x^2 - 1$
 $Q(x) = 3x + 2$
 - d) $P(x) = 2x^7 - x + 1$
 $Q(x) = x - 1$
 - e) $P(x) = -x^4 + x^2 + 1$
 $Q(x) = x$
3. $P(x) = -x^4 + 2x^2 + ax + 4$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan 16 ise a değerini bulunuz.
4. $P(x) = ax^3 - 2x^2 + 3x - 1$ polinomunun çarpanlarından biri $x + 1$ ise a değerini bulunuz.
5. $P(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 2$ polinomu veriliyor. $P(x - 1)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?
6. $P(x - 2) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan -10 ise a kaçtır?
7. $(x + 1) \cdot P(x) = x^3 - x^2 + ax + 4$ eşitliğindeki $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
8. $P(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan 6 ve $Q(x - 1)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan 4 tür.
$$\frac{P(4x-10)}{Q(x-6)+x-1} = x^3 - x^2 + 6x + a$$
 ise a kaçtır?
9. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x + 4$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -3 ve 4 tür.
$$x \cdot P^2(x) + 2 \cdot Q(x)$$
 polinomunun $x + 4$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
10. $P(x) + P(2x) = 6x + 8$ eşitliğinde $P(x)$ bir polinomdur. $P(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
11. $P(x) = x^3 - mx^2 + 4x - 2$ polinomunun $Q(x)$ ile bölümünden elde edilen bölüm $-x + 4$ ve kalan -2 ise m kaçtır?
12. $x \cdot P(x) + (x + 2) \cdot Q(x) = x^3 + mx^2 + 2x - n$ eşitliği veriliyor.
 $Q(x)$ polinomunun x ile bölümünden kalan 12 ve $P(x)$ in çarpanlarından biri $x + 2$ ise m ve n değerlerini bulunuz.
13. $x^2 + 8x + m$ birim uzunluğundaki bir telin $x + 3$ birim uzunluğunda eşit parçalara ayrıldığında kalan parçanın uzunluğu 8 birim ise m kaçtır?

P(x) POLİNOMUNUN $x^n - a$ İLE BÖLÜMÜNDEN KALANI BULMA



Etkinlik

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ polinomu ile $Q(x) = x^2 - 2$ polinomu veriliyor.

- $P(x)$ polinomunu, $Q(x)$ polinomuna böldüğümüzde kalan polinomun derecesi en fazla kaçınıcı dereceden bir polinomdur?
- Aşağıdaki bölme işlemini yaparak kalanı bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1 & x^2 - 2 \\ \hline \end{array}$$

- $2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ polinomunun $(x^2 - 2)$ ile bölümünden elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ ise

$2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ eşitliğini $(x^2 - 2)$, $B(x)$ ve $K(x)$ cinsinden yazınız.

Buradaki $K(x)$ polinomunu bulabilmek için x^2 yerine hangi değerin yazılması gerektiğini tartışınız.

- $K(x)$ polinomu ile bölme işlemi yaparak bulduğumuz kalan polinomunu karşılaştırarak aynı sonuca ulaşıp ulaşamadığınızı kontrol ediniz.

☞ $P(x)$ polinomunun $x^n - a$ polinomuna bölümünden elde edilen kalanı bölme işlemi yapmadan bulabilmek için neler yapılabileceğini tartışınız.



Örnek

$P(x) = 5x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 4$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölümünden kalanı bölme işlemi yapmadan bulalım.

ÇÖZÜM

$5x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 4 = (x^2 + 2) B(x) + K(x)$ eşitliğinde $K(x)$ i bulabilmek için $x^2 + 2 = 0$ yapan $x^2 = -2$ değerini eşitlikte yerine yazalım.

$$5(x^2)^2 - x \cdot x^2 + 2x^2 - x + 4 = (x^2 + 2) B(x) + K(x)$$

$$5 \cdot (-2)^2 - x \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) - x + 4 = (-2 + 2) \cdot B(x) + K(x)$$

$$20 + 2x - 4 - x + 4 = K(x) \text{ işlemi düzenlenirse,}$$

$$K(x) = x + 20 \text{ olarak bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

$P(x)$ polinomunun $(x^n - a)$ ile bölümünden kalanı bulmak için,
 $P(x) = (x^n - a) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğinde
 $x^n - a = 0$ için $x^n = a$ değeri yerine yazılarak $K(x)$ kalan polinomu bulunur.



Örnek

$P(x) = x^3 + 4x^2 + mx + n$ polinomunun $x^2 - 3$ ile bölümünden kalan $2x - 6$ ise m ve n değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x^3 + 4x^2 + mx + n = (x^2 - 3) \cdot B(x) + 2x - 6 \text{ eşitliğinde } x^2 - 3 = 0 \text{ için } x^2 = 3 \text{ yazılırsa}$$

$$x \cdot (3) + 4 \cdot (3) + mx + n = (3 - 3) \cdot B(x) + 2x - 6$$

$$3x + 12 + mx + n = 2x - 6$$

$(3 + m)x + 12 + n = 2x - 6$ ifadesinde iki polinomun eşitliği kullanılarak

$$3 + m = 2 \quad \text{ve} \quad 12 + n = -6$$

$$m = -1 \quad \text{ve} \quad n = -18 \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 8x + 1$ polinomunun $x^2 - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
2. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ polinomunun $x^2 - \sqrt{3}$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
3. $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 1$ polinomu veriliyor. $P(x^2 + 1)$ polinomunun $x^2 + 3$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
4. $P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ polinomunun $x^3 + 3$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
5. $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan $5x - 2$ ise $a + b$ kaçtır?
6. $P(x) = x^{15} + 3x^{10} - 2x^5 + 1$ polinomunun $x^5 - 3$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
7. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ polinomunun $x^2 + x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
8. $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) \cdot B(x) + 3x^2 - 2x + 1$ polinomunun $x^2 - x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
9. $P(x) = 6x^{39} - 2x^{27} - 42x^{13} + 1$ polinomunun $x^{13} - \sqrt{7}$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

BİR $P(x)$ POLİNOMUNUN $(x - a)$, $(x - b)$ VE $(x - a) \cdot (x - b)$ İLE AYRI AYRI BÖLÜMÜNDEN KALANLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ



Etkinlik

Bir $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 5 ve $x - 2$ ile bölümünden kalan 3 ise $P(x)$ polinomunun $(x - 1) \cdot (x - 2)$ ile bölümünden kalanı bulmaya çalışınız.

- $P(x) = (x - 1) \cdot B(x) + 5$,
 $P(x) = (x - 2) \cdot C(x) + 3$ eşitliklerinden $P(1)$ ve $P(2)$ değerlerini bulunuz.
- $P(x)$ polinomu $(x - 1) \cdot (x - 2)$ gibi ikinci dereceden bir polinoma bölündüğüne göre, kalan polinomun derecesi en fazla birinci derecedendir. Buna uygun ifadeyi noktalı yere yazınız.
 $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) B(x) + \dots$
- $P(1)$ ve $P(2)$ değerlerini yukarıdaki denklemde yerine yazarak kalanı bulmaya çalışınız.

☞ $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan $P(1)$ ve $x - 2$ ile bölümünden kalan $P(2)$ ise, $P(x)$ polinomunun $(x - 1) \cdot (x - 2)$ ile bölümünden kalanın $P(1) \cdot P(2)$ olmamasının nedenlerini tartışınız.



Örnek

$P(x)$ polinomunun $x - 2$ ve $x + 2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 4 ve -6 dır. Buna göre, $P(x)$ polinomunun $(x - 2)(x + 2)$ ile bölümünden kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

Bölen polinom $(x - 2)(x + 2)$ çarpımıyla elde edilen ikinci dereceden bir polinom olduğundan kalan en fazla birinci dereceden bir polinom olur. Bunun için,

$$P(x) = (x - 2)(x + 2) \cdot B(x) + mx + n \text{ eşitliği yazılır.}$$

$$P(2) = 4 \text{ ve } P(-2) = -6 \text{ olduğuna göre, } P(2) = 0 + 2m + n = 4$$

$$P(-2) = -2m + n = -6 \text{ dır. Buradan } m = \frac{5}{2} \text{ ve } n = -1 \text{ olur.}$$

$$\text{Kalan polinomu ise } mx + n = \frac{5}{2}x - 1 \text{ olarak bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

Bir $P(x)$ polinomunun $(x - a)$ ve $(x - b)$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla $P(a)$ ve $P(b)$ olmak üzere,

$P(x)$ polinomunun $(x - a) \cdot (x - b)$ ile bölümünden kalan en fazla birinci dereceden $K(x) = mx + n$ polinomu olur.

$$P(x) = (x - a) \cdot (x - b) B(x) + mx + n \text{ eşitliğinde kalan polinomun katsayıları,}$$

$$P(a) = m \cdot a + n, P(b) = m \cdot b + n \text{ eşitliklerinden } m \text{ ve } n \text{ bulunarak } K(x) = mx + n \text{ polinomu elde edilir.}$$



Örnek

$P(x)$ polinomunun $(x + 3)$ ile bölümünden elde edilen bölüm $Q(x)$ ve kalan 4 tür. $Q(x)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden kalan 2 ise $P(x)$ polinomunun $(x + 3) \cdot (x - 1)$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulalım.

ÇÖZÜM

$P(x) = (x + 3)(x - 1) \cdot B(x) + mx + n$ dir. Burada m ve n yi bulabilmek için $P(1)$ ve $P(-3)$ değerlerini bulmamız gerekir.

$P(x) = (x + 3) \cdot Q(x) + 4$ ifadesinden $P(-3) = 4$ ve $P(1) = 4 \cdot Q(1) + 4$ bulunur.

$Q(1)$ değerini $Q(x) = (x - 1) \cdot C(x) + 2$ eşitliğinden x yerine 1 yazdığımızda $Q(1) = 2$ olarak bulunur. Buradan, $P(1) = 4 \cdot Q(1) + 4 = 4 \cdot 2 + 4 = 12$ olur.

$P(1) = 12$ ve $P(-3) = 4$ değerlerinden yararlanarak, $P(x) = (x + 3)(x - 1) \cdot B(x) + mx + n$

$P(1) = m + n = 12$ ve $P(-3) = -3m + n = 4$ eşitliklerinden $m = 2$ ve $n = 10$ bulunur.

Sonuç olarak kalan, $2x + 10$ bulunur.



Uygulamalar

- $P(x)$ polinomunun $x - 4$ ve $x + 5$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -1 ve 8 olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $(x - 4) \cdot (x + 5)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ polinomunun $(x + 1) \cdot (x - 2)$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
- $P(x) = -x^3 - 3x^2 + ax + b$ polinomu $(x + 2) \cdot (x - 3)$ ile tam bölünüyorsa a ve b değerlerini bulunuz.
- $P(x)$ polinomunun $(x + 4) \cdot (x + 3)$ ile bölümünden kalan $-2x + 7$ ise $P(x)$ polinomunun $(x + 4)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $P(x)$ polinomunun $x^3 - 1$ ile bölümünden kalan $2x^2 - 4x + 1$ ise $P(x)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- Katsayıları toplamı 6 olan bir $P(x)$ polinomunun sabit terimi 12 dir. $P(x)$ polinomunun $x \cdot (x - 1)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $P(x)$ ikinci dereceden bir polinomdur. $P(2) = P(-3) = 0$ ve $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 24 ise $P(x)$ polinomunun başkatsayısını bulunuz.
- Üçüncü dereceden bir $P(x)$ polinomunun $(x - 1)$, $(x + 1)$ ve $(x - 3)$ ile ayrı ayrı bölümünden kalanlar her seferinde 6 olmaktadır. $P(x)$ in sabit terimi 18 olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $(x - 2)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- $(x - 1) \cdot P(x) = x^4 - 4x^2 + ax + 2$ eşitliğinde $P(x)$ polinomunun $(x - a) \cdot (x + 1)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.
- Alanı $(x^3 - 6x^2 + 16x - 11)$ br² olan bir dikdörtgensel bölgeyi, $(x - 1) \cdot (x - 3)$ br² lik eş alanlı dikdörtgensel bölgelere ayırdıktan sonra kalan parçanın alanını bulunuz.

ÇARPANLARA AYIRMA



Motivasyon

48 sayısının asal çarpanları 2 ve 3 tür. 48 sayısı $2^4 \cdot 3$, $2^2 \cdot 3 \cdot 4$, $2^3 \cdot 6$ şeklinde çarpanları cinsinden yazılabilir. Bir cebirsel ifade olan $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ de çarpanlarına ayrılarak farklı çarpanlar cinsinden yazılabilir mi? Tartışınız.

İNDİRGENEMEYEN POLİNOMLAR VE ASAL POLİNOMLAR



Etkinlik

A ve B gruplarında verilen polinomları inceleyiniz.

A GRUBU

$$P(x) = x^2 - 1$$

$$Q(x) = 3x^2 + 3x$$

$$R(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$T(x) = x^3$$

$$U(x) = 2x^2$$

$$V(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$$

B GRUBU

$$P(x) = x^2 + 1$$

$$Q(x) = 2x - 1$$

$$R(x) = x^2 + x + 1$$

$$T(x) = x$$

$$U(x) = 3x$$

$$V(x) = 4x^2 - x + 1$$

- A grubundaki polinomları çarpanlarına ayırabilir misiniz? Nasıl?
- B grubundaki polinomları çarpanlarına ayırabilir misiniz? Neden?
- En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı şeklinde yazılabilenler hangi gruptadır?

☞ B grubunda bulunan polinomlar aşağıdaki gibi iki gruba ayrılmıştır. Neye göre ayrıldıklarını tartışınız.

B GRUBU

$$2x - 1$$

$$4x^2 - x + 1$$

$$3x$$

$$x^2 + x + 1$$

$$x$$

$$x^2 + 1$$

☞ A ve B grubundaki polinomları karşılaştırdığımızda bu iki grubu birbirinden ayıran temel özelliğin ne olabileceğini tartışınız.



Örnek

$P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = x^2 - 4$, $R(x) = 3x^2 + 2$, $T(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x + 1$, $A(x) = x^2 + x$ ve $B(x) = 2x + 4$ polinomlarından hangileri en az birinci dereceden iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayan polinomlardır? Bu polinomlardan başkatsayısı 1 olan polinomları bulalım.

ÇÖZÜM

En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı şeklinde yazılamayan polinomlar,

$P(x) = 2x + 3$, $R(x) = 3x^2 + 2$, $T(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x + 1$ ve $B(x) = 2x + 4$ tür.

En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı şeklinde yazılabilen polinomlar

$A(x) = x \cdot (x + 1)$ ve $Q(x) = (x - 2) \cdot (x + 2)$ dir.

$P(x)$, $R(x)$, $T(x)$, $H(x)$ ve $B(x)$ polinomlarından başkatsayısı 1 olan polinomlar $H(x)$ ve $T(x)$ dir.



Tanım ve Bilgi

En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinomlara **indirgenemeyen polinom** denir. Başkatsayısı 1 olan ve indirgenemeyen polinomlara da **asal polinomlar** denir.



Örnek

$A(x) = (x - 2)^2$, $B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$, $C(x) = 2x - 7$, $D(x) = x^2 + 3x - 1$, $E(x) = 2x^2 + 2x - 2$ ve $F(x) = x^2 + 5$ polinomlarından indirgenemeyen polinomları bulalım ve asal olanları belirtelim.

ÇÖZÜM

$A(x) = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$ indirgenebilir bir polinom,

$B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x = x(x^2 + 2x + 3)$ indirgenebilir bir polinom,

$C(x) = 2x - 7$ indirgenemeyen bir polinom,

$D(x) = x^2 + 3x - 1$ indirgenemeyen asal bir polinom,

$E(x) = 2x^2 + 2x - 2 = 2(x^2 + x - 1)$ indirgenemeyen bir polinom,

$F(x) = x^2 + 5$ indirgenemeyen asal bir polinomdur.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki polinomlardan hangileri indirgenemeyen polinomlardır?

a) $x^2 + 2x$

b) $3x^2 - 1$

c) $x^2 + 2$

ç) $2x + 2$

d) $x^2 - x + 1$

e) x

f) $(x + 1)^3$

g) $(x + 1) \cdot (x - 2)$

h) 4

ı) $2x \cdot (x + 1)$

2. Aşağıdaki polinomlardan hangileri asal polinomlardır?

a) x^2

b) $2x^2 - 2x + 2$

c) $x^2 - x - 2$

ç) $x^2 - x$

d) $x^4 + 1$

e) $x + \sqrt{5}$

f) $x^2 + x + 1$

g) $(x - 1)^3$

h) $x^3 + x^2 + x$

ı) $4x^2 + x - 1$

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA YÖNTEMİ



Etkinlik

Merve ile Murat'ın arsası yandaki şekilde görüldüğü gibi birbirine bitişik dikdörtgensel bölge şeklindedir.

- Merve'nin arsasının alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.
- Murat'ın arsasının alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.
- Merve, Murat'ın arsasını satın alıyor. Bu durumda Merve'nin oluşan yeni arsasının kenar uzunluklarını yazınız.
- Merve ve Murat'ın arsalarının alanları toplamı, Merve'nin oluşan yeni arsasının alanına eşit olur mu? Bu eşitliği sağlayan bağıntıyı yazabilir misiniz?



☞ Yeni oluşan arsa ile eski arsaların kenarları arasındaki ortak olan kenarın hangisi olduğunu tartışınız.



Örnek

1. Sadece toplama işlemi ve 10 ile çarpmayı kullanarak, $1972 \cdot 5 + 1972 \cdot 3 + 1972 \cdot 2$ işleminin sonucunu en kısa yoldan bulalım.

ÇÖZÜM

Bu işlemde çarpanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini hatırlayınız. 1972 sayısı bu işlemin ortak çarpanı olduğundan,

$$1972 \cdot 5 + 1972 \cdot 3 + 1972 \cdot 2 = 1972 (5 + 3 + 2) \text{ şeklinde yazılır.}$$

$$= 1972 \cdot 10$$

$$= 19\,720 \text{ olarak işlemin sonucu bulunur.}$$

2. $x \cdot (m-n) + y \cdot (m-n) - z \cdot (m-n)$ ifadesini ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Her bir terimin ortak çarpanı $(m-n)$ olduğundan,

$$x \cdot (m-n) + y \cdot (m-n) - z \cdot (m-n) = (m-n) \cdot (x+y-z) \text{ dir.}$$



Tanım ve Bilgi

Bir polinom ortak çarpan parantezine alınırken öncelikle her bir terimin ortak çarpanı bulunur. Bu ortak çarpan ile terimlerin diğer çarpanlarının toplamı çarpım olarak yazılır.



Örnek

1. $4a^2bx - 6ab^3x^2 - 12abx^3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Her bir terimin ortak çarpanı $2abx$ dir.

$2abx \cdot (2a - 3b^2x - 6x^2)$ olarak bulunur.

2. $(a-b)^2 + (b-a)^3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$(a-b)^2 = (b-a)^2$ olduğundan,

$(a-b)^2 + (b-a)^3 = (b-a)^2 + (b-a)^3$ yazılır.

$(b-a)^2 + (b-a)^3 = (b-a)^2 \cdot [1 + (b-a)]$

$(b-a)^2 + (b-a)^3 = (b-a)^2 \cdot (1+b-a)$ olarak çarpanlarına ayrılır.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $5a + 5b - 5c$

b) $3x + 6y - 9z$

c) $ax + ay - a$

ç) $2a^2 + 6a$

d) $3x^2y - 15xy^2$

e) $6mn^3 + 4m^2n^2 - 8mn$

f) $3 \cdot 5^x - 5^{x+1}$

g) $a \cdot 2^x - b \cdot 2^x$

ğ) $\frac{1}{3}xy^2z^3 + \frac{1}{6}x^3y^2z - 3xy^4z^2$

2. Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x(a-b) - y(a-b)$

b) $x(m-n) + m - n$

c) $a(m+n) - m - n$

ç) $(p+q)^2(p-q) + (p+q)(p-q)^2$

d) $(x-y)^2(x-z) + (y-x)(z-x)^2$

e) $(a-b)(x+y) + (b-a)(x-y)$

f) $4(x+y)(x+y-1) + 6(1-x-y)(x-y)$

g) $4y(x-y) - 3x(y-x) - (x-y)(y+x)$

3. $12^x - 2 \cdot 3^x = 0$ eşitliğinde x değerini bulunuz.

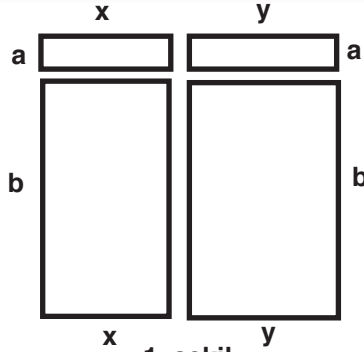
4. $12 \cdot 10! = a$ olduğuna göre $12! + 11! + 10!$ toplamının değerini a cinsinden bulunuz.

GRUPLANDIRARAK ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA YÖNTEMİ



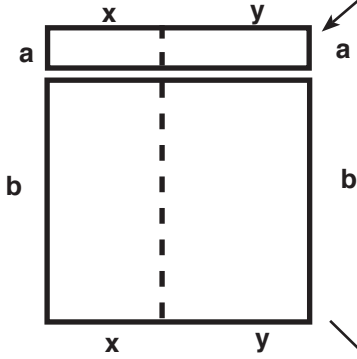
Etkinlik

- Yanda verilen dikdörtgensel bölgelerin alanlarını, verilen kenar uzunluklarına göre bulunuz. Dikdörtgensel bölgelerin toplam alanlarını yazınız.



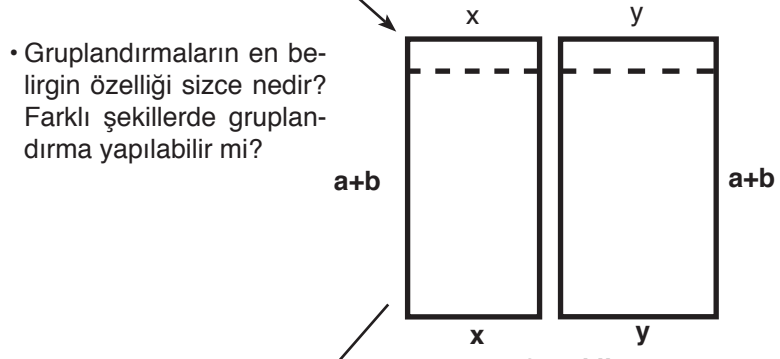
1. şekil

Bu şekiller aşağıdaki gibi gruplandırılır.



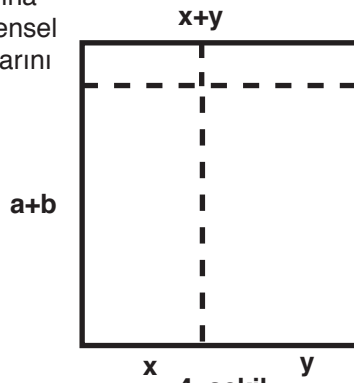
2. şekil

- Yukarıda verilen dikdörtgensel bölgelerin alanlarını, verilen kenar uzunluklarına göre bulunuz. Dikdörtgensel bölgelerin toplam alanlarını bulunuz.



3. şekil

- Yukarıda verilen dikdörtgensel bölgelerin alanlarını, verilen kenar uzunluklarına göre bulunuz. Dikdörtgensel bölgelerin toplam alanlarını bulunuz.



4. şekil

- Yandaki dikdörtgensel bölgenin alanını bulunuz.

- 1 ve 2. şekillerdeki toplam alanlarla 4. şekildeki alan eşit olduğuna göre bu alanların eşitliğinden elde edilen bağıntıyı yazınız. (1)
- 1 ve 3. şekillerdeki toplam alanlarla 4. şekildeki alan eşit olduğuna göre bu alanların eşitliğinden elde edilen bağıntıyı yazınız. (2)

☞ (1) ve (2) eşitliklerini karşılaştırarak yorumlayınız.



Örnek

1. $2x^2 + 4x + x + 2$ polinomunu gruplandırarak çarpanlara ayırma yöntemi yardımıyla çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$2x^2 + 4x + x + 2$ polinomunun terimlerini gruplayalım. Grupladığımız terimleri öyle bir ortak çarpan parantezine alalım ki parantez içleri aynı olsun.

$$(2x^2 + 4x) + (x + 2) = 2x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(2x + 1)$$

2. $x^2 + ay + ax + xy$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Verilen terimleri gruplayalım; $x^2 + ay + ax + xy$

$$(x^2 + ax) + (ay + xy) = x(x + a) + y(a + x) = (a + x)(x + y)$$

3. $3xy + 4ay + 9bx + 12ab$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$$(3xy + 4ay) + (9bx + 12ab) = y(3x + 4a) + 3b(3x + 4a)$$

$$= (3x + 4a)(y + 3b) \text{ olur.}$$

4. $m(x + n) + n(x - m) + m(m + n)$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Verilen ifadede ortak çarpan olmadığından parantezler açılıp gruplandırılır.

$$mx + mn + nx - mn + m^2 + mn = x(m + n) + m(m + n) = (m + n)(x + m) \text{ olur.}$$

5. $x^4y - x^3y + x^2y - xy$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Verilen ifade xy ortak çarpan parantezine alınır, daha sonra gruplara ayrılarak çarpanlara ayrılır.

$$xy(x^3 - x^2 + x - 1) = xy.[x^2(x - 1) + (x - 1)] = x \cdot y \cdot (x - 1)(x^2 + 1) \text{ olur.}$$

6. $a^2 + ab - ad - db - ac + dc - a - b + c$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$a^2 + ab - ad - db - ac + dc - a - b + c$ ifadesini üçerli gruplayalım.

$$(a^2 + ab - ac) + (-ad - db + dc) + (-a - b + c) = a(a + b - c) - d(a + b - c) - (a + b - c)$$

$$= (a + b - c)(a - d - 1) \text{ olur.}$$



Tanım ve Bilgi

En az 4 terimi verilen bir polinomu gruplandırarak çarpanlara ayırmak için, bu polinomun terimleri iki veya daha fazla terimden oluşan gruplara ayrılır. Daha sonra her bir grup ortak çarpan parantezine alınır. Buna **gruplandırarak ortak çarpan parantezine alma yöntemi** denir.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

- | | |
|---------------------------|------------------------------------|
| a) $ax + a + bx + b$ | b) $6ax - 3x - 2a^2 + a$ |
| c) $x^3 + x^2 + x + 1$ | ç) $3ax + 6ay - 6x - 12y + x + 2y$ |
| d) $xy - 2x - 2y + 4$ | e) $2ax + 2ay - 2a + 6x + 6y - 6$ |
| f) $2mn + pn - 30m - 15p$ | g) $a + b - 1 - ax - bx + x$ |
| ğ) $x - 3y + 2xz - 6yz$ | h) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$ |

2. Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

- a) $x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)$
b) $x^4y^2 + x^3y^2 + x^2y^2 + xy^2$
c) $x^2 + ay + x(a + y)$

3. Aşağıdaki verilen işlemleri çarpanlara ayırma yöntemi kullanarak hesaplayınız.

- a) $201 \cdot 2099 - 2089 \cdot 201$
b) $\frac{77}{99} \cdot 47 + 121 \cdot \frac{47}{99}$
c) $29 \cdot 108 + 63 \cdot 108 - 92 \cdot 103$
ç) $98 \cdot 104 + 98 \cdot 201 + 245 \cdot 12 + 60 \cdot 12$

4. Ölçüleri toplamı 90° derece olan x ve y dar açıları veriliyor. Ölçüleri $2x + y$ ve $2y + x$ olan iki açının toplamı kaç dik açıya eşittir?

5. $x + y = -5$ ve $z - x = 3$ olduğuna göre

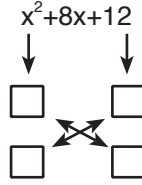
$x^2 - xz + xy - yz$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $x + y = 3$ ve $y - z = 5$ olduğuna göre, $x^2 + yz + xz + xy$ ifadesinin değerini bulunuz.

x^2+bx+c ve ax^2+bx+c Biçimindeki Polinomların Çarpanlarına Ayrılması



Etkinlik



- x^2 ve 12 nin çarpanları sütunlarındaki kutucuklara alt alta nasıl yerleştirilirse çapraz çarpımları toplamı $8x$ olur?
 - Kutucuklara yazılan çarpanları karşılıklı olarak toplayınız. Toplanan ifadeleri, çarpım biçiminde yazınız.
 - Elde ettiğiniz cebirsel ifade ile $x^2+8x+12$ ifadesini karşılaştırınız.
- ☞ Buradan x^2+mx+n gibi üç terimlilerin çarpanlarına ayrılması ile ilgili bir yöntem bulmaya çalışınız.



Örnek

$P(x) = x^2+4x+3$ ve $Q(x) = x^2-5x+6$ polinomlarını çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$P(x) = x^2+4x+3$ polinomunda çarptığımızda 3 ü, topladığımızda 4 ü veren sayılar 3 ve 1 dir.

$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & +3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & +1 \end{array}$$

$Q(x) = x^2-5x+6$ polinomu da

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & -2 \end{array}$$



Tanım ve Bilgi

$a=1$, $b=m+n$ ve $c=m.n$ ise,
 $x^2+bx+c = x^2+(m+n)x+m.n = (x+m)(x+n)$ dir.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & +m \\ x & \xrightarrow{\quad} & +n \end{array}$$

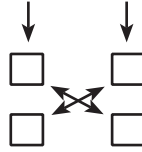
$mx + nx = x(m+n)$ olduğundan

$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.



Etkinlik

$$3x^2 + 14x + 8$$



- $3x^2$ ve 8 in çarpanları sütunlarındaki kutucuklara alt alta nasıl yerleştirilirse çapraz çarpımları toplamı $14x$ olur?
 - Kutucuklara yazılan çarpanları karşılıklı olarak toplayınız. Toplanan ifadeleri, çarpım biçiminde yazınız.
 - Elde ettiğiniz cebirsel ifade ile $3x^2 + 14x + 8$ ifadesini karşılaştırınız.
- ☞ Buradan $ax^2 + bx + c$ gibi üç terimlilerin çarpanlarına ayrılması ile ilgili bir yöntem bulmaya çalışınız.



Örnek

Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

a) $2x^2 + 5x - 12$

b) $6x^2 - x - 12$

ÇÖZÜM

a) $2x^2 + 5x - 12 = (2x-3)(x+4)$

$$\begin{array}{r}
 \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 2x \quad \quad -3 \\
 x \quad \quad +4 \\
 \hline
 8x - 3x = 5x
 \end{array}$$

b) $6x^2 - x - 12 = (3x+4) \cdot (2x-3)$

$$\begin{array}{r}
 \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 3x \quad \quad +4 \\
 2x \quad \quad -3 \\
 \hline
 8x - 9x = -x
 \end{array}$$



Tanım ve Bilgi

$a \neq 1$ iken $a = m \cdot n$, $c = p \cdot q$ ve $b = m \cdot q + n \cdot p$
 $ax^2 + bx + c = m \cdot n x^2 + (mq+np)x + p \cdot q = (mx+p)(nx+q)$

$$\begin{array}{r}
 \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 mx \quad \quad +p \\
 nx \quad \quad +q \\
 \hline
 \end{array}$$

$mqx + np x = x(mq+np)$ olduğundan,

$ax^2 + bx + c = (mx+p)(nx+q)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 + 7x + 12$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $x^2 - 5x + 4$

ç) $m^2 - 5m - 14$

d) $a^2 - 5a - 6$

e) $77 - 4x - x^2$

f) $x^2y^2 + 2xy - 3$

g) $-m^2 - 4m - 3$

ğ) $x^2 - 2(a+b)x + 4ab$

h) $x^2 + 10xy + 21y^2$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $5x^2 - 4x - 1$

b) $4x^2 - 9x + 2$

c) $10x^2 + 7x - 12$

ç) $14x^2 - 5x - 1$

d) $3x^2 + 5x - 2$

e) $6x^2 - 5x + 1$

3. $x^2 - mx + 6 = (x + 3).(x + n)$ eşitliğinde $m+n$ kaçtır?

4. Aşağıdaki eşitliklerin doğru ya da yanlış olduğunu belirtiniz.

	DOĞRU	YANLIŞ
$x^2 - 8x + 12 = (x + 6).(x - 2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^2 + 9x - 10 = (x - 1).(x + 10)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$4x^2 + 7x - 2 = (4x - 1).(x + 2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$10x^2 + 24x - 18 = (5x - 3).(2x + 6)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5. $24x^2 - 36x - 24$ polinomunun çarpanlarına ayrılmış şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(8x + 3).(3x - 8)$

B) $(3x - 8).(8x + 3)$

C) $(6x + 3).(4x - 8)$

D) $(6x - 4).(4x - 6)$

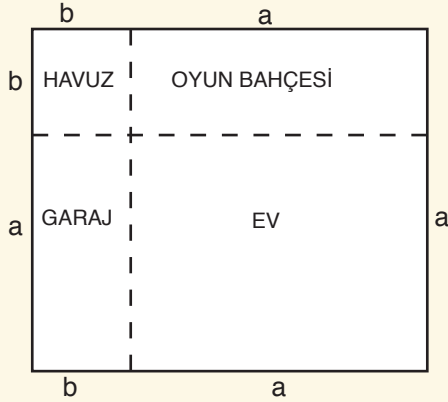
E) $(6x - 3).(4x + 8)$

ÖZDEŞLİKLERDEN YARARLANARAK ÇARPANLARA AYIRMA

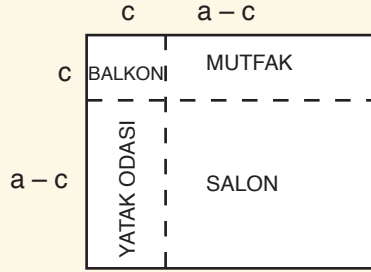


Etkinlik

Bir kenarı $a+b$ birim olan karesel bölge şeklindeki arsanın içinde bir kenarı a birim olan karesel bölge şeklinde ev vardır. Evde bulunan bir kenarı c birim olan karesel bölge şeklindeki balkonun krokisi şeklindeki gibidir.



ARSANIN KROKİSİ



EVİN KROKİSİ

- Arsanın alanını veren cebirsel ifadeyi bulunuz. Sırasıyla garaj, havuz, oyun bahçesi ve evin alanlarını bulunuz. Bu alanların toplamını veren cebirsel ifade ile arsanın alanını veren cebirsel ifadeyi karşılaştırarak aralarındaki bağıntıyı yazınız.
- Mutfak, salon ve yatak odasının toplam alanını veren cebirsel ifadeyi ortak çarpan parantezine ayırarak bulunuz. Aynı alanı veren $a^2 - c^2$ ifadesini bulduğunuz cebirsel ifadeyle karşılaştırarak aralarındaki bağıntıyı yazınız.



Örnek

1. Aşağıda verilen özdeşlikleri polinomlarda çarpma işlemini kullanarak eşitini bulalım.

- a) $(x+y)^2$ b) $(x-y)^2$ c) $(x-y)(x+y)$

ÇÖZÜM

a) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b) $(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

c) $(x-y)(x+y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$ dir.

2. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$a + b = x$ dersek

$(a+b+c)^2 = (x+c)^2 = x^2 + 2xc + c^2$ olur. Bu açılımda $x = a + b$ yi yerine yazarsak

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2.(a+b).c + c^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ özdeşliği elde edilir.}$$



Tanım ve Bilgi

Çarpanlara ayırmada sık kullanılan özdeşliklerden bazıları aşağıdaki gibidir:

Tam kare özdeşlikleri,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \text{ dir.}$$

İki kare farkı özdeşliği, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ dir.



Örnek

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.

a) $(2x+3)^2$ b) $(3a-2)^2$ c) $(x+\frac{2}{x})^2$ ç) $(x-2y+z)^2$

d) $16x^2 - y^2$ e) $(x+y)^2 - z^2$ f) $x^2 - \frac{4}{x^2}$ g) $y^2 - (x+1)^2$

ÇÖZÜM

a) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) $(3a-2)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 - 12a + 4$

c) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$

ç) $(x-2y+z)^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2x(-2y) + 2xz + 2(-2y)z$
 $= x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz$

d) $16x^2 - y^2 = (4x)^2 - y^2 = (4x-y)(4x+y)$

e) $(x+y)^2 - z^2 = (x+y-z)(x+y+z)$

f) $x^2 - \frac{4}{x^2} = x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)$

g) $y^2 - (x+1)^2 = [y - (x+1)] \cdot [y + (x+1)] = (y-x-1)(y+x+1)$

2. $x+y = 3$ ve $x \cdot y = 1$ ise x^2+y^2 ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$x + y = 3$ eşitliğinin her iki tarafının karesini alırsak,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 9 \text{ olur.}$$

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 7 \text{ şeklinde bulunur.}$$

3. $x^2 - 4y^2 = 16$ ve $x - 2y = 2$ ise x değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - 4y^2 = 16$ ise iki kare farkı özdeşliğinden

$$(x-2y)(x+2y) = 16$$

2. $(x+2y) = 16$ ise $x + 2y = 8$ bulunur.

$$x + 2y = 8$$

$$x - 2y = 2$$

$$2x = 10 \text{ ise } x = 5 \text{ tir.}$$

4. $a^2 - b^2 + 2a + 1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$a^2 - b^2 + 2a + 1 = a^2 + 2a + 1 - b^2$ şeklinde düzenlersek,

$= (a+1)^2 - b^2$ olur. İki kare farkı özdeşliğinden

$= (a+1-b)(a+1+b)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

5. $x - \frac{1}{x} = 4$ ise $x^2 - \frac{1}{x^2}$ ifadesinin pozitif değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$ ifadesini bulabilmek için, $x + \frac{1}{x}$ değerini bulmamız gerekir.

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2$ ise $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ bulunur. Buradan $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 20$ dir.

$\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{20}$ ise $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$ olur. Sonuç olarak

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

6. $x^2 - 7x + 5 = 0$ eşitliği veriliyor. Buna göre $x^2 + \frac{25}{x^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - 7x + 5 = 0$ eşitliğinde her terimi x e bölelim.

$$\frac{x^2}{x} - \frac{7x}{x} + \frac{5}{x} = \frac{0}{x}$$

$$x - 7 + \frac{5}{x} = 0$$

$x + \frac{5}{x} = 7$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın karesini alalım.

$$\left(x + \frac{5}{x}\right)^2 = 7^2$$

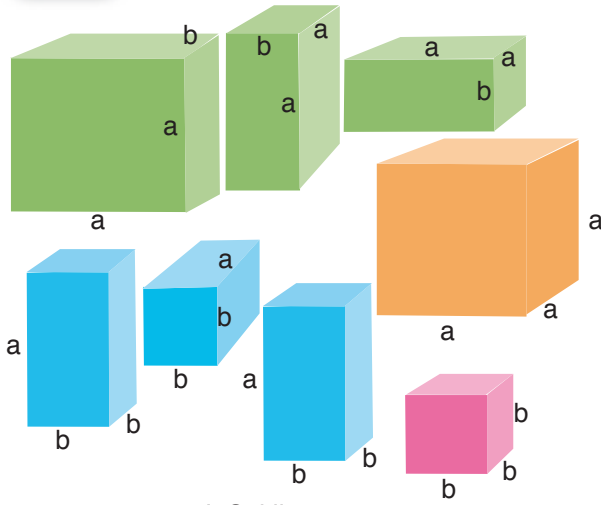
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{x} + \frac{25}{x^2} = 49$$

$$x^2 + 10 + \frac{25}{x^2} = 49$$

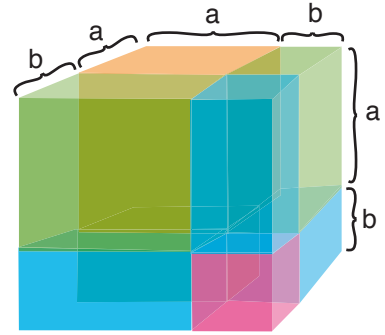
$$x^2 + \frac{25}{x^2} = 39 \text{ bulunur.}$$



Etkinlik



I. Şekil



II. Şekil

I. şekildeki parçalar birleştirilerek II. şekil elde ediliyor.

- I. şekildeki cisimlerin her birinin hacimlerini bulunuz.
- I. şekildeki cisimlerin hacimleri toplamını veren cebirsel ifadeyi bulunuz.
- II. şeklin hacmini veren cebirsel ifadeyi yazınız.

☞ Elde ettiğiniz bu iki cebirsel ifadeyi karşılaştırarak a ve b ye bağlı bir bağıntı oluşturunuz.

☞ Benzer yaklaşımla $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ olduğunu matematiksel ve geometrik yöntemle gösteriniz.



Örnek

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ve $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ özdeşliklerinin doğruluğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2 \cdot (x+y) \\ &= (x^2+2xy+y^2)(x+y) \\ &= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3 \text{ düzenlersek,}\end{aligned}$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \text{ bulunur.}$$

Bu eşitlikte y yerine $-y$ yazarsak

$$(x+(-y))^3 = x^3+3x^2(-y)+3x(-y)^2+(-y)^3$$

$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \text{ olduğu görülür.}$$



Tanım ve Bilgi

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ tür.}\end{aligned}$$



Örnek

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulalım.

$$\text{a) } (x+2)^3 \quad \text{b) } (a-1)^3 \quad \text{c) } (2a-1)^3 \quad \text{ç) } (4m-2n)^3$$

ÇÖZÜM

$$\text{a) } (x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\text{b) } (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot 1 + 3a \cdot 1^2 - 1^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$\text{c) } (2a-1)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2a) \cdot 1^2 - 1^3 = 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$$

$$\text{ç) } (4m-2n)^3 = (4m)^3 - 3 \cdot (4m)^2 \cdot 2n + 3 \cdot (4m) \cdot (2n)^2 - (2n)^3 = 64m^3 - 96m^2n + 48mn^2 - 8n^3$$

2. $x^3 + 3x^2y = 29$ ve $y^3 + 3xy^2 = 35$ ise $x+y$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$(x+y)^3 = \underbrace{x^3 + 3x^2y}_{29} + \underbrace{3xy^2 + y^3}_{35}$$

$$(x+y)^3 = 64 \text{ ise } x+y = 4 \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen tam kare açılımlarındaki boşlukları uygun olarak doldurunuz.

$$\text{a) } (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$\text{b) } (a^2+2b)^2 = \dots + 4a^2b + 4b^2$$

$$\text{c) } (2a-b)^2 = \dots a^2 \dots ab \dots b^2$$

$$\text{ç) } (a \dots)^2 = a^2 - 6a + 9$$

$$\text{d) } (m-3n)^2 = \dots m^2 \dots mn \dots n^2$$

$$\text{e) } (2m \dots)^2 = 4m^2 - 24mn + 36n^2$$

$$\text{f) } \left(2p - \frac{1}{3}\right)^2 = \dots p^2 \dots p \dots$$

$$\text{g) } (\dots + 2p)^2 = 9 - 12p \dots$$

ğ) $(1 - 3y)^2 = 1 - 6y + 9y^2$

h) $(\dots \dots)^2 = x^2 - 2x + 1$

ı) $(2x \dots)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

i) $(\dots \dots)^2 = 9x^2y^2 - 6xy + 1$

2. Aşağıda verilen ifadelerin karelerini bulunuz.

a) $2x + y + z$ b) $x - y + 2z$

3. Aşağıda verilen ifadelerin tam kare ifade olması için \square yerine yazılacak sayıları bulunuz.

a) $a^2 + 6a + \square$

b) $b^2 + \frac{1}{2}b + \square$

c) $c^2 - \sqrt{2}c + \square$

ç) $x^2 - 4x + \square$

d) $t^2 - \frac{5}{3}t + \square$

e) $n^2 - \frac{3}{4}n + \square$

4. Aşağıdaki verilen eşitliklerde boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a) $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (\dots\dots\dots)$

b) $16a^2b^2 - 25 = (4ab-5) \cdot (\dots\dots\dots)$

c) $4x^2 - y^2 = (2x+y) \cdot (\dots\dots\dots)$

ç) $(a+b)^2 - 4c^2 = (\dots\dots\dots) \cdot (a+b+2c)$

d) $x^2 - 9 = (\dots\dots\dots) \cdot (x+3)$

e) $4x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(2x - \frac{1}{x}\right) \cdot (\dots\dots\dots)$

f) $4 - a^2 = (2-a) \cdot (\dots\dots\dots)$

g) $x-9 = (\dots\dots\dots) \cdot (\sqrt{x}-3)$

ğ) $5x^2 - 20 = 5 \cdot (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots)$

h) $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2}) \cdot (\dots\dots\dots)$

5. A tablosunda verilen ifadelerin eşitliklerini B tablosunda bulunuz. Bunları örnekte gösterildiği gibi eşleştiriniz.

	A		B
(1)	$(2a-b) \cdot (2a+b)$	$9-a^2$	()
(2)	$(a - \sqrt{2}) \cdot (a + \sqrt{2})$	a^6-4	()
(3)	$(3-a) \cdot (3+a)$	$4a^2-b^2$	()
(4)	$(a-2b) \cdot (a+2b)$	a^2-1	()
(5)	$(a+1) \cdot (1-a)$	a^2-2	()
(6)	$(a^3-2) \cdot (a^3+2)$	a^2-4b^2	(4)
(7)	$(-a-1) \cdot (-a+1)$	$1-a^2$	()

6. $m^2 - n^2 = 20$ ve $m-n = 2$ ise m.n değerini bulunuz.

7. $\frac{2007^2-1907^2}{979^2-978^2}$ işleminin sonucu kaçtır?

8. $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)(x^2+1) = 24$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

9. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

- a) $1-36a^2$ b) $108-75x^2$
c) $4a^2 - \frac{1}{a^2}$ ç) $(a+b)^2 - c^2$
d) $(m-2n)^2 - (m+2n)^2$ e) $a^2 - (1-a)^2$

10. a^3-2a^2-a+2 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

11. $x-y = 12$ ve $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ ise $x+y$ toplamının değeri kaçtır?

12. $x + \frac{1}{x} = 5$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

13. $x^2 + x - y^2 - y$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

14.



Yandaki resimde görülen evin kare şeklindeki cephesi boyanmıştır. Bu cephede kare şeklinde bir pencere bulunmaktadır. Pencerenin çerçevesi ile evin boyanan duvarının çevresi toplamı 20 metre, boya yapılan alan 15 metrekare ise pencerenin bir kenar uzunluğu kaç metredir?

15. $x = 25$, $y = 21$ ise $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ifadesinin değeri kaçtır?

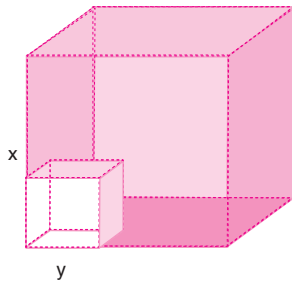
16. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $3ab^2 + b^3 = 26$, $3a^2b + a^3 = 38$ ise $a+b$ toplamı kaçtır?

17. $a = \frac{5}{3}$ ise $(a-4)^3 + 3(a-4)^2 + 3(a-4) + 1$ ifadesinin değeri kaçtır?

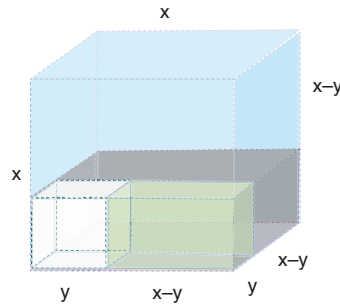


Etkinlik

Bir ayrıtın uzunluğu x birim olan küpten, bir ayrıtının uzunluğu y birim olan bir küp çıkarıldığında geriye kalan parça aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



I. Şekil



II. Şekil

- I. şekildeki geriye kalan parçanın hacmini veren cebirsel ifadeyi bulunuz.
 - II. şekildeki yeşil, mavi ve gri bölgelerin hacimlerini veren cebirsel ifadeleri yazınız. Bu cebirsel ifadelerin toplamını çarpanlarına ayırınız.
- ☞ I ve II. şekildeki cisimlerin hacimlerinin eşitliğinden yararlanarak x ve y ye bağlı bir bağıntı oluşturunuz.



Örnek

Polinomlarda çarpma işlemini kullanarak,
 $(x-y) \cdot (x^2+xy+y^2)$ ve $(x+y) \cdot (x^2-xy+y^2)$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$(x-y) \cdot (x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2 \cdot y + xy^2 - y \cdot x^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

$$(x+y) \cdot (x^2-xy+y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 \text{ olduğu görülür.}$$



Tanım ve Bilgi

İki terimin küplerinin toplamı $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$,

iki terimin küplerinin farkı $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ dir.



Örnek

1. Aşağıdaki verilen cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^3 - 8$ b) $a^3 + 64$ c) $27m^3 - 1$ ç) $p^3 - 8q^3$

ÇÖZÜM

a) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

b) $a^3 + 64 = a^3 + 4^3 = (a+4)(a^2-4a+16)$

c) $27m^3 - 1 = (3m)^3 - 1^3 = (3m-1)(9m^2+3m+1)$

ç) $p^3 - 8q^3 = p^3 - (2q)^3 = (p-2q)(p^2+2pq+4q^2)$ dir.

2. $m - n = 4$ ve $m \cdot n = 1$ ise $m^3 - n^3$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$m - n = 4$ ifadesinde her iki tarafın karesini alarak,

$$m^2 - 2mn + n^2 = 4^2$$

$$m^2 - 2 \cdot 1 + n^2 = 16$$

$$m^2 + n^2 = 18 \text{ olarak bulunur. Bu ifadeyi,}$$

$$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2+mn+n^2) \text{ de yerine yazarsak}$$

$$m^3 - n^3 = 4 \cdot (18+1)$$

$$m^3 - n^3 = 4 \cdot 19$$

$$m^3 - n^3 = 76 \text{ olarak bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Örnekte olduğu gibi doldurunuz.

Verilen ifade	$A^3 - B^3$	A	B	$A - B$	$A^2 + AB + B^2$	$(A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$
$x^3 - 125y^3$	$(x)^3 - (5y)^3$	x	5y	$x - 5y$	$x^2 + x \cdot 5y + (5y)^2$	$(x - 5y) \cdot (x^2 + 5xy + 25y^2)$
$8 - a^3$						
				$a - 4$	$a^2 + 4a + 16$	

2. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Örnekte olduğu gibi doldurunuz.

Verilen ifade	$A^3 + B^3$	A	B	$A + B$	$A^2 - AB + B^2$	$(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$
$8a^3 + 1$	$(2a)^3 + 1^3$	2a	1	$2a + 1$	$(2a)^2 - 2a \cdot 1 + 1^2$	$(2a + 1) \cdot (4a^2 - 2a + 1)$
$64x^3 + 27$						
$1 + x^3$						
						$(3x + 2y) \cdot (9x^2 - 6xy + 4y^2)$

3. Aşağıdaki eşitlikleri inceleyerek karşılardaki uygun kutuyu işaretleyiniz.

	DOĞRU	YANLIŞ
$x^3 + y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + xa + a^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$m^3 + 8 = (m + 2) \cdot (m^2 - 2m + 2^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$27m^3 - 8 = (3m - 2) \cdot (9m^2 + 6m + 4)$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^6 - y^6 = (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + x^2y^2 + y^4)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{x^3}{64} - \frac{y^3}{8} = \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{16} + \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4}\right)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. $a^3 - 64b^3 = 80$

$a^2 + 16b^2 = 16 - 4ab$ ise $a - 4b$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. x, pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ ise $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

TERİM EKLEYEREK VEYA ÇIKARARAK ÇARPANLARA AYIRMA



Etkinlik

$x^4 + x^2 + 1$ ifadesi veriliyor.

- Verilen ifadeyi çarpanlarına ayırabilir misiniz? Neden?
 - Bu ifade $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$ şeklinde yazılabilir mi? Burada yapılan işlemi tartışınız.
 - $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$ ifadesi çarpanlarına ayrılabilir mi? Neden?
- ☞ Bazı polinomları çarpanlarına ayırırken terim ekleme veya terim çıkarmanın sağladığı kolaylıkları tartışınız.



Örnek

1. $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

Daha önceki çalışmalarımızdan $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ olduğunu hatırlayarak $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ ifadesine 1 ekleyip 1 çıkaralım.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 7 - 1 &= (x+1)^3 - 8 \\ &= (x+1)^3 - 2^3 \\ &= (x+1-2) ((x+1)^2 + 2(x+1) + 4) \\ &= (x-1) (x^2 + 4x + 7) \text{ olur.} \end{aligned}$$

2. $x^4 + 64$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$$x^4 + 64 = (x^2)^2 + 16x^2 + 8^2 - 16x^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(x^2)^2 \quad (8)^2$$

İstenen ifadeyi tam kare yapabilmek için yukarıdaki gibi $16x^2$ terimini ekleyip çıkarırız.

$$(x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \text{ eşitliğinde iki kare farkı özdeşliğinden}$$

$$(x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x) (x^2 + 8 + 4x) \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$x^4 + 64 = (x^2 - 4x + 8) (x^2 + 4x + 8) \text{ şeklinde çarpanlarına ayrılır.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

b) $t^4 + 5t^2 + 9$

c) $x^3 - 3x^2 + 3x + 26$

ç) $4m^4 + 3m^2 + 1$

d) $x^4 + 4$

e) $x^2 - y^2 + 6x - 12y - 27$

2. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$ eşitliğinde $x, y \in \mathbb{R}$ ise $x.y$ kaçtır?

3. $x^2 + 2x - 8$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

$x^n - y^n$ ve $x^n + y^n$ ($n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$) BİÇİMİNDEKİ POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI



Etkinlik

1. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

$$\begin{array}{r} x^4 - 16 \quad | \quad x - 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^5 - 32 \quad | \quad x - 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^6 - 64 \quad | \quad x - 2 \\ \hline \end{array}$$

• Elde ettiğiniz bölüm polinomlarını inceleyiniz.

☞ $x^n - y^n$ polinomunun çarpanları hakkında nasıl bir çıkarımda bulunabilirsiniz?

2. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 \quad | \quad x + y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + y^3 \quad | \quad x + y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + y^4 \quad | \quad x + y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^5 + y^5 \quad | \quad x + y \\ \hline \end{array}$$

☞ Yaptığınız bölme işlemlerini inceleyerek $x^n + y^n$ gibi bir polinomun $x + y$ ile tam bölünebilmesi için n nin hangi değerleri alması gerektiğini belirtiniz.



Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $a^5 - b^5$ b) $a^4 - 16$ c) $a^7 + b^7$ ç) $a^5 + 32$

ÇÖZÜM

a) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

b) $a^4 - 16 = a^4 - 2^4 = (a - 2)(a^3 + a^2 \cdot 2 + a \cdot 2^2 + 2^3) = (a - 2)(a^3 + 2a^2 + 4a + 8)$
 $= (a - 2)[a^2(a + 2) + 4(a + 2)] = (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$

Siz de iki kare farkı özdeşliğini kullanarak $a^4 - 16$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

c) $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

ç) $a^5 + 32 = a^5 + 2^5 = (a + 2)(a^4 - a^3 \cdot 2 + a^2 \cdot 2^2 - a \cdot 2^3 + 2^4) = (a + 2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$



Tanım ve Bilgi

n doğal sayı olmak üzere,

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}) \text{ dir.}$$

n tek doğal sayı olmak üzere,

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}) \text{ dir.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^6 - y^6$ b) $x^5 + y^5$ c) $x^{10} + y^{10}$ ç) $x^6 + 1$

2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{63}{x-1}$ ise x değerini bulunuz.

3. $7^6 - 1$ sayısını tam bölen en büyük asal sayıyı bulunuz.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİYLE ÇARPANLARA AYIRMA



Etkinlik

$x^2 + 2x - 3$ ifadesinde,

- x yerine $(2x - 1)$ yazılırsa hangi ifade elde edilir?
- x yerine a^2 yazılırsa hangi ifade elde edilir?
- x yerine y yazılırsa hangi ifade elde edilir?

☞ Yukarıda elde edilen ifadelerin çarpanlarına ayrılmasında $x^2 + 2x - 3$ polinomundan yararlanılabilir mi? Tartışınız.



Örnek

1. $x^4 - 5x^2 + 4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$x^2 = t$ olsun.

$t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$ olur.

$\begin{array}{cc} & \swarrow \searrow \\ -1 & -4 \end{array}$

Burada t yerine x^2 yazılırsa $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ elde edilir.

2. $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 3 = a$ olsun. Bu durumda ifade,

$a^2 - 11a + 28 = (a - 4)(a - 7)$ olur.

$\begin{array}{cc} & \swarrow \searrow \\ -4 & -7 \end{array}$

a yerine $(x^2 + 3)$ yazarak,

$$\begin{aligned} (x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 &= (x^2 + 3 - 4)(x^2 + 3 - 7) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \end{aligned}$$

$(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

3. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

ÇÖZÜM

$3^x = m$ olsun. Bu durumda ifade,

$m^2 - 4m + 3 = (m - 3)(m - 1)$ olur.

$\begin{array}{cc} & \swarrow \searrow \\ -3 & -1 \end{array}$

m yerine 3^x yazarsak,

$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = (3^x - 3)(3^x - 1)$ elde edilir.



Tanım ve Bilgi

Bir harfli ifadede bulunan benzer terimler, yeni bir harfle gösterilerek ifade daha sade hâle getirilip çarpanlarına ayrılabilir. Bu yöntem **değişken değiştirme yöntemi** denir.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki tabloyu örnekte olduğu gibi doldurunuz.

$(x+2)^2 - (x+2) - 2$	$x+2=t$	$t^2 - t - 2$	$(t-2)(t+1)$	$x(x+3)$
$(3x-1)^2 - (3x-1) - 6$	$3x-1=a$	$a^2 - a - 6$		
$x^4 - 4x^2 + 4$	$x^2=m$			
$(x^2+1)^2 - 3(x^2+1) - 4$				
$\sqrt{x} - 7 \cdot \sqrt[4]{x} + 12$	$k = \sqrt[4]{x}$			
$4^x - 3 \cdot 2^x + 2$				
$x^{-2} - x^{-1} - 2$				

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

- a) $(x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8$ b) $(a+b-3)^2 - 2(a+b-3) \cdot (b-3) + (b-3)^2$
c) $2(x+3)^2 - 7(x+3) + 6$ ç) $x^6 - 1$
d) $a^4 - a^2 - 12$ e) $a^4 - 2a^2 - 3$
f) $(2x+1)^2 - (2x+1) - 2$ g) $(x+1)^2 - (x+1) \cdot (x-3) - 6 \cdot (x-3)^2$
ğ) $8^x - 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x - 1$ h) $(a+2) \cdot (a+3) \cdot (a+4) \cdot (a+5) - 360$

3. $(1002.998 - 1004.996)^2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 144 B) 140 C) 136 D) 132 E) 128

4. $\sqrt{1992.1986 - 2.1993.1987 + 1990.1994 + 10}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

5. $(x^2+2)^2 - 3x^2 - 6$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x+2$ B) $x-2$ C) $x+1$ D) x^2+1 E) x^2+5

İKİ YA DA DAHA ÇOK POLİNOMUN ORTAK BÖLENLERİNİN EN BÜYÜĞÜ (OBEB) VE ORTAK KATLARININ EN KÜÇÜĞÜ (OKEK)



Etkinlik

1. $P(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot x^4$

$Q(x) = (x-2) \cdot x^2 \cdot (x+3)$

$R(x) = (x-2) \cdot (x^2+1) \cdot x^3$ polinomları veriliyor.

• Her üç polinomun çarpanı olan (tam olarak bölen) polinomlar nelerdir?

• Her üç polinomu bölen en büyük dereceli polinomu bulunuz.

☞ $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarının ortak bölenlerinin en büyüğünün (OBEB) bir polinom olup olmadığını tartışınız. Polinom ise OBEB 'ini bulunuz.

2. $P(x) = (x+3)^2 \cdot (x+1)$

$Q(x) = (x+3) \cdot (x-1)$ polinomları veriliyor.

• Her iki polinomun ortak katları nelerdir?

• $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarına tam bölünebilen en küçük dereceli polinomu bulunuz.

☞ $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının ortak katlarının en küçüğünün (OKEK) bir polinom olup olmadığını tartışınız. Polinom ise OKEK 'ini bulunuz.



Örnek

$P(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$ ve $Q(x) = (x-1)(x-2)(x+1)^3$ polinomları veriliyor.

a) Bu iki polinomu bölen en büyük dereceli polinomu bulalım.

b) Bu iki polinoma tam bölünebilen en küçük dereceli polinomu bulalım.

ÇÖZÜM

a) Bu iki polinomu bölen en büyük dereceli polinom,

$(x-2)(x+1)$ dir.

b) Bu iki polinoma tam bölünebilen en küçük dereceli polinom,

$(x-2)^2 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-1)$ dir.



Tanım ve Bilgi

Birden fazla polinomun en büyük dereceli ortak çarpanlarına bu polinomların **OBEB'i (ortak bölenlerin en büyüğü)** denir.

Birden fazla polinoma tam bölünebilen en küçük dereceli polinoma bu polinomların **OKEK'i (ortak katlarının en küçüğü)** denir.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Polinomlar	Polinomların OKEK'i	Polinomların OBEB'i
$P(x) = x-2$ $Q(x) = x+2$		
$P(x) = (x+1)^2 \cdot (x+5)$ $Q(x) = (x+1)^3 \cdot (x+5) \cdot (x-5)$		
$P(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)^3$ $Q(x) = x^2 \cdot (x+1)$ $R(x) = x^3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$		

2. Aşağıdaki tabloyu örnekte olduğu gibi doldurunuz.

Polinomlar	Polinomların asal çarpanları	Polinomların OBEB'i	Polinomların OKEK'i
$P(x) = 6x^3 - 24x^2 + 24x$	$6x(x-2)^2$	$3(x-2)$	$12(x-2)^2(x+2)(x+2)$
$Q(x) = 3x^2 + 9x - 30$	$3(x-2)(x+2)$		
$R(x) = 12x^4 - 48x^2$	$12x^2(x-2)(x+2)$		
$M(x) = (x^4 + 5x^3)(x-1)$			
$N(x) = 2x^3 + 8x^2 - 10x$			
$K(x) = 4x^4 - 4x^2$			
$A(x) = x^4 - x^2$			
$B(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$			
$C(x) = x^3 - x^2 - 2x$			

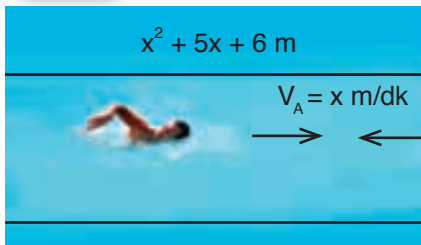
3. OBEB $[P(x), Q(x)] = (x+1) \cdot (x+2)$

OKEK $[P(x), Q(x)] = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)^2$ ise $P(x) + Q(x)$ in kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

RASYONEL İFADELER VE DENKLEMLER



Motivasyon



Akıntı hızı x m/dk., uzunluğu $x^2 + 5x + 6$ m olan nehri, akıntıya karşı $x + 2$ dk. sürede yüzmek isteyen Çağan'ın hızını veren bağıntıyı bulunuz.



Etkinlik

$\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^3+5}{x+2}$, $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$, $\frac{3}{x-5}$, $\frac{2x^2-x+7}{3x^2+4}$ ifadeleri veriliyor.

- Verilen ifadelerin pay ve paydaları polinom mudur?
- Bu ifadeler polinom olur mu? Neden?



Örnek

$P(x) = x+2$ ve $Q(x) = x+1$ polinomları veriliyor. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin bir polinom olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1} \text{ olur.}$$

$\frac{1}{x+1}$ ifadesi bir polinom değildir. Bu nedenle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesi polinom değildir.



Tanım ve Bilgi

Paydası sıfır polinomundan farklı, pay ve paydası polinom olan kesirli ifadelere **rasyonel ifadeler** denir.

RASYONEL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ



Etkinlik

$\frac{x^2-4}{x+2}$, $\frac{x^2+3x}{x}$, $\frac{x^2-2x}{x-2}$, $\frac{x^2}{x+1}$, $\frac{x^2+7}{x-3}$, $\frac{x^3}{x^2+4}$ ifadeleri veriliyor:

- Yukarıdaki ifadelerin her birinin pay ve paydalarının OBEB'lerini bulunuz.
- Hangi ifadeler sadeleşir?
- Sadeleşebilen ifadelerle sadeleşemeyen ifadelerin OBEB'lerini karşılaştırınız.

☞ Verilen bir rasyonel ifadenin nasıl sadeleştirileceğini tartışınız.



Örnek

$\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}$ rasyonel ifadesini sadeleştirelim.

ÇÖZÜM

$x^2+7x+12 = (x+4)(x+3)$ ve $x^2-16 = (x-4)(x+4)$ olduğundan

$x^2+7x+12$ ve x^2-16 polinomlarının OBEB'i $x+4$ tür. $\frac{x^2+7x+12}{x^2-16} = \frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$ olur.



Tanım ve Bilgi

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinde pay ve paydanın $P(x)$ ve $Q(x)$ in OBEB' ine bölünmesine

sadeleştirme denir. Rasyonel ifadelerde dört işlem yapmak için rasyonel sayılarla yapılan işlemlerden faydalanabilirsiniz.



Örnek

1. $\frac{1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2-4}$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ ve $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ polinomlarının OKEK'i olan $(x-2)(x+1)(x+2)$ ifadesinden yararlanarak rasyonel ifadelerin paydaları eşitlenir. Buradan,

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+2+x+1}{(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{2x+3}{(x-2)(x+1)(x+2)} \text{ elde edilir.}$$

2. $\frac{x^2-4}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+2}$ işlemini yapalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2-4}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+2} = x-2 \text{ bulunur.}$$

3. $\frac{x+2}{x+3} : \frac{x+1}{x+3}$ işlemini yapalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x+2}{x+3} : \frac{x+1}{x+3} = \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+2}{x+1} \text{ bulunur.}$$

4. $\frac{x+1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$ işlemini yapalım.

ÇÖZÜM

Parantez içindeki ifadede payda eşitlemesi yapalım.

$$\frac{x+1}{x^2-x} : \left(\frac{x-1-x}{x(x-1)} \right) = \frac{x+1}{x(x-1)} : \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{-1} = -x-1 \text{ dir.}$$

5. $\frac{2}{x} + \frac{a+2}{x^2-2x} = \frac{3}{x^2-1}$ denkleminin bir kökü $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir elemanı ise a değerini bulalım.

ÇÖZÜM

0 ile bölme tanımsız olduğundan verilen denklemdeki paydalar 0 dan farklı olmalıdır.

$$x \neq 0 \quad x^2 - 2x \neq 0 \quad x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \cdot (x - 2) \neq 0 \quad (x - 1) \cdot (x + 1) \neq 0$$

$x \neq 0 \quad \vee \quad x \neq 2 \quad x \neq -1 \quad \vee \quad x \neq 1$ olmalıdır. Bu nedenle denklemin köklerinden biri 3 tür.

3 değeri denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{2}{3} + \frac{a+2}{3} = \frac{3}{8} \text{ denklemi elde edilir. Buradan } a = -\frac{23}{8} \text{ olur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadelerin pay ve paydasını çarpanlarına ayırarak sadeleştiriniz.

a) $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$

b) $\frac{x^2 - 5x}{x}$

c) $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$

ç) $-\frac{8ab}{12a}$

d) $\frac{a^2 - 3ab^2 + ab}{a^2b^2 + 2ab}$

e) $\frac{x^3y - xy^3}{x^3y - 2x^2y^2 + xy^3}$

f) $\frac{a^2 - ab}{a - b}$

g) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$

ğ) $\frac{m^3 - m^2 - 2m}{m^2 - 2m}$

2. Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{3}$

b) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

c) $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}$

ç) $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1}$

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2 + 1}$

e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

3. Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\frac{x}{5y^3} \cdot \frac{2y}{4x}$

b) $\frac{2x+2}{3} \cdot \frac{1}{x^2-1}$

c) $\frac{5a}{b} \cdot \frac{b}{10a}$

ç) $\frac{x-1}{6y} \cdot \frac{4y}{x+1}$

d) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x}$

e) $\frac{x^2-9}{x+2} : \frac{x-3}{x^2-4}$

f) $\frac{4x^2}{5y} : \frac{2x}{25y^2}$

g) $\frac{4x^2 - 20x + 24}{x^2 - 2x - 3} : \frac{x-9}{x^2 - 8x - 9}$

ğ) $\frac{x^3-1}{x+1} : \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

4. $\frac{a^2+b}{m \cdot n^2} + \frac{a^2+b^2}{n^3 \cdot m^3} - \frac{a^3+b}{m^3 \cdot n}$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

RASYONEL DENKLEMLER



Etkinlik



30 Aralık günü Bursa ilinde ölçülen en düşük hava sıcaklığı, İzmir'den 6°C daha az ve Kars'tan 12°C daha fazladır.

Bursa	İzmir	Kars
x	x+6	x-12

- Üç ilimizdeki hava sıcaklıkları toplamını veren polinom ifadesini yazınız.
 - Bu illerimizdeki hava sıcaklıklarının toplamı 0° olduğunda her bir ildeki hava sıcaklığı ne olur?
- ☞ Oluşturduğunuz bu ifade ve çözüm için neler söyleyebilirsiniz? Tartışınız.



Örnek

1. $3(x-1) + 4(x+2) - 6(x+1) = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$3(x-1) + 4(x+2) - 6(x+1) = 0$ denklemini düzenlersek,

$$3x - 3 + 4x + 8 - 6x - 6 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$x = 1$ bulunur.

2. $\frac{x}{x-3} - \frac{18}{x^2-9} = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x}{x-3} - \frac{18}{(x-3)(x+3)} = 0 \text{ denkleminin paydalarını eşitleyelim.}$$

$$\frac{x}{x-3} - \frac{18}{(x-3)(x+3)} = 0, \frac{x^2 + 3x - 18}{(x-3)(x+3)} = 0$$

$$(x+3) \quad (1)$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$(x+6)(x-3) = 0$ ise $x_1 = -6$ veya $x_2 = 3$ bulunur.

$x \neq 3$ ve $x \neq -3$ olmak üzere denklemin çözüm kümesi

$\mathcal{C} = \{-6\}$ bulunur.



Tanım ve Bilgi

$P(x)$ derecesi sıfırdan farklı polinom olmak üzere $P(x) = 0$ şeklindeki denkleme **polinom denklem** denir. $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ rasyonel denklemlerinin çözümü $P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$ koşullarına bağlıdır.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 0$

b) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-3}{x+3}$

c) $\frac{5x+1}{x-1} = \frac{x+5}{x-1}$

ç) $\frac{x^2-4+3}{x^2-9} = 0$

d) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4-x}{x^2+x-2}$

e) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-4} = \frac{5}{x^2-3x-4}$

f) $2x^2+x-15=0$

g) $\frac{1}{x-3} - \frac{9}{2x+1} = \frac{1}{x+3} - \frac{9}{2x-1}$

ğ) $\frac{1}{x-3} - \frac{5}{2(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$

h) $a^2-6a-7=0$

ı) $\frac{1-a^2}{a^3-1} \cdot \frac{a^3+a^2+a}{a+1} = a-2$

i) $\frac{2}{x-2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$

2. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x-a}{x-b} - \frac{x-c}{x-d}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $1 + \frac{3}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 7$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

4. $\frac{6}{3 - \frac{2x}{x+1}} = 1$ denklemini tanımsız yapan x değerleri toplamını bulunuz.

5. $x^3+5x^2+11x+7=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

RASYONEL İFADENİN BASİT RASYONEL İFADELERİN TOPLAMI OLARAK YAZILMASI



Etkinlik

$$\frac{-2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \text{ eşitliği veriliyor.}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \text{ toplamını yapınız.}$$

- Eşitliğin her iki tarafındaki paydaları karşılaştırınız.
- Bulduğunuz toplam ile $\frac{-2}{x^2-1}$ ifadesinin eşitliğini kullanarak A ve B sayılarını bulabilir misiniz?

$$\frac{4x+3}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \text{ eşitliği veriliyor.}$$

- Bu eşitliği sağlayan A ve B sayılarını bulunuz.
- Paydaları karşılaştırınız.

☞ Verilen her rasyonel ifade birden fazla rasyonel ifadenin toplamı biçiminde yazılabilir mi? Tartışınız.



Örnek

1. $\frac{2x-4}{(x+1)(x+3)}$ ifadesini basit rasyonel ifadelerin toplamı şeklinde yazalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{2x-4}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} \text{ eşitliğini sağlayan A ve B gerçekte sayılarını bulmalıyız. Bunun için}$$

eşitliğin sağ tarafındaki rasyonel ifadelerin paydalarını eşitlersek,

$$\frac{2x-4}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} \text{ dir. Bu durumda paylar da eşit olacağından,}$$

$2x-4 = A(x+3) + B(x+1)$ eşitliği bir polinom eşitliğidir.

$$\left. \begin{array}{l} 2x-4 = (A+B)x+3A+B \\ A+B = 2 \\ 3A+B = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -3, B = 5 \text{ bulunur. Bu sonuçlara göre,}$$

$$\frac{2x-4}{(x+1)(x+3)} = \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{x+3} \text{ dir.}$$



Örnek

2. $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ ifadesini basit rasyonel ifadelerin toplamı şeklinde yazalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \text{ eşitliğini sağlayan A ve B gerç k sayılarını bulalım.}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \text{ ise } x-1 = A(x+1)+B$$

$x-1 = Ax+A+B$ polinom eşitliğinden $A=1$ ve $A+B=-1$ olup $B=-2$ bulunur.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \text{ dir.}$$

3. $\frac{6}{x^3+x}$ ifadesini basit rasyonel ifadelerin toplamı şeklinde yazalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{6}{(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ eşitliğini sağlayan A, B ve C gerç k sayılarını bulmalıyız.}$$

$$\frac{6}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \text{ ise } 6 = Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

$6 = (A+B)x^2+Cx+A$ polinom eşitliğinden $A+B=0$, $C=0$ ve $B=-6$ bulunur. $A=6$

$$\frac{6}{x(x^2+1)} = \frac{6}{x} - \frac{6x}{x^2+1} \text{ dir.}$$



Tanım ve Bilgi

Paydası indirgenemeyen ve farklı çarpan bulundurmayan, payının derecesi paydanın derecesinden küçük olan rasyonel ifadeler **basit kesir** denir.

Paydasının derecesi, payının derecesinden b   k ve paydası çarpanlarına ayrılabilen her rasyonel ifade, basit rasyonel ifadelerin toplamı şeklinde yazılabilir.



Uygulamalar

1. $\frac{2x+1}{x^2+1}$ ifadesi basit kesirlere ayrılabilir mi? Neden?

2. Aşağıdaki ifadeleri basit kesirlerin toplamı biçiminde yazınız.

a) $\frac{3}{x^2 - x - 2}$

b) $\frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 15}$

c) $\frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$

ç) $\frac{6x}{x^2 + x - 2}$

d) $\frac{-8}{x^2 + 2x - 3}$

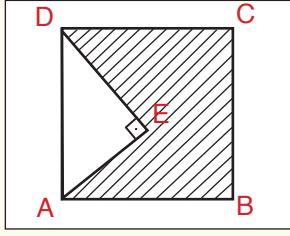
e) $\frac{7x+4}{(x-2).(x+1)^2}$

3. $\frac{2x+5}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+2}$ eşitliği verilmiştir. Buna göre A + B kaçtır?

BÖLÜM SONU SORULARI

1. $P(x) = (x+1)^{\frac{n}{2}} + (x-1)^{\frac{n}{3}} + x^{\frac{48}{n}}$ polinomunun derecesi en fazla a, en az b ise a+b toplamı kaçtır?
2. $P(x) = (2a-b)x^4 + 5x^2 - m$ ve $Q(x) = 3x^4 + (a+3b)x^2 + ab$ polinomları birbirine eşit ise $\frac{a+b}{m}$ değeri kaçtır?
3. $P(x) = 5x^m - 6x^7 + 4x^3 - 8x$ ve $Q(x) = 2x^6 - 4x^3 - 5x^2 - 1$ polinomları veriliyor.
der[P(x).Q(x)] = 15 olduğuna göre, $\frac{P(x^2)}{Q(x)}$ işleminden elde edilen bölümün derecesi kaçtır?
4. P(x) polinomu x^2+4x-5 ile bölündüğünde kalan $(7x-1)$ ise P(x) polinomunun $(x+5)$ ile bölümünden kalan kaçtır?
5. P(x) ve Q(x) polinomları $(x-2)$ ile bölündüğünde kalanlar sırasıyla 7 ve -3 tür. $mP(x)+Q(x)$ polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden kalan 12 ise m kaçtır?
6. $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x + 2$ polinomunun (x^2-2) ile bölümünden kalan kaçtır?
7. P(x) polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden elde edilen bölüm Q(x) kalan -3 tür. Q(x) polinomunun $(x+3)$ ile bölümünden kalan 4 ise P(x) polinomunun (x^2+x-6) ile bölümünden kalan nedir?
8. $(x+2).P(x) = x^3 + 4x - m$ eşitliği veriliyor. P(x) polinomunun $(x+2)$ ile bölümünden kalan kaçtır?
9. P(x) polinomu ikinci dereceden polinomdur. P(x) polinomu $(x-1)$ ve $(x+3)$ ile bölündüğünde kalanlar eşit ve 7 dir. P(x) polinomunun $(x+2)$ ile bölümünden kalan 13 ise P(x) nedir?
10. $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 7x - 6}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

11.



Yandaki şekilde bir kenarı 4 cm olan kare verilmiştir. Taralı alan 10 cm^2 dir. $[DE] \perp [AE]$ ise taralı bölgenin çevresi kaç cm dir?

12. $a = \sqrt{19} - \sqrt{17}$ ve $b = \sqrt{19} + \sqrt{17}$ ise $\sqrt{a^2 + b^2 - 4ab}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

13. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)$ olduğuna göre x sayısı kaçtır?

14. $a = 40^3 + 3 \cdot 40^2 + 3 \cdot 40 + 1$ eşitliğinde a sayısının kaç tane pozitif tam sayı böleni vardır?

15. $x - \frac{1}{x} = 1$ ise $x^3 - \frac{1}{x^3}$ ifadesinin değeri kaçtır?

16. $x^2 - 6xy + 10y^2 - 6y - 10$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

17. $(n^{13} - n)$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

18. $\frac{(m+n)^2 - 7 \cdot (m+n) + 12}{m+n - 4}$ işleminin sonucu nedir?

19. $P(x) = 12 \cdot (x-1)^2$, $Q(x) = 18 \cdot x(x-1)(x+1)$, $R(x) = 250 \cdot x^2(x+1)^2(x-1)$ ise

$\frac{\text{EKOK}[(P(x), Q(x), R(x))]}{25(x+1)^2 \cdot [\text{EBOB}(P(x), Q(x), R(x))]^2}$ ifadesinin sonucu nedir?

20. $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + ax - 20}$ ifadesinde a tam sayıdır. Bu ifade sadeleşebilen bir kesir ise a nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) -9

B) -5

C) -1

D) 4

E) 6

21. Aşağıda verilen sorularla yanıtlarını uygun şekilde eşleyiniz.

I. $\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$ eşitliği verildiğine göre

a) 30

A-B işleminin sonucu kaçtır?

b) $-\frac{1}{2}$

II. Kareleri farkı 4 olan x ve y sayılarının her birinden 1 çıkarılırsa yeni oluşan sayıların kareleri farkı 20 olacaktır. Buna göre x+y toplamı kaçtır?

c) $\frac{1}{5}$

III. Alanı 12 cm^2 ve köşegen uzunluğu $\sqrt{201} \text{ cm}$ olan dikdörtgenin çevresi kaç cm dir?

POLİNOMLAR TESTİ

1. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $P(x) = 7x^2 + x^{\frac{5a}{a+1}} - 8$ ifadesi gerçekte katsayılı bir polinomdur. Bu polinomun derecesi en çok kaçtır?
- A) 2 B) 4 C) 6 D) 10 E) 15
2. $P(x)$ polinomunun başkatsayısı 1 ise $P(3x + 1) + P(x + 1)$ polinomunun başkatsayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?
- A) 3 B) 5 C) 6 D) 10 E) 15
3. $\frac{P(x+1)}{Q(2x+3)} = 3x^2 - 8$ eşitliği veriliyor. $Q(x)$ polinomunun katsayılar toplamı 3 ise $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?
- A) 3 B) 1 C) 0 D) -8 E) -15
4. $P(x) = 3x^5 - ax^4 + bx^2 + cx + 2$ polinomunun $(x^3 + 1)$ ile bölümünden kalan $(2x^2 + 6x + 2)$ ise $(a + b + c)$ kaçtır?
- A) 11 B) 7 C) 6 D) 5 E) 2
5. $2P(x) + P(-x) = x^2 + 2x - 5$ polinomu veriliyor. $P(x + 2)$ polinomunun $(x + 3)$ ile bölümünden kalan kaçtır?
- A) $-\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $-\frac{10}{3}$
6. $(x - 1) \cdot P(x) = x^2 + 3x + a$ eşitliği veriliyor. $P(1)$ in değeri kaçtır?
- A) 8 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1
7. $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ polinomu $(x - 2)$ ile bölündüğünde kalan 3 ise, $P(x)$ in $(x + 2)$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?
- A) 10 B) 20 C) -10 D) 0 E) -17
8. $P(x)$ polinomu $x + 1$ ile bölündüğünde kalan 7, $x - 1$ ile bölündüğünde kalan 9 ise $P(x)$ in $x^2 - 1$ ile bölündüğünde kalan nedir?
- A) $8x + 1$ B) $x - 6$ C) $x + 8$ D) $3x - 4$ E) $-4x - 11$

9. $P(x) = x^{20} + 3x^{15} + 4x^{10} - 1$ polinomunun $(x^5 - \sqrt{2})$ ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) $-6\sqrt{2}$ B) 11 C) -11 D) $11 + 6\sqrt{2}$ E) $11 - 6\sqrt{2}$

10. $P(x)$ polinomu $x^2 - 3x$ ile bölündüğünde bölüm $x + 1$, kalan 7 ise $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

11. $P(x)$ ikinci dereceden polinomdur.

$P(1) = P(2) = 0$ ise $P(7) = a$. $P(5)$ ise a kaçtır?

- A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) 0

12. $x^2y + xy^2 + x + y$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $xy+1$ B) $xy-1$ C) $x-1$ D) $x+1$ E) $y+1$

13. $P(x) = 18(x-2)(x+1)$ ve $Q(x) = 24(x+1)^2(x+2)$ polinomları veriliyor. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının EBOB'u aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $24(x+1)$ B) $3(x+2)(x-2)$ C) $72(x+1)^2$ D) $6(x+1)$ E) $72(x-2)(x+2)$

14. $\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x - 10} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x - 4} \right) : \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x}$ işleminin sonucu nedir?

- A) $\frac{x+5}{x-5}$ B) $\frac{x-5}{x}$ C) $\frac{x}{x-5}$ D) $\frac{x}{x+5}$ E) $\frac{x-5}{x+5}$

15. $x - y = y - z = 5$ ise $x^2 - 2y^2 + z^2$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) 0 B) 25 C) 50 D) 75 E) 100

16. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{4}{1-x}$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesi nedir?

- A) $R - \{-2\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-2\}$ D) R E) \emptyset

17. $1001^2 + 99^2 - 101^2 - 999^2$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1800 B) 2400 C) 2800 D) 3000 E) 3600

18. $\frac{x^2 + x + m}{x^2 - 5x + 6}$ ifadesi sadeleştirilebilir bir ifade ise m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) -25 B) -20 C) -18 D) 2 E) 3

19. $\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} \right) : \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} \right)$ işleminin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$ B) $\frac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$ C) $\frac{x^2 + 1}{(x-1)^2}$ D) $\frac{x^2}{(x-1)^2}$ E) $\frac{(x-1)^2}{x}$

20. $x^2 - 7x + 1 = 0$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 49 B) 47 C) 45 D) 44 E) 43

21. $T = 999989$ ise $T.(T+22)$ sayısı kaç basamaklı bir sayıdır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

2. BÖLÜM

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER EŞİTSİZLİKLER VE FONKSİYONLAR

ALT ÖĞRENME ALANLARI

- İkinci Dereceden Denklemler
- Eşitsizlikler
- İkinci Dereceden Fonksiyonlar

Denklemler konusunda ilk önemli adımların Babilliler tarafından atıldığı bilinmektedir. Bu konudaki en eski yazılı belge, MÖ 1700'den önce yaşadığı sanılan Mısırlı Ahmes'in çalışmalarını içeren Rhind (Rind) Papirüsü'dür. Rhind Papirüsü'nde çeşitli birinci dereceden denklemlerin çözümleri yer almaktadır. Sonraki yüzyıllarda, önce Yunan ve Mısır, daha sonra da İslam ve Hint matematikçileri, denklemlere ilgi duymuş ve kimi özel ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini araştırmışlardır. Ancak bu çözümler genellikle geometrik yöntemlere dayandığı için soyut bir denklemler kuramı anlayışını yakalamakta pek başarılı olamamıştır. Çünkü geometride negatif uzunluk tanımlanmadığından denklemlerin negatif kökleri hesaba katılmamış, yok sayılmıştır. Buna rağmen Harezmi'nin (MS 825) bu denklemleri geometrik yöntemlerle çözecek bir kural bulması önemlidir.

Denklemleri, derecelerine ve katsayılarına göre sınıflandıran ilk matematikçi Ömer Hayyam (MS 1100) olmuştur. Aynı zamanda ikinci dereceden denklemlerin çözümü için de bir yöntem geliştirmiştir.

Denklemler sistemi 16 ve 17. yüzyıllarda Avrupa'da çok fazla dikkat çekmiş ve bilinmeyen çokluklar yerine x , y , z gibi harflerin kullanılmasına bu devirde başlanmıştır. 16. yüzyılın sonlarında, bugün ikinci dereceden denklemleri çözmek için kullandığımız yöntemler bulunmuştur.

Matematikçiler üçüncü, dördüncü ve daha yüksek dereceden denklemlerin çözümleriyle de ilgilendiler. "n'inci dereceden bir denklemin n tane kökü vardır". Biçimindeki cebirin temel teoremi olarak adlandırılan teorem, Gauss (Gaus) (1777–1855) tarafından kanıtlandı. Aynı yıllarda Fransız matematikçi Galois (Galuaz) (1811–1832) çözümü olanaksız beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlerin varlığını ortaya çıkardı.

Beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlerin çözümü için İngiliz matematikçisi ve fizikçisi İsaac Newton (Ayzek Nivtin), 1675 yılında bugün de yaygın olarak kullanılan ve kendi ismiyle anılan Newton Yaklaşırma Yöntemi'ni geliştirdi.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER



Motivasyon

Bir sanayi işletmesindeki yük asansörü, iç-
risine konulan hammaddenin ağırlığına bağlı
olarak çalışmaktadır. Yer seviyesine, yer altı
ya da yer üstündeki belli bir yüksekliğe gelmesi
için çalışma prensibi,
 $f(x) = x^2 - 7x + 10$ fonksiyonuyla modellenmiştir.
Buna göre, hangi miktardaki ağırlıklar için asan-
sörün yer seviyesinde bulunabileceğini, yerin 4
metre üstünde veya 2 metre altında konumla-
nabileceğini bulunuz.



İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİ VE ÇÖZÜM KÜMESİ



Etkinlik

$3x+4 = 1$ denkleminin çözüm kümesi ile açık önermenin doğruluk değerini ilişkilendiriniz.

- Acaba her açık önerme bir denklem olur mu? Açıklayınız.

1. grup	2. grup
$3x+2 = 0$	$2x-3 = 0$
$4x - \frac{3}{2} = 0$	$6x+4 = 0$
$x-1 = 0$	$15x+25 = 0$

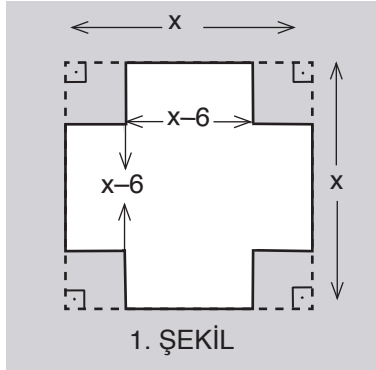
- Her iki gruptaki denklemlerin kaçınıcı dereceden denklem olduklarını belirtiniz.
 - Tablonun her bir satırındaki denklemleri karşılıklı çarpınız.
 - Sizce bu çarpım sonuçlarından nasıl denklemler elde edilir?
 - Bu denklemlerde bilinmeyen sayısı değişiyor mu? Neden?
 - Yeni elde ettiğiniz denklemler kaçınıcı derecedendir?
- ☞ Bu yeni denklem türünün önceden bildiğimiz “birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem” ile aynı ve farklı olan yanlarını bulunuz. Ulaştığınız sonuca göre yeni denkleme bir isim veriniz.



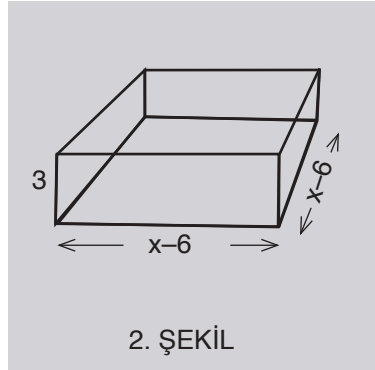
Örnek

Karesel bölge şeklindeki bir kartonun köşelerinden kenar uzunluğu 3 cm olan kareler kesilerek hacmi 147 cm^3 olan üstü açık bir kare prizma elde ediliyor. Buna göre karenin bir kenarının uzunluğu hesaplayalım.

ÇÖZÜM



1. ŞEKİL



2. ŞEKİL

1. şekildeki gibi x cm uzunluğundaki karesel bir karton katlanarak 2. şekildeki gibi tabanın bir kenar uzunluğu $x-6$ cm ve yüksekliği 3 cm olan üstü açık bir kare prizma hâline getirilir. Kare prizmanın hacmini veren cebirsel ifade,

$$V = 3(x-6)(x-6) \text{ dir. } V = 147 \text{ cm}^3 \text{ ise}$$

$$3(x-6)(x-6) = 147 \text{ olur. Buradan,}$$

$$x^2 - 12x + 36 = 49,$$

$$x^2 - 12x - 13 = 0,$$

$$(x-13)(x+1) = 0,$$

$$x-13 = 0 \text{ veya } x+1 = 0$$

$$x = 13 \text{ veya } x = -1 \text{ bulunur.}$$

Burada, bulunan iki x değeri bu denklemin kökleridir.

Kenar uzunluğu pozitif bir tam sayı olması gerektiğinden denklemin çözüm kümesi $\mathbb{C} = \{13\}$ tür.



Tanım ve Bilgi

a , b ve c bilinen (verilen) gerçekteki sayılar, x bilinmeyen gerçekteki sayı ve $a \neq 0$ olsun.

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemini sağlayan x gerçekteki sayıları varsa bu sayılara **denklemin kökleri**; bu köklerden oluşan kümeye de **denklemin çözüm kümesi** denir. Buradaki a , b ve c sayıları bu denklemin parametreleridir.



Örnek

Aşağıdaki denklemlerin gerçekte sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

- a) $x^2-9=0$ b) $x^2+3x=0$ c) $x^2-8x+16=0$ d) $x^2+4=0$ e) $x^2+4x+1=0$

ÇÖZÜM

Yukarıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulmak için çarpanlara ayırma yöntemlerinden yararlanalım.

- a) $x^2-9=0$ denkleminde iki kare farkı özdeşliğinden,

$$(x-3)(x+3)=0$$

$$x-3=0 \vee x+3=0$$

$$x_1=3 \vee x_2=-3 \text{ bulunur. Buradan } \mathcal{C}=\{-3,3\} \text{ olur.}$$

- b) $x^2+3x=0$ denkleminde x ortak çarpan parantezine alırsak,

$$x(x+3)=0$$

$$x=0 \text{ veya } x+3=0$$

$$x_1=0 \text{ veya } x_2=-3 \text{ bulunur. Buradan } \mathcal{C}=\{-3,0\} \text{ olur.}$$

- c) $x^2-8x+16=0$ denklemi bir tam kare ifade olduğundan,

$$(x-4)^2=0 \text{ elde edilir.}$$

$$(x-4)(x-4)=0$$

$$x-4=0 \vee x-4=0$$

$$x_1=4, x_2=4 \text{ ise denklemin birbirine eşit iki gerçekte kökü olduğu görülür. Buradan denklemin çözüm kümesi } \mathcal{C}=\{4\} \text{ bulunur.}$$

- d) $x^2+4=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2+4 > 0$ olduğundan denklemi sağlayan $x \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur. Bu durumda $\mathcal{C}=\{\}$ dir.

- e) $x^2+4x+1=0$ denklemini çözebilmek için x^2+4x+1 polinomunu bir tam kare ifade hâline getirelim.

$$x^2+4x+1=0 \text{ denklemine } 4 \text{ ekleyip çıkarırsak,}$$

$$x^2+4x+4-4+1=0$$

$$x^2+4x+4-3=0 \text{ ise } (x+2)^2-3=0 \text{ olur. Şimdi de iki kare farkı özdeşliğinden,}$$

$$(x+2)^2-(\sqrt{3})^2=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})=0 \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Buradan, } x+2-\sqrt{3}=0 \text{ veya } x+2+\sqrt{3}=0$$

$$x_1=-2+\sqrt{3} \text{ veya } x_2=-2-\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Denklemin çözüm kümesi } \mathcal{C}=\{-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\} \text{ olur.}$$



Örnek

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2 - (m+3)x - 2m+1 = 0$ denkleminin bir kökü 1 ise m parametresini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin bir kökü $x_1 = 1$ değeri bu denklemi sağlar.

$x_1 = 1$ ise $2 \cdot 1^2 - (m+3) \cdot 1 - 2m+1 = 0$ dir.

$$2 - m - 3 - 2m + 1 = 0$$

$$-3m = 0 \quad \text{ise} \quad m = 0 \text{ bulunur.}$$



Harezmi' nin temsili resmi

HAREZMİ (780 – 850) IX. yüzyılda yaşayan ve cebir alanında eser yazan ilk Türk bilginidir. Harezmi, birinci ve ikinci dereceden denklemleri analitik metotla; bir bilinmeyenli denklemleri de cebirsel ve geometrik metotlarla çözmenin kural ve yöntemlerini tespit etti. Matematikte ilk kez sıfır rakamını kullanan Harezmi, cebir bilimini metodik ve sistematik olarak ortaya koydu. Kendisinden önceki cebire ait konuları yine ilk kez "cebir" adı altında sistemleştirdi.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki tabloda bulunan boşlukları doldurunuz.

DENKLEM	1. dereceden bir bilinmeyenli iki denklemin çarpımı	Denklemin çözüm kümesi
$x^2 - x - 6 = 0$	$(x-3) \cdot (x+2) = 0$	$\mathbb{C} = \{-2, 3\}$
$9x^2 - 25 = 0$		
$3x^2 - 6x = 0$		
$8x = 2x^2$		
$2 - x^2 = 0$		
$x^2 + 5x + 4 = 0$		
$10x^2 - x - 3 = 0$		
$25 - x^2 = 0$		
$3x^2 - \frac{1}{3} = 0$		
$3x^2 = 0$		

2. Aşağıdaki tabloda 1. sütunda verilen denklemlerin çözüm kümeleri ikinci sütunda karışık şekilde verilmiştir. Her denklemin ait olduğu çözüm kümesini denklemlerle eşleyiniz.

DENKLEM	ÇÖZÜM KÜMESİ
(A) $x(2-x)+x(4+x) = 0$	$\mathcal{C} = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
(B) $7x-2 = (3x-1)(x+2)$	$\mathcal{C} = \{0, \frac{28}{25}\}$
(C) $(4x-1)^2 = 9$	$\mathcal{C} = \{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\}$
(Ç) $6x^2+13x+6 = 0$	$\mathcal{C} = \{0, \frac{2}{3}\}$
(D) $x^2 = 9 - \frac{x^2}{2}$	$\mathcal{C} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$
(E) $\left(\frac{5x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5x}{2} - \frac{1}{3}\right) = 7x - \frac{1}{9}$	$\mathcal{C} = \{-3, 2\}$
(F) $14x^2+3x-2 = 0$	$\mathcal{C} = \{0\}$
	$\mathcal{C} = \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{7}\}$

3. Alanı 50 m^2 olan dikdörtgensel bölge şeklindeki bir bahçenin uzun kenarı kısa kenarından 5 metre fazladır. Bu bahçenin kenar uzunluklarını bulunuz.
4. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2+5x-2m+1 = 0$ denkleminin bir kökü -2 ise m parametresini bulunuz.
5. $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2-nx+1 = 0$ denkleminin bir kökü -1 ise diğer kökü kaçtır?

İKİNCİ DERECEDEKİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİ VEREN BAĞINTI



Etkinlik

Aşağıda verilen denklemleri inceleyiniz.

$$x^2-10x+25 = 0 \quad x^2+4x+3 = 0 \quad x^2+6x+1 = 0 \quad x^2+2x+4 = 0$$

- Verilen denklemleri çarpanlara ayırma yöntemlerinden tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak çözünüz.
 - Çarpanlara ayıramadığımız denklemlerin gerçek sayılardaki çözüm kümeleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?
 - İkinci dereceden her denklemin gerçek sayılardaki çözüm kümesinin eleman sayısı hakkında ne söylenebilir?
- ☞ Genel olarak $ax^2+bx+c = 0$ biçimindeki ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümelerinin terim ekleyip çıkartılarak tam kareye tamamlama yöntemi ile nasıl bulunabileceğini tartışınız.
- ☞ Kökleri bulurken elde ettiğimiz $b^2 - 4ac$ ifadesinin işareti ile köklerin varlığı arasında nasıl bir ilişki olduğunu tartışınız.



Örnek

1. $x^2+8x+5=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2+8x+5=0$ denkleminde terim ekleyip çıkararak bir tam kare ifade elde edelim.

$$x^2+8x+5+11-11=0$$

$x^2+8x+16=11$ olur. Buradan $(x+4)^2=11$ denkleminde her iki tarafın karekökü alınırsa,

$$|x+4|=\sqrt{11} \text{ elde edilir.}$$

$$x+4=\sqrt{11} \text{ ve } x+4=-\sqrt{11} \text{ olur.}$$

$$x_1=-4+\sqrt{11}, \quad x_2=-4-\sqrt{11} \text{ dir.}$$

$$\mathcal{C}=\{-4-\sqrt{11}, -4+\sqrt{11}\} \text{ olur.}$$

2. $a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ denklemi elde edilir. Terim ekleme-çıkarma yöntemiyle,}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ olur.}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ olur. Buradan}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ elde edilir.}$$

$$b^2-4ac \geq 0 \text{ ise}$$

$$\mathcal{C}=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\} \text{ olur.}$$

$b^2-4ac < 0$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir.



Tanım ve Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere,
 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olarak bulunur.

Burada $b^2 - 4ac$ ifadesine **denklemin diskriminantı** denir ve Δ (Delta) ile gösterilir.
 $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesinde,

1. $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki gerçekte kökü vardır.

Bu kökler $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ eşitliği ile bulunur.

2. $\Delta = 0$ ise denklemin birbirine eşit iki gerçekte kökü vardır. Bu kökler $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ eşitliği ile bulunur.

3. $\Delta < 0$ ise denklemin gerçekte kökü yoktur.



Örnek

1. $2x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin gerçekte sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$2x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin diskriminantını bulalım.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$\Delta = 28 > 0$ olduğundan denklemin iki farklı gerçekte kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-6) + \sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-6) - \sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \text{ olur. Bu durumda,}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \right\} \text{ olarak bulunur.}$$

2. $25x^2 - 30x + 9 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$25x^2 - 30x + 9 = 0$ denkleminin diskriminantı,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 4 \cdot 25 \cdot 9$$

$\Delta = 0$ olduğundan denklemin birbirine eşit iki gerçek kökü vardır.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-30)}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5} \text{ bulunur. } \mathcal{C} = \left\{ \frac{3}{5} \right\} \text{ olur.}$$

3. $2x^2 + 3x + 6 = 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$2x^2 + 3x + 6 = 0$ denkleminde,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$$

$\Delta = -39 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur.

Bu durumda $\mathcal{C} = \emptyset$ olur.

4. $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$ax^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olması için a parametresinin alacağı değer aralığını bulalım.

ÇÖZÜM

$ax^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olması için $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot a \cdot (-1)$$

$$\Delta = 4 + 4a$$

$4 + 4a > 0$ ise $a \in (-1, \infty) - \{0\}$ bulunur.

5. $x^2 + (m+1)x + 3m - 6 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) denkleminin birbirine eşit iki gerçek kökü varsa m parametresinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 6)$$

$$\Delta = m^2 + 2m + 1 - 12m + 24$$

$$\Delta = m^2 - 10m + 25 = 0$$

$(m-5)^2 = 0$ ise $m = 5$ bulunur.



Uygulamalar

- Aşağıdaki denklemlerin köklerinin varlığını inceleyerek çözüm kümelerini bulunuz.
 - $2x^2 - x + 1 = 0$
 - $3x^2 + 2x + 1 = 0$
 - $x^2 + 2x - 1 = 0$
 - $4x^2 + 4x + 1 = 0$
- $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $4x^2 - 3x + 2m = 0$ denkleminin birbirine eşit iki gerçekte kökü olduğuna göre m parametresi kaçtır?
- $3x^2 - 6x + m + 1 = 0$ denkleminin farklı iki gerçekte kökü olduğuna göre m parametresi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
 - $m > 4$
 - $m < 4$
 - $m > 2$
 - $m < 2$
 - $m > -1$
- $x^2 + 2x - m - 4 = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesi boş küme ise m parametresinin alacağı en büyük tam sayı değeri kaçtır?
 - 6
 - 5
 - 4
 - 3
 - 2
- $x^2 - (m-3)x - 2m + 18 = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesi bir elemanlı ise $m \in \mathbb{R}^+$ parametresinin değeri kaçtır?

İKİNCİ DERECEDEN BİR DENKLEMİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR



Etkinlik

- $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi veriliyor. Denklemin kökleri x_1 ve x_2 olsun.
 - x_1 ve x_2 yi a, b, c parametreleri türünden yazınız.
 - $x_1 + x_2$,
 - $x_1 \cdot x_2$ ve
 - $|x_1 - x_2|$ değerini veren bağıntıları bulunuz.

☞ Herhangi bir 2. dereceden denklemin köklerini bulmadan kökleri ve katsayıları arasında başka ne tür bağıntılar yazılabileceğini tartışınız.
- $mx^2 + (m-1)x - 4m + 1 = 0$ denkleminin kökleri, x_1 ve x_2 olsun.
 - Bu denklemin kökleri arasında $x_1 + x_2 = 4$ bağıntısı verildiğinde m değerini bulunuz.

☞ Katsayıları bir parametreye göre verilen ikinci dereceden bir denklemin kökleri arasında bir bağıntı verildiğinde bu parametrenin nasıl bulunabileceğini tartışınız.



Örnek

$2x^2 - 4x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ ve $|x_1 - x_2|$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$$

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$$



Örnek

$x^2 - mx - x - 2m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4}$ olduğuna göre m parametresini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - (m+1)x - 2m = 0$ olur.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4}$ eşitliğinde paydalar eşitlenirse $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{3}{4}$ ifadesi elde edilir.

$(x_2) \quad (x_1)$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{m+1}{1} = m+1 \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2m}{1} = -2m \text{ olur. Buradan}$$

$$\frac{m+1}{-2m} = \frac{-3}{4} \text{ olduğundan } 4m+4 = 6m$$

$m = 2$ bulunur.



Tanım ve Bilgi

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Denklemin kökleri ile a , b , c katsayıları arasında,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c} \text{ bağıntıları vardır.}$$



Örnek

1. $x^2 + 6x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ ve $|x_1 - x_2|$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x^2 + 6x - 4 = 0 \text{ denkleminde, } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1} = -6, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4 \text{ ve}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{1} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ bulunur.}$$

2. $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleridir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^3 + x_2^3$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

ÇÖZÜM

$$a) x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{4 - 2 \cdot 1 \cdot (-4)}{1} = 12$$

$$b) x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-4) - (-2)^3}{1^3} = 32$$

$$c) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c} = \frac{-(-2)}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

3. $2x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1$ b) $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ c) $\frac{1}{2x_1 + 5} + \frac{1}{2x_2 + 5}$

ÇÖZÜM

Bu işlemleri yapabilmek için öncelikle,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$$a) x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$b) (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) = 9x_1 \cdot x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 4 = 9x_1 \cdot x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 = 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 3 + 4 = \frac{-19}{2}$$

$$c) \frac{1}{2x_1 + 5} + \frac{1}{2x_2 + 5} = \frac{(2x_2 + 5) + (2x_1 + 5)}{4x_1 \cdot x_2 + 10x_1 + 10x_2 + 25} = \frac{2(x_1 + x_2) + 10}{4x_1 \cdot x_2 + 10(x_1 + x_2) + 25}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 10}{4 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot 3 + 25} = \frac{16}{57} \text{ bulunur.}$$

4. $x^2+8x+a-1=0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında $3x_1+x_2=2$ bağıntısı varsa $a \in \mathbb{R}$ parametresinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklemin kökler toplamını bulalım.

$$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = -8$$

$$\begin{array}{r} -1/x_1+x_2 = -8 \\ 3x_1+x_2 = 2 \end{array}$$

$$2x_1 = 10$$

$$x_1 = 5 \quad \text{bulunur.}$$

$x_1 = 5$ kökü denklemi sağladığından

$$5^2+8 \cdot 5+a-1=0 \quad a = -64 \text{ olur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen denklemlerin kökleri x_1 ve x_2 dir. Köklerle ilgili bağıntıları kullanarak istenilenleri bulunuz.

a) $4x^2+3x-2=0$; $x_1+x_2 = \dots\dots\dots$

b) $2x^2-7x-3=0$; $x_1+x_2 = \dots\dots\dots$

c) $-x^2+5x-1=0$; $|x_1-x_2| = \dots\dots\dots$

ç) $2x^2+7x-3=0$; $x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \dots\dots\dots$

d) $-3x^2+2x+1=0$; $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \dots\dots\dots$

e) $x^2-8x+2=0$; $(2x_1-1) \cdot (2x_2-1) = \dots\dots\dots$

f) $-x^2+3x-1=0$; $\frac{3}{x_1-2} + \frac{3}{x_2-2} = \dots\dots\dots$

2. $x^2-4x+m-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 arasında $(5x_1-2) \cdot (5x_2-2) = 12$ bağıntısı varsa $m \in \mathbb{R}$ parametresi kaçtır?

3. $x^2-15x+m-4=0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında $x_2 = \frac{3-x_1}{2}$ bağıntısı varsa m parametresi kaçtır?

4. $2x^2-mx-16=0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında $x_1 = x_2^2$ bağıntısı varsa $m \in \mathbb{R}$ parametresinin değeri kaçtır?

5. $x^2+(m+1)x+4=0$ denkleminin kökleri a ve b dir. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 6$ ise $m \in \mathbb{R}$ parametresi kaçtır?

6. $x^2-3x-7=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{18}{x_1^2-3x_1-5} + \frac{20}{x_2^2-3x_2+3}$ işleminin sonucu kaçtır?

7. a ve b birer parametre olmak üzere, $x^2-(a+2)x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x^2+4x-b+3=0$ denkleminin kökleri $2x_1+3$ ve $2x_2+3$ ise $a \cdot b$ değeri kaçtır?

KÖKLERİ VERİLEN İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMİ KURMA



Etkinlik

Aşağıdaki tabloyu örneğe uygun biçimde doldurunuz. Tablodaki 1, 6 ve 7. sütunları birbiri arasında ilişkilendiriniz.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Denklem	Denklemin çarpanlara ayrılmış biçimi	Denklemin kökleri x_1 x_2		Çözüm kümesi	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2-2x-8=0$	$(x-4) \cdot (x+2)=0$	4	-2	$\{-2,4\}$	2	-8
$x^2+6x+5=0$	$(\dots) \cdot (x+5)=0$	-1	-5	$\{-5,-1\}$	-6	5
$x^2-6x+9=0$	$(\dots) \cdot (\dots)=0$	3	3	$\{3\}$
$x^2+x=0$	$x \cdot (x+1)=0$	0		$\{\dots\}$
.....=0	$(x-4) \cdot (x+4)=0$	4	-4	$\{-4,4\}$	0	-16

• Tabloyu dikkate alarak kökleri verilen ikinci dereceden denklemin kökleri ve katsayıları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

☞ Çözüm kümesi belli olan ikinci dereceden bir denklemi yazabilmek için nelere dikkat edilmesi gerektiğini tartışınız.



Örnek

1. Çözüm kümesi $\{-2,4\}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

Denklemin kökleri $x_1=4$ ve $x_2=-2$ olduğuna göre çarpanlarından biri $(x-4)$, diğeri $(x+2)$ olmalıdır.

Bu durumda denklem $(x-4)(x+2)=0$ veya $x^2-2x-8=0$ biçiminde yazılabilir.

2. Çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri arasında $x_1+x_2=6$ ve $x_1 \cdot x_2=3$ bağıntıları vardır. Bu bağıntıları sağlayan ikinci dereceden denklemin aşağıdakilerden hangisi olabileceğini bulalım.

A) $x^2+6x+3=0$ B) $x^2-6x-3=0$ C) $x^2+6x-3=0$ D) $x^2-6x+3=0$ E) $2x^2+6x+3=0$

ÇÖZÜM

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=6$ ve $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=3$ eşitliklerini sağlayan denklem D seçeneğindedir.



Tanım ve Bilgi

Çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden denklem modeli, $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$ biçimindedir.



Örnek

1. Çözüm kümesi $\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

$$x_1 + x_2 = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \text{ dir.}$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ modelinden yararlanarak denklemi}$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ şeklinde buluruz.}$$

2. $x^2 + 9x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. Çözüm kümesi $\{3x_1 + 2, 3x_2 + 2\}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 9x + 2 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = -9$ ve $x_1 \cdot x_2 = 2$ dir. Yazmak istediğimiz denklemin kökleri a ve b olsun.

$$a + b = (3x_1 + 2) + (3x_2 + 2) = 3(x_1 + x_2) + 4 = 3 \cdot (-9) + 4 = -23$$

$$a \cdot b = (3x_1 + 2)(3x_2 + 2) = 9x_1 \cdot x_2 + 6(x_1 + x_2) + 4 = 9 \cdot 2 + 6 \cdot (-9) + 4 = -32 \text{ olur. Bu değerleri}$$

$$x^2 - (a + b)x + a \cdot b = 0 \text{ denkleminde yerine yazarsak } x^2 + 23x - 32 = 0 \text{ şeklinde denklemi yazabiliriz.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki kökleri verilen ikinci dereceden denklemleri bulunuz.

a) $x_1 = 7$ ve $x_2 = 3$

b) $x_1 = \frac{2}{5}$ ve $x_2 = \frac{1}{3}$

c) $x_1 = \sqrt{3}$ ve $x_2 = -\sqrt{3}$

ç) $x_1 = 4 - \sqrt{2}$ ve $x_2 = 4 + \sqrt{2}$

2. $2x^2 - 3x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Çözüm kümeleri aşağıda verilen ikinci derece denklemleri bulunuz.

a) $\left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \right\}$

b) $\{x_1 + 3, x_2 + 3\}$

c) $\{2x_1 - 1, 2x_2 - 1\}$

3. Köklerinden biri $3\sqrt{3} + 1$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜM KÜMELERİNİN BULUNMASI



Etkinlik

Aşağıda verilen denklemleri inceleyerek gerçek sayılardaki çözüm kümelerini bulalım.

$$(x+3)(x^2-2x-8) = 0$$

$$\frac{x^3 - 5x^2 - 6}{x^2 - 1} = 0$$

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} - 3 = 0$$

$$x^2 + |x| - 2 = 0$$

- Verilen her bir denklemin derecelerini bulunuz.
- Denklemlerin çözümü yapılırken ikinci dereceden denklemlerden nasıl yararlanabileceğinizi tartışınız.
- Derecesi 2 den büyük olan denklemi birinci veya ikinci dereceden denklemlerin çarpımı biçiminde yazabilir miyiz?
- Hangi denklemin çözümünde “değişken değiştirme yöntemini” kullanmak kolaylık sağlar?
- Denklemin çözümünde bulunan köklerin her biri çözüm kümesinin elemanı olup olamayacağını tartışınız.

☞ İkinci dereceden olmayan denklemlerin çözüm kümelerinin hangi şartlara bağlı olarak bulunabileceğini tartışınız.



Örnek

1. $\frac{x^3 - 5x^2 - 4x + 20}{x^2 + 3x + 2} = 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 3x + 2 \neq 0$ olmak üzere $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = x^2(x-5) - 4(x-5) = (x-5)(x^2-4) = 0$$

$$(x-5)(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 5 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -2$$

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \text{ ise } (x+2)(x+1) \neq 0$$

$x \neq -2$ veya $x \neq -1$ olmalıdır. Çözüm kümesi $\{2, 5\}$ olur.

2. $(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24=0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2-x = a$ değişken değiştirme yapalım.

$$a^2-14a+24=0$$

$$(a-12)(a-2)=0$$

$a=12$ veya $a=2$ olur.

$$a=12 \text{ ise } x^2-x=12$$

$$a=2 \text{ ise } x^2-x=2$$

$$x^2-x-12=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-4)(x+3)=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x_1=4 \vee x_2=-3$$

$$x_3=2 \vee x_4=-1 \text{ olur.}$$

Çözüm kümesi $\{-3,-1,2,4\}$ olur.

3. $x-\sqrt{3-x}=1$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3-x}=x-1$$

Bu eşitliğin tanımlı olabilmesi için $3-x \geq 0$ ve $x-1 \geq 0$ olmalıdır.

$1 \leq x \leq 3$ olduğu görülür.

$(\sqrt{3-x}) = x-1$ eşitliğinde kökün derecesi kadar her iki tarafın kuvveti alınır.

$$(\sqrt{3-x})^2 = (x-1)^2$$

$$3-x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x_1=2 \vee x_2=-1$$

$1 \leq x \leq 3$ koşulu dikkate alındığında çözüm kümesi $\{2\}$ olur.

4. $x|x-4|=5$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x-4 \geq 0 \text{ ise } x(x-4)=5$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$x_1=5 \vee x_2=-1$$

$x \geq 4$ koşulu dikkate alındığında çözüm kümesi $\mathcal{C}_1 = \{5\}$ olur.

$$x-4 < 0 \text{ ise } x(-x+4)=5$$

$$x^2-4x+5=0$$

$\Delta = -4 < 0$ olduğundan çözüm kümesi $\mathcal{C}_2 = \emptyset$ dir.

Denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{5\}$ olur.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen denklemlerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\frac{x^3 + 8x^2 - 9x}{x+5} = 0$

b) $\frac{x^4 - 16}{x - 2} = 0$

c) $\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = 0$

ç) $\frac{25}{x^2 - 2x + 1} + 1 = 0$

d) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

e) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-5}{x-2} = 0$

2. Aşağıda verilen denklemlerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\left(\frac{x}{x+3}\right)^2 + \frac{3x}{x+3} - 10 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $\left(x + \frac{3}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{3}{x}\right) = 8$

ç) $(x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) - 5 = 0$

d) $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$

e) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

f) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \frac{6x}{x-1} + 5 = 0$

g) $x^8 - 16 = 0$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini gerçekte sayılarda bulunuz.

a) $\sqrt{10 - 2x + 1} = x$

b) $\sqrt{3x^2 + 4} = 2x - 3$

c) $\sqrt[4]{x - 1} = 1$

ç) $\sqrt{x + 4} = 5$

d) $\sqrt{2 + \sqrt{3 + x}} = 7$

e) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 8} = 4$

4. Aşağıdaki denklemlerin gerçekte sayılarda çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$

b) $|x^2 + 2x - 3| = x - 1$

c) $|x - 2| = 7$

ç) $2|x + 3| - 6 = 12$

d) $5 - |x + 2| = 2x$

e) $2x - |x + 2| = 10$

f) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

g) $|x + 1| - |x| = 2$

5. Bir bisikletli 100 km lik yoldan geri dönerken hızını 5 km/sa artırarak toplam 9 saatte tamamlıyor. Bu bisikletlinin gidişteki hızı ne olur?

6. $\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 9\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - 12 = 0$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

7. $x^2 + 9 + \frac{1}{x^2 + 9} - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

İKİNCİ DERECEDEKİ İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ



Etkinlik

I..... $x^2 - y^2 + 2x = 13$

II..... $x^2 - y^2 = 27$

- II Nu.'lı denklemde y^2 ifadesini x cinsinden yazarak elde ettiğiniz ifadeyi I Nu.'lı denklemde yerine yazınız.
 - Oluşan yeni denklemin çözüm kümesini bulunuz.
 - Bu çözüm kümesi yardımıyla I ve II Nu.'lı denklemleri sağlayan y değerlerini bulunuz.
 - I ve II Nu.'lı denklemlerin her ikisini de sağlayan (x,y) ikilileri için denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
- ☞ Yukarıdaki herhangi bir denklemde x i yalnız bırakarak denklem sistemini çözdüğünüzde bulduğunuz çözüm kümelerini karşılaştırınız. Bu tür denklem sistemlerinin çözümünü farklı yöntemler kullanarak yapmaya çalışınız.



Örnek

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2y^2 + 3x + 4 = 0 \\ y^2 - 2x - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{denklem sisteminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.}$$

ÇÖZÜM

$y^2 = 2x + 2$ eşitliğini $x^2 - 2y^2 + 3x + 4 = 0$ denkleminde yerine yazarsak $x^2 - 2(2x + 2) + 3x + 4 = 0$ olur. Gerekli düzenlemeleri yaptığımızda $x^2 - x = 0$ olur.

$x(x - 1) = 0$ ise $x_1 = 0$ veya $x_2 = 1$ bulunur.

$$x_1 = 0 \Rightarrow y^2 = 2x + 2, \quad y^2 = 2 \quad \text{ve} \quad y_1 = \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad y_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow (0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y^2 = 2x + 2, \quad y^2 = 4, \quad y_3 = 2 \quad \text{ve} \quad y_4 = -2 \Rightarrow (1, 2), (1, -2)$$

ikilileri bulunur. Çözüm kümesi $\{(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2}), (1, 2), (1, -2)\}$ olur.



Örnek

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + xy = 10 \\ xy + y^2 = 6 \end{array} \right\} \text{denklem sisteminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM

Verilen ifadeleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rcl} x^2 + xy & = & 10 \\ + xy + y^2 & = & 6 \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 & = & 16, \end{array} \quad \begin{array}{l} (x+y)^2 = 16 \\ |x+y| = 4 \\ x+y = 4 \dots \textcircled{1} \\ x+y = -4 \dots \textcircled{2} \end{array}$$

Verilen ifadeleri taraf tarafa çıkaralım.

$$x^2 + xy = 10$$

$$xy + y^2 = 6$$

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$(x+y) \cdot (x-y) = 4 \text{ bulunur.}$$

① yerine yazılırsa,

$$4 \cdot (x-y) = 4, \quad x - y = 1 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Buradan } x - y = 1$$

$$\begin{array}{r} + \quad x + y = 4 \\ \hline 2x = 5 \end{array}$$

$$x = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

② yerine yazılırsa,

$$-4 \cdot (x-y) = 4, \quad x - y = -1$$

$$\text{Buradan } x + y = -4$$

$$\begin{array}{r} + \quad x - y = -1 \\ \hline 2x = -5 \end{array}$$

$$x = -\frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right\} \text{ olur.}$$



Tanım ve Bilgi

En az bir tanesi ikinci dereceden olmak koşulu ile bir arada ifade edilebilen, iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.



Uygulamalar

1. Ali ile Recep, bir işte çalışmaya başlıyorlar. Ali $y = x^2 + 30x$, Recep $y = 50x$ bağıntısına göre maaş almaktadır. Bu bağıntılarda Ali ile Recep'in çalıştığı ay x , aylık kazançları ise TL cinsinden y olarak ifade edilmektedir. Maaşlarının eşitlendiği ay, işi bırakıp tatile çıkmaya karar verirler.

- İşe başladıktan kaç ay sonra tatile çıkarlar?
- Tatile çıkmadan önce kaç TL maaş almışlardır?

2. $x + y = 8$,

$x \cdot y = 15$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $x + y + xy = 5$,

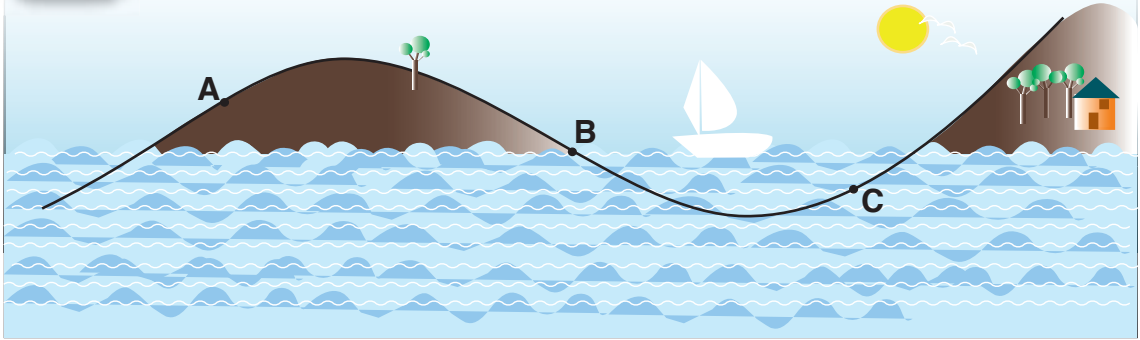
$x^2 y + y^2 x = 6$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4. İki sayının farkı 2, kareleri toplamı 34 ise bu sayılar kaçtır?

EŞİTSİZLİKLER



Motivasyon



Yukarıdaki resmi inceleyiniz.

A,B,C noktalarının deniz seviyesine göre konumlarını belirtiniz ve deniz seviyesine göre yüksekliklerinin nasıl gösterildiğini araştırınız.

$f(x) = ax+b$ FONKSİYONUNUN ALACAĞI DEĞERLERİN İŞARETİ VE BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER



Etkinlik

$f(x) = 2x-6$ fonksiyonu veriliyor. Tabloda verilen x değerlerini kullanarak ve örneklerden de yararlanarak aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

x	0	1	2	3	4	5
$2x-6$		-4		0		4
$2x-6$ işareti		-		YOK		+

- $2x-6$ denkleminin kökünü bulunuz.
- $f(x) = 2x-6$ fonksiyonunun işareti hangi x değerinde değişmektedir?
- Bu x değerinden küçük değerlerde $f(x)$ fonksiyonunun işareti değişir mi? Neden?
- Bu x değerinden büyük değerlerde $f(x)$ fonksiyonunun işareti değişir mi? Neden?
- Bu bilgilerinizi kullanarak aşağıdaki işaret tablosunu doldurunuz?

x	$-\infty$...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	$+\infty$
$f(x) = 2x-6$ nın işareti			...						○							...	

- $f(x)$ fonksiyonunun kökünden önce ve sonra aldığı işaret ile fonksiyonun başkatsayısının işareti arasındaki ilişkiyi belirtiniz.
- $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- $f(x) < 0$ çözüm kümesini bulunuz.

☞ Genel olarak $f(x) = ax+b$ biçimindeki fonksiyonların işaretlerini incelerken nelere dikkat edilmesi gerektiğini tartışınız.

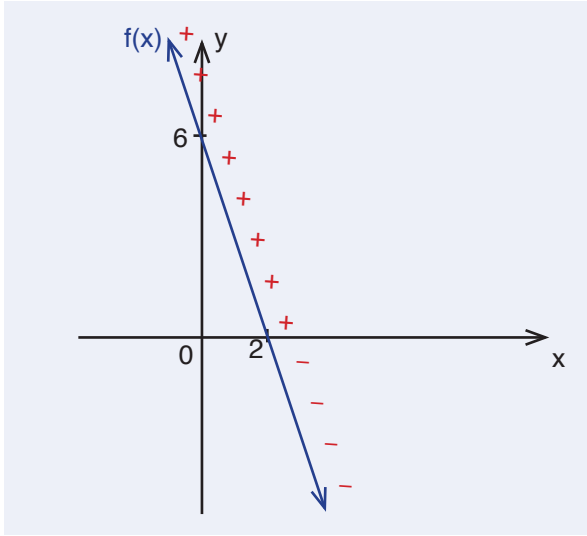


Örnek

$f(x) = -3x+6$ fonksiyonun işaret tablosunu yapalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = -3x+6$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafikte de görüldüğü gibi x in 2 den küçük değerleri için fonksiyonun görüntüleri pozitif, 2 den büyük değerleri için fonksiyonun görüntüleri negatiftir. Bu durum işaret tablosuyla aşağıdaki gibi gösterilir.

x	$+\infty$	2	$-\infty$
$f(x) = -3x+6$ nin işareti	+	0	-



Tanım ve Bilgi

$f(x) = ax+b$ fonksiyonunun işareti incelenirken $f(x) = 0$ denkleminin kökü bulunur ve tabloya aktarılır. Fonksiyonun işareti kökten önce a ile ters işaretli, kökten sonra a ile aynı işaretlidir. Bu durum tablo ile aşağıdaki gibi belirtilir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax+b$ nin işareti	a ile ters işaretli	0	a ile aynı işaretli



Örnek

1. $2x+6 > 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini işaret tablosu yaparak bulalım.

ÇÖZÜM

$2x+6 = 0$ ise $x = -3$ tür.

$2x+6$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$2x+6$ nın işareti	—		+

$2x+6 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-3, +\infty)$ olur.

2. $-4x+6 \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini işaret tablosu yaparak bulalım.

ÇÖZÜM

$-4x+6 = 0$ ise $x = \frac{3}{2}$ dir.

$-4x+6$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-4x+6$ nın işareti	+		—

$-4x+6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-\infty, \frac{3}{2}]$ dir.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen fonksiyonların işaret tablolarını yapınız.

a) $f(x) = -x+3$ b) $f(x) = 2x-1$ c) $f(x) = \frac{-x+5}{3}$ ç) $f(x) = 2x$

2. Aşağıda verilen eşitsizliklerin işaret tablosunu yaparak gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $3x-1 > 0$ b) $-2x+4 < 0$ c) $7x-14 \leq 0$

ç) $5x-1 \geq 0$ d) $\frac{2x+3}{-4} < \frac{6-5x}{7}$ e) $\frac{3-x}{4} \geq \frac{x+1}{2}$

3. $\frac{5x}{3} \leq \frac{9}{4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-\infty, \frac{21}{20})$ olduğuna göre, a kaçtır?

ax^2+bx+c FONKSİYONUNUN ALACAĞI DEĞERLERİN İŞARETİNİN İNCELENMESİ VE İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER



Etkinlik

- $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonu bir polinom mudur?
- Polinom ile fonksiyon arasındaki ilişkiyi hatırlayınız.
- f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktaları bulmak için nasıl bir yol izlersiniz?
- $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonunu sıfır yapan değerleri kullanarak aşağıdaki işaret tablosunda belirtiniz.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-x-2 nin işareti		○	○	

- $x < -1$ den küçük değerler vererek $f(x)$ in aldığı değerlerin işaretini tabloda gösteriniz.
 - $x > -1$ ile 2 arasında değerler vererek $f(x)$ in aldığı değerlerin işaretini tabloda gösteriniz.
 - $x > 2$ den büyük değerler vererek $f(x)$ in aldığı değerlerin işaretini tabloda gösteriniz.
 - x^2-x-2 nin başkatsayısının işareti ile tablodaki işaretleri karşılaştırınız.
- ☞ ax^2+bx+c üç terimlisinin işaretini incelerken nelere dikkat etmeniz gerektiğini tartışınız.



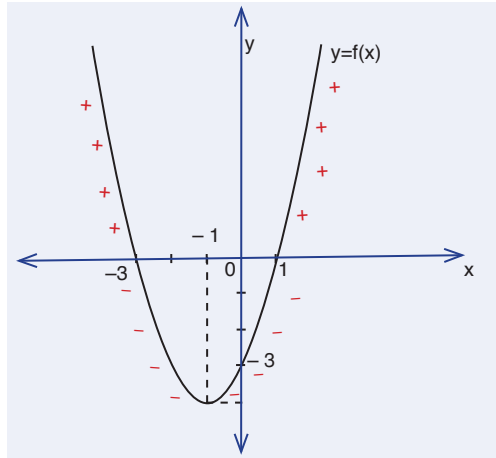
Örnek

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun işaret tablosunu yapalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.

Grafikte de görüldüğü gibi x in 1 den büyük ve -3 ten küçük değerleri için fonksiyonun görüntüleri pozitif, x in -3 ile 1 aralığındaki değerleri için fonksiyonun görüntüleri negatiftir.



$x^2+2x-3=0$ eşitliğinde $x=-3$ ve $x=1$ değerleri fonksiyonu x eksenini kestiği noktaların apsiseridir. Bu değerleri tabloda gösterelim.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f(x)=x^2+2x-3$ ün işareti	+	○	○	+



Tanım ve Bilgi

Terimlerindeki bilinmeyenin dereceleri doğal sayı olan fonksiyonlara polinom fonksiyon denir. Bu fonksiyonu sıfıra eşitlediğimizde elde ettiğimiz denklemin kökleri fonksiyon grafiğinin x eksenini kestiği noktaların apsiseridir.



Örnek

1. $f(x) = -x^2+x+6$ fonksiyonunun işaret tablosunu yapalım.

ÇÖZÜM

$-x^2+x+6=0$ denkleminde $\Delta > 0$ olup kökler $x_1 = 3$ ve $x_2 = -2$ dir. Bu üç terimlinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-x^2+x+6$ nın işareti	-	○	○	-

2. $f(x) = x^2-4x+4$ fonksiyonunun işaret tablosunu yapalım.

ÇÖZÜM

$x^2-4x+4=0$ denkleminde $\Delta = 0$ olup birbirine eşit iki gerçek kökü vardır. Bu kökler $x_1 = x_2 = 2$ dir. Bu üç terimlinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x^2-4x+4 ün işareti	+	○ ○	+

2 den farklı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2-4x+4 > 0$ olduğundan kökün sağ ve solunun aynı işaretli olduğuna dikkat ediniz.

3. $f(x) = x^2 + 2x + 6$ fonksiyonunun işaret tablosunu yapalım.

ÇÖZÜM

$x^2 + 2x + 6 = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olduğundan gerçek kök yoktur. Bu durumda farklı x değerleri için $x^2 + 2x + 6$ üç terimli daima pozitif değerler almaktadır.

x	$-\infty$			$+\infty$
$x^2 + 2x + 6$ nin işareti		+	+	+



Tanım ve Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

i) $\Delta > 0$ için

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$ nin işareti	a ile aynı işaretli	a ile zıt işaretli	a ile aynı işaretli	

ii) $\Delta = 0$ için

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$ nin işareti	a ile aynı işaretli		a ile aynı işaretli

iii) $\Delta < 0$ için

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$ nin işareti	a'nın işareti ile aynı	



Örnek

1. $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminde $\Delta > 0$ olup denklemin kökleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ dür. $x^2 - 4x + 3$ üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+		-		+	

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[1, 3]$ olur.

2. $9x^2 - 6x + 1 > 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminde $\Delta = 0$ olup denklemin birbirine eşit iki gerçekte kökü $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$ tür.

$9x^2 - 6x + 1$ üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$9x^2 - 6x + 1$		+		+	

$9x^2 - 6x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ olur.

3. $-x^2 + 2x - 3 < 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$-x^2 + 2x - 3 = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olduğundan gerçekte kökü yoktur. $-x^2 + 2x - 3$ üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$						$+\infty$
$-x^2 + 2x - 3$		-	-	-	-	-	

$-x^2 + 2x - 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi \mathbb{R} dir.

4. $x^2 - mx + 4 > 0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa m nin hangi aralıkta olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

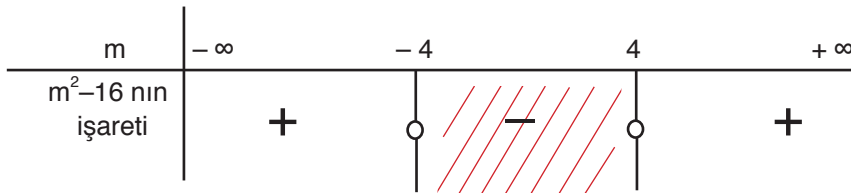
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - mx + 4$ üç terimlisinin pozitif olması için başkatsayısının pozitif ve $x^2 - mx + 4 = 0$ denkleminin gerçek kökünün bulunmaması gerekir. Başkatsayısı pozitif olduğuna göre denklemin diskriminantının negatif olması gerekir. Başka bir deyişle $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = m^2 - 16$$

$$m^2 - 16 < 0 \text{ eşitsizliğini çözelim.}$$



Bu durumda m, $-4 < m < 4$ aralığında bulunmalıdır.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki fonksiyonların işaret tablolarını yapınız.

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $A(x) = x^2 + 4x + 3$ | b) $E(x) = x^2 - 8x + 16$ | c) $I(x) = x^2 + 3x + 4$ |
| ç) $B(x) = -x^2 - 8x + 9$ | d) $F(x) = -4x^2 + 4x - 1$ | e) $K(x) = -x^2 + x + 2$ |
| f) $C(x) = 3x^2 - 2x - 1$ | g) $G(x) = x^2 - 10x + 25$ | ğ) $L(x) = 3x^2 - x + 2$ |
| h) $D(x) = 12x - 9x^2$ | ı) $H(x) = 16x^2 + 8x + 1$ | i) $M(x) = -x^2 + 6x - 10$ |

2. Aşağıda verilen eşitsizliklerin işaret tablosunu yaparak gerçek sayılardaki çözüm kümelerini yazınız.

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $x^2 - x - 12 < 0$ | b) $a^2 + 2a + 1 \geq 0$ | c) $m^2 + 3m + 5 > 0$ |
| ç) $-9x^2 + 18x > 0$ | d) $x^2 + 10x + 25 < 0$ | e) $-a^2 + a - 4 < 0$ |
| f) $2t^2 + 3t + 1 \leq 0$ | g) $m^2 - 4m + 4 \leq 0$ | ğ) $3x^2 - 2x + 1 \leq 0$ |
| h) $-3m^2 + 4m + 5 \leq 6$ | ı) $4t^2 - 4t + 1 > 0$ | i) $-y^2 + 4y - 5 \geq 0$ |
| j) $x(2x - 1) < 3x$ | k) $x^2 > 0$ | l) $x^2 + 6x - 1 > 5x + 3$ |

3. $\forall x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlandığına göre m nin hangi aralıklarda olması gerektiğini bulunuz.

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $x^2 + 2x + m - 1 > 0$ | b) $x^2 + 5x - 1 + m \geq 0$ | c) $x^2 + mx + 9 \geq 0$ |
| ç) $-x^2 + 2x + 2 - m < 0$ | d) $-x^2 + 4x + m \leq 0$ | e) $-x^2 + (m - 1)x \leq 4$ |

4. $x^2 - mx + m - 2 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökünün olması için m hangi aralıkta değerler almalıdır?

5. $-x^2 + 6x + m$ üç terimlisi $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima 1 den küçük olduğuna göre m nin alacağı en büyük tam sayı değerini bulunuz.

BİRİNCİ VE İKİNCİ DERECE DEN POLİNOMLARIN ÇARPIMI VEYA BÖLÜMÜ BİÇİMİNDE VERİLEN EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜMÜ



Etkinlik

$f(x) = \frac{(x-2) \cdot (x+1)}{x-3}$ fonksiyonu veriliyor.

- $x-2$, $x+1$ ve $x-3$ ifadelerinin işaretlerini köklerini dikkate alarak gösteriniz.
- Çarpma ve bölme işlemlerinin özelliklerinden yararlanarak $f(x)$ in işaret değişimini bulmaya çalışınız.

☞ Birinci veya ikinci dereceden polinomların çarpımı veya bölümü biçiminde verilen bir ifadenin işaretinin nasıl incelenebileceğini belirtiniz. Bu tür bir eşitsizliğin çözüm kümesinin nasıl bulunacağını genelleştiriniz.



Örnek

1. $\frac{(x^2-9) \cdot (2x+1)}{x^2-x} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

x^2-9 , $2x+1$, x^2-x ifadelerinin kökleri bulunarak ve işaretleri incelenerek aşağıdaki tablonun ilk dört satırı oluşturulur.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	$+\infty$
x^2-9 un işareti	+	○	-	-	-	○	+
$2x+1$ in işareti	-	-	○	+	+	+	+
x^2-x in işareti	+	+	+	○	-	○	+
$\frac{(x^2-9) \cdot (2x+1)}{x^2-x}$	-	///	+	-	///	+	///

$(-\infty, -3)$ aralığında $\frac{(x^2-9) \cdot (2x+1)}{x^2-x}$ ifadesinin işareti ve (x^2-9) , $(2x+1)$ ile (x^2-x) ifadelerinin

başkatsayıları çarpıldığında fonksiyonun işaretinin negatif olduğu görülür. Bu yaklaşım diğer aralıklar için de uygulanırsa tablonun son satırı yukarıdaki gibi olur.

$x = 0, x = 1$ değerleri $\frac{(x^2 - 9) \cdot (2x + 1)}{x^2 - x}$ ifadesini tanımsız yaptığı için tabloda çift çizgi ile gösterilmiştir. Bu durumda çözüm kümesi $[-3, -\frac{1}{2}] \cup (0, 1) \cup [3, +\infty)$ olur.

Bu çözümü farklı bir yoldan aşağıdaki gibi de yapabiliriz.

$\frac{(x^2 - 9) \cdot (2x + 1)}{x^2 - x}$ ifadesinde bulunan her çarpanın başkatsayılarının işaretleri çarpılarak

$\frac{(x^2 - 9) \cdot (2x + 1)}{x^2 - x}$ in işareti bulunur.

$x^2 - 9$ başkatsayısının işareti +
 $2x + 1$ başkatsayısının işareti +
 $x^2 - x$ başkatsayısının işareti +

$\left. \begin{array}{l} x^2 - 9 \text{ başkatsayısının işareti +} \\ 2x + 1 \text{ başkatsayısının işareti +} \\ x^2 - x \text{ başkatsayısının işareti +} \end{array} \right\} \frac{(x^2 - 9) \cdot (2x + 1)}{x^2 - x} \text{ ifadesinin işareti + olur.}$

Bu işareti tablonun en sağına yerleştirerek her kökten sonra işaret değiştiriniz (Birbirine eşit köklerde işaret değiştirilmez.).

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	$+\infty$
$\frac{(x^2 - 9) \cdot (2x + 1)}{x^2 - x}$	-	○	○	○	○	○	
		+	-	+	-	+	

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $[-3, -\frac{1}{2}] \cup (0, 1) \cup [3, +\infty)$ olur.

2. $\frac{(x - 1)(x - 2)^2}{(16 - x^2)(-x^2 - 2)} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

Çarpım bölüm durumundaki her bir ifadenin başkatsayılarının işaretlerini belirleyelim.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ başkatsayısının işareti +

$(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 2$ başkatsayısının işareti..... +

$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x_4 = 4 \quad x_5 = -4$ başkatsayısının işareti..... -

$-x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ kök yok başkatsayısının işareti..... -

Başkatsayıların işaretlerinin çarpımı + dır. Bu işaret tablonun en sağına yerleştirilerek tablo oluşturulur.

x	$-\infty$	-4	1	2	4	$+\infty$
$\frac{(x - 1)(x - 2)^2}{(16 - x^2)(-x^2 - 2)} \geq 0$		○	○	○	○	
	-	+	-	-	+	

İfade sıfırdan büyük olduğu için pozitif bölgeler taranır. Bu durumda çözüm kümesi $[-4, 1] \cup \{2\} \cup (4, +\infty)$ bulunur.

3. $\frac{4}{x-2} < 1$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

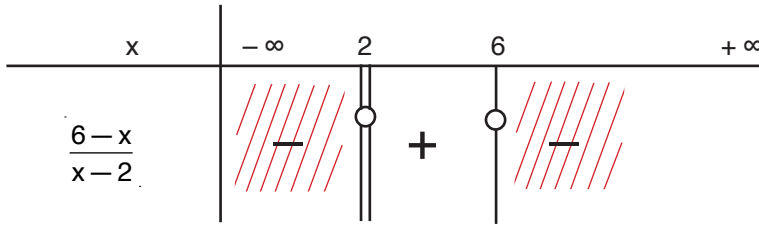
$$\frac{4}{x-2} < 1 \text{ eşitsizliği düzenlenirse,}$$

$$\frac{4}{x-2} - 1 < 0$$

$$\frac{4-x+2}{x-2} < 0 \text{ ise } \frac{6-x}{x-2} < 0 \text{ olur.}$$

$$6-x = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ ve başkatsayısının işareti ...-}$$

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ve başkatsayısının işareti ...+}$$



Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty) = \mathbb{R} - [2, 6]$ olur.

4. $\frac{|x-1|(3-x) \cdot 5^x}{x^2-4} \leq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

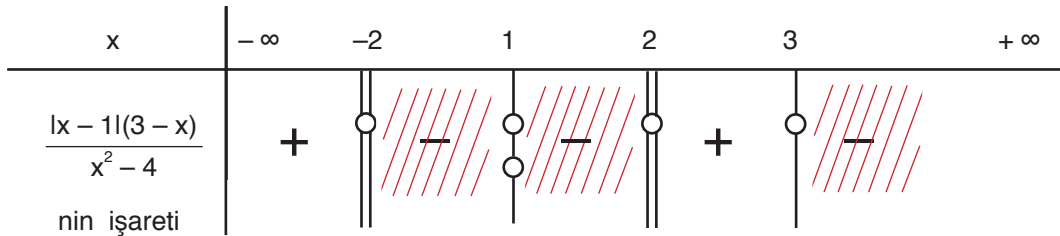
ÇÖZÜM

$|x-1| = 0$, $x_1 = 1$ (Burada mutlak değer daima pozitif olacağından bu kök çift katlı kök kabul edilip işareti+)

$5^x = 0$, kök yok işareti+

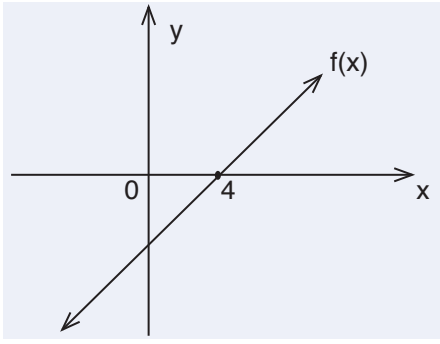
$3-x = 0$, $x_2 = 3$, başkatsayısının işareti.....-

$x^2-4 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, başkatsayısının işareti+



Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-2, 2) \cup [3, +\infty)$ olur.

5.



$f(x)$ doğrusal bir fonksiyon olmak üzere,
 $f(x) \cdot (x-2) < 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x-2$ nin işareti	-	○	+	+
$f(x)$ in işareti	-	-	○	+
$f(x) \cdot (x-2)$ nin işareti	+	///	///	+

$f(x) \cdot (x-2) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(2, 4)$ olur.



Tanım ve Bilgi

Polinomlar bir cebirsel ifade iken polinomların çarpımı veya bölümü biçiminde oluşturulmuş eşitsizlikler birer açık önermedir.

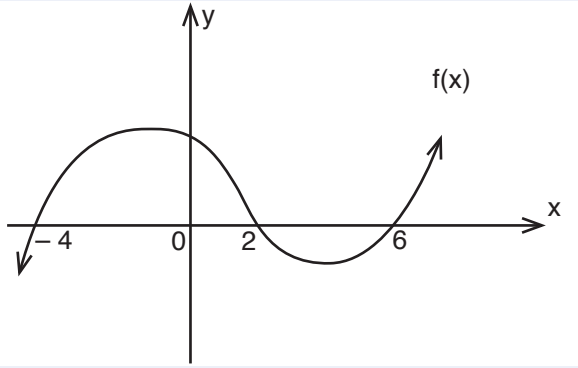


Uygulamalar

1. Aşağıda verilen eşitsizliklerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

- a) $x \cdot (1-x) \cdot (2+x) > 0$ b) $\frac{(x^2 + 7x - 8) \cdot (x-1)}{x^2 + 2x + 4} \geq 0$ c) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} > \frac{x}{x-2}$
- ç) $\frac{x+3}{x-1} \leq 0$ d) $\frac{x-1}{x} > 2$ e) $\frac{(x^3 - 1) \cdot |x+1|}{(x^2 + 1)} < 0$
- f) $\frac{(x+1) \cdot (2x+1)}{x+3} \geq 0$ g) $\frac{3x-2}{x+3} \geq \frac{1}{2}$ ğ) $\frac{(a+1)(3-a)}{a(a^2 - 16)} < 0$
- h) $\frac{x^2 \cdot (x+3)}{x-4} \cdot \frac{x^2 \cdot (x+3)}{x-4} < 0$ ı) $\frac{(x+2) \cdot (x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x-4)^2} \geq 0$ i) $x \leq \frac{x-2}{x}$

2.



Şekilde $f(x)$ polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\frac{f(x)}{1-x} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

BİRİNCİ VEYA İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ



Etkinlik

- $x^2 - 4x \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesi olan A kümesini bulunuz.
- $x^2 - 4x - 12 < 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesi olan B kümesini bulunuz.
- $\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 12 < 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminde her iki eşitsizliği sağlayan x gerçekte sayılarının $A \cap B$ kümesiyle ilişkisini tartışınız.

☞ Eşitsizlik sistemlerinin çözümünde neler yapılması gerektiğini tartışınız.



Örnek

$$1. \left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{6-x} \geq 0 \\ \frac{x+5}{x-4} \leq 0 \end{array} \right\} \text{eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.}$$

ÇÖZÜM

Her bir eşitsizliğin çarpanlarını sıfır yapan x değerlerini ortak bir tabloda gösterelim.

x	$-\infty$	-5	3	4	6	$+\infty$
$\frac{x-3}{6-x}$ in işareti	-	-	+	+	-	-
$\frac{x+5}{x-4}$ in işareti	+	-	-	+	+	+
Çözüm						

Bu durumda eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $[3,4)$ bulunur.

2. $x+2 \leq x^2-x-1 < x+7$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.



















ÇÖZÜM

Bu eşitsizlik iki ayrı eşitsizlik biçiminde gösterilebilir.

$$\begin{array}{l} x+2 \leq x^2-x-1 \\ 0 \leq x^2-2x-3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2-x-1 < x+7 \\ x^2-2x-8 < 0 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x-8 < 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sisteminin çözümünü bulalım.

$x^2-2x-3 = 0$ için $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ ve $x^2-2x-8 = 0$ için $x_3 = +4$, $x_4 = -2$ dir.

x	$-\infty$	-2	-1	3	4	$+\infty$
x^2-2x-3 ün işareti						
x^2-2x-8 in işareti						
Çözüm						

Bu durumda çözüm kümesi $(-2, -1] \cup [3, 4)$ olur.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(a-1)x^2 - ax + 2 < 0$ eşitsizliği doğru oluyorsa a hangi aralıkta olmalıdır?

ÇÖZÜM

$\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c < 0$ olması için $\left. \begin{array}{l} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right\}$ olmalıdır.

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(a-1)2 = a^2 - 8a + 8$ dir. Bu durumda,

$\left. \begin{array}{l} a^2 - 8a + 8 < 0 \\ a - 1 < 0 \end{array} \right\}$ eşitsizlik sistemini çözelim.

$a^2 - 8a + 8 = 0$ için $a_1 = 4 + 2\sqrt{2}$, $a_2 = 4 - 2\sqrt{2}$ ve $a_3 = 1$

a	$-\infty$	1	$4-2\sqrt{2}$	$4+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
$a-1$ in işareti	<div><div></div><div>-</div><div></div></div>	<div><div></div><div>○</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	
a^2-8a+8 in işareti	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>	<div><div></div><div>○</div><div></div></div>	<div><div></div><div>-</div><div></div></div>	<div><div></div><div>○</div><div></div></div>	<div><div></div><div>+</div><div></div></div>
Çözüm						

Bu durumda istenen çözüm kümesi \emptyset olur.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 - 9 < 0$

b) $\frac{a-1}{2-a} \leq 0$

c) $m^2 - 4m + 4 > 0$

ç) $\frac{6}{x-1} \leq x$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$4a - a^2 > 0$

$\frac{6-m}{m-2} > 0$

$\frac{x}{x-2} < 3$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(m+1)x^2 + (m+1)x + 4$ eşitliği daima pozitif olduğuna göre m hangi aralıkta bulunmalıdır?

3. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(m+2)x^2 + 4x - 2 < 0$ eşitsizliği sağladığına göre m hangi aralıkta bulunmalıdır?

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİN VARLIĞI VE İŞARETİNİN İNCELENMESİ



Etkinlik

Aşağıdaki soruları verilen denklemleri dikkate alarak yanıtlayınız.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ denklemi için:

- Denklemin diskriminantını bulunuz. Denklemin kaç kökü vardır?

- $x_1 \cdot x_2$ değerini hesaplayınız.

- $x_1 + x_2$ değerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonuçları değerlendirerek köklerin işaretlerini karşılaştırınız.

2. $2x^2 + 2x - 1 = 0$ denklemi için:

- Denklemin diskriminantını bulunuz. Denklemin kaç kökü vardır?

- $x_1 \cdot x_2$ değerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonucu değerlendirerek köklerin işaretlerini karşılaştırınız.

3. $9x^2 + 24x - 16 = 0$ denklemi için:

- Denklemin diskriminantını bulunuz. Denklemin kaç gerçekte kökü vardır?

- $x_1 \cdot x_2$ değerini hesaplayınız.

- $x_1 + x_2$ değerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonuçları değerlendirerek köklerin işaretlerini karşılaştırınız.

4. $x^2 + x - 4 < 1 - x \leq x^2 + 2x - 3$ eşitsizlik sistemini çözünüz.

5. $x^2 - 6x = 0$ denklemi için:

- Denklemin diskriminantını bulunuz. Denklemin kaç gerçekte kökü vardır?

- $x_1 \cdot x_2$ değerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonucu değerlendirerek köklerin işaretlerini karşılaştırınız.

☞ $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki denklemlerde denklemin köklerini bulmadan, bu köklerin işaretlerini katsayılarından yararlanarak bulup bulamayacağınızı tartışınız.



Örnek

Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerin varlığını ve işaretini inceleyelim.

a) $3x^2-5x+2=0$ b) $2x^2+8x-1=0$ c) $x^2-7x-1=0$ ç) $-3x^2+7x-10=0$ d) $4x^2-4x+1=0$

ÇÖZÜM

a) $3x^2-5x+2=0$ denkleminde

$\Delta = 1$ dir. İki gerçek kökü vardır.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \text{ olduğundan kökleri aynı işaretlidir.}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{3} \text{ olduğundan pozitif iki gerçek kökü vardır.}$$

b) $2x^2+8x-1=0$ denkleminde $\Delta = 72$ dir. İki gerçek kökü vardır.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \text{ olduğundan kökleri ters işaretlidir.}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4 \text{ olduğundan negatif kök, mutlak değerce pozitif kökten büyüktür.}$$

c) $x^2-7x-1=0$ denkleminde $\Delta = 53$ dir. İki gerçek kökü vardır.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1 \text{ olduğundan kökleri ters işaretlidir.}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7 \text{ olduğundan pozitif kök, mutlak değerce negatif kökten büyüktür.}$$

ç) $-3x^2+7x-10=0$ denkleminde

$\Delta = -71$ dir. Gerçek kökü yoktur.

d) $4x^2-4x+1=0$ denkleminde

$\Delta = 0$ dır. Eşit iki gerçek kökü vardır.

$x_1 + x_2 = 1$ olduğundan bu iki kök pozitifdir.



Tanım ve Bilgi

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri olsun.

1. $x_1 \cdot x_2 < 0$ ise ters işaretli iki gerçek kökü vardır.

• $x_1 + x_2 > 0$ ise pozitif kök, negatif kökün mutlak değerinden büyüktür.

• $x_1 + x_2 < 0$ ise negatif kök mutlak değerce, pozitif kökten büyüktür.

2. $x_1 \cdot x_2 > 0$ ise aynı işaretli iki gerçek kök vardır.

• $x_1 + x_2 > 0$ ise her iki kök pozitifdir.

• $x_1 + x_2 < 0$ ise her iki kök negatifdir.

3. $x_1 \cdot x_2 = 0$ ise köklerden biri sıfırdır.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki denklemlerin köklerinin varlığını ve işaretlerini kökleri bulmadan inceleyiniz.

a) $2x^2+6x+1=0$

b) $8x^2-x-1=0$

c) $-x^2-2x+5=0$

ç) $x^2+7x-2=0$

d) $-x^2+5x+3=0$

e) $200x^2+90x-71=0$

PARAMETRE İÇEREN İKİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİN VARLIĞININ İNCELENMESİ



Etkinlik

$x^2+(m-2)x+m+1=0$ denkleminin diskriminantını, kökler çarpımı ve kökler toplamının m'ye bağlı eşitlerini bularak işaret tablosunu doldurunuz. Tabloya göre:

m	$-\infty$	$+\infty$
Δ		
$x_1 \cdot x_2$		
$x_1 + x_2$		

- Denklemin pozitif iki gerçekte kökünün olması için m değeri hangi aralığın elemanı olmalıdır?
- Denklemin negatif iki gerçekte kökünün olması için m değeri hangi aralığın elemanı olmalıdır?
- Denklemin ters işaretli iki kökünün olması için m değeri hangi aralığın elemanı olmalıdır?
- Denklemin gerçekte kökünün olmaması için m hangi aralığın elemanı olmalıdır?

☞ Parametre içeren ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin köklerinin varlığını ve işaretini parametrenin alacağı değerlere göre nasıl bulunacağını tartışınız.



Örnek

$x^2 - (m-1)x + 2m - 6 = 0$ denkleminin farklı iki pozitif kökünün olması için m ne olmalıdır? Bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$ ve $x_1 + x_2 > 0$ eşitsizliklerinin sağlanması gerekir.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4 \cdot 1(2m-6) = m^2 - 10m + 25$$

$$x_1 + x_2 = m - 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2m - 6$$

m	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
Δ	+	+	+	○	+
$x_1 + x_2$	-	○	+	+	+
$x_1 \cdot x_2$	-	-	○	+	+

Denklemin farklı iki pozitif kökünün olması için m değeri $(3, +\infty) - \{5\}$ kümesinin elemanı olmalıdır.



Uygulamalar

- $x^2 + 4x + m = 0$ denkleminin ters işaretli iki gerçekte kökünün olması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.
- $x^2 + mx + m - 1 = 0$ denkleminin farklı ve negatif iki gerçekte kökünün olması için m nin alacağı değerler kümesini bulunuz.
- $mx^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$ denkleminin negatif kökünün mutlak değeri, pozitif kökünden daha büyük ise m nin alabileceği değerleri bulunuz.
- $x^2 - 2(a+2)x + a - 9 = 0$ denkleminde $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| > x_2$ olması için a hangi değerleri almaktadır?

A) $a < 3$ B) $a < -2$ C) $-3 < a < 1$ D) $-1 < a < 0$ E) $-2 < a < 9$
- $m > 3$ için $(m-3)x^2 - 4mx + 4m - 12 = 0$ denkleminin kökleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Gerçekte kök yoktur. B) Ters işaretli iki kök vardır. C) Negatif iki kök vardır.

D) Pozitif iki kök vardır. E) Eşit iki kök vardır.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR



Motivasyon

Aşağıdaki resimleri inceleyelim.



Dirina köprüsü



Şanlıurfa Birecik köprüsü

Mimari yapılarda parabol şeklinin tercih edilmesinin nedenlerini araştırınız.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLARIN EN BÜYÜK YA DA EN KÜÇÜK DEĞERİNİ BULMA



Etkinlik

R de tanımlı

$f(x) = x^2 + 4x + 2$ ve $g(x) = -x^2 + 6x - 3$ polinom fonksiyonları veriliyor.

- Fonksiyonların derecelerini belirtiniz.
- x e farklı gerçekte sayılar vererek $f(x)$ in alabileceği en küçük değeri bulunuz. Aynı düşünceyle $f(x)$ in alacağı en büyük değeri bulabilir misiniz?
- $g(x)$ fonksiyonunun alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulunuz.
- Yukarıda verilen fonksiyonları $A(x) = a \cdot (x-r)^2 + k$ biçiminde yazarak en büyük ya da en küçük değerlerini bulunuz. Bu değerleri ilk bulduğunuz değerlerle karşılaştırınız. ($a, r, k \in \mathbb{R}$)

☞ $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde verilen fonksiyonların en büyük ya da en küçük değerleri bulunurken nelere dikkat edilmesi gerektiğini tartışınız.



Örnek

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 8x + 7$ fonksiyonunun alacağı en küçük değeri bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 + 8x + 7$ fonksiyonu tam kareye tamamlama yöntemi kullanılarak,

$$f(x) = x^2 + 8x + 16 - 9$$

$$f(x) = (x+4)^2 - 9 \text{ biçiminde yazılabilir.}$$

$x = -4$ değeri için $f(x)$ en küçük değerini alır. Bu değer de $f(-4) = -9$ olarak bulunur.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun alacağı en büyük değeri bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ fonksiyonu tam kareye tamamlama yöntemi kullanılarak,

$$f(x) = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 1 = -2[(x-1)^2 - 1] - 1$$

$f(x) = -2(x-1)^2 + 1$ biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyon $x = 1$ için en büyük değerini alır. Bu değer de $f(1) = 1$ olur.



Tanım ve Bilgi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlara **ikinci dereceden fonksiyonlar** denir.

Bu fonksiyonları $f(x) = a \cdot (x-r)^2 + k$ biçiminde yazarak,

$a > 0$ için $f(x)$ in alacağı en küçük değer bulunabilir. Bu değer de $f(r) = k$ olur.

$a < 0$ için $f(x)$ in alacağı en büyük değer bulunabilir. Bu değer de $f(r) = k$ olur.



Uygulamalar

1. Aşağıda \mathbb{R} de tanımlı fonksiyonların en büyük ya da en küçük değerlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^2 + 10x - 1$

b) $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$

c) $k(x) = -x^2 + 3x - 1$

ç) $n(x) = 3x^2 - 5x + 1$

d) $g(x) = -x^2 + 2x + 5$

e) $l(x) = -4x^2 + 12x - 1$

f) $m(x) = x^2 + 5x + 2$

g) $p(x) = -4x^2 + 3x + 2$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m - 1$ fonksiyonunun en küçük değeri -12 ise m kaçtır?

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -9x^2 + 4x + c$ fonksiyonunun en büyük değeri 7 ise c kaçtır?

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m-2)x + n + 3$ fonksiyonu veriliyor. $x = -3$ için fonksiyonunun en küçük değeri -5 ise m ve n değeri kaçtır?

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-4)^2 + b$ nin en büyük değeri 6 ise $b-a$ nın en küçük değerini bulunuz.

6. $f: [6, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 16$ fonksiyonun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

İKİNCİ DERECEDEKİ FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ



Etkinlik

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonu veriliyor.

- $f(x)$ fonksiyonunun en küçük değerini aldığı noktanın koordinatlarını bularak koordinat sisteminde işaretleyiniz.
 - $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaların koordinatlarını bularak koordinat sisteminde işaretleyiniz.
 - $f(x)$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çiziniz.
 - Çizdiğiniz grafiğin herhangi bir doğruya göre simetrik olup olmadığını araştırınız.
- ☞ İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiğini çizerken nelere dikkat edilmesi gerektiğini tartışınız.



örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

- $f(x)$ fonksiyonunun başkatsayısı negatif olduğundan $f(x)$ in alabileceği en büyük değer vardır. Bu değeri veren noktanın koordinatlarını bulalım.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

$f(x) = -(x-1)^2 + 4$ ise bu nokta $A(1,4)$ olarak bulunur.

- $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulalım.

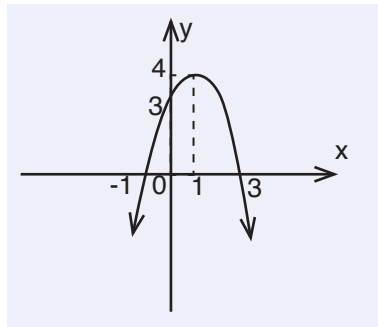
$x = 0$ için $f(0) = 3$ dir. $B(0,3)$ noktası y eksenini kestiği noktadır.

$y = 0$ için $-x^2 + 2x + 3 = 0$ $x_1 = 3$ ve $x_2 = -1$ dir. $C(3,0)$ ve $D(-1,0)$ noktaları x eksenini kestiği noktalardır.

- Bulduğumuz bu değerleri ve farklı değerler de kullanarak değişim tablosunu oluşturalım.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
f(x)		-5	0	3	4	3	0	-5	

- Değişim tablosunu dikkate alarak $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Çizdiğimiz bu grafikte $x = 1$ doğrusu simetri eksenidir.



Tanım ve Bilgi

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonun grafiğine **parabol** denir. Fonksiyonun alacağı en büyük ya da en küçük değeri veren noktaya **tepe noktası** denir.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu $f(x) = a(x-r)^2 + k$ biçiminde yazılırsa grafiğinin tepe noktası $T(r, k)$ ile gösterilir. Buradaki r ve k değerleri,

$$r = -\frac{b}{2a} \text{ ve } k = f(r) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$
bağıntılarıyla bulunur.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün simetri ekseninin denklemi $x=r$ dir.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 2x - 3$ parabolünü çizelim.

ÇÖZÜM

- Parabolün tepe noktasını bulalım.

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

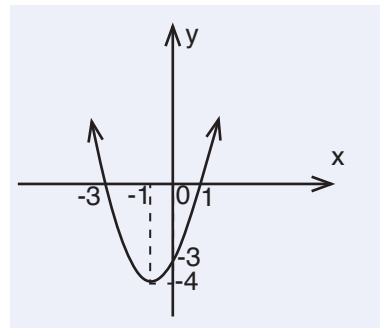
$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - 2^2}{4 \cdot 1} = -4 \text{ olduğundan}$$

$T(-1, -4)$ tür.

- Parabolün eksenleri kestiği noktaları bulalım.
 $x = 0$ için $y = -3$ ve $y = 0$ için $x_1 = 1, x_2 = -3$ olduğundan $(0, -3)$, $(1, 0)$ ve $(-3, 0)$ olur.
- Parabolün simetri ekseninin denklemi $x = -1$ dir.
- Değişim tablosunu yapalım.

x -4	-3	-2	-1	0	1	2...
f(x)	5	0	-3	-4	-3	0	5

- Değişim tablosunu dikkate alarak parabolünü çizelim.





Örnek

1. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ fonksiyonunun aşağıda tanımlanan aralıklardaki görüntü kümelerini bularak alacağı en büyük ve en küçük değerleri yazalım.

a) $[-2, 1]$ b) $[1, 2]$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ fonksiyonun $[-2, 1]$ aralığında uç noktalarındaki görüntüleri ile grafiğinin tep noktasının koordinatlarını bularak alacağı en büyük ve en küçük değerlerini bulalım.

$$f(-2) = 4 \text{ ve } f(1) = 7$$

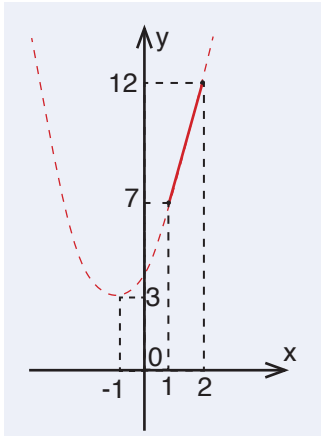
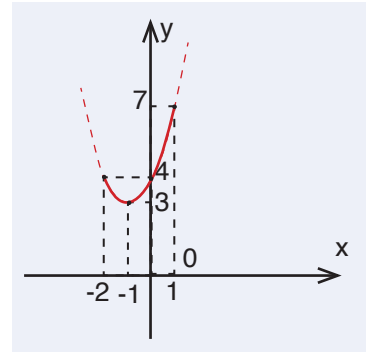
$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$r = -1 \in [-2, 1]$ olduğundan

$f(-1) = 3$ en küçük değer olur.

$[-2, 1]$ aralığında tanımlı fonksiyonun görüntü kümesi $[3, 7]$ olur.

Bu durumda $f(x)$ in en küçük değeri 3, en büyük değeri 7 dir.



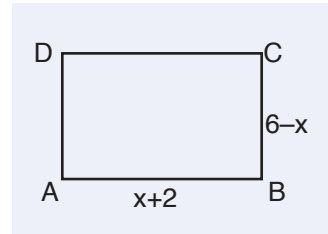
- b) $[1, 2]$ aralığında tanımlanan $f(x)$ in görüntü kümesini bulalım.

$$f(1) = 7 \text{ ve } f(2) = 12$$

$r = -1 \notin [1, 2]$ olduğundan $f(-1)$ en küçük değer olamaz.

Görüntü kümesi $[7, 12]$ olur.

Bu durumda $f(x)$ in en küçük değeri 7, en büyük değeri 12 olur.



2. Şekildeki dikdörtgensel bölgenin ayrıtları $(6-x)$ ve $(x+2)$ cm dir. Dikdörtgensel bölgenin alanının en çok kaç cm^2 olabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

Dikdörtgensel bölgenin alanını veren fonksiyon,

$$f(x) = (6-x)(x+2)$$

$f(x) = -x^2 + 4x + 12$ bulunur. Bu fonksiyonun alacağı en büyük değer $k = f(r) = f(2) = 16$ olur. Bu durumda dikdörtgensel bölgenin alanının en büyük değeri 16 cm^2 bulunur.



Uygulamalar

1. Aşağıda gerçekte sayılarda tanımlı fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = x^2$

ç) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 16$

e) $f(x) = -x^2$

f) $f(x) = x^2 + 4x$

g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

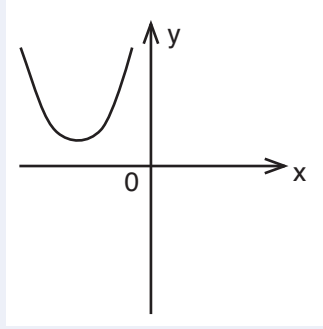
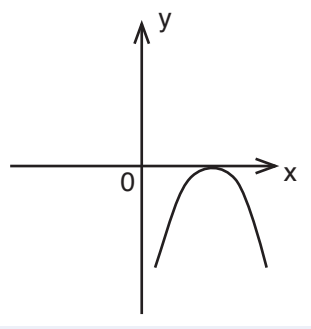
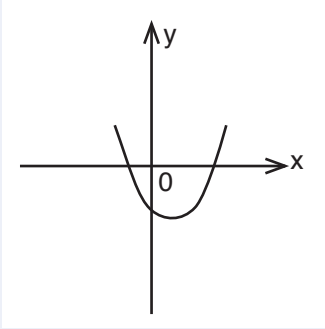
ğ) $f(x) = x^2 + 2$

h) $f(x) = -x^2 + 3x$

ı) $f(x) = -x^2 - 10x - 25$

i) $f(x) = x^2 + 4x + 10$

2.



Yukarıda $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde yazılabilen üç fonksiyonun grafikleri verilmiştir. Buna göre her bir fonksiyon için a ve $b^2 - 4ac$ değerlerinin işaretlerini belirtiniz.

3. $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

4. $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

5. $f : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

6. Kenar uzunlukları $(4-x)$ cm ve $(6+x)$ cm olan dikdörtgenel bölgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?

7. $x^2 - (m+1)x + 3m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1^2 + x_2^2$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

8. $f(x) = x^2 + (m+1)x + 9$ fonksiyonu x eksenine negatif tarafında teğet ise m değerini bulunuz.

9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-3)x^2 + (2m-2)x + m+2$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası x ekseninde olduğuna göre tepe noktasının apsisini bulunuz.

10. $f(x) = -x^2 + 3m + 1$ parabolü verilmiştir. $A(2, 3m)$ noktası bu parabol üzerinde ise m kaçtır?

11. $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 3x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

BAZI NOKTALARI VERİLEN İKİNCİ DERECEDEKİ FONKSİYONUN BULUNMASI



Etkinlik

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir fonksiyonun üç noktası $A(2,1)$, $B(-1,3)$ ve $C(0,4)$ olsun.
- Verilen noktaları $f(x) = ax^2 + bx + c$ genel denkleminde yerine yazarak a, b, c ye bağlı denklemleri oluşturunuz.
 - Bu denklemleri çözerek a, b, c parametrelerini bulunuz ve fonksiyonun denklemini yazınız.
- ☞ Herhangi üç noktası verilen ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir fonksiyonun denkleminin nasıl bulunabileceğini tartışınız.
- ☞ İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir fonksiyonun tepe noktası ile farklı herhangi bir noktası verildiğinde denkleminin nasıl yazılabileceğini tartışınız.



Örnek

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a.(x+3).(x-1)$ parabolü üzerindeki bir nokta $A(0,6)$ ise a gerçekte sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

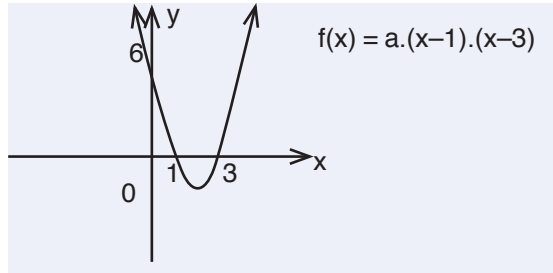
$A(0,6)$ noktası parabolün üzerinde bir nokta ise $f(0) = 6$ dır.

$f(x) = a.(x+3).(x-1)$ ise $f(0) = a.(-3)$ tür. Buradan,

$$-3a = 6$$

$$a = -2 \text{ bulunur.}$$

2. Aşağıda grafiği ve denklemini verilen ikinci dereceden fonksiyonda a gerçekte sayısını bulalım.



ÇÖZÜM

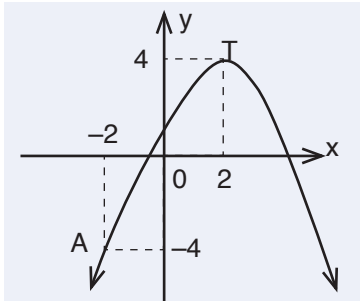
Parabol x eksenini $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktalarda kesiyorsa $f(1) = 0$ ve $f(3) = 0$ dır.

Bu durum fonksiyonun denkleminin $f(x) = a.(x-1).(x-3)$ olarak yazılabileceğini gösterir.

$$f(0) = 6 \text{ ise } f(0) = a.3$$

$$3a = 6 \text{ ve } a = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

3.



Yanda tepe noktası $T(2,4)$ olan parabolün denklemini

$y = a.(x-2)^2 + 4$ biçiminde verilmiştir.

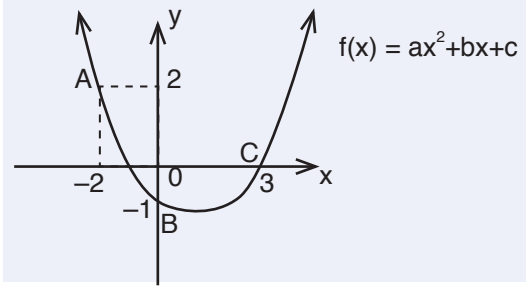
a gerçekte sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

A(-2,-4) noktası parabol üzerinde olduğundan $y = a.(x-2)^2 + 4$ denklemi sağlar.
 $-4 = a.(-2-2)^2 + 4$ olur. Buradan,

$$a = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

4.



Yanda $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir.

a, b ve c değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

A(-2,2), B(0,-1) ve C(3,0) noktaları parabolün üzerindedir.

$f(0) = -1$ ise $a.0^2 + b.0 + c = -1$ ve $c = -1$ dir.

$f(-2) = 2$ ise $4a - 2b + c = 2, 4a - 2b - 1 = 2$ ve $4a - 2b = 3$ tür.

$f(3) = 0$ ise $9a + 3b + c = 0, 9a + 3b - 1 = 0$ ve $9a + 3b = 1$ dir.

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b = 3 \\ 9a + 3b = 1 \end{array} \right\} \text{denklemleri ortak çözülerek } a = -\frac{7}{6} \text{ ve } b = -\frac{23}{3} \text{ bulunur.}$$

5. f: R → R, $f(x) = x^2 + (m+2)x - 6m$ fonksiyonunun en büyük değeri $\frac{25}{4}$ olduğuna göre m değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$T(r, \frac{25}{4})$ noktası parabolün tepe noktası olduğundan

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.(-1).(-6m) - (m+2)^2}{4.(-1)} = \frac{-m^2 + 20m - 4}{-4} = \frac{25}{4}$$

$$-m^2 + 20m - 4 = -25$$

$$m^2 - 20m - 21 = 0 \text{ bulunur.}$$

Buradan $m_1 = -1$ ve $m_2 = 21$ elde edilir.

6. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 - 6x - c + 1$ fonksiyonunun grafiği Ox eksenine teğet olduğuna göre c değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olmalıdır.

$$(-6)^2 - 4.1.(-c+1) = 0$$

$$36 + 4c - 4 = 0$$

$$4c = -32$$

$$c = -8 \text{ bulunur.}$$



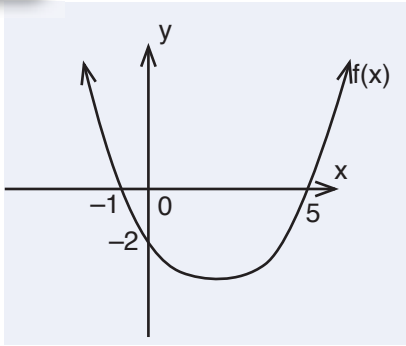
Tanım ve Bilgi

1. Tepe noktası $T(r,k)$ olan ve başka bir noktası bilinen parabolün denklemini yazmak için $f(x) = a.(x-r)^2+k$ formülünden yararlanılır.
2. x eksenini kestiği noktaları $A(x_1,0)$ ve $B(x_2,0)$ olan, ayrıca başka bir noktası bilinen parabolün denklemini yazmak için $f(x) = a.(x-x_1).(x-x_2)$ formülünden yararlanılır.



Örnek

1.



Yanda $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir. $f(-2)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

x eksenini kestiği noktalar $(-1,0)$ ve $(5,0)$ olduğundan,

$f(x) = a.(x-x_1).(x-x_2)$ formülünden yararlanarak $f(x) = a.(x+1).(x-5)$ biçiminde yazılır.

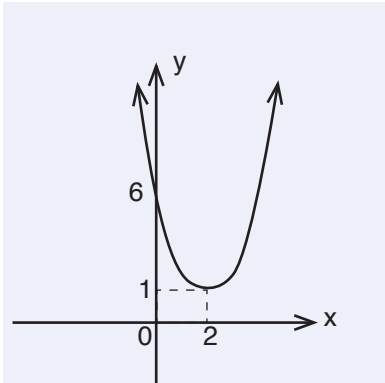
y eksenini $(0,-2)$ noktasında kestiğine göre, $f(0) = a.1.(-5)$

$-2 = -5a$ $a = \frac{2}{5}$ bulunur. Bu durumda

$f(x) = \frac{2}{5} .(x+1)(x-5)$ ise,

$f(-2) = \frac{2}{5} .(-1).(-7)$, $f(-2) = \frac{14}{5}$ olur.

2.



Yanda tepe noktası $T(2,1)$ olan

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir.

$f(6)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Parabolün tepe noktası $T(2,1)$ ise denklemi $f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 1$ biçiminde yazılır.

$f(0) = a \cdot 4 + 1 = 6$ ise $a = \frac{5}{4}$ bulunur. Bu durumda denklem

$f(x) = \frac{5}{4} (x-2)^2 + 1$ olur. $f(6) = \frac{5}{4} \cdot (6-2)^2 + 1 = 21$ bulunur.

$f(6) = 21$ bulunur.

3. $f(x) = (a+1)x^2 - 4x + 5$ parabolü x eksenini kesmiyorsa a nın alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = (a+1)x^2 - 4x + 5$ parabolü x eksenini kesmiyorsa $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (a+1) \cdot 5 < 0$$

$$16 - 20a - 20 < 0$$

$$-4 < 20a$$

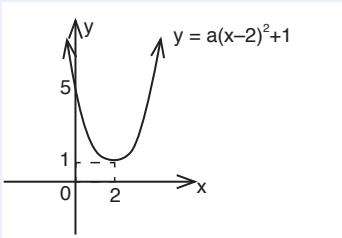
$-\frac{1}{5} < a$ bulunur. Burada a nın alabileceği en küçük tam sayı değeri 0 olur.



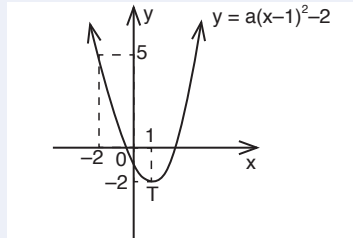
Uygulamalar

1. Aşağıda grafiği verilen parabol denklemlerindeki a değerini bulunuz.

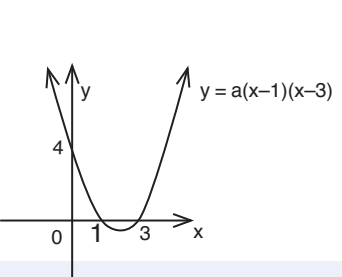
a)



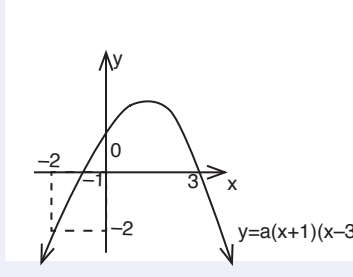
b)



c)

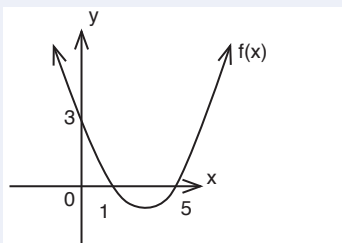


ç)

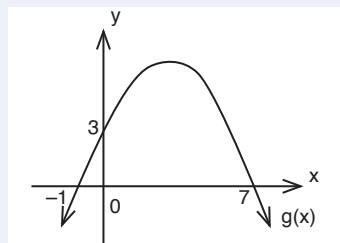


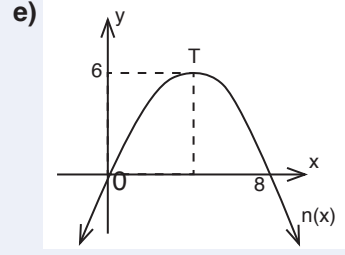
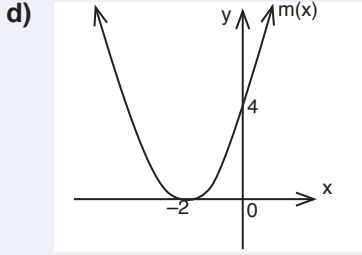
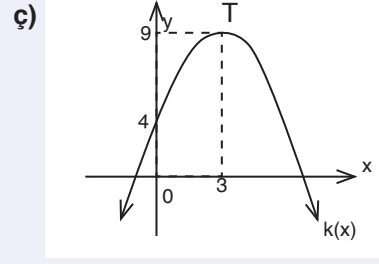
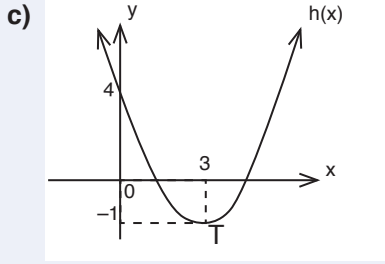
2. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonları yazınız.

a)

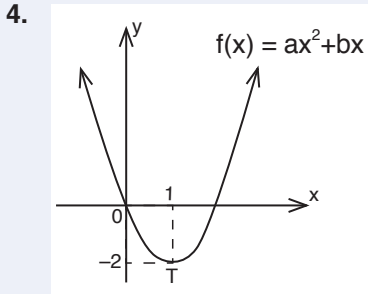


b)

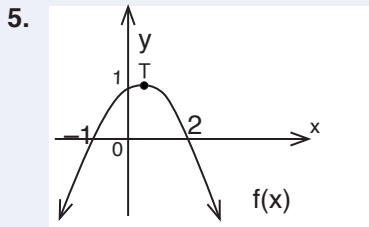




3. Denklemi $f(x) = -x^2 + mx + 2x - 3m$ olan parabol $(0, 4)$ noktasından geçtiğine göre m kaçtır?



Şekildeki $f(x)$ parabolünün tepe noktası $T(1, -2)$ ise $f(5)$ değeri kaçtır?



Şekilde verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası T ise fonksiyonun alacağı en büyük değer kaçtır?

6. $f(x) = -x^2 + 2x - m - 1$ parabolünün x eksenine teğet olabilmesi için m değeri kaç olmalıdır?

7. $f(x) = x^2 - mx + 5$ parabolünün x eksenine teğet olduğu bilindiğine göre m reel sayısının alabileceği değerler çarpımı nedir?

8. $f(x) = x^2 + (a-2)x + 4$ fonksiyonunun x eksenine negatif tarafında teğet olması için a kaç olmalıdır?

9. $f(x) = 3x^2 - 12x + k + 1$ parabolü x eksenini iki farklı noktada kestiğine göre k nın alacağı en büyük tam sayı değeri kaçtır?

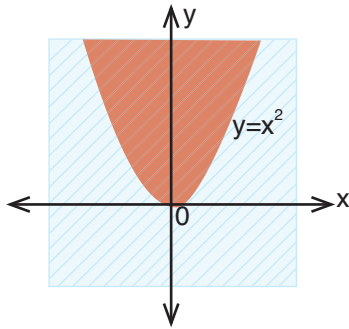
10. $f(x) = 2mx^2 - 12x + m$ olan parabol x eksenini kesmiyorsa m nin alacağı en büyük negatif tam sayı değeri kaçtır?
11. $f(x) = x^2 - 4x + m - 2$ fonksiyonunun alacağı en küçük değer 10 ise m değeri kaçtır?
12. m nin hangi değerleri için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2 + mx - 2$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en büyük elemanı 2 olur?
13. $[-4, 5]$ kapalı aralığında tanımlı $f(x) = x^2 - 4x + 5$ fonksiyonunun en küçük ve en büyük değerinin toplamı kaçtır?
14. $y = (x-2)^2 - 3$ fonksiyonunda $[1, 8]$, $[-7, 1]$, $[4, 9]$ aralıklarında aldığı en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİK VE EŞİTSİZLİK SİSTEMİNİN ÇÖZÜM KÜMESİNİN GRAFİK ÜZERİNDE GÖSTERİLMESİ



Etkinlik

$y = x^2$ parabolünün grafiğini çizelim.



- $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(-2, 5)$, $(-2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 9)$, $(3, 10)$ noktaları yandaki grafiğe göre hangi bölgededir?

- Kırmızı bölgedeki noktaları A kümesine, mavi bölgedeki noktaları B kümesine, parabolün üzerindeki noktaları C kümesine yazınız.

A



B



C



- A, B ve C kümelerinin elemanlarını incelediğimizde,

$y > x^2$ eşitsizliğini hangi kümenin elemanları sağlar?

$y < x^2$ eşitsizliğini hangi kümenin elemanları sağlar?

$y = x^2$ eşitsizliğini hangi kümenin elemanları sağlar?

$y \geq x^2$ eşitsizliğini hangi kümenin elemanları sağlar?

$y \leq x^2$ eşitsizliğini hangi kümenin elemanları sağlar?

- A, B ve C kümelerine siz de uygun elemanlar yazınız.
- Yazabileceğiniz tüm elemanları düşündüğünüzde, yeni oluşacak A, B ve C kümelerinin eleman sayıları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

☞ İki bilinmeyenli bir eşitsizliğin ya da bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini grafik üzerinde gösterirken nelerin yapılması gerektiğini tartışınız.

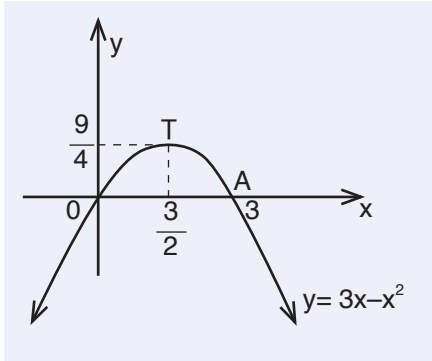


Örnek

1. $y < 3x - x^2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini grafik üzerinde gösterelim.

ÇÖZÜM

$y = 3x - x^2$ parabolünün grafiğini çizelim. Parabolün eksenleri kestiği noktalar $x = 0$ için $y = 0$ ve $y = 0$ için $x = 0$ ve $x = 3$ olduğunda $O(0,0)$ ve $A(3,0)$ tür.

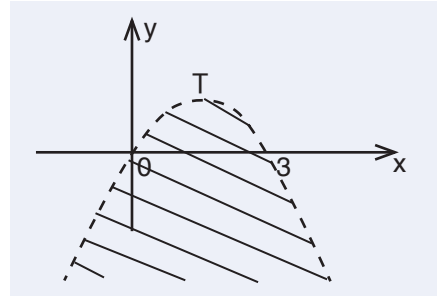


Grafiğin tepe noktası $T\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ dir.

Grafiğin üzerinde bulunmayan herhangi bir nokta alarak eşitsizlikte yerine koyalım.

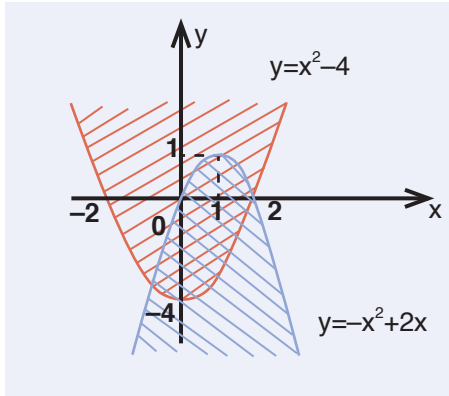
$(1,0)$ için: $0 < 3 - 1$,
 $0 < 2$

Eşitsizlik sağlandığından eşitsizliğin çözüm kümesi yandaki gibi olur.



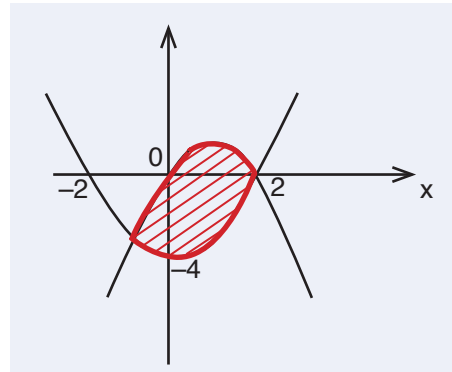
2. $y \geq x^2 - 4$
 $y \leq -x^2 + 2x$ } eşitsizlik sistemini sağlayan noktaların kümesini analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM



Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi hem mavi hem de kırmızı ile taranan bölgedir. Bu bölge grafikte yandaki gibi gösterilir.

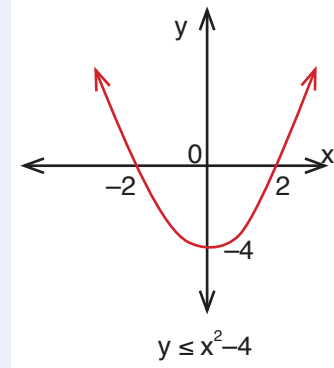
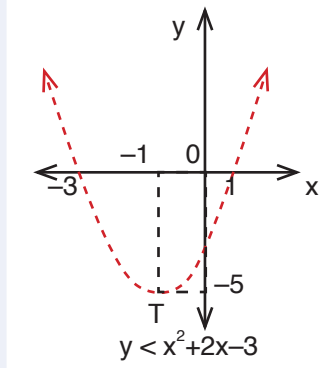
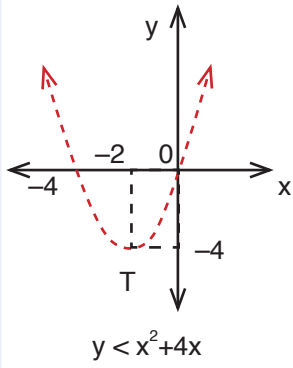
$y = x^2 - 4$ ve $y = -x^2 + 2x$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir. $(0,0)$ noktası $y \geq x^2 - 4$ eşitsizliğini sağlar, bu eşitsizliği sağlayan noktaların kümesini kırmızı ile tarayalım. $(1,-1)$ noktası $y \leq -x^2 + 2x$ eşitsizliğini sağlar, bu eşitsizliği sağlayan noktaların kümesini de mavi ile tarayalım.





Uygulamalar

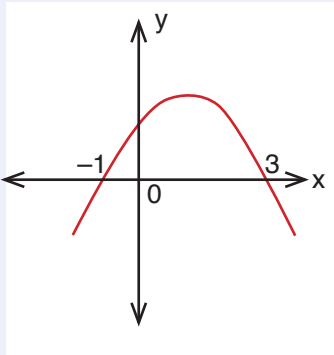
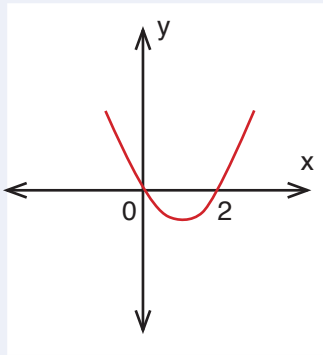
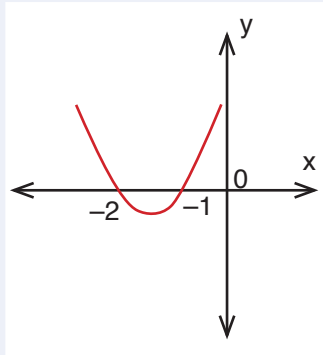
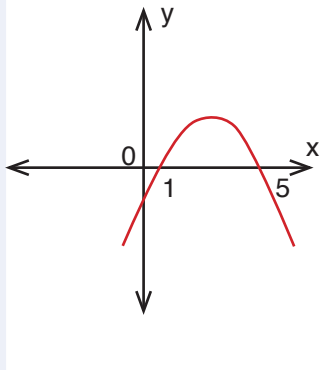
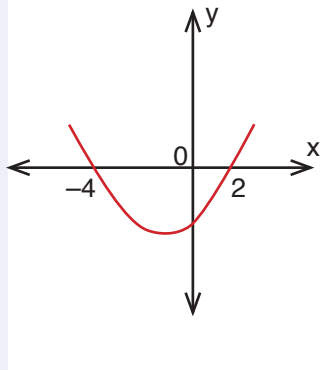
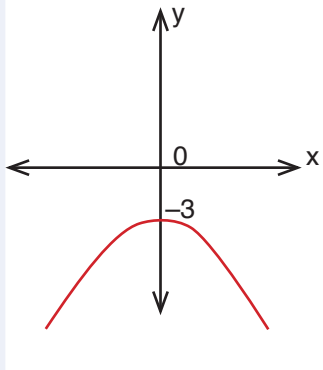
1. Grafiğin altında verilen eşitsizliklerin çözüm kümesini grafik üzerinde tarayarak gösteriniz.



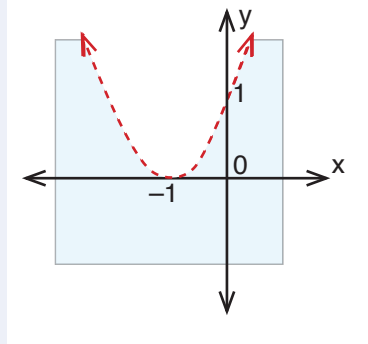
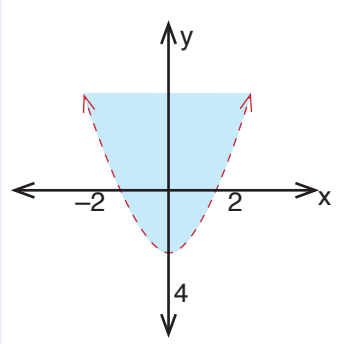
2. Aşağıda verilen eşitsizlikleri ve grafikleri eşleyerek eşitsizliklerin çözüm kümelerini gösteriniz.

- $y ≤ -x^2 + 2x + 3$
- $y ≤ x^2 + 2x - 8$
- $y ≥ -x^2 + 6x - 5$

- $y ≥ x^2 - 2x$
- $y ≥ -x^2 - 3$
- $y ≤ x^2 + 3x + 2$



3. Aşağıdaki grafiklerde verilen boyalı bölgelere ait eşitsizlikleri yazınız.



4. $y \geq x^2 - 4x + 3$ ve $y \leq x^2 - 4x + 6$ eşitsizliklerinin sağlandığı ortak bölgeyi koordinat düzleminde gösteriniz.

5. $y > x^2 - 1$ ve $y < 2x + 2$ eşitsizliklerinin sağlandığı ortak bölgeyi koordinat düzlemi üzerinde gösteriniz.

BÖLÜM SONU SORULARI

1. $\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^2 + \frac{2x+1}{3x} - 12 = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{14}$ D) 1 E) 2

2. $x^2 - 15x + a - 4 = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında $x_1 = 2x_2 + 3$ bağıntısı varsa a kaç olmalıdır?

3. $2x^2 + 7x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1$ değeri kaçtır?

4. $x^2 + (m-2)x - 2m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Köklerin aritmetik ortalaması -1 ise köklerin geometrik ortalaması kaçtır?

5. Kökleri $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ ve $\frac{4 + \sqrt{3}}{2}$ olan ikinci derece denklemi bulunuz.

6. Aşağıda verilen denklemlerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bularak yandaki kümelerle eşleştiriniz.

I) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

a) $\{-3, 2\}$

II) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

b) $\{-3, 1, 3\}$

III) $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}$

c) $\{-1, 0, 1\}$

ç) $\{-2, -1, 1, 2\}$

7. Aşağıda verilen denklemlerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\sqrt{a+6} = a+4$

b) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1}$

c) $\sqrt{x+\sqrt{3x+1}} = 3$

ç) $\sqrt{x+36} = \sqrt{x} + 2$

d) $\sqrt[4]{x^2 - 8} = 2$

8. Aşağıda verilen denklemlerin gerçekte sayılardaki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $|a-3| = 4$

b) $m^2 + |m| - 6 = 0$

c) $|x+3| = |x-1|$

ç) $|3x|^2 - 5|3x| + 4 = 0$

9. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ y^2 + 2xy + 4 = 0 \end{cases}$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

10. $\begin{cases} x+y-5xy = 0 \\ x \cdot y = \frac{1}{6} \end{cases}$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

11. $\frac{(a+1) \cdot (5-a)}{a^2+3} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

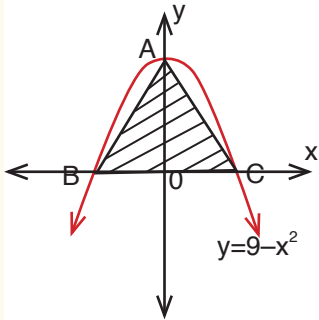
12. $\frac{x-2}{x} < \frac{x}{x-2}$ eşitsizliğinin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

13. $\begin{cases} \frac{x-2}{x} \geq 0 \\ x-2 < \frac{8}{x} \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

14. $f(x) = x^2 - (n+3)x + n - 1$ parabolü A(2,3) noktasından geçtiğine göre parabolün y eksenini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

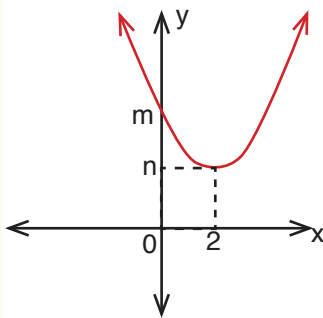
15. $y = 4x^2 - (k+1)x + 2k - 4$ parabolünün simetri eksenini $x = 1$ doğrusu ise parabolün en küçük değeri nedir?

16.



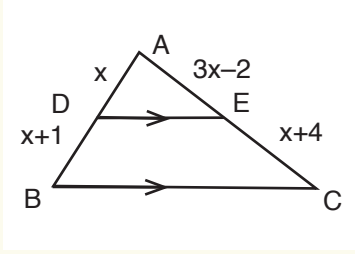
Yandaki şekilde $y = 9 - x^2$ parabolünün grafiği verilmiştir. Buna göre ABC üçgensel bölgesinin alanını bulunuz.

17.



Yandaki şekilde $y = x^2 - 4x + 6$ parabolünün grafiği verilmiştir. Buna göre $m+n$ nin değerini bulunuz.

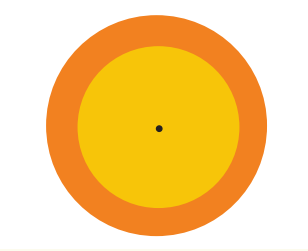
18.



Yandaki ABC üçgeninde $[DE] \parallel [BC]$ dir. Şekilde verilenlere göre x kaçtır?

19. Saatteki hızı x km olan bir tren 600 km yol alacaktır. Saatteki hızı $x+20$ km olduğunda aynı yolu 5 saat erken alacağına göre x kaçtır?

20.



Şekildeki hedef tahtasında R ve $R+1$ yarıçaplı aynı merkezli iç içe iki dairenin arasında kalan alan, içerdeki dairenin alanının $\frac{1}{10}$ idir. R yi bulunuz.

21. Bir uçak, 3600 km lik yolu saatteki hızı 30 km olan rüzgârla birlikte gittiğinde, rüzgâra karşı gittiğinden 40 dakika daha erken alıyor. Rüzgâr olmadığında bu uçağın saatteki hızını bulunuz.

22. İki sayının toplamı 18 ve bu sayıların kareleri toplamı 170 tir. Bu sayıları bulunuz.

23. İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir fonksiyonun grafiğine..... denir.

24. İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir fonksiyonun en büyük ya da en küçük değerini aldığı noktaya denir.

25. A dikdörtgeninin uzun kenarı $x+5$, kısa kenarı $x+4$ birimdir. B dikdörtgeninin uzun kenarı $2x+1$, kısa kenarı x birimdir. Bu iki dikdörtgenin alanı eşit olduğuna göre her iki dikdörtgenin çevresini hesaplayınız.

26. $y \geq x^2 - 7x + 6$ eşitsizliğinin grafiğini çiziniz.

27. Bir bilye, mermer üzerinde bulunan bir oluktan aşağıya doğru yuvarlanıyor. Bilye t saniyede $8t+t^2$ santimetre yol alıyor. Bilye 120 santimetrelük yolu kaç saniyede alır?

28. Kısa kenarı x metre olan dikdörtgen şeklindeki bir odanın uzun kenarı kısa kenarından 1,5 metre fazladır. Odaanın taban alanı $17m^2$ dir. Bu bilgileri $(x+p)^2=q$ biçimindeki ikinci dereceden denklem hâlinde yazınız. Önermeyi doğru yapan p ve q değerlerini bulunuz.

**İKİNCİ DERECE DENKLEMLER,
EŞİTSİZLİKLER VE FONKSİYONLAR
TESTİ**

1. $3x^2 - 4x - 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ C) $\left\{1, -\frac{7}{3}\right\}$ D) \emptyset E) \mathbb{R}

2. $(2x-4)(x+4) = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2\}$ B) $\left\{2, \frac{9}{3}\right\}$ C) $\{2, -4\}$ D) $\{3, -1\}$ E) \emptyset

3. $5x^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin farkının mutlak değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ E) 1

4. $\frac{4}{x} = \frac{x-6}{x-4}$ denklemini sağlayan köklerin karelerinin toplamı kaçtır?

- A) 70 B) 68 C) 65 D) 60 E) 58

5. $(4x+7)(x-1)$ denkleminde kökler toplamının, kökler çarpımına oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 5 D) 4 E) $-\frac{1}{4}$

6. $(2x+1)(4x-3) = 3 \cdot (4x-m)^2$ denkleminin köklerinden biri 1 ise m'nin alacağı değerler kümesi nedir?

- A) $\{3, 2\}$ B) $\{2, 1\}$ C) $\{3, 5\}$ D) $\{-3, 2\}$ E) $\{-3, -5\}$

7. $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{18-6x}{x^2-9}$ denklemin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0, 3\}$ B) $\{3\}$ C) $\{0\}$ D) \emptyset E) \mathbb{R}

8. $\frac{r}{r-1} - \frac{r}{r+1} = \frac{2}{r^2-1}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{2\}$ E) \emptyset

9. $\frac{x+2}{x^2-x-6} = \frac{3a}{x} - \frac{4}{x+3}$ denkleminin köklerin den biri $\{-3, -2, 0, 1, 3\}$ kümesinin elemanlarından biri ise "a" değeri aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 0 E) $-\frac{1}{3}$
10. $2\sqrt{x} = x - 8$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{4\}$ B) $\{4, 16\}$ C) \emptyset D) $\{16, 0\}$ E) $\{16\}$
11. $4x^2 + 8x + k = 0$ denkleminin en çok bir gerçek kökünün olması için k'nın bulunduğu en geniş değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $4 > k$ B) $k \geq 4$ C) $k > 4$ D) $k \leq 4$ E) $0 < k \leq 4$
12. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+1}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{2\}$ B) $\left\{\frac{2}{9}\right\}$ C) $\left\{2, \frac{2}{9}\right\}$ D) $\{1\}$ E) $\{0\}$
13. $f(x) = a \cdot x^2 - 12x - 18$ parabolü x eksenine teğet ise a kaçtır?
- A) 6 B) 2 C) -4 D) -2 E) 0
14. $f(x) = x^2 + 4x + k$ parabolünün tepe noktasının koordinatları $(-2, -3)$ ise k aşağıdakilerden hangisidir?
- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2
15. $y = 4 - 2x$ doğrusu ile $y = x^2 - 6x + 8$ parabolü teğet ise değme noktasının koordinatları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6
16. Apsisi 2 ve -1 olan noktada x eksenini, ordinatı 6 olan noktada y eksenini kesen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$ B) $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ C) $f(x) = -3x^2 - 3x - 6$
- D) $f(x) = -3x^2 + 6$ E) $f(x) = -3x^2 + 3x - 6$

17. İkinci dereceden $f(x)$ fonksiyonunda $f(1) = 2$ dir. Bu fonksiyonun en küçük değeri $f(3) = -5$ olduğuna göre denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = x^2 + 2x + 7$

B) $f(x) = \frac{3}{4} (8x - 3)^2 - 5$

C) $f(x) = \frac{7}{4} (x+3)^2 - 5$

D) $f(x) = \frac{7}{4} (x+3)^2 + 5$

E) $f(x) = \frac{7}{4} (x - 3)^2 - 5$

18. $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$ eşitsizliğinin çözüm aralıklarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > 2$

B) $x < -\frac{1}{2}$

C) $0 < x < 3$

D) $x < 0$

E) $x > 3$

19. $(x^2 - 1)(x - 4)^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 1)$

B) $(-\infty, 1)$

C) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

D) $(4, +\infty)$

E) $(1, 4)$

20. $\frac{(x+3)(x-5)^2}{x-4} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3 \leq x < 5$

B) $\{5\}$

C) $x > 5$

D) $0 \leq x < -3$

E) $[-3, 4) \cup \{5\}$

3. BÖLÜM

TRİGONOMETRİ

ALT ÖĞRENME ALANLARI

- Yönlü açılar
- Trigonometrik fonksiyonlar
- Trigonometrik fonksiyonların grafikleri
- Ters trigonometrik fonksiyonlar
- Üçgende trigonometrik bağıntılar
- Toplam ve fark formülleri
- Trigonometrik denklemler

Trigonometri terimi, Yunanca üçgen anlamına gelen trigos ve ölçüm anlamına gelen metron kelimelerinin birleşmesinden meydana gelmiştir. Başlangıçta üçgenlerin kenarlarıyla açıları arasındaki matematiksel ilişkileri oluşturma amacı ile kullanılmıştır. Kısa süre sonra çok kenarlı şekillerin kenar, köşegen ve açılarının hesaplanması da trigonometrinin kapsamına eklenmiştir. Mısırlı Ahmes'in (MÖ 1550) Papirüs'ünde piramitlerin ölçümüyle ilgili beş trigonometri problemi olduğu söylenir. Ahmes, trigonometrinin sözünü etmez, ama ölçümler ve hesaplamalar trigonometrik oranlardan başka bir şey değildir. Ancak, bizim amacımıza uygun trigonometrinin kökeni, trigonometri ile uğraşan ilk kişi olduğu kabul edilen Hipparchus (Hiparküs), (MÖ 170-125)'un çalışmalarında görülür.

Mısırlılar ve Babilliler trigonometriyi arazi ölçümlerinde, yapılarda, astronomide ve güneş saatinde kullanmışlardır. Babil astronomları 360 dereceyi ilk kullananlardır. Mezopotamyalılar 60 tabanlı sayı sistemi kullandıklarından, saatin 60 dakika, dakikanın 60 saniye ve çemberin 360 dereceye bölünmüş olması, onlardan bize miras kalanlardan sadece birkaçıdır. Çinliler dik açılı üçgeni uzaklık, yükseklik, derinlik ve kenar oranları için kullanıyorlardı. Bunları Choupei Suanking (Kopai Suenking), (MÖ 1115) isimli kitapta görebiliriz. Bu kitapta ispatsız Pisagor teoremi, güneş saati ve gölge bilgisi hakkında ilkel düzlemsel trigonometri bilgileri vardır. Thales (Tales), (MÖ 600), Mısır ve Mezopotamya'yı dolaşarak öğrendiklerini Ege bölgesine getirir ve burada yayar. Öğrendikleri Tales teoremleridir. Bu teoremler varılamayan uzaklıkların ölçülmesinde kullanılmıştır.

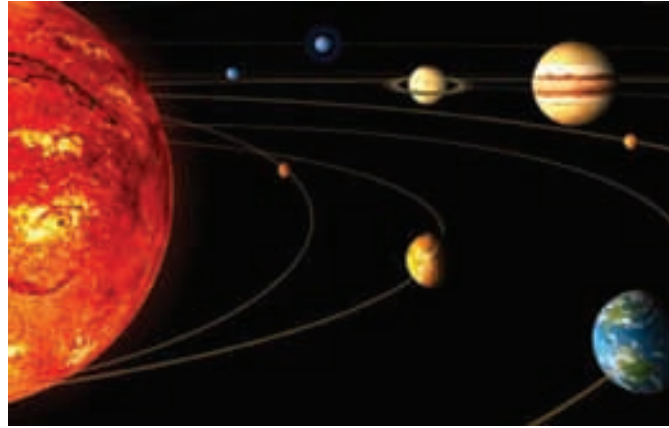
Yunanistan'da düzlemsel trigonometriden başka bir de küresel trigonometri kullanılmıştır. Gökyüzü bir yarım küre olarak düşünülürken bazı Yunanlı düşünürlere göre yeryüzü de küre biçimindeydi. İskenderiyeli astronom Menelaus (Menelos) (MS 100) küresel trigonometrinin temellerini atmıştır. Özellikle Hipparchus'un trigonometrisinden çok yararlanmış ve onu daha da ileri götürmüştür. Ptolemy (Tolomi) (2. yüzyıl) kendisinden önce gelen yazarların kitaplarından derlediği bilgileri Almagest (Almagest) adlı on üç kitaplık bir seride toplamıştır. Kitapta modern trigonometrinin birçok temel bağıntısı yer almaktadır. Milattan sonra, Aryabhata (Aryabata), (6. yüzyıl), Al Battani (858-929), Ebül Vefa (940-997), Nasıruddin-i Tusi (1201-1274), Gıyasettin Cemşit (14. yüzyıl), Fibonacci (Fibonaççi), (1202), Jacques Bernoilli (Cak Bernolli), (1702), Vieta (1580), Leonhard Euler (Leonar Öler), (1707-1783) ve daha pek çok bilim adamının trigonometri ile uğraştığı bilinmektedir. Yaklaşık 400 yıl önce, Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) 'Trigonometriae Sive, de Dimensione Triangulus, Liber' (Trigonometri Kitabı, Üçgenlerin Ölçülmesi) kitabında trigonometri ismini ilk kez kullanmıştır.



Motivasyon

Trigonometri günümüzde, "yankılanım, mimarlık, astronomi (okyanuslarda, uzayda, havada), biyoloji, haritacılık, kimya, sivil mühendislik, bilgisayar grafikleri, jeofizik, kristalografi (kristalleri inceleyen bilim), ekonomi (özellikle finansal marketlerde kullanılır), elektrik mühendisliği, elektronik, kara ve yersel araştırma, fizik bilimi, mekanik mühendisliği, makineler, sağlık alanı (CAT taraması ve ultrason), meteoroloji, müzik teorisi, sayı teorisi (ve bu nedenle kriptografi), okyanus coğrafyası, optik bilim, farmakoloji (ilaç bilimi), ses bilimi, olasılık teorisi, psikoloji, sismoloji (deprem bilimi), istatistik, ve görsel algılama" gibi birçok bilimsel alanda kullanılmaktadır.

Çok eski çağlarda, Dünya'nın Güneş'e olan uzaklığını bulmada, astronominin temelini teşkil eden küresel astronomi, doğrudan doğruya küresel trigonometrinin astronomiye uygulanmasıyla oluşturulmuştur. Gezegen, uydu ve yıldızların uzaydaki yerleri ve hareketleri ile ilgili hesaplamalar; küresel üçgenin küresel trigonometriye uygulanmasıyla elde edilmiş, rasathanelerdeki bilimsel çalışmalarda, astronomiye yardımcı olarak trigonometri kullanılmıştır.



Piri Reis'in trigonometri bilmeden böyle bir harita hazırlamasının mümkün olmadığı günümüz bilim insanlarının da dile getirdiği bir gerçektir.

Bugün bile bazı haritalardaki yanlışların Piri Reis'in haritasına bakılarak düzeltildiği bilinmektedir.

Trigonometri haritacının en çok çalıştığı alan olup bazı ülkelerde haritacı için "Ingenieur Geometer" (Geometri Mühendisi) veya "Trigonometer" (Trigonometri) kavramlarının kullanılışı bu konulara ne kadar yakın olduğunun bir kanıtıdır.



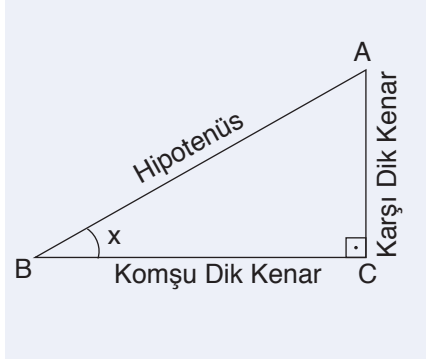
Siz de trigonometrinin, diğer bilim dallarında ve günlük hayatta nasıl kullanıldığını araştırınız.

DİK ÜÇGENDE DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI



Etkinlik

1. Verilen ABC dik üçgeninde ölçüsü x olan B açısının trigonometrik oranlarının aşağıdaki gibi olduğunu öğrenmiştiniz.



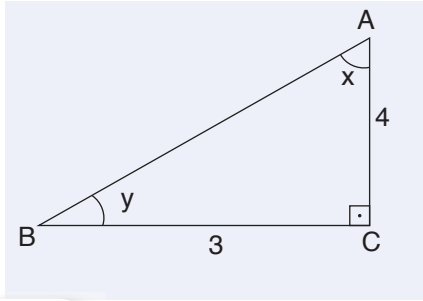
$$\cos x = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\sin x = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\tan x = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\cot x = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

Bu ön bilgilerinizi kullanarak kenar uzunlukları verilen aşağıdaki üçgen için tabloyu doldurunuz.

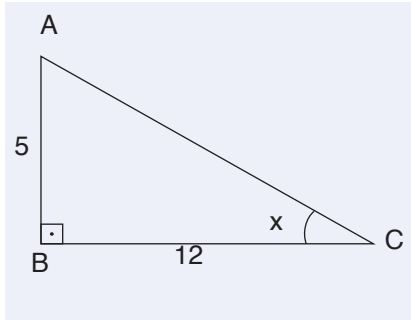


$\cos x = \frac{4}{5}$	$\cos y =$
$\sin x =$	$\sin y =$
$\tan x =$	$\tan y =$
$\cot x =$	$\cot y =$



Örnek

1.



Şekildeki ABC dik üçgeninde $|AB| = 5$ br

$|BC| = 12$ br ve $m(\widehat{ACB}) = x$ ise $\sin x + \tan x$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

\widehat{ABC} de pisagor bağıntısını kullanarak,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

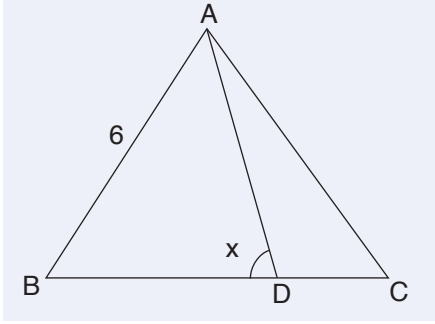
$$|AC|^2 = 5^2 + 12^2$$

$|AC| = 13$ bulunur.

$$\sin x = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{13} \text{ ve } \tan x = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{12} \text{ olur. Buradan,}$$

$$\sin x + \tan x = \frac{5}{13} + \frac{5}{12} = \frac{125}{156} \text{ bulunur.}$$

2.



Şekildeki ABC eşkenar üçgeninde
 $|AB| = 6$ br,
 $|BD| = 2|DC|$ ise,
 $\tan x$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

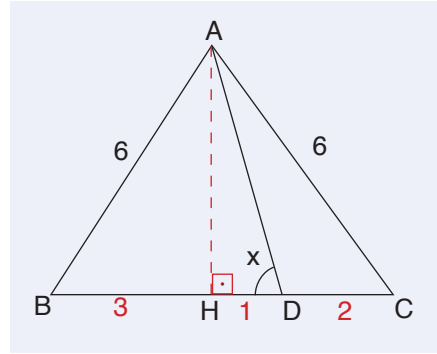
\widehat{ABC} de pisagor bağıntısı yardımıyla

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$$

$$6^2 = |AH|^2 + 3^2$$

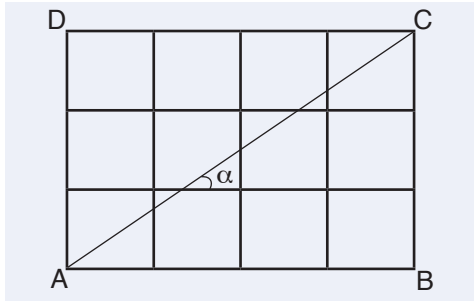
$|AH| = 3\sqrt{3}$ br bulunur.

$$\tan x = \frac{|AH|}{|HD|} = \frac{3\sqrt{3}}{1} = 3\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1.

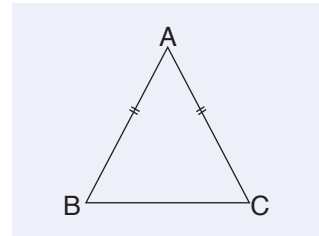


Şekildeki ABCD dikdörtgeni bir kenarı 1 birim olan 12 tane kareden oluşmuştur. $[AC]$ köşegen ise $\cot \alpha$ değerini bulunuz.

2. Şekildeki ABC üçgeninde,

$|AB| = |AC| = 17$ birim ve $|BC| = 16$ birim veriliyor.

Buna göre $\cos (\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.

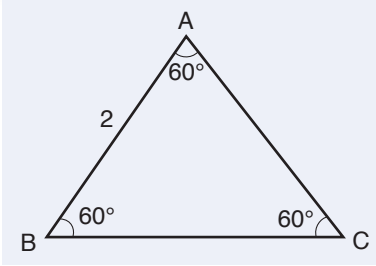


3. Ağaçları inceleyen bir bilim insanının ağaçlara çıkmadan bunların yüksekliklerini nasıl hesaplayabileceğini araştırınız.

30°, 45°, 60° LİK AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI



Etkinlik

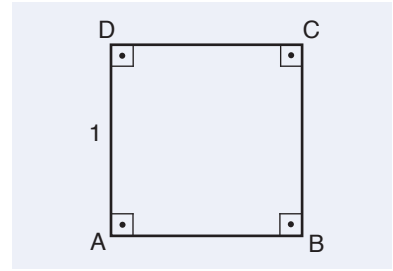


Bir kenarı 2 birim olan ABC eşkenar üçgeni yandaki gibidir.

- [BC] na [AH] yüksekliğini çiziniz.
- ABH ve AHC üçgenlerine ait $|BH|$, $|HC|$ ve $|AH|$ değerlerini bulunuz.
- ☞ ABH veya AHC üçgenlerinin herhangi birinden yararlanarak 30° ve 60° nin trigonometrik oranlarını yazınız.

Bir kenarı 1 birim olan ABCD karesi yandaki gibidir.

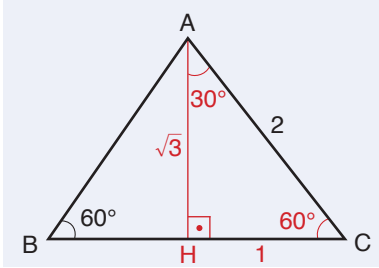
- ABCD karesinin [AC] köşegenini çiziniz ve $|AC|$ nu bulunuz.
- ☞ ABC dik üçgeninden yararlanarak 45° nin trigonometrik oranlarını yazınız.



Örnek

$\sin 30^\circ + \cot 45^\circ + \tan 60^\circ$ işleminin sonucunu bulalım.

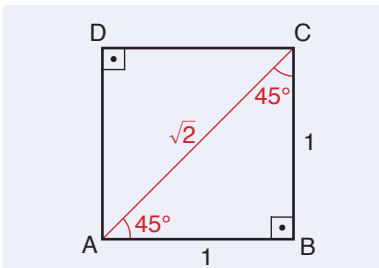
ÇÖZÜM



Yandaki bir kenarı 2 birim olan ABC eşkenar üçgeninde BC kenarına ait yüksekliği çizelim.

Burada, $|HC| = 1$ ve $|AH| = \sqrt{3}$ olur.

AHC dik üçgeninden, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ve $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ dir.



Yandaki bir kenarı 1 birim olan ABCD karesinde AC köşegenini çizelim.

Burada, $|AC| = \sqrt{2}$ olur.

ABC dik üçgeninden, $\cot 45^\circ = 1$ dir.

Yukarıda bulduğumuz değerlerden

$$\sin 30^\circ + \cot 45^\circ + \tan 60^\circ = \frac{1}{2} + 1 + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \text{ elde edilir.}$$



Tanım ve Bilgi

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız	0	tanımsız
cotx	tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	tanımsız	0



Örnek

$\frac{4.\sin 30^\circ + 6.\cos 60^\circ}{\tan 0^\circ + 2.\cot 45^\circ}$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 0^\circ = 0$ ve $\cot 45^\circ = 1$ değerlerini yerine yazarsak,

$$\frac{4.\sin 30^\circ + 6.\cos 60^\circ}{\tan 0^\circ + 2.\cot 45^\circ} = \frac{4.\frac{1}{2} + 6.\frac{1}{2}}{0 + 2.1} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

- $\frac{2.\sin 30^\circ + \tan 45^\circ}{\cot 45^\circ + 4.\cos 60^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $4.\cos 30^\circ + 2.\sin 90^\circ - 3.\cot 30^\circ$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $\frac{\tan 180^\circ + \cos 30^\circ + \sin 180^\circ}{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- $5.\cos 180^\circ - 3.\sin 270^\circ + 4.\cot 90^\circ$ işleminin sonucunu bulunuz.

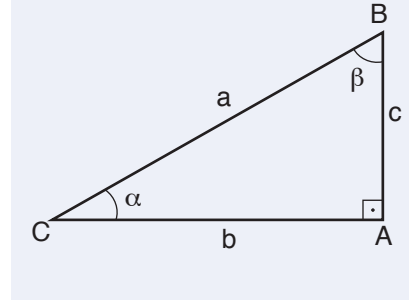
TÜMLER AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ



Etkinlik

Yandaki dik üçgende verilenlere göre,

- $\sin \alpha$ ve $\cos \beta$ değerlerini bulunuz ve karşılaştırınız.
- $\cos \alpha$ ve $\sin \beta$ değerlerini bulunuz ve karşılaştırınız.
- $\tan \alpha$ ve $\cot \beta$ değerlerini bulunuz ve karşılaştırınız.
- $\cot \alpha$ ve $\tan \beta$ değerlerini bulunuz ve karşılaştırınız.



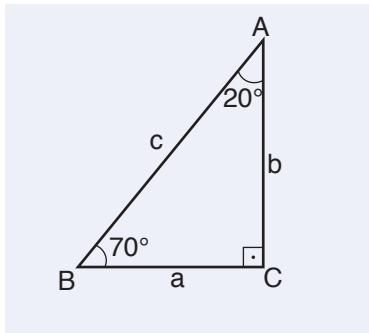
- Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıdan birinin sinüsü ile diğerinin kosinüsü arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.
- Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıdan birinin tanjantı ile diğerinin kotanjantı arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Ulaştığınız sonucu yazınız.



Örnek

$\frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\tan 50^\circ}{\cot 40^\circ}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

ÇÖZÜM

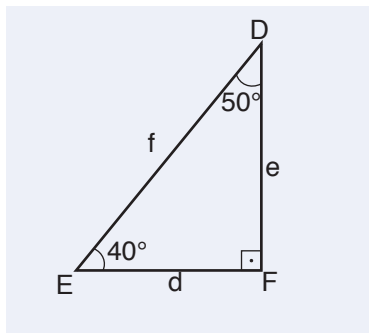


Şekildeki \widehat{ABC} de,

$$\sin 20^\circ = \frac{a}{c}$$

$$\cos 70^\circ = \frac{a}{c} \text{ eşitliklerinden}$$

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ \text{ dir.}$$



Şekildeki \widehat{DEF} de,

$$\tan 50^\circ = \frac{d}{e}$$

$$\cot 40^\circ = \frac{d}{e} \text{ olduğundan}$$

$$\tan 50^\circ = \cot 40^\circ \text{ dir.}$$

$$\text{Bu durumda } \frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\tan 50^\circ}{\cot 40^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\tan 50^\circ}{\tan 50^\circ} = 1 + 1 = 2 \text{ dir.}$$



Tanım ve Bilgi

Birbirini tümle iki açıdan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne; birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına eşittir.

Bu durum aşağıdaki gibi gösterilir.

$x + y = 90^\circ$ ise $\sin x = \cos y$ ve $\tan x = \cot y$ dir.



Örnek

x dar açı olmak üzere $\tan(2x - 20^\circ) = \cot(x + 20^\circ)$ ise x in kaç olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$\tan(2x - 20^\circ) = \cot(x + 20^\circ)$ ise $2x - 20^\circ + x + 20^\circ = 90^\circ$

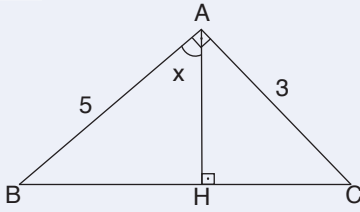
$3x = 90^\circ$

$x = 30^\circ$ bulunur.



Uygulamalar

1.



Yandaki ABC dik üçgeninde,
[AB] \perp [AC], [AH] \perp [BC]
|AB| = 5, |AC| = 3 ve $m(\widehat{BAH}) = x$ ise
 $\tan x$ değerini bulunuz.

2. Verilen eşitliklerde noktalı yerleri uygun biçimde doldurunuz.

a) $\sin 10^\circ = \cos \dots$

ç) $\cot 22^\circ = \tan \dots$

b) $\tan 75^\circ = \cot \dots$

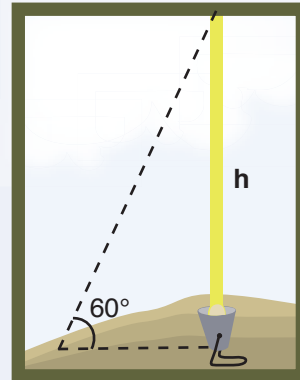
d) $\sin 81^\circ = \cos \dots$

c) $\cos 45^\circ = \sin \dots$

e) $\tan \dots = \cot 1^\circ$

3. $\frac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} + \frac{\cot 2^\circ}{\tan 88^\circ}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. Bulutlu bir günde bulutların yerden yüksekliğini ölçmek için yere bir ışık kaynağı konulmuş ve bulutlara dik bir şekilde bir ışık gönderilmiştir. Işık kaynağından 1500 m uzaklıktaki bir gözlemci ışığın bulutlar arasında kaybolduğu noktaya bakmak için kafasını 60° kaldırmıştır. Buna göre bulutların yerden yüksekliğini bulunuz.



BİR DAR AÇININ TRİGONOMETRİK ORANLARINDAN BİRİ BELLİ İKEN DİĞER TRİGONOMETRİK ORANLARINI BULMA



Etkinlik

$0 < x < 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 90^\circ$, $m(\widehat{A}) = x$ ve $\cot x = \frac{4}{3}$ olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çiziniz.

- $\cot x = \frac{4}{3}$ oranını dik üçgende yerine yazınız.
- Pisagor bağıntısı yardımıyla bilinmeyen kenar uzunluklarını bulunuz.
- Bu üçgenden yararlanarak $\tan x$, $\cos x$ ve $\sin x$ değerlerini hesaplayınız.

☞ Herhangi bir trigonometrik oran belliyken diğer trigonometrik oranları bulabilmek için nasıl bir yol izlenebileceğini tartışınız.

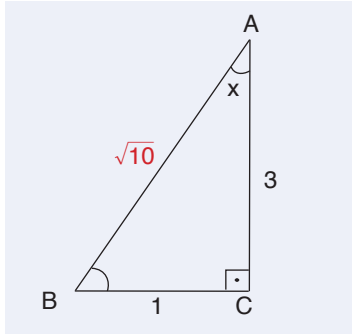


Örnek

$0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\tan x = \frac{1}{3}$ ise $\sin x$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

x bir dar açı olduğuna göre $\tan x = \frac{1}{3}$ değerini bir dik üçgende yerine yazalım.



ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısı yardımıyla

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = 1^2 + 3^2$$

$$|AB| = \sqrt{10}$$

$$\text{Bu durumda } \sin x = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

Bir dar açının trigonometrik oranı belli iken diğer trigonometrik oranları bulabilmek için dik üçgenden yararlanılır.

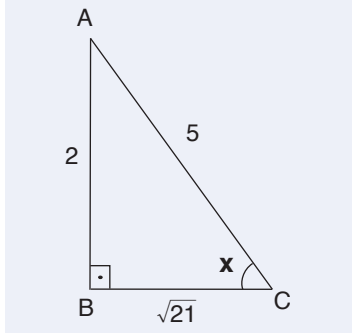


Örnek

1. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\sin x = \frac{2}{5}$ ise $\tan x + \cot x$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

x dar açı olduğuna göre $\sin x = \frac{2}{5}$ değerini bir dik üçgende yerine yazalım.



ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısı yardımıyla,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$25 = 4 + |BC|^2$$

$$\sqrt{21} = |BC|$$

$$\text{Bu durumda } \tan x + \cot x = \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{25\sqrt{21}}{42} \text{ bulunur.}$$

2. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere, $\frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3}{5}$ ise $\cos x$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

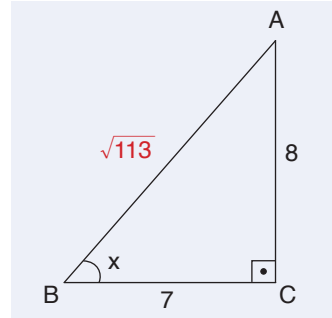
$$\frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3}{5} \text{ ise } 10\sin x - 5\cos x = 3\sin x + 3\cos x,$$

$$7\sin x = 8\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{8}{7} \Rightarrow \tan x = \frac{8}{7} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda ABC dik üçgeninden,

$$\cos x = \frac{7}{\sqrt{113}} \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\sin x = 0,8$ ise $\cot x$ değerini bulunuz.

2. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\tan x = 3$ ise $\sin x$ değerini bulunuz.

3. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\sin x = a$ ise $\cos x = \sqrt{1 - a^2}$ olduğunu gösteriniz.

4. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ise $\tan x$ değerini bulalım.

5. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x - 2\cot x} = \frac{2}{3}$ ise $\tan x$ değerini bulalım.

YÖNLÜ AÇILAR



Motivasyon



Güneş'i gözlemleyerek bir günün zaman parçalarına ayrılabilceğini ilk olarak Mısırlılar keşfetmiştir.

Güneş' in hareketlerinden yararlanarak da ilk güneş saatini yaptılar. Açık bir araziye koydukları yüksek bir taş sayesinde, taşın gölgesinin konumunu takip ettiler.



Mısır' ın coğrafi konumu nedeniyle gölge, doğuda başlayıp önce kuzeye sonra da batıya doğru hareket ederdi. Yani gölge bugün kullandığımız saatlerin yönünde dönmekteydi.

Güneş saati Avustralya gibi güney yarımkürede bulunan bir ülkede keşfedilseydi saatin dönme yönü nasıl olurdu?



Etkinlik



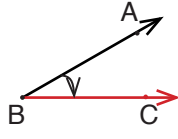
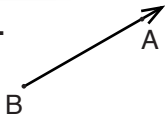
- Bir vanayı açınız ya da kapatınız. Vananın dönme yönünü gözleyiniz.
- Bir vidayı sıkınız ya da gevşetiniz. Vidanın dönme yönünü gözleyiniz.
- Bir arabayı sağa sola yönlendirmek için arabanın direksiyonunu hangi yönde çevirmelisiniz?
- Gözlemlerinizi saatin yelkovanının dönme yönüyle karşılaştırınız.

☞ Yukarıda verilen örneklerdeki hareketin yönü ile yapılan iş arasındaki ilişkiyi söyleyiniz.

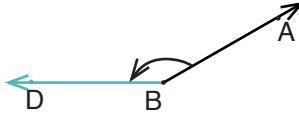


Örnek

1.



1. Şekil



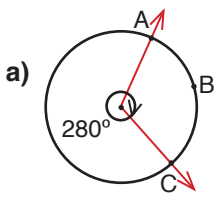
2. Şekil

Yandaki BA ışını ile pozitif ve negatif yönlü yapılan açılar hangileridir, bulalım.

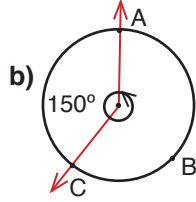
ÇÖZÜM

1. şekil saat yönünde döndüğünden negatif yönlü açıdır. 2. şekil saat yönünün tersi yönde döndüğünden pozitif yönlü açıdır.

2. Aşağıdaki açıların başlangıç ve bitim noktalarını, yönlerini, ölçülerini bulalım.



a)



b)

ÇÖZÜM

a) ABC açısının başlangıç noktası A, bitim noktası C, yönü negatif ve ölçüsü $m(\widehat{ABC}) = -80^\circ$ dir.

b) CBA açısının başlangıç noktası C, bitim noktası A, yönü pozitif ve ölçüsü $m(\widehat{CBA}) = 210^\circ$ dir.



Tanım ve Bilgi

Saatın yelkovanının dönme yönüne **negatif yön**, bunun ters yönüne ise **pozitif yön** denir.



Hipparchus (MÖ 160 - 125) Matematikçi ve astronomdur. İlk sistemik astronomiyi ve trigonometriyi bulan kişidir. Güneş ve Ay' ın uzaklığını hesaplamıştır. Enlem ve boylam daireleriyle Dünya' daki herhangi bir noktanın konumunu belirleme yöntemi- ni bulmuştur.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Açının					Açının				
Şekli	Sembolle gösterimi	Başlangıç kenarı	Bitim kenarı	Yönü	Şekli	Sembolle gösterimi	Başlangıç kenarı	Bitim kenarı	Yönü
	\widehat{ABC}	[BA	[BC	NEGATİF					
	\widehat{CBA}	[BC	[BA	POZİTİF					

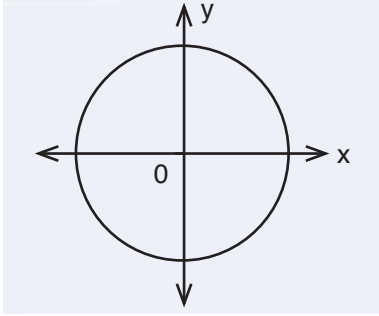
2. Aşağıda verilen tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Yayın				
Şekli	Sembolle gösterimi	Başlangıç noktası	Bitim noktası	Yönü
	\widehat{ADC}	A	C	POZİTİF

BİRİM ÇEMBER



Etkinlik



Yandaki çemberin merkezi orijindedir, yarıçapı 1 birimdir. Buna göre,

• $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ noktaları bu çemberin üzerinde midir? Neden?

• $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktalarının bu çem-

berin üzerinde olup olmadığını tartışınız.

☞ (x, y) noktası bu çember üzerinde ise x , y ve çemberin yarıçapı arasında bir bağıntı yazınız.



Örnek

1. $A\left(a, \frac{2}{3}\right)$ noktası, merkezi orijin ve yarıçapı 1 olan çember üzerinde ise a nın alacağı değerleri bulalım.

ÇÖZÜM

$A\left(a, \frac{2}{3}\right)$ ve $O(0,0)$ noktaları arasındaki uzaklık, $AOI = \sqrt{(a-0)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2}$ olur.

$1 = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}}$ eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$a^2 = \frac{5}{9}$ dur. Bu durumda $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ve $a_2 = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ bulunur.

2. $(a-1)x^2 + (b+1)y^2 = 4$ ifadesinin birim çember belirtmesi için $a+b$ kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM

Birim çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ olduğundan

$$\frac{(a-1)x^2}{4} + \frac{(b+1)y^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(a-1)}{4} x^2 + \frac{(b+1)}{4} y^2 = 1 \text{ bulunur. Buradan } \frac{(a-1)}{4} = 1, \frac{(b+1)}{4} = 1$$

$a = 5$, $b = 3$ bulunur. $a + b = 5 + 3 = 8$ olur.



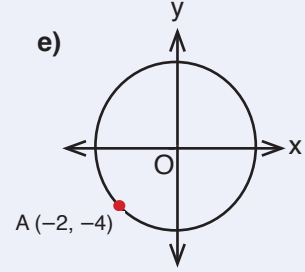
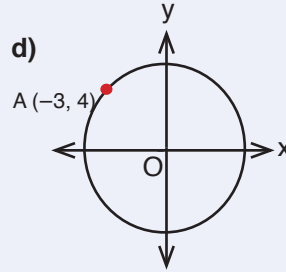
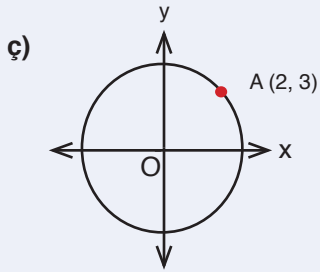
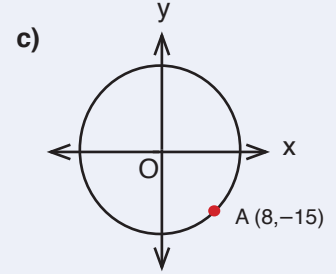
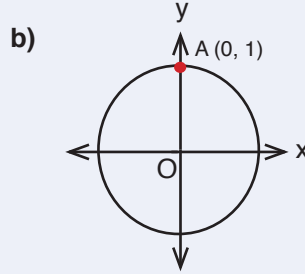
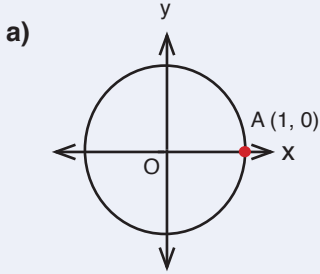
Tanım ve Bilgi

Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir. Birim çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ dir.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki çemberlerin merkezleri orijin üzerindedir. Buna göre çemberlerin birim çember olup olmadığını söyleyiniz.



2. Aşağıda verilen denklemlerin birim çember belirtmesi için a ve b değerlerinin ne olacağını bulunuz.

a) $(a - 2)x^2 + (b + 3)y^2 = 1$

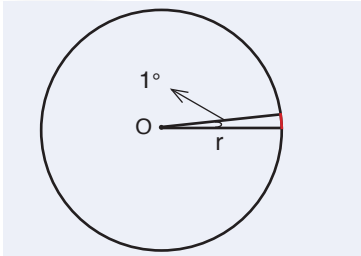
b) $(2a + 1)x^2 + by^2 = 2$

c) $3x^2 + 3y^2 + (a - 4)xy = b$

ACI ÖLÇÜ BİRİMLERİ



Etkinlik



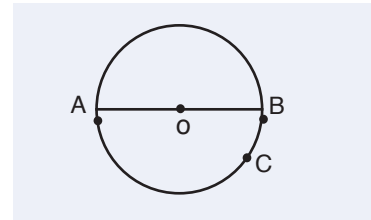
Bir çember yayının $\frac{1}{360}$ ini gören merkez açının ölçüsüne

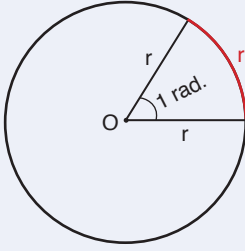
1 derece (1°) dendiğini biliyoruz.

Buna göre,

- Bir çember yayının tamamı kaç derecelik yay belirtir?

Yandaki çemberde [AB] çap olmak üzere ACB yayının ölçüsü kaç derecedir?



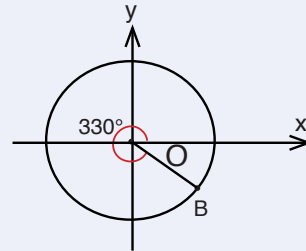
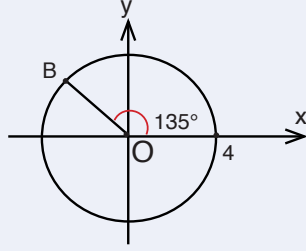
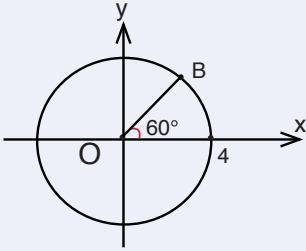


Bir çemberde yarıçap uzunluğunda yayı gören merkez açının ölçüsüne "1 radyan" denir.

Çemberin tamamını gören merkez açının ölçüsü 2π radyandır. (r uzunluğundaki yayı gören merkez açı 1 radyan ise $2\pi r$ uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsünün 2π radyan olacağına dikkat ediniz.)

Buna göre,

- Yarım çemberi gören merkez açısının ölçüsü kaç radyandır?
- Çeyrek çemberi gören merkez açının ölçüsü kaç radyandır?



- Birim çemberin çevre uzunluğunu hatırlayınız.
- Üç farklı birim çemberde pozitif yönlü AB yaylarının uzunluğunu hesaplayınız.
- Yukarıdaki açıların ölçüleri yay uzunluğu cinsinden ifade edilebilir mi? Tartışınız.

☞ Derece cinsinden verilen bir yayın ölçüsünü radyan cinsinden yazabileceğiniz bir bağıntı oluşturunuz.



Örnek

120° lik bir yayı gören merkez açının ölçüsünün kaç radyan olacağını bulalım.

ÇÖZÜM

360° lik bir yayı gören merkez açı 2π radyan ise 120° lik bir yayı gören merkez açının kaç radyan olduğunu doğru orantı kurarak bulabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \times & 2\pi \text{ radyan} \\ 120^\circ & \times & x \text{ radyan} \end{array} \quad \text{ise } x = \frac{2\pi}{3} \text{ radyan bulunur.}$$

$$360^\circ \cdot x = 120^\circ \cdot 2\pi$$



Tanım ve Bilgi

Açı ölçü birimleri olan derece (D) ve radyan (R) arasında ise $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ orantısı elde edilir.



Örnek

1. Ölçüsü 210° olan bir açının kaç radyan olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \text{ ve } D = 210^\circ \text{ ise } \frac{210^\circ}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \text{ eşitliğinden } R = \frac{7\pi}{6} \text{ radyan bulunur.}$$

2. Bir radyanlık açının ölçüsünü derece olarak bulalım. ($\pi \approx 3,14$ olsun.)

ÇÖZÜM

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{1}{2\pi} \text{ eşitliğinde } \pi \text{ yerine } 3,14 \text{ değerini yazalım.}$$

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \text{ olur. Buradan hesap makinesi yardımıyla } D \approx 57,32 \text{ bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

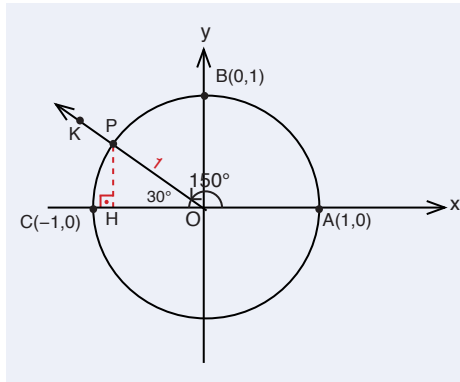
1 radyan yaklaşık olarak $57,3^\circ$ dir.



Örnek

Ölçüsü $\frac{5\pi}{6}$ radyan olan bir açının birim çember üzerindeki bitim kenarının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM



$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2\pi} \text{ eşitliğinden } D = 150^\circ \text{ olur.}$$

Çemberin yarıçapı 1 br olduğundan \widehat{OHP} nde

$$IOHI = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ br ve } IPHI = \frac{1}{2} \text{ br bulunur.}$$

Bu durumda,

$$P \text{ noktasının koordinatları } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ olur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki boşlukları tamamlayınız.

a) Bir çember yayının $\frac{1}{360}$ ını gören merkez açının ölçüsüne..... denir.

b) Yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsünedenir.

2. Aşağıdaki tabloda boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

Açının ölçüsü	Derece		45°		90°		180°		
	Radyan	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$	2π

3. Aşağıda ölçüleri verilen açılardan birim çember üzerindeki noktalarının koordinatlarını bulunuz.

a) $\frac{\pi}{4}$ radyan

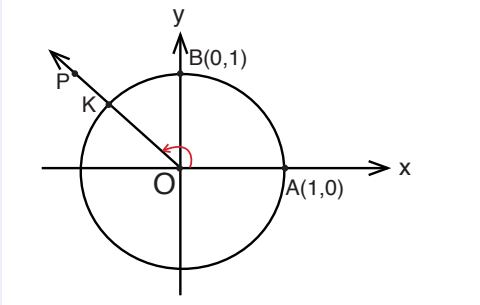
b) $\frac{\pi}{3}$ radyan

c) $\frac{\pi}{2}$ radyan

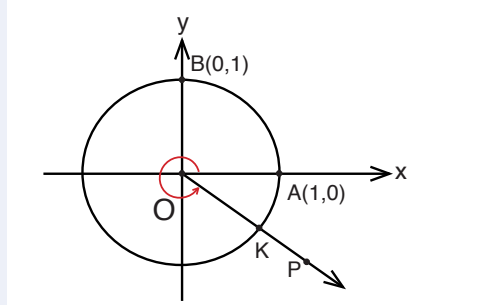
ç) 0 radyan

4. Aşağıdaki birim çemberde gösterilen merkez açılardan hangisinin ölçüsünün hangisi olabileceğini işaretleyiniz.

a.



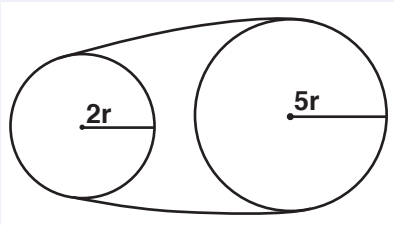
b.



A) $\frac{\pi}{4}$ B) π C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

A) $\frac{13\pi}{9}$ B) $\frac{25\pi}{18}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{11\pi}{6}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

5.

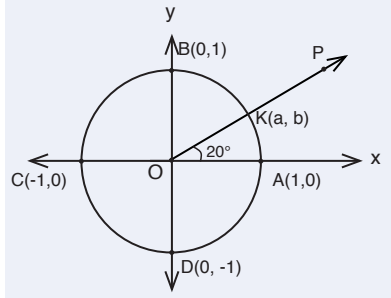


Yarıçap uzunluklarının oranı $\frac{2}{5}$ olan iki kasnak aynı kayışa bağlı olarak dönmektedir. Büyük kasnak pozitif yönde $\frac{5\pi}{6}$ radyanlık açı kadar dönerse küçük kasnağın kaç derece döneceğini bulunuz.

AÇININ ESAS ÖLÇÜSÜNÜN BULUNMASI



Etkinlik

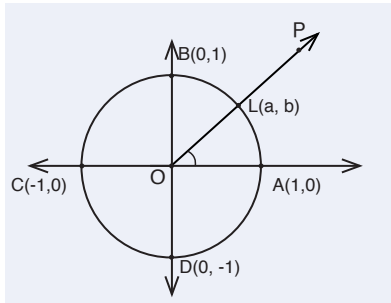


Yanda verilen birim çemberde [OP x eksenini ile pozitif yönde 20° lik açı yaptığında çemberi K noktasında kesmektedir.

- [OP, x eksenini ile pozitif yönde ölçüsü 380° olan açı yapsaydı çemberi hangi noktada keserdi?
- [OP, x eksenini ile pozitif yönde ölçüsü 1460° olan açı yapsaydı çemberi hangi noktada keserdi?
- [OP, x eksenini ile negatif yönde ölçüsü -340° olan açı yapsaydı çemberi hangi noktada keserdi?

- Yukarıdaki açı ölçülerinin hepsinde [OP'nin çemberi K noktasında kestiğini gördünüz. Buna göre siz de çemberi tekrar K noktasında kesecek, ölçüsü derece cinsinden üç farklı açı söyleyiniz.

☞ Bu açıların 20° ile olan ilişkisini tartışınız.



Yanda verilen birim çemberde [OP x eksenini ile pozitif yönde ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ radian olan açı yaptığında çemberi

L noktasında kesmektedir.

- [OP'nin çemberi tekrar L noktasında kesebilmesi için x eksenini ile ölçüsü kaç radian olan bir açı yapmalıdır?
- [OP'nin, çemberi L noktasında kesebilmesi için ölçüsü radian olan üç farklı açı daha söyleyiniz.

☞ Bu açıların, ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ radian olan açı ile ilişkisini tartışınız.



Örnek

Birim çember üzerinde ölçüsü 1500° olan bir açının bitim kenarının $[0, 360^\circ)$ aralığında hangi açıyla eş olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Bir açının ölçüsü birim çember üzerinde 360° de bir aynı noktaya denk geldiğinden,

$$1500^\circ = 60^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$

$[0, 360^\circ)$ aralığında ve 1500° ile bitim kenarı aynı olan açı 60° dir.



Tanım ve Bilgi

Birim çember üzerinde bitim kenarları aynı olan açılardan ölçüsü $[0, 360)$ veya $[0, 2\pi)$ aralığında olan açılara bu **açının esas ölçüsü** denir.



Örnek

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini bulalım.

- a) 900° b) -1000° c) $\frac{80\pi}{3}$ d) $-\frac{19\pi}{5}$

ÇÖZÜM

a) $900^\circ = 180^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ ise esas ölçüsü 180° dir.

b) $-1000^\circ = 80^\circ - 3 \cdot 360^\circ$ ise esas ölçüsü 80° dir.

c) $\frac{80\pi}{3} = 26\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 13$ ise esas ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ radyandır.

d) $-\frac{19\pi}{5} = -4\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - 2 \cdot 2\pi$ ise esas ölçüsü $\frac{\pi}{5}$ radyandır.



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

- a) 380° b) 3200° c) 930° d) -60° e) -140° f) -960°

2. Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

- a) $\frac{13\pi}{6}$ b) $\frac{50\pi}{3}$ c) $\frac{47\pi}{8}$ d) $-\frac{53\pi}{3}$ e) $-\frac{27\pi}{4}$ f) $-\frac{\pi}{2}$

3. Aşağıda verilen açıların birim çember üzerinde bitim noktalarının koordinatlarını bulunuz.

- a) 1140° b) -330° c) $\frac{17\pi}{4}$ d) $-\frac{3\pi}{2}$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



Motivasyon

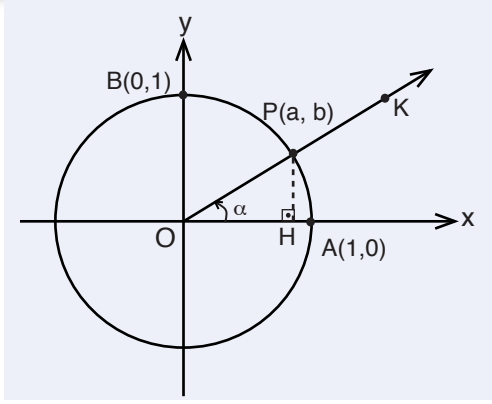


Mısırlıların, piramitlerin ve ağaçların yerden yüksekliğini hesaplamak için kullandıkları trigonometrik fonksiyonlardan; bugün haritacılık, denizcilik, mühendislik, fizik ve ekonomi gibi alanlarda da yararlanılmaktadır.

SİNÜS VE KOSİNÜS FONKSİYONLARI



Etkinlik



Yandaki birim çemberde [OK, çemberi P(a, b) noktasında kesmektedir.

- P(a, b) noktasının koordinatlarını α açısının sinüsü ya da kosinüsü cinsinden yazınız.
- α açısı değiştikçe a'nın ve b'nin alacağı en geniş değer aralığını bulunuz.
- ☞ α açısı değiştikçe a'nın alacağı değerlere eşleyen bağıntı ile b'nin alacağı değerlere eşleyen bağıntının birer fonksiyon olup olamayacağını tartışınız.



Örnek

Birim çember üzerinde ölçüsü 60° olan açının bitim noktasının koordinatlarını sinüs ve kosinüs cinsinden yazalım.

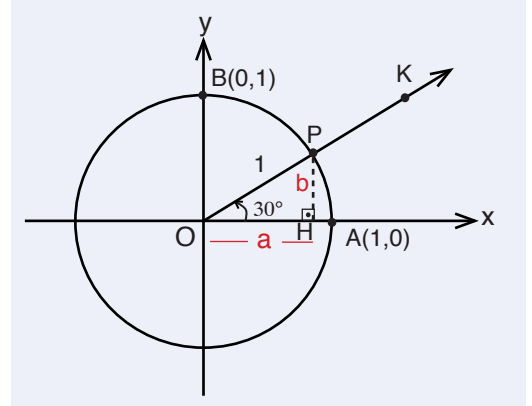
ÇÖZÜM

\widehat{OPH} nde,

$$\cos 30^\circ = \frac{|OH|}{1} = a,$$

$$\sin 30^\circ = \frac{|PH|}{1} = b \text{ olduğundan,}$$

P(a, b), P(cos30°, sin30°) bulunur.



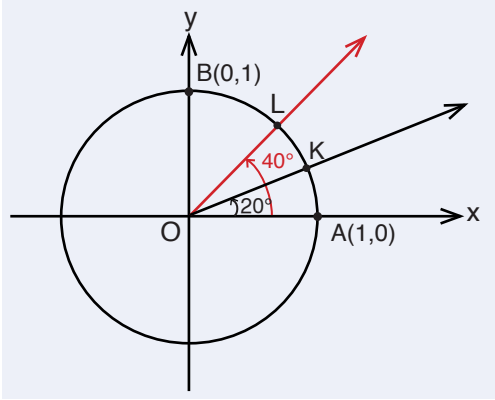
Tanım ve Bilgi

- x açısının değişen değerlerine göre birim çember üzerindeki bitim noktasının apsisi $\cos x$, ordinatı $\sin x$ olarak ifade edilir.
 - x gerçel sayısını $\cos x$ e dönüştüren fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.
 $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$ biçiminde gösterilir.
 - x gerçel sayısını $\sin x$ e dönüştüren fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.
 $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$ biçiminde gösterilir.
- Yani $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere sinüs ve kosinüs fonksiyonları
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ ve
- $-1 \leq \sin x \leq 1$ aralıklarında değerler alır.



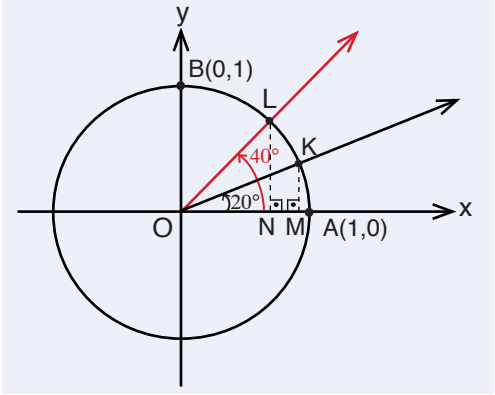
Örnek

1.



Yandaki birim çemberde [OK ışını ve [OL ışını sırasıyla pozitif yönde 20° ve 40° lik açı yapmaktadır. Buna göre $\sin 20^\circ$ ve $\sin 40^\circ$ değerlerini karşılaştıralım.

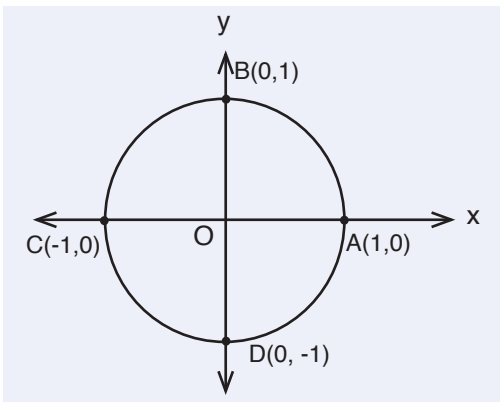
ÇÖZÜM



Yandaki şekilde,
 $IKMI = \sin 20^\circ$
 $ILNI = \sin 40^\circ$
 $IKMI < ILNI$ olduğundan
 $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ$ bulunur.

2. Ölçüleri 0 , $\frac{\pi}{2}$, π ve $\frac{3\pi}{2}$ radyan olan açılarının sinüs ve kosinüs değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM



α radyanlık bir açının bitim noktasının koordinatlarının apsisi $\cos \alpha$, ordinatı $\sin \alpha$ olduğuna göre,

0 radyanlık bir açının bitim noktası $A(1, 0)$ ise,
 $\cos 0 = 1$ ve $\sin 0 = 0$

$\frac{\pi}{2}$ radyanlık bir açının bitim noktası $B(0, 1)$ ise,

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ve $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

π radyanlık bir açının bitim noktası $C(-1, 0)$ ise,
 $\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$

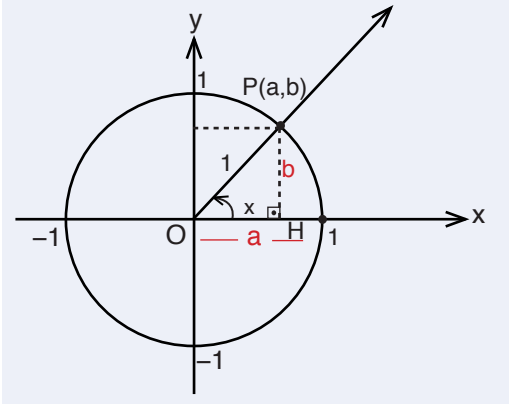
$\frac{3\pi}{2}$ radyanlık bir açının bitim noktası $D(0, -1)$

ise $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ve $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ bulunur.

3. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrik özdeşliğini birim çember yardımıyla gösterelim.

ÇÖZÜM

Birim çember üzerinde $P(a,b)$ noktasını alalım.

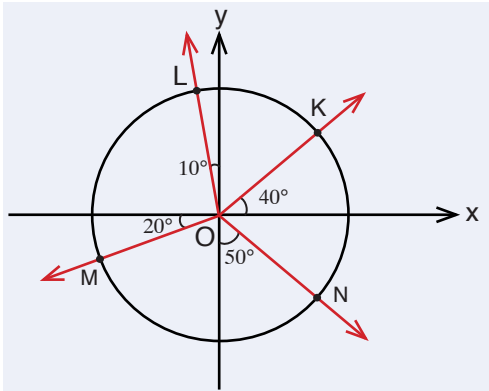


POH dik üçgeninde Pisagor bağıntısından yararlanarak $a^2 + b^2 = 1$ olduğu görülür.

$a = \cos x$
 $b = \sin x$ } değerleri $a^2 + b^2 = 1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ özdeşliği elde edilir.

4. Ölçüleri 40° , 100° , 200° ve 320° olan açıların trigonometrik değerlerinin işaretlerini bulalım.

ÇÖZÜM



K ($\cos 40^\circ$, $\sin 40^\circ$) noktası I. bölgede olduğundan $\cos 40^\circ > 0$ ve $\sin 40^\circ > 0$ dir.

Yani her ikisi de **+** işaretlidir.

L ($\cos 100^\circ$, $\sin 100^\circ$) noktası II. bölgede olduğundan $\cos 100^\circ < 0$ ve $\sin 100^\circ > 0$ dir.

Yani $\cos 100^\circ$ **-** işaretli, $\sin 100^\circ$ **+** işaretlidir.

M ($\cos 200^\circ$, $\sin 200^\circ$) noktası III. bölgede olduğundan $\cos 200^\circ < 0$ ve $\sin 200^\circ < 0$ dir.

Yani $\cos 200^\circ$ **-** işaretli, $\sin 200^\circ$ **-** işaretlidir.

N ($\cos 320^\circ$, $\sin 320^\circ$) noktası IV. bölgede olduğundan $\cos 320^\circ > 0$ ve $\sin 320^\circ < 0$ olur.

Yani $\cos 320^\circ$ **+** işaretli, $\sin 320^\circ$ **-** işaretlidir.

5. a ve b bir gerçekte sayı olmak üzere,

$$\sin x = \frac{2a-1}{3} \text{ ve } \cos x = \frac{b+1}{4} \text{ ise } a+b \text{ nin alacağı değerler aralığını bulalım.}$$

ÇÖZÜM

$-1 \leq \cos x \leq 1$ ve $-1 \leq \sin x \leq 1$ ise,

$$-1 \leq \frac{b+1}{4} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{2a-1}{3} \leq 1$$

$$\begin{aligned} -4 \leq b+1 \leq 4 & \quad -3 \leq 2a-1 \leq 3 \\ -5 \leq b \leq 3 & \quad -1 \leq a \leq 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda $-6 \leq a+b \leq 5$ bulunur.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

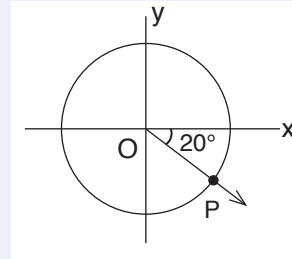
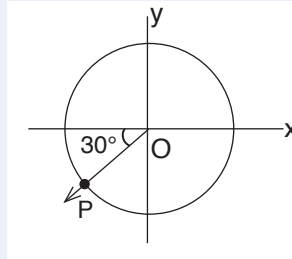
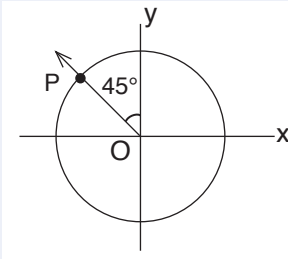
- a) $\sin 90^\circ + \cos 180^\circ + \sin 270^\circ$
 b) $\sin 630^\circ + \cos 630^\circ$
 c) $\sin(-540^\circ) + \cos(-540^\circ)$
 ç) $\cos \pi + \sin(-3\pi)$

2. $\cos 110^\circ$, $\sin 240^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\sin 350^\circ$ ifadelerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

- A) +, -, +, - B) -, +, -, + C) -, -, -, - D) -, -, -, + E) -, -, +, +

3. $a = 3\sin x - 5$ eşitliğine göre a'nın alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

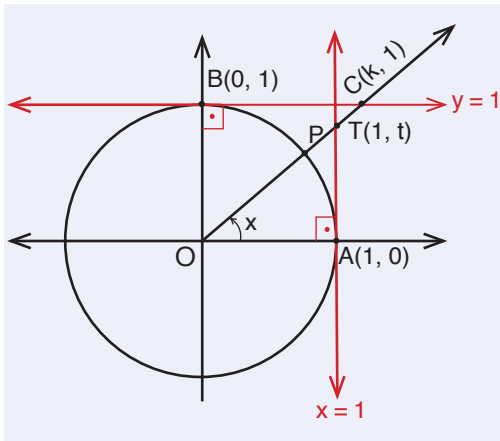
4. Aşağıda verilen her bir şekil için, P noktasının koordinatlarını sinüs ve kosinüs cinsinden yazınız.



TANJANT VE KOTANJANT FONKSİYONLARI



Etkinlik



Birim çember üzerinde alınan x radyanlık yayın bitim noktası P olsun. OP doğrusunun $x=1$ ve $y=1$ doğrularını kestiği noktalar sırasıyla T ve C olsun.

• \widehat{OAT} den yararlanarak T noktasının ordinatını x açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.

• \widehat{OBC} den yararlanarak C noktasının apsisini x açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.

☞ x açısı değiştikçe T ve C noktasının koordinatlarının nasıl değiştiğini tartışınız.

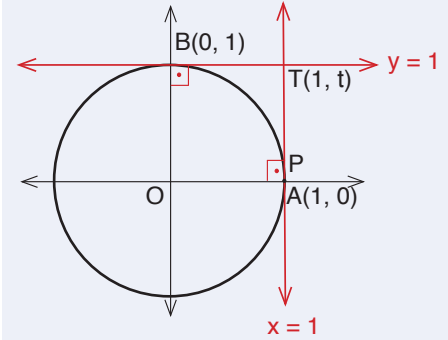


Örnek

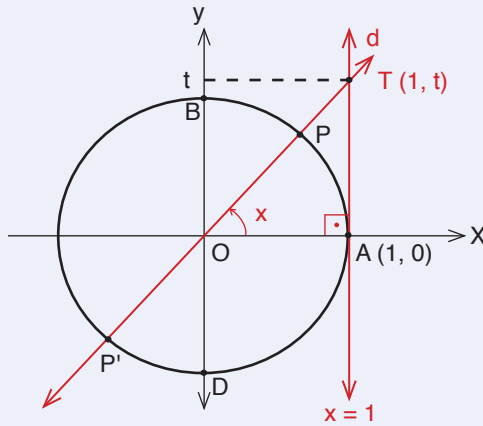
Ölçüsü 0 radyan olan açının bitim noktasının $x=1$ ve $y=1$ doğrularının kestiği noktaların koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Şekilden de görüldüğü gibi 0 radyanlık bir açının $x=1$ doğrusunu kestiği nokta $A(1, 0)$ dır ve $y=1$ doğrusunu kestiği nokta bulunmamaktadır.



Tanım ve Bilgi



Birim çembere $A(1, 0)$ noktasında teğet olan doğruya **tanjant eksen**i denir. OP doğrusunun tanjant eksenini kestiği nokta $T(1, t)$ olsun.

$\tan x = \frac{|AT|}{|AO|}$ olduğundan $t = \tan x$ bulunur.

B ve O noktalarından farklı çember üzerindeki her P noktasını $T(1, t)$ noktasına eşleyebiliriz. $\tan: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ eşleyen

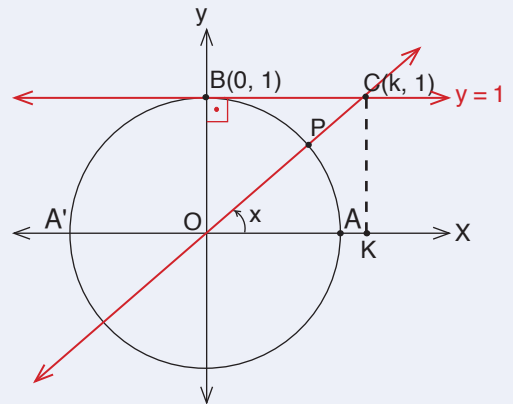
fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

Birim çembere $B(0, 1)$ noktasında teğet olan doğruya **kotanjant eksen**i denir. OP doğrusunun kotanjant eksenini kestiği nokta $C(k, 1)$ olsun.

$\cot x = \frac{|OK|}{|CK|} = \frac{k}{1}$ ise $k = \cot x$ bulunur.

A ve A' noktalarından farklı çember üzerindeki her P noktasını $C(k, 1)$ noktasına eşleyebiliriz.

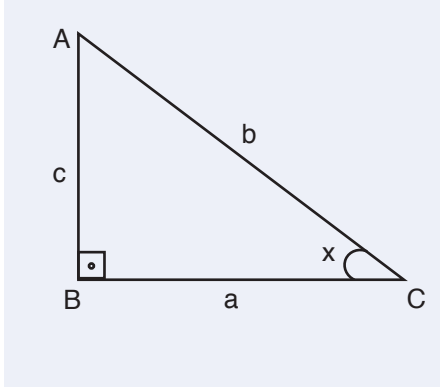
$\cot: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ eşleyen fonksiyonuna **kotanjant fonksiyonu** denir.





Örnek

1. Bir ABC dik üçgenini çizelim.



ABC dik üçgeninde

$$\sin x = \frac{c}{b}, \cos x = \frac{a}{b}, \tan x = \frac{c}{a}, \cot x = \frac{a}{c} \text{ dir.}$$

Buradan yukarıdaki eşitlikler yardımıyla

$$\tan x = \frac{c}{a} = \frac{b \cdot \sin x}{b \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ elde edilir.}$$

$$\cot x = \frac{a}{c} = \frac{b \cdot \cos x}{b \cdot \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ elde edilir.}$$

$$\tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \text{ elde edilir.}$$

2. Ölçüleri 0° , 180° ve 270° olan açıların tanjant ve kotanjant değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

Ölçüsü x derece olan bir açı için $\tan x = t$, $\cot x = k$ olduğuna göre, ölçüsü 0° olan açı tanjant eksenini A noktasında kesmekte, ancak kotanjant eksenini kesmemektedir. Bu durumda

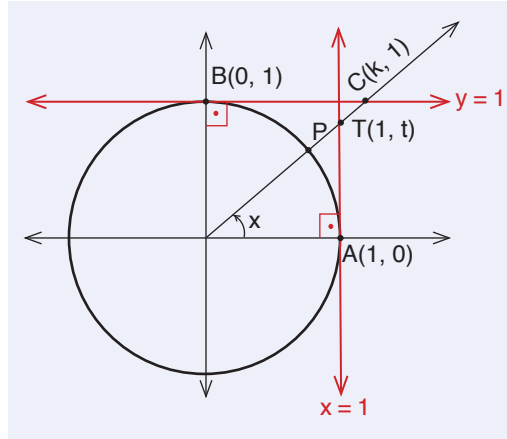
$$\tan 0^\circ = 0 \text{ ve } \cot 0^\circ \text{ tanımsız olur.}$$

Aynı yaklaşımla

$$\cot 90^\circ = 0 \text{ ve } \tan 90^\circ \text{ tanımsız}$$

$$\tan 180^\circ = 0 \text{ ve } \cot 180^\circ \text{ tanımsız}$$

$$\cot 270^\circ = 0 \text{ ve } \tan 270^\circ \text{ tanımsız bulunur.}$$

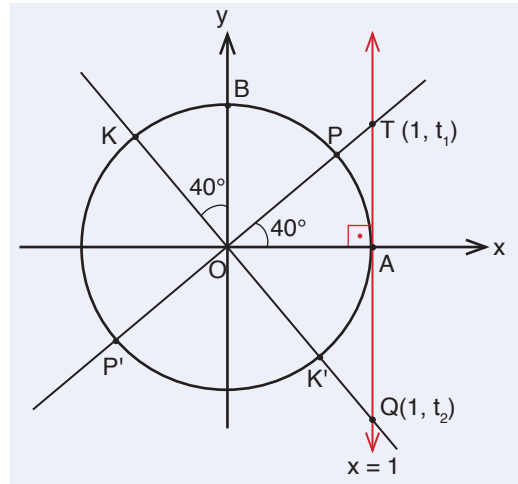


3. Ölçüleri 40° ve 130° olan açıların tanjant değerlerinin işaretlerini bulalım.

ÇÖZÜM

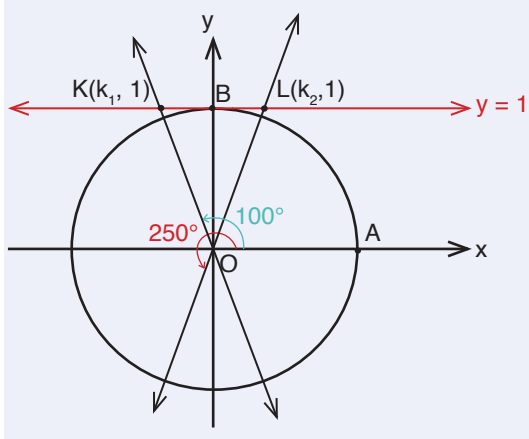
Ölçüsü 40° olan açı tanjant eksenini 1. bölgede $T(1, t_1)$ noktasında kesmektedir. $t_1 > 0$ olduğundan $\tan 40^\circ > 0$ dir.

Ölçüsü 130° olan açı tanjant eksenini 4. bölgede $Q(1, t_2)$ noktasında kesmektedir. $t_2 < 0$ olduğundan $\tan 130^\circ < 0$ dir.



4. Ölçüleri 100° ve 250° olan açıların kotanjant değerlerinin işaretlerini bulalım.

ÇÖZÜM



Ölçüsü 100° olan açı kotanjant eksenini 2. bölgede $K(k_1, 1)$ noktasında kesmektedir. $k_1 < 0$ olduğundan $\cot 100^\circ < 0$ bulunur.

Ölçüsü 250° olan açı kotanjant eksenini 1. bölgede $L(k_2, 1)$ noktasında kesmektedir. $k_2 > 0$ olduğundan $\cot 250^\circ > 0$ bulunur.



Tanım ve Bilgi

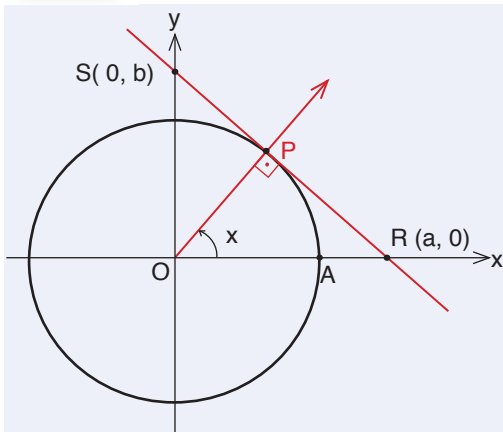
Trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretleri aşağıdaki gibidir.

	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

SEKANT VE KOSEKANT FONKSİYONLARI



Etkinlik



Birim çember üzerinde alınan x radyanlık yayın bitim noktası P olsun. Çembere P noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği noktaya R , y eksenini kestiği noktaya S diyelim.

• \widehat{OPR} den yararlanarak R noktasının apsisini x açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.

• \widehat{OPS} den yararlanarak S noktasının ordinatını x açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.

☞ x açısı değiştikçe R ve S noktasının koordinatlarının nasıl değiştiğini tartışınız.



Örnek

$x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ radyanlık açılar için $\frac{1}{\cos x}$ ve $\frac{1}{\sin x}$ ifadelerinin değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x = 0 \text{ için; } \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x = 0 \text{ için; } \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \text{tanımsız}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ için; } \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \text{tanımsız}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ için; } \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

$\sec: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ fonksiyonuna **sekant fonksiyonu**,

$\csc: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ fonksiyonuna **kosekant fonksiyonu** denir.



Örnek

1. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ ve $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ ve } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ eşitliklerinden yararlanarak,}$$

$$\bullet 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \text{ elde edilir.}$$

$$\bullet 1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \text{ elde edilir.}$$

2. $\csc^2 x - \cot^2 x$ ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ ve } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ eşitlerini yerine yazarsak}$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 \text{ bulunur.}$$

3. $c = \cos x$ ve $s = \sin x$ olmak üzere $c^6 + 3c^2s^2 + s^6$ ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$c = \cos x$ ve $s = \sin x$ ise $c^2 + s^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ olur.

$$\begin{aligned} c^6 + s^6 + 3c^2s^2 &= (c^2)^3 + (s^2)^3 + 3c^2s^2 \\ &= \underbrace{(c^2 + s^2)}_1 (c^4 - c^2s^2 + s^4) + 3c^2s^2 \\ &= c^4 + 2c^2s^2 + s^4 \\ &= \underbrace{(c^2 + s^2)^2}_1 = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. $\frac{\sec x + 1}{\tan x} + \frac{1}{\csc x + \cot x}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

ÇÖZÜM

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ve $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ eşitliklerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{\sec x + 1}{\tan x} + \frac{1}{\csc x + \cot x} &= \frac{\frac{1}{\cos x} + 1}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \frac{\frac{1 + \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{1}{\frac{1 + \cos x}{\sin x}} \\ &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \text{ payda eşitlersek,} \\ &= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)} + \frac{\sin x}{(\sin x)} \\ &= \frac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{1 + 2\cos x + 1}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} \\ &= \frac{2 + 2\cos x}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

5. $\sec 0 + \csc \frac{3\pi}{2}$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ bulunur. Buradan } \sec 0 + \csc \frac{3\pi}{2} = 0 \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = \dots$

b) $\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \dots$

c) $\tan x \cdot \cot x = \dots$

ç) $\tan x = \frac{\sin x}{\dots}$

d) $\cot x = \frac{\cos x}{\dots}$

e) $\sec x = \dots$

f) $\csc x = \dots$

g) $1 - \cos^2 x = \dots$

ğ) $1 + \tan^2 x = \dots$

h) $1 - \sin^2 x = \dots$

ı) $1 + \cot^2 x = \dots$

2. Aşağıdaki eşitliklerin en sade şeklini bulunuz.

a) $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

b) $\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} ; (0 < x < \frac{\pi}{2})$

c) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x}$

ç) $\frac{\csc x + 1}{\cot x} + \frac{1}{\sec x + \tan x}$

d) $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$

e) $\sec^2 x - \tan^2 x$

f) $\sec x \cdot \cos x + \csc x \cdot \sin x$

g) $\sqrt{1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}$

ğ) $(\sec x - 1)(\csc x + \cot x)$

3. $\tan x + \cot x = 3$ ise $\tan^2 x + \cot^2 x$ ifadesinin eşiti kaçtır?

4. $\sin x + \cos x = 2$ ise $\sin^3 x + \cos^3 x$ ifadesinin eşiti kaçtır?

5. Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin işaretlerini bulunuz.

a) $\tan 220^\circ$

b) $\cot 1200^\circ$

c) $\sec \frac{5\pi}{6}$

ç) $\csc \frac{7\pi}{4}$

d) $\tan(-1500^\circ)$

e) $\cot(\frac{-11\pi}{3})$

6. $\tan \pi + \cot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

7. $\csc \frac{17\pi}{2} + \sec(-10\pi)$ işleminin sonucunu bulunuz.

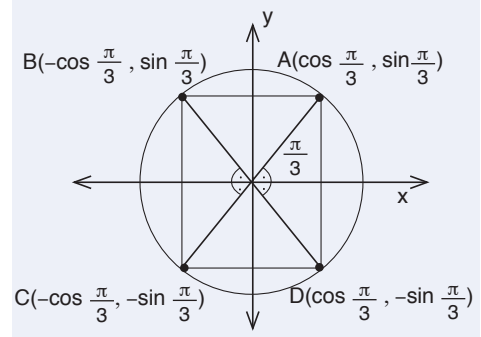
İKİNCİ, ÜÇÜNCÜ VE DÖRDÜNCÜ BÖLGEDEKİ AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI



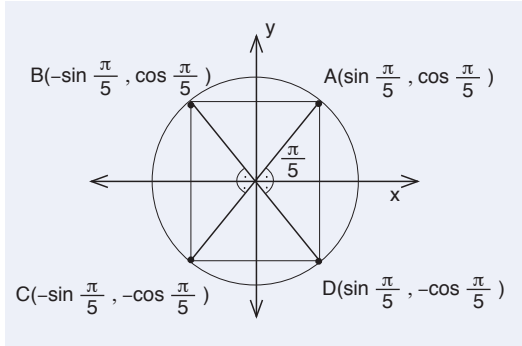
Etkinlik

Aşağıda analitik düzlemde birim çember üzerinde $A(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$ noktası verilmiştir. A noktasının y eksenine göre simetriği B, orijine göre simetriği C, x eksenine göre simetriği D noktalarıdır.

- B noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.
- C noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.
- D noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.



Aşağıda analitik düzlemde birim çember üzerinde $A(\sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5})$ noktası verilmiştir. A noktasının y eksenine göre simetriği B, orijine göre simetriği C, x eksenine göre simetriği D noktalarıdır.



- θ açısını dikkate alarak B noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.
- θ açısını dikkate alarak C noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.
- θ açısını dikkate alarak D noktası kaç radyanlık açının bitim noktasıdır? Buna göre, açının trigonometrik oranını A'nın koordinatlarına bağlı olarak yazınız.

☞ $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüleri $\frac{k\pi}{2} \pm \theta$ olan açılarının trigonometrik oranlarının θ cinsinden nasıl yazılacağını tartışınız.

☞ k 'nin tek sayı veya çift sayı olması durumunda θ açısının trigonometrik oranının hangi trigonometrik fonksiyonun değerine eşit olduğunu tartışınız.

☞ Herhangi bir θ açısının trigonometrik oranlarının işaretinin nasıl belirlendiğini tartışınız.



Örnek

1. Ölçüsü 120° olan açının trigonometrik oranlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Şekildeki gibi ölçüsü 120° olan açının bitim noktasının koordinatları olan $K(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$ ile $M(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$ noktalarının koordinatlarını karşılaştıralım.

Şekilde,

$\widehat{KLO} \cong \widehat{MNO}$ dir.

$$IKLI = IMNI \text{ ise } \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

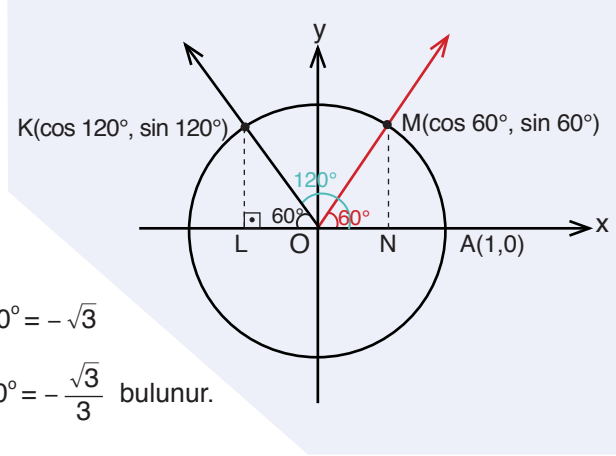
$IOLI = INOI$ ise

$$-\cos 120^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$



2. Ölçüsü 120° olan açının trigonometrik oranlarını dikey eksenini kullanarak bulalım.

ÇÖZÜM

Şekildeki gibi ölçüsü 120° olan açının bitim noktasının koordinatları olan $M(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$ ile $K(\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)$ noktalarının koordinatlarını karşılaştıralım.

Şekilde,

$\widehat{KLO} \cong \widehat{ONM}$ dir.

$$IKLI = IONI \text{ ise } \sin 120^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$ILOI = INMI$ ise

$$-\cos 120^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

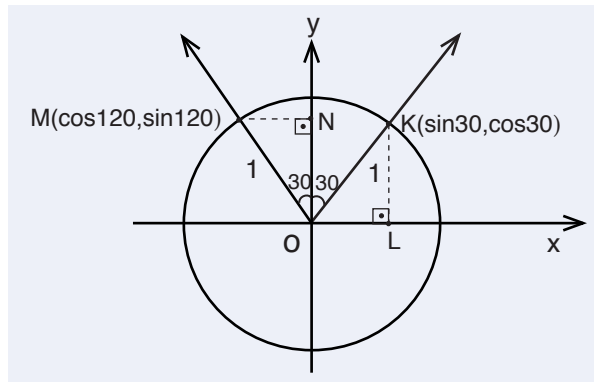
$$\cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{-\sin 30^\circ}$$

$$= -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{-\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$





Tanım ve Bilgi

Ölçüleri $180^\circ - \theta$, $180^\circ + \theta$ ve $-\theta$ olan açılarının trigonometrik oranlarının θ cinsinden eşitleri aşağıdaki gibidir:

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Ölçüleri $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ olan açılarının trigonometrik oranlarının α cinsinden eşitleri aşağıdaki gibidir:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$



Örnek

1. $\frac{\cos(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin(-x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\cos(\pi + x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x,$$

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ ve } \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x \text{ eşitlerini yerine yazarsak,}$$

$$\frac{\cos(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin(-x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{-\cos x - \cos x}{-\sin x - \sin x} = \frac{-2\cos x}{-2\sin x} = \cot x \text{ bulunur.}$$

2. $\tan(-45^\circ) + \cot 150^\circ \cdot \sin 240^\circ$ ifadesinin değerini bulalım.

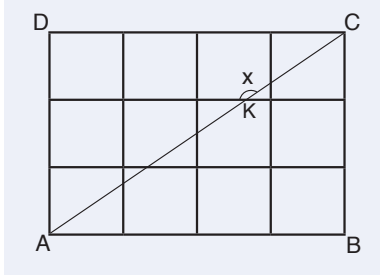
ÇÖZÜM

$$\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1, \cot(150^\circ) = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ değerlerini yerine yazarsak,}$$

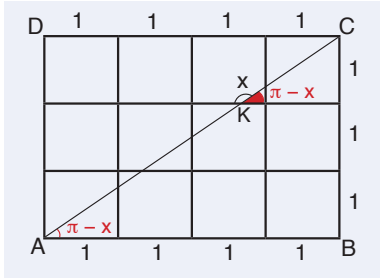
$$\tan(-45^\circ) + \cot 150^\circ \cdot \sin 240^\circ = -1 + (-\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

3.



Şekildeki ABCD dikdörtgeni 12 eş kareden oluşmuştur.
cot x değerini bulalım.

ÇÖZÜM



Şekle göre \widehat{CAB} den yararlanarak

$$\cot(\pi - x) = \frac{4}{3} \text{ bulunur. Buradan,}$$

$$-\cot x = \frac{4}{3}$$

$$\cot x = -\frac{4}{3} \text{ olur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz. Verilen açıların trigonometrik değerlerini bularak hangi bölgelerde olduklarını belirtiniz.

Derece	Radyan	Açının Bölgesi(*)	Kosinüs değeri	Sinüs değeri	Tanjant değeri	Kotanjant değeri
120	$\frac{2\pi}{3}$	2. Bölge	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
30						
	$\frac{\pi}{4}$					
	$\frac{5\pi}{6}$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	
210						
315				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		

(*) Açının bitim kenarının birim çemberi kestiği bölge.

2. Aşağıdaki tabloyu örneklere uygun biçimde doldurunuz.

x	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$2\pi - \theta$	$3\pi - \theta$	$3\pi + \theta$	$20\pi - \theta$
$\sin x$						
$\cos x$		$-\cos \theta$				
$\tan x$					$\tan \theta$	
$\cot x$						

3. Aşağıdaki tabloyu örneklere uygun biçimde doldurunuz.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$180^\circ - \alpha$				
$180^\circ + \alpha$			$\tan \alpha$	
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$			
$-\alpha$				
$270^\circ + \alpha$				

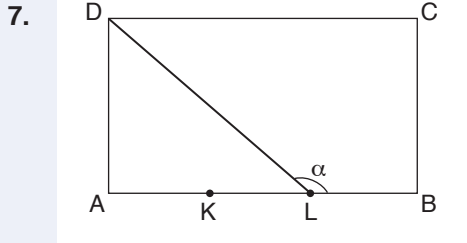
4. Aşağıda ölçüleri verilen açılarının trigonometrik değerlerini bulunuz.

- a) 150° b) 225° c) 240° ç) -30°

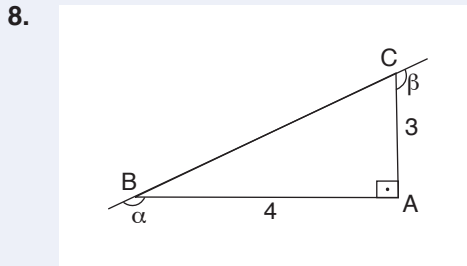
5. $\frac{\sin 240^\circ - \cos 120^\circ}{\tan 315^\circ \cdot \cos 120^\circ - \tan 150^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

- a) $\frac{\sin (3\pi + \alpha) + \sin (\alpha - 5\pi)}{\cos (4\pi + \alpha) - \cos (5\pi + \alpha)}$ b) $\frac{\sin (\alpha - 90^\circ) + \sin (270^\circ - \alpha)}{\cos (180^\circ - \alpha) - \cos (-\alpha)}$



Yandaki ABCD dikdörtgeninde, $2|AB| = 3|AD|$, $|AK| = |KL| = |LB|$ ve $m(\widehat{DLB}) = \alpha$ ise $\cos \alpha$ kaçtır?



Şekilde verilenlere göre $\cos \alpha + \sin \beta + \tan \beta + \cot \alpha$ toplamının eşitini bulunuz.

9. $x = \sin 100^\circ$, $y = \cot 330^\circ$, $z = \cos 160^\circ$, $t = \tan 230^\circ$, $n = \cos 500^\circ$ $v = \cot (-160^\circ)$ değerlerini sıralayınız.

10. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ve $\sin x = -\frac{2}{5}$ ise $\tan x$ değerini bulunuz.

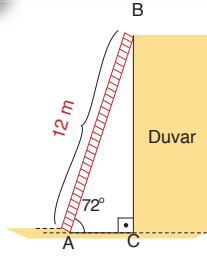
**BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR ALTINDAKİ
GÖRÜNTÜSÜNÜ TRİGONOMETRİK DEĞER TABLOSUNDA BULMA**

TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU

derece	sin	cos	tan	cot	
00	0.0000	1.0000	0.0000	90
01	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	89
02	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	88
03	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	87
04	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	87
05	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	85
06	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84
07	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83
08	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82
09	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81
10	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80
11	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79
12	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78
13	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77
14	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76
15	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75
16	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74
17	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73
18	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72
19	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71
20	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70
21	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69
22	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68
23	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67
24	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66
25	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65
26	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64
27	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63
28	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62
29	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61
30	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60
31	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59
32	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58
33	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57
34	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56
35	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55
36	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54
37	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53
38	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52
39	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51
40	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50
41	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49
42	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48
43	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47
44	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46
45	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45
	cos	sin	cot	tan	derece



Etkinlik



Yandaki şekilde 12 m uzunluğundaki bir merdiven, taban düzlemiyle 72° lik açı yapacak şekilde duvara yaslanmıştır.

- Trigonometrik değerler tablosundan 72° lik açının sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.
- ☞ Bulduğunuz bu değerler yardımıyla duvarın yüksekliğini ve IACI nu bulunuz.



Örnek

1. $\sin 42^\circ + \cos 24^\circ$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

Trigonometrik değerler tablosundan yararlanarak,

$\sin 42^\circ = 0,6691$, $\cos 24^\circ = 0,9135$ bulunur.

Buradan, $\sin 42^\circ + \cos 24^\circ = 0,6691 + 0,9135 = 1,5826$ olur.

2. $\tan 20^\circ - \cot 36^\circ$ işleminin sonucunu bulalım.

ÇÖZÜM

Trigonometrik değerler tablosundan yararlanarak,

$\tan 20^\circ = 0,3640$, $\cot 36^\circ = 1,3764$ bulunur.

Buradan, $\tan 20^\circ - \cot 36^\circ = 0,3640 - 1,3764 = -1,0124$ olur.



Tanım ve Bilgi

Trigonometrik cetvelde ölçüleri tam sayı olarak verilen 0° den 90° ye kadar olan açıların derece cinsinden trigonometrik oranlarını gösteren tablo verilmiştir.

Trigonometrik cetveli incelediğinizde aynı satırdaki iki açının ölçüleri toplamı 90° dir. Trigonometrik fonksiyonlar ilk ve son satırda iki kez yazılmıştır. Ölçüleri 0° den 45° ye kadar olan açılar için üst satırdaki trigonometrik fonksiyonlar; ölçüleri 45° den 90° ye kadar olan açılar için de en son satırdaki trigonometrik fonksiyonlar alınmıştır. Böylece 0° den 45° ye kadar olan açılarının trigonometrik oranları üstten aşağıya; 45° den 90° ye kadar olan açılarının trigonometrik oranları aşağıdan yukarıya doğru kullanılır.



Uygulamalar

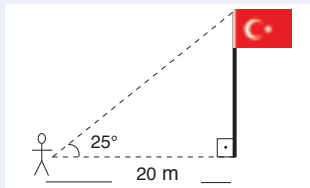
1. Aşağıda verilen değerleri trigonometri cetveli ya da hesap makinesi yardımıyla bulunuz.

a) $\sin 47^\circ$

b) $\tan 512^\circ$

c) $\cos(-147^\circ)$

2.



Yandaki şekilde verilenlere göre bayrak direğinin uzunluğunu bulunuz.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI



Etkinlik

1. Olimpiyat oyunları kaç yılda bir düzenlenir?

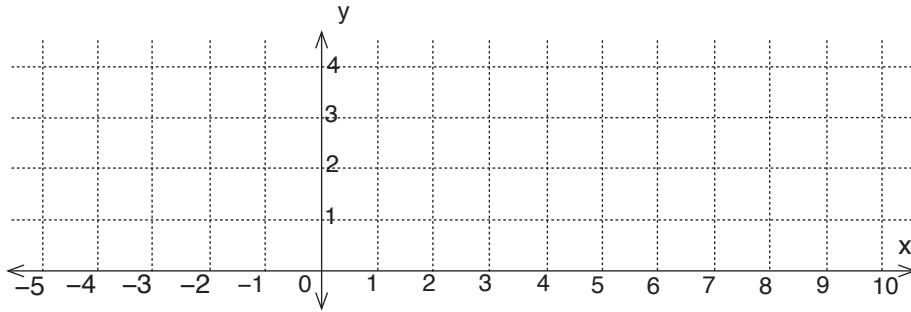
Gazeteler hangi zaman aralığında bir yayımlanır?

Haftanın günleri kaç günde bir tekrar eder?

☞ Yaşamımızdaki bazı olayların periyodik olarak karşımıza çıktığını görürüz. Sizler de günlük yaşamınızda belli sürelerle tekrarlanan olaylara üç örnek veriniz.

2. Tam sayılar kümesinde bir $f(x)$ fonksiyonu " x in 5 ile bölümünden kalan" biçiminde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Aşağıdaki koordinat sisteminde fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.



☞ $f(x)$ fonksiyonunun belli aralıklarla tekrarlanıp tekrarlanmadığını yani periyodik bir fonksiyon olup olmadığını tartışınız.

3. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Tabloya göre $g(x) = \sin x$ fonksiyonunun hangi aralıkta tekrarlandığını bulunuz.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin x$													

☞ Her fonksiyonun bir periyodu var mıdır? Bir fonksiyonun periyodik olması için hangi koşulların sağlanması gerektiğini tartışınız.



Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ aralığında tanımlı $f(x) = \cos 2x$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = \cos 2x$ fonksiyonunun farklı x değerleri için görüntülerinin hangi aralıkta tekrarlandığını bulalım

$$x = 0 \quad \text{için} \quad f(0) = \cos 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{için} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{için} \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$x = \pi \text{ için } f(\pi) = \cos 2\pi = 1$$

Yukarıda görüldüğü gibi $f(x) = \cos 2x$ fonksiyonu $[0, \pi)$ aralığındaki aldığı değerleri tekrarlamaktadır. Bu durumda fonksiyonun periyodu π dir.



Tanım ve Bilgi

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda, $\forall x \in A$ için $f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir T gerçekteki sayısı varsa f ye **periyodik fonksiyon**, T nin en küçük pozitif değerine ise bu fonksiyonun **periyodu** denir. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

• $f(x) = \sin^m(ax + b)$ ve $g(x) = \cos^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu,

$$T = \begin{cases} \frac{2\pi}{|a|}, m \text{ tek ise} \\ \frac{\pi}{|a|}, m \text{ çift ise} \end{cases}$$

• $f(x) = \tan^m(ax + b)$ ve $g(x) = \cot^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu, $T = \frac{\pi}{|a|}$ dir.



Örnek

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

$$\text{a) } f(x) = \sin 3x \quad \text{b) } g(x) = 2 \cdot \cos^2(5x - 1) \quad \text{c) } h(x) = 8 \tan^4\left(\frac{3x + 1}{2}\right) \quad \text{ç) } k(x) = -\cot(3 - 4x)$$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = \sin 3x$ fonksiyonunda $m = 1$ ve $a = 3$ olduğundan periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$ olarak bulunur.

b) $g(x) = 2 \cdot \cos^2(5x - 1)$ fonksiyonunda $m = 2$ ve $a = 5$ olduğundan periyodu $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{5}$ olarak bulunur.

c) $h(x) = 8 \cdot \tan^4\left(\frac{3x + 1}{2}\right)$ fonksiyonunda $m = 4$ ve $a = \frac{3}{2}$ olduğundan periyodu $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$ olarak bulunur.

ç) $k(x) = -\cot(3 - 4x)$ fonksiyonunda $m = 1$ ve $a = -4$ olduğundan periyodu $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|-4|} = \frac{\pi}{4}$ olarak bulunur.

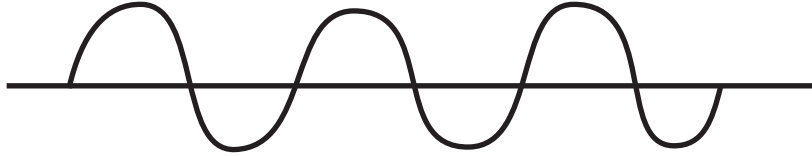
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ



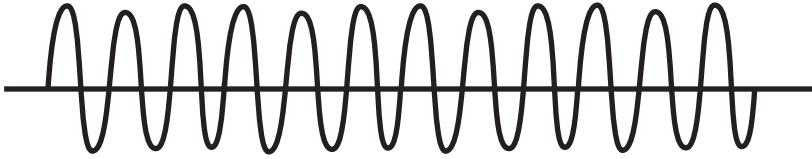
Motivasyon



Alçak frekans



Yüksek frekans



İnce ve kalın ses, ses kaynağının frekansı ile ilgili olup frekans fazla ise ses ince, frekans az ise ses kalındır. Fazla dalga üreten ses kaynağının frekansı daha fazladır. Resimde görüldüğü gibi ses dalgaları farklı sıklıkta üretilir. Kedinin sesi aslana göre daha incedir. Yukarıdaki ses dalgası grafiklerinin trigonometrik fonksiyonların grafikleriyle ilişkisini araştırınız.

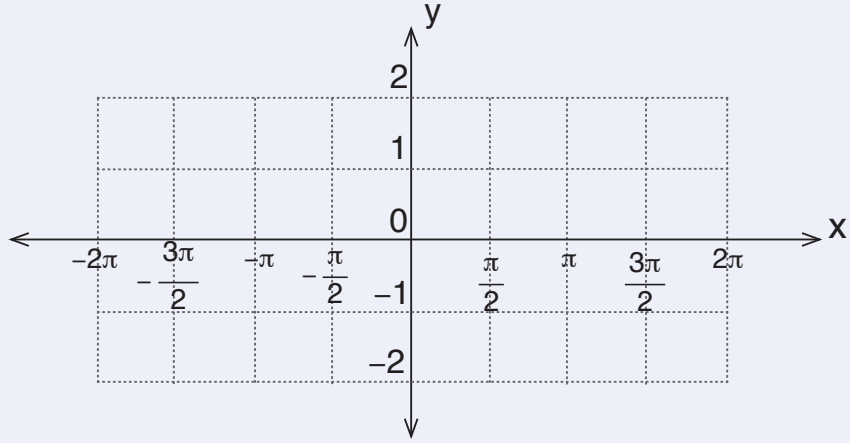


Etkinlik

- $f(x) = 2\sin x$ fonksiyonu için aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = 2\sin x$									

- Tablodaki değerleri kullanarak aşağıdaki koordinat düzleminde $f(x) = 2\sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizin.



• $f(x) = 2\sin x$ fonksiyonunun periyodu kaçtır? Bu periyodun fonksiyonun grafiğinin çiziminde nasıl bir kolaylık sağlayacağını tartışınız.

☞ Trigonometrik bir fonksiyonun grafiğinin çiziminde nelere dikkat edilmesi gerekir? Periyodun nasıl kullanılacağını tartışınız.



Örnek

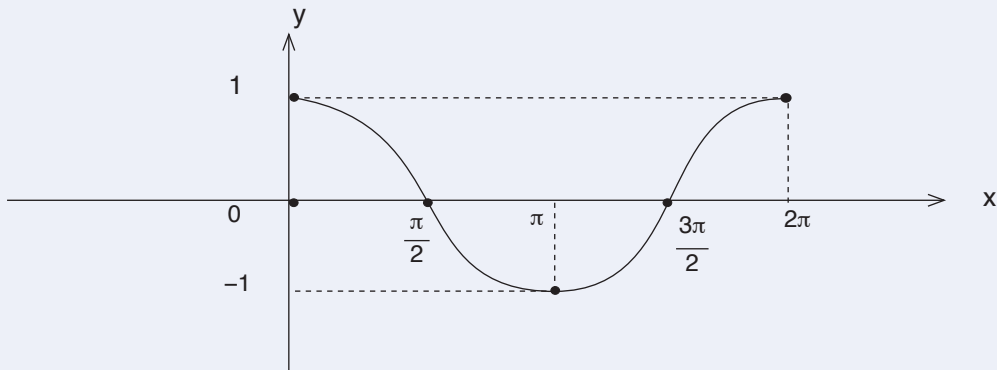
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

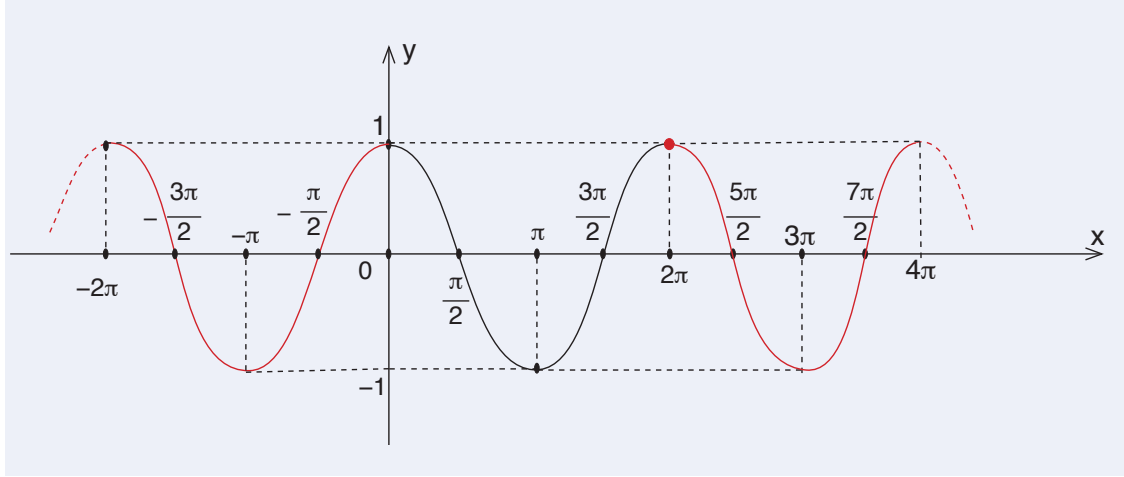
$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ dir. Fonksiyonun $[0, 2\pi]$ aralığındaki değişim tablosu aşağıdaki gibidir.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Değişim tablosuna göre $[0, 2\pi]$ aralığında $f(x) = \cos x$ in grafiği aşağıdaki gibidir:



Tanım aralığında bu fonksiyonun grafiği de aşağıdaki gibidir:



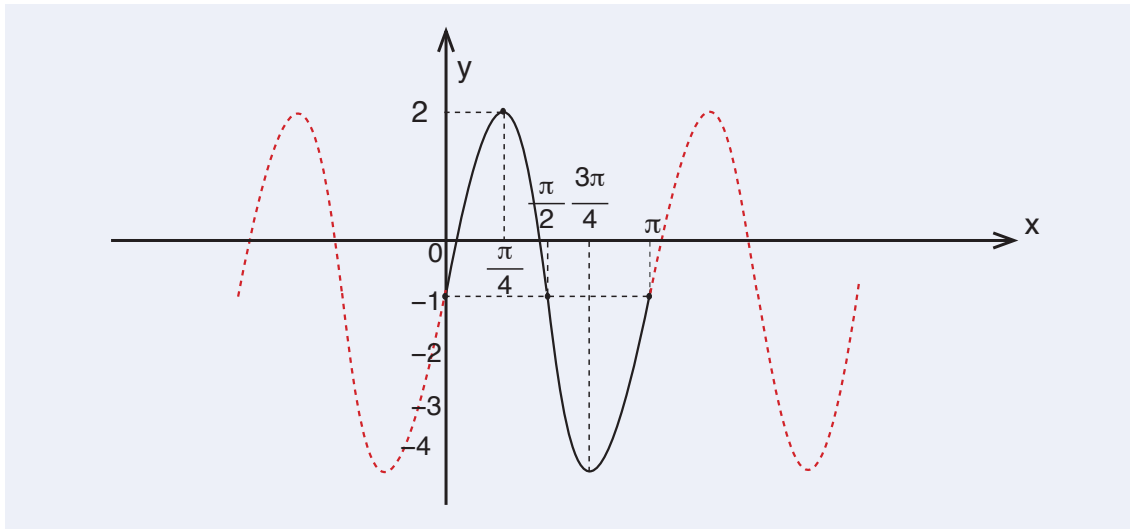
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = 3\sin(2x) - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3\sin(2x) - 1$ fonksiyonunun periyodu $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ dir. $[0, \pi)$ aralığında fonksiyonun değişim tablosu aşağıdaki gibidir:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$3\sin 2x$	0	3	0	-3	0
$3\sin(2x)-1$	-1	2	-1	-4	-1

Değişim tablosuna göre $f(x)$ in grafiği aşağıdaki gibidir:



3. $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{k \cdot \pi}{2}, k \text{ bir tek tam sayı} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

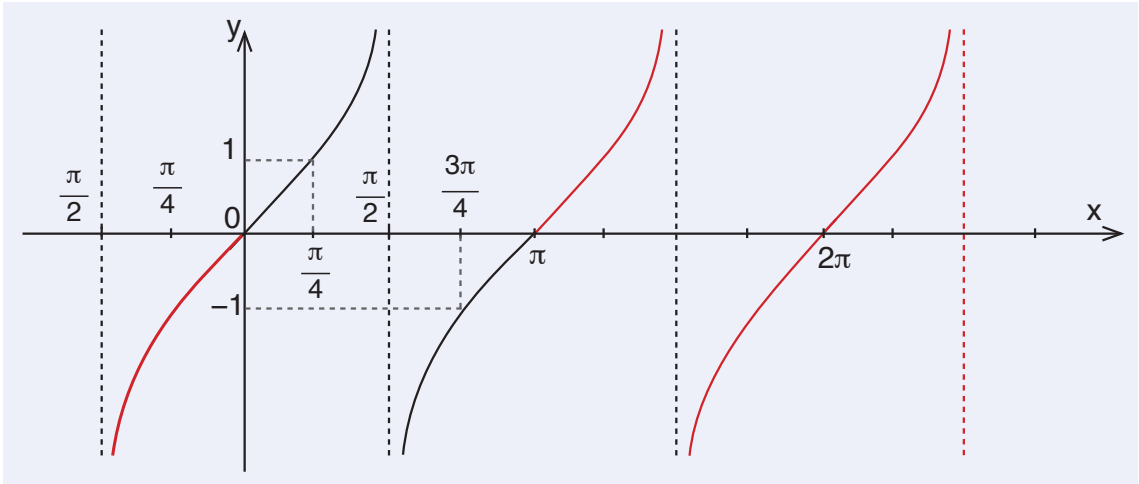
ÇÖZÜM

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun periyodu $T = \frac{\pi}{|a|} = \pi$ dir. Fonksiyon $[0, \pi)$ aralığındaki değişim tablosu

aşağıdaki gibi olur. $x = \frac{\pi}{2}$ de $f(x) = \tan x$ in tanımlı olmadığına dikkat ediniz.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan x$	0	1		-1	0

Bu durumda $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



Uygulamalar

1. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f(x) = \tan 5x$ b) $f(x) = 2\sin^6(\sqrt{2}x + 1)$ c) $f(x) = -3\cos^5(x-1)$ ç) $f(x) = \cot\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + x\right)$

2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = 2\cos x$ c) $f(x) = \cot x$ ç) $f(x) = -\cos x + 2$
d) $f(x) = \cos 2x$ e) $f(x) = -2\cos x + 1$ f) $f(x) = 2\sin 3x$ g) $f(x) = 4\sin x - 2$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



Motivasyon



$f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$ fonksiyonunun tersinin olması için ge-

rekli koşulları düşünerek:

- Bu fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulunuz.
- Bu fonksiyonun tersini bulunuz.

Bu bölümde trigonometrik fonksiyonların ters fonksiyonlarını inceleyiniz.



Etkinlik

- Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için hangi şartları sağlaması gerekir?
- Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini incelediğinizde, ters fonksiyonlarının yazılıp yazılamayacağını belirtiniz.

☞ $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ ve $f(x) = \cot x$ fonksiyonlarının terslerinin olabilmesi için uygun olan tanım aralıklarının neler olabileceğini tartışınız.



Örnek

1. Uygun bir tanım aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonu için $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ve $f^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ değerlerini bulalım.

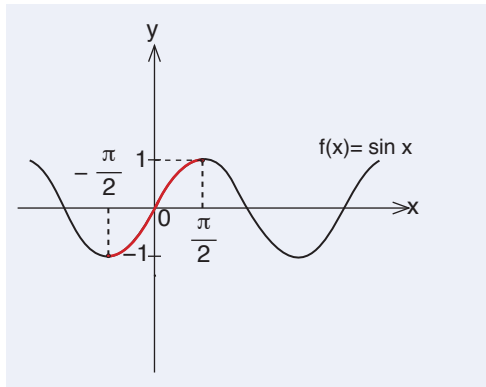
ÇÖZÜM

Aşağıdaki grafikte de görüldüğü gibi,

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bire bir ve örtendir. Bu aralıkta $f(x)$ in tersini aldığımızı

düşünürsek,

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ ve } f^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{3} \text{ olur.}$$



2. Uygun tanım aralığında $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için

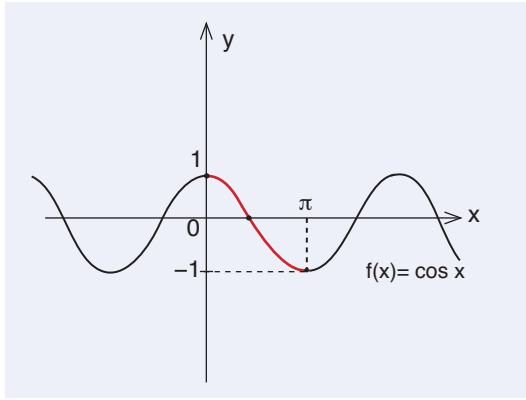
$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

Yandaki grafikte de görüldüğü gibi, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında bire bir ve örtendir.

Buna göre,

$$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ ve } f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ olur.}$$



3. Uygun tanım aralıklarında $f(x) = \tan x$ ve $g(x) = \cot x$ fonksiyonları için $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-\sqrt{3})$, $g^{-1}(\sqrt{3})$, $g^{-1}(-1)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun daha önce çizilen grafiğini incelendiğinde bu fonksiyonun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

aralığında bire bir ve örten olduğu görülür. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ve $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$ olduğundan $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ ve

$$f^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

$g(x) = \cot x$ fonksiyonunu grafiği incelendiğinde bu fonksiyonun $(0, \pi)$ aralığında bire bir ve örten olduğu görülür. $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ ve $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ olduğundan $g^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ ve $g^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ olarak bulunur.



Tanım ve Bilgi

• $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

fonksiyonuna **arcsinüs fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \arcsin x$ ile gösterilir.

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y \text{ olur.}$$

• $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x): [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ fonksiyonuna **arccosinüs fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \arccos x$ ile gösterilir.

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y \text{ olur.}$$

• $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x): \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$

fonksiyonuna **arctanjant fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \arctan x$ ile gösterilir.

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y \text{ olur.}$$

• $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ fonksiyonuna **arccotanjant fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \text{arccot } x$ ile gösterilir.

$$y = \cot x \Leftrightarrow x = \text{arccot } y \text{ olur.}$$



Örnek

1. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ç) $\arcsin(-1)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

e) $\arctan(-1)$

f) $\text{arccot}(1)$

g) $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

ÇÖZÜM

a) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b) $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

ç) $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2}$

d) $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

e) $\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \arctan(-1) = \frac{-\pi}{4}$

f) $\cot \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \text{arccot}(1) = \frac{\pi}{4}$

g) $\cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$

2. Aşağıdaki ifadelerin yaklaşık değerlerini trigonometrik cetvel veya hesap makinesi yardımıyla bulalım.

a) $\arcsin(0,3420)$

b) $\arcsin(-0,9063)$

c) $\arccos(-0,5736)$

ÇÖZÜM

Trigonometri cetvelinden,

$\sin 20^\circ = 0,3420$, $\sin 65^\circ = 0,9063$, $\cos 55^\circ = 0,5736$ olarak bulunur. Buradan,

a) $\arccos(0,3420) = 20^\circ$,

b) $\arcsin(-0,9063) = -65^\circ$,

c) $\arccos(-0,5736) = 125^\circ$ olarak bulunur.

3. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\cos\left(\arctan \frac{4}{3}\right)$

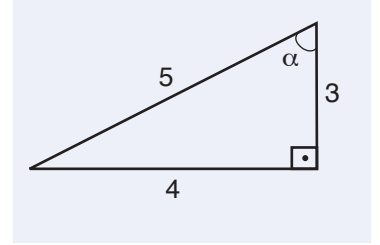
b) $\tan\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$

ÇÖZÜM

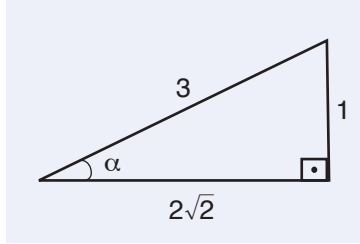
a) $\arctan \frac{4}{3} = \alpha$ olsun. Buradan $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ olur.

$\cos\left(\arctan \frac{4}{3}\right) = \cos \alpha$ değerini yandaki dik üçgen yardımıyla

$\cos \alpha = \frac{3}{5}$ olarak buluruz.



b)



$\arcsin \frac{1}{3} = \alpha$ olsun. Buradan $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ olur.

Yandaki dik üçgen yardımıyla

$\tan\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olur.



Uygulamalar

1. Aşağıdaki ifadelerin yaklaşık değerlerini trigonometrik cetvel veya hesap makinesi yardımı ile bulunuz.

a) $\arctan(0,7002)$

b) $\arctan(3,4874)$

c) $\text{arccot}(2,2460)$

ç) $\text{arccot}(0,6009)$

d) $\arcsin(-0,5446)$

e) $\arccos(-0,2419)$

2. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\cos(\arctan(-1))$

b) $\sin\left[\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

c) $\tan(\arccos(-1))$

ç) $\cot(\arctan(-\sqrt{3}))$

3. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\sin \left(\arctan \frac{3}{4} \right)$

b) $\tan (\arccos 0,6)$

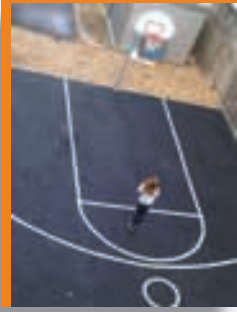
c) $\cot \left(\arcsin \frac{7}{25} \right)$

ç) $\cos \left(\operatorname{arccot} \frac{8}{15} \right)$

d) $\sin \left(\pi + \arccos \frac{3}{5} \right)$

e) $\cot \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} \right)$

4.



Basketbol potasının yerden yüksekliği yaklaşık olarak 3,05 m ve serbest atış çizgisinin potanın altından uzaklığı 4,57 m dir. Gözlerinin yerden yüksekliği 1,80 m olan bir basketçi atış sırasında potaya yaklaşık kaç derecelik açı ile bakar? (Hesap makinesi ve trigonometrik cetvelden yararlanınız.)

5. $\arcsin \left(\frac{1}{3} \right) + \arcsin \left(\frac{-1}{3} \right)$ işleminin sonucunu bulunuz.

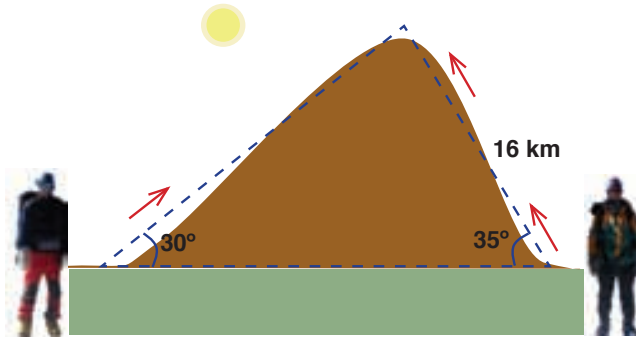
6. $\arccos \left(\frac{1}{7} \right) + \arccos \left(\frac{-1}{7} \right)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR

SİNÜS, KOSİNÜS TEOREMLERİ VE ÜÇGENİN ALANI



Motivasyon



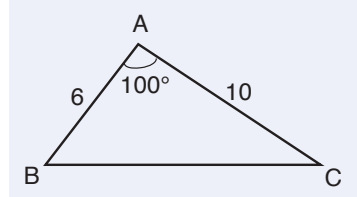
Dağın iki tarafında bulunan iki dağcı farklı eğim açlarına sahip yamaçlardan tırmanarak dağın zirvesinde buluşmuşlardır.

Verilen bilgilere göre dağcıların tırmanışa başladıkları noktalar arasındaki uzaklık nasıl hesaplanabilir?

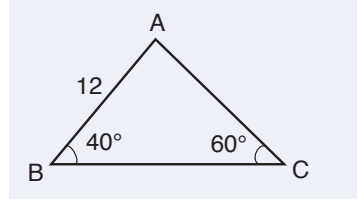


Etkinlik

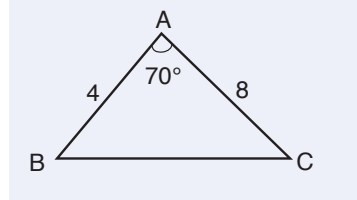
- $|AB| = 6$ br, $|AC| = 10$ br ve $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$ ise $|BC|$ kaç birimdir?



- $|AB| = 12$ br, $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ ise $|AC|$ kaç birimdir?



- $|AB| = 4$ br, $|AC| = 8$ br ve $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ise ABC üçgensel bölgesinin alanını bulunuz.

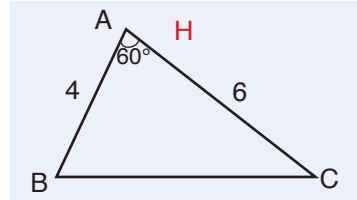


☞ Yukarıdaki sorular uygun kenara ait yükseklik çizilerek ve açılarının trigonometrik değerleri kullanılarak nasıl çözümlenebilir? Tartışınız.

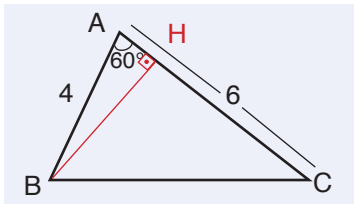


Örnek

1. Yandaki \widehat{ABC} nde
 $|AB| = 4$ br
 $|AC| = 6$ br ise
 $|BC|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.



ÇÖZÜM



\widehat{ABC} nde $[AC]$ kenarına ait $[BH]$ yüksekliğini çizelim.

$$\sin 60^\circ = \frac{|BH|}{|AB|} \text{ ise } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|BH|}{4} \text{ olduğundan}$$

$$|BH| = 2\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

\widehat{ABH} nde Pisagor bağıntısından, $|AH|^2 + |BH|^2 = |AB|^2$ yazılır. Buradan,

$$|AH|^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2$$

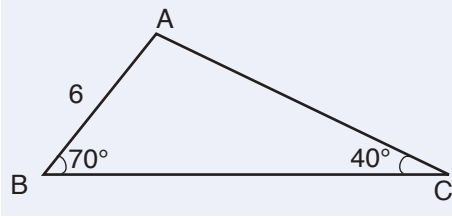
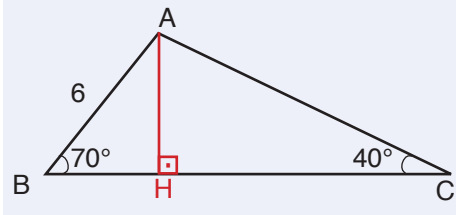
$$|AH| = 2 \text{ bulunur. Bu durumda } |HC| = 4 \text{ olur.}$$

\widehat{BHC} nde Pisagor bağıntısını uygularsak $|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2$

$$|BC|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2$$

$$|BC| = 2\sqrt{7} \text{ bulunur.}$$

2.

**ÇÖZÜM**Yandaki $\triangle ABC$ nde $|AB| = 6$ birim

$$m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$$

 $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ ise $|AC|$ nu bulalım. $\triangle ABC$ nde $[BC]$ kenarına ait $[AH]$ yüksekliğini çizelim.

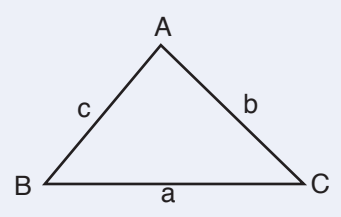
$$\triangle ABH \text{ nde } \sin 70^\circ = \frac{|AH|}{|AB|}$$

$$|AH| = 6 \cdot \sin 70^\circ$$

$$|AH| = 6 \cdot 0,9397$$

$$|AH| = 5,6382 \text{ birim olur.}$$

$$\triangle AHC \text{ nde } \sin 40^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} \text{ ise } |AC| = \frac{|AH|}{\sin 40^\circ} = \frac{5,6382}{0,6428} \approx 8,7713 \text{ ise } |AC| \approx 8,7713 \text{ bulunur.}$$

**Tanım ve Bilgi**

Yandaki $\triangle ABC$ için \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} iç açıları ve a , b , c bu-
lundukları kenarların uzunlukları olmak üzere aşağıdaki
bağıntı ve teoremleri yazabiliriz.

• **Kosinüs teoremi**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \text{ dir.}$$

• **Sinüs Teoremi:**

R , $\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin yarıçapı olmak üzere,

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \text{ dir.}$$

• $\triangle ABC$ nin alanı ile ilgili aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

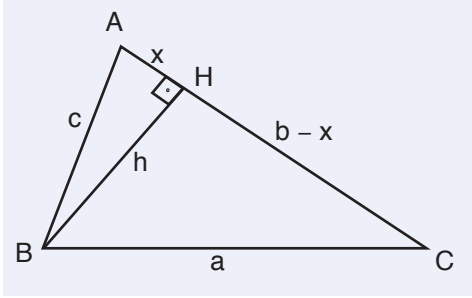
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ ise } A(\triangle ABC) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

Bu bağıntı ve teoremlerin ispatlarını sırasıyla yapalım.

1.



\widehat{ABC} nde $[AC]$ kenarına ait $[BH]$ yüksekliğini çizerek $|AH| = x$, $|HC| = b - x$ ve $|BH| = h$ diyelim. \widehat{ABH} ve \widehat{BHC} nde Pisagor teoreminden,

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2 \Rightarrow c^2 = x^2 + h^2 \dots (I)$$

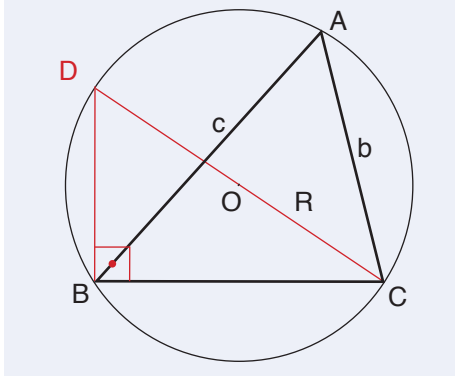
$$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$a^2 = \underbrace{h^2 + x^2}_{c^2} - 2bx + b^2 \dots (II)$ bağıntıları elde edilir.

(I) ve (II) deki bağıntılardan yararlanarak $a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$ bağıntısı elde edilir.

\widehat{ABH} nde $\cos \hat{A} = \frac{x}{c}$ ise $x = c \cdot \cos \hat{A}$ bulunur. Bu değeri en son bulduğumuz bağıntıda yerine yazarsak $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ bağıntısı bulunur.

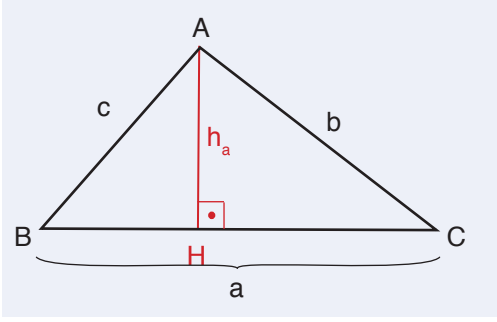
2.



\widehat{ABC} nin çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. $[OC]$ nı uzattığımızda çemberi kestiği noktaya D diyelim. Oluşan \widehat{DBC} nde, $m(\hat{D}) = m(\hat{A})$ ve $m(\widehat{DBC}) = 90^\circ$ olduğu görülür. Bu bilgilerden yararlanarak $\sin \hat{D} = \frac{a}{2R}$ ise $\frac{a}{\sin \hat{D}} = 2R$, $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$ bulunur. Aynı şekilde diğer kenarlar arasında da $\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$ ve $\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ bağıntıları yazılabilir.

Buradan sinüs teoremi, $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ biçiminde bulunur.

3.



i. Yandaki \widehat{ABC} nin alanının $A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2}$ olduğunu biliyoruz. \widehat{ABH} nde $\sin \widehat{B} = \frac{h_a}{c}$ ise

$h_a = c \cdot \sin \widehat{B}$ değerini alan bağıntısında yerine yazarsak $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}$ bağıntısı elde edilir.

Diğer kenarlar içinde aynı işlem uygulanırsa

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} \text{ bağıntıları yazılır.}$$

ii. Sinüs teoreminden,

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R \text{ bağıntısında } \sin \widehat{A} = \frac{a}{2R} \text{ değerini } A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} \text{ bağıntısında yerine yazar-}$$

sak başka bir alan formülü olan $A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ bağıntısı bulunur.

iii. \widehat{ABC} nin alanı $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}$ olduğunu gördük.

$$\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1 \text{ eşitliğinden } A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{A}}$$

Kosinüs teoreminden $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ bağıntısını alan bağıntısında yerine yazalım.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4 \cdot b^2 \cdot c^2}} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(2 \cdot b \cdot c - (b^2 + c^2 - a^2)) \cdot (2 \cdot b \cdot c + (b^2 + c^2 - a^2))}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a^2 - (b - c)^2) \cdot ((b + c)^2 - a^2)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a - b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (b + c + a)} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} \text{ nin çevresi, } & 2u = a + b + c \text{ olursa} \\ & a + c = 2u - b \\ & a + b = 2u - c \\ & b + c = 2u - a \end{aligned} \text{ eşitliklerini yerine yazarsak,}$$

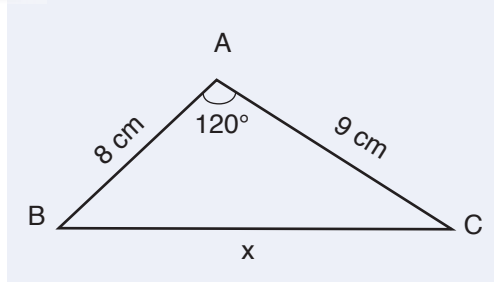
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(2u - 2b) \cdot (2u - 2c) \cdot (2u - 2a) \cdot 2u} \text{ dir. Gerekli düzenlemeler yaparsak ABC üç-}$$

gensel bölgesinin alanını $A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)}$ bağıntısı ile de bulabiliriz.



Örnek

1.



Yandaki $\triangle ABC$ nde

$$|AB| = 8 \text{ cm}$$

$$|AC| = 9 \text{ cm}$$

$m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ ise $|BC|$ nu bulalım.

ÇÖZÜM

$\triangle ABC$ nde kosinüs teoremini uygulayalım.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

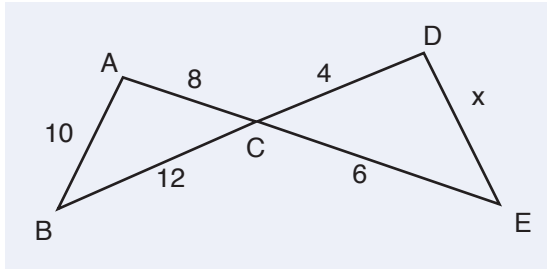
$$x^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 81 + 64 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 145 + 72$$

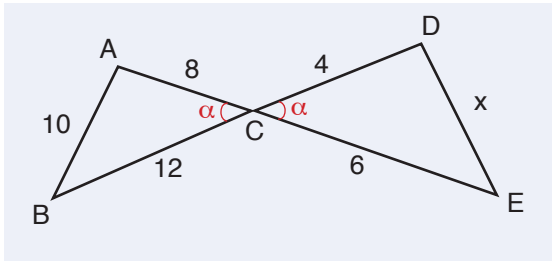
$$x = \sqrt{217} \text{ cm bulunur.}$$

2.



Yandaki şekilde A, C, E ve B, C, D noktaları doğrusaldır. Verilenlere göre $|DE|$ nu bulalım.

ÇÖZÜM



$\triangle ABC$ nde kosinüs teoreminden,

$$10^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$100 = 64 + 144 - 192 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{16} \text{ bulunur.}$$

$\triangle DEC$ nde kosinüs teoremine göre

$$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \alpha \text{ yazılır. Burada } \cos \alpha = \frac{9}{16} \text{ değeri yerine yazıldığında}$$

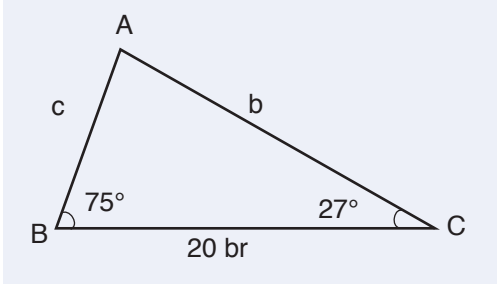
$$x^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{9}{16}$$

$$x^2 = 52 - 27$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ bulunur.}$$

3.



Şekildeki $\triangle ABC$ nde,
 $m(\angle B) = 75^\circ$
 $m(\angle C) = 27^\circ$ ve $|BC| = 20$ br ise $|AC|$ nu bulalım.

ÇÖZÜM

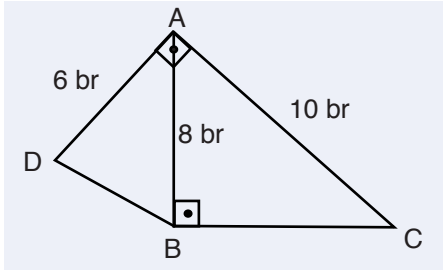
$m(\angle A) + 75^\circ + 27^\circ = 180^\circ$ ise $m(\angle A) = 78^\circ$ bulunur. $\triangle ABC$ nde sinüs teoremi uygularsak,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \text{ bağıntısından}$$

$$\frac{20}{\sin 78^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} \text{ yazılabilir.}$$

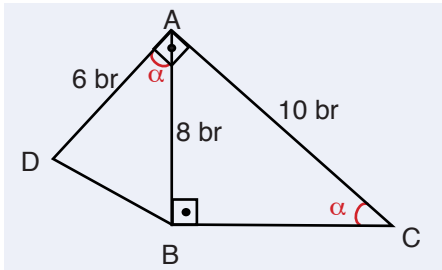
$$\frac{20}{0,9781} = \frac{b}{0,9659} \text{ ise } b = 19,750 \text{ br bulunur.}$$

4.



Yandaki şekilde $[AD] \perp [AC]$ ve $[AB] \perp [BC]$
 $|AB| = 8$ br, $|AD| = 6$ br, $|AC| = 10$ br ise
 $A(\widehat{DAB})$ nin kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DAB}) = \alpha$ iken $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olur.

$\triangle ABC$ nden $\sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ bulunur.

$\triangle ABD$ nin alanı,

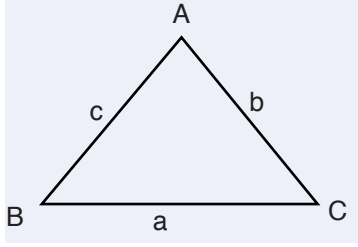
$$A(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \sin \alpha$$

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5}$$

$A(\widehat{ABD}) = 19,2 \text{ br}^2$ bulunur.

5. Kenar uzunlukları 5, 6 ve 7 cm olan üçgensel bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Kenar uzunlukları verildiğinde \widehat{ABC} nin alanını bulmak için,

$$2u = a + b + c$$

$$2u = 5 + 6 + 7$$

$$2u = 18$$

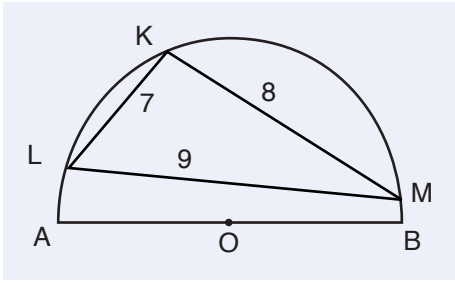
$$u = 9 \text{ değeri hesaplanır.}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c)} \text{ formülünden yararlanırsak,}$$

$$\begin{aligned} A(\widehat{ABC}) &= \sqrt{9 \cdot (9 - 5) \cdot (9 - 6) \cdot (9 - 7)} \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$A(\widehat{ABC}) = 6\sqrt{6} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

6.



Şekildeki \widehat{KLM} nde

$$|KL| = 7 \text{ cm}$$

$$|KM| = 8 \text{ cm}$$

$$|LM| = 9 \text{ cm dir.}$$

O merkezli çemberde $[AB]$ çapının uzunluğunun kaç cm olacağını bulalım.

ÇÖZÜM

\widehat{KLM} nin alanını hesaplayalım.

$$2u = 7 + 8 + 9$$

$$u = 12 \text{ bulunur.}$$

$$A(\widehat{KLM}) = \sqrt{12 \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 9)}$$

$$A(\widehat{KLM}) = 12\sqrt{5} \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

\widehat{KLM} nin çevrel çemberi O merkezli çemberdir. Bu çember yardımıyla da \widehat{KLM} nin alanını hesaplayalım. Çemberin yarıçapı $|AO| = |OB| = R$ olsun.

$$A(\widehat{KLM}) = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4R}$$

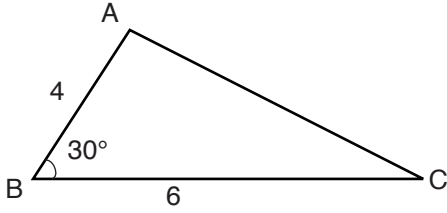
$$A(\widehat{KLM}) = \frac{126}{R} \text{ cm}^2 \text{ dir. Bu iki alan eşitliğinden } 12\sqrt{5} = \frac{126}{R}, R = \frac{126}{12\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{21}{2\sqrt{5}} \text{ cm bulunur. Buradan, } |AB| = 2R = 2 \cdot \frac{21}{2\sqrt{5}} = \frac{21}{\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{5} \text{ ise } |AB| = \frac{21\sqrt{5}}{5} \text{ cm olur.}$$



Uygulamalar

1.



Şekildeki \widehat{ABC} nde,

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|BC| = 6 \text{ cm}$$

$m(\widehat{ABC}) = 30$ ise $|AC|$ nu bulunuz.

2.

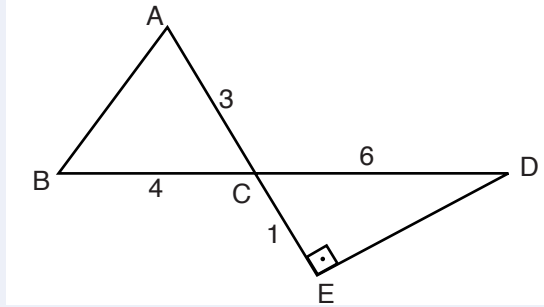
Şekilde, C, D ve A, C, E noktaları doğrusaldır.

$$|AC| = 3 \text{ cm}$$

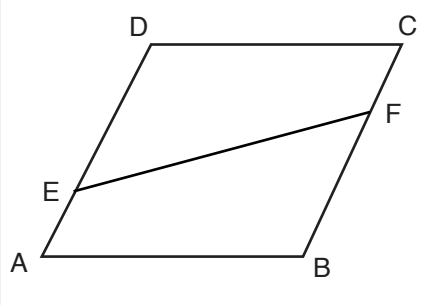
$$|BC| = 4 \text{ cm}$$

$$|CD| = 6 \text{ cm}$$

$$|CE| = 1 \text{ cm} \text{ ise } |AB| \text{ nu bulunuz.}$$



3.



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde,

$$|AE| = |FC| = 2 \text{ cm}$$

$$|BF| = 4 \text{ cm}$$

$m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$ ise $|EF|$ nu bulunuz.

4.

ABCD kirişler dörtgeninde,

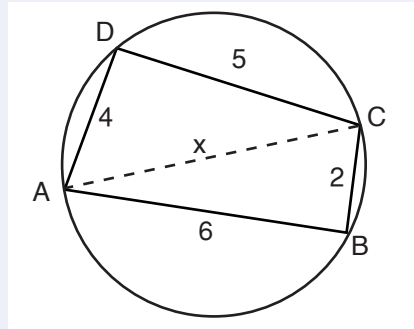
$$|AD| = 4 \text{ cm}$$

$$|DC| = 5 \text{ cm} \text{ ise}$$

$$|BC| = 2 \text{ cm}$$

$$|AB| = 6 \text{ cm}$$

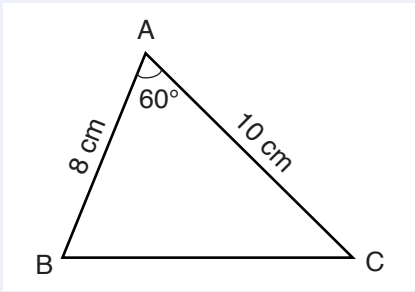
$$|AC| = x \text{ değeri kaçtır?}$$



5. ABC üçgeninin a, b ve c kenar uzunlukları arasında $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ bağıntısı varsa $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

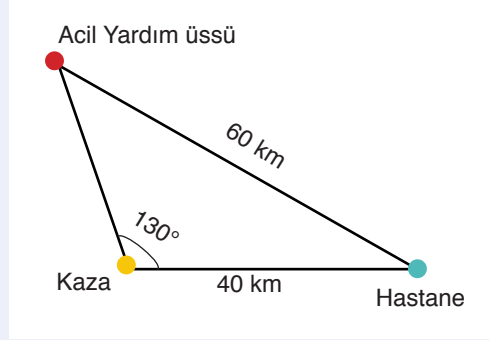
6. Çevrel çemberinin yarıçapı 8 cm olan düzgün onikigenin çevre uzunluğunu bulunuz.

7.

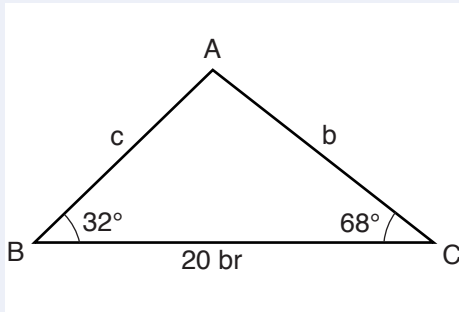


Şekildeki $\triangle ABC$ nde, $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm ve $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ ise ABC üçgensel bölgesinin alanını bulunuz.

8. Şekilde görüldüğü gibi acil yardım üssünden havalanan bir helikopter, trafik kazasında yaralananları alarak hastaneye götürüyor. Acil yardım üssünün kaza yerine olan uzaklığını bulunuz.

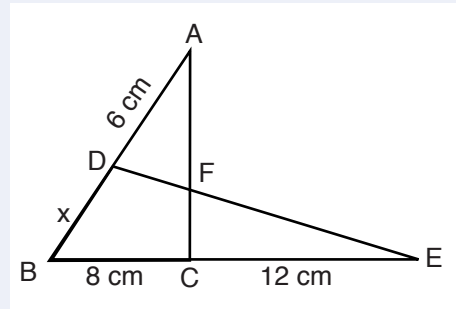


9.

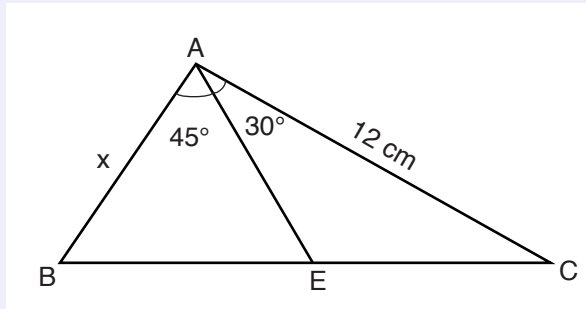


$|BC| = 20$ br olduğuna göre $|AB|$ ve $|AC|$ nu bulunuz.

10. Şekildeki D, F, E ve A, F, C noktaları doğrusaldır.
 $\angle ADF = \angle FCE$
 $|AD| = 6$ cm
 $|BC| = 8$ cm
 $|CE| = 12$ cm ise $|BD| = x$ kaç cm dir?

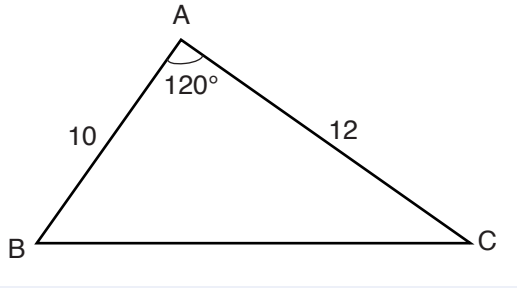


11.



Şekildeki $\triangle ABC$ nde B, E ve C doğrusaldır.
 $m(\widehat{CAE}) = 30^\circ$
 $m(\widehat{BAE}) = 45^\circ$
 $|AC| = 12$ cm
 $2|BE| = 3|EC|$ ise $|AB| = x$ kaç cm dir?

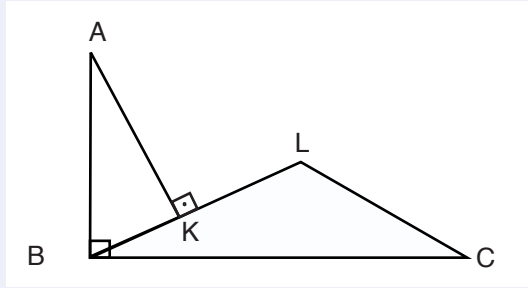
12.



Şekildeki $\triangle ABC$ nde,
 $|AB| = 10$ cm
 $|AC| = 12$ cm
 $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ ise $\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

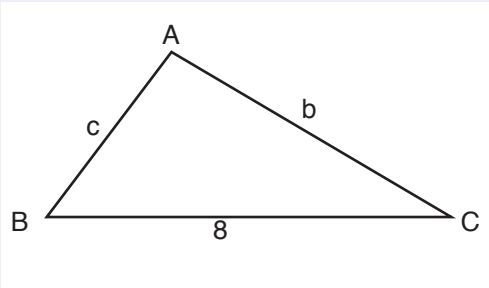
13.

Şekilde,
 $|AB| = |BC|$
 $|BK| = 4$ cm
 $|KL| = 3$ cm dir.
 BLC üçgensel bölgesinin alanını bulunuz.



14. Kenar uzunlukları 5, 6 ve 7 cm olan üçgenin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

15.



Şekildeki $\triangle ABC$ nde $c \cdot \cos \widehat{B} + b \cdot \cos \widehat{C}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

16. Bir $\triangle ABC$ nde, $\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \frac{4}{7}$, $\cos \widehat{A} = \frac{7}{8}$ ve $2c + b = 18$ olduğuna göre a kenar uzunluğunu bulunuz.

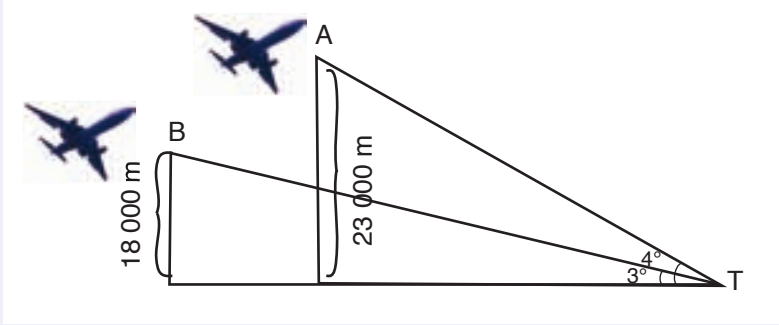
17.



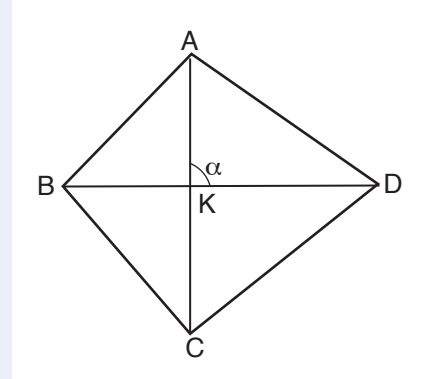
Bir mühendis, ulaşamadığı C noktasının A ve B noktalarına olan uzaklıklarını bulmak istiyor. $|AB| = 25$ m, $m(\widehat{ABC}) = 130^\circ$ ve $m(\widehat{CAB}) = 40^\circ$ olduğuna göre C noktasının A ve B noktalarına uzaklıklarını bulunuz.

18. İki uçak şekildeki gibi A ve B noktalarında bulunmaktadır. Yerden yükseklikleri sırasıyla 23 000 m ve 18 000 m dir. Bu uçakların her biri T noktasında bulunan iniş pistine ulaşmaya çalışıyor. T noktası ile A uçağı 4° lik, B uçağı ise 3° lik açı yaptığına göre bu iki uçağın piste olan uzaklıklarını bulunuz.

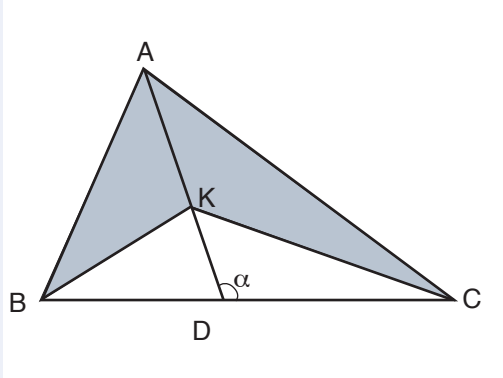
(Yol gösterme: Hesap makinesi veya trigonometrik değerler tablosunu kullanınız.)



19. ABCD dörtgeninde AC ve BD köşegen $m(\widehat{AKD}) = \alpha$ ise
 $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \alpha$ olduğunu
gösteriniz.



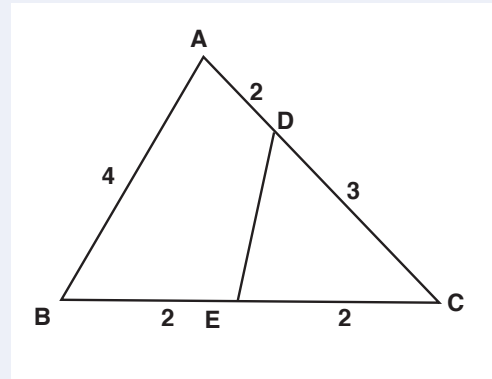
20.



Şekildeki taralı alanın

$A(ABKC) = \frac{1}{2} |AK| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha$ olduğunu
gösteriniz.

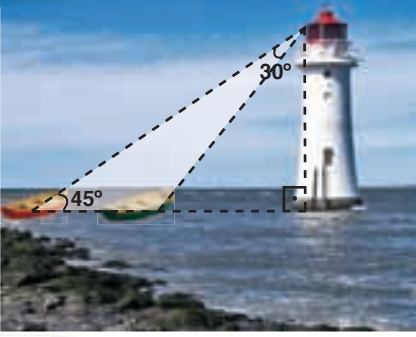
21. Şekilde verilenlere göre $|DE|$ uzunluğunu bulunuz.



TOPLAM VE FARK FORMÜLLERİ

İKİ SAYININ TOPLAM VE FARKLARININ TRİGONOMETRİK ORANLARI

Motivasyon

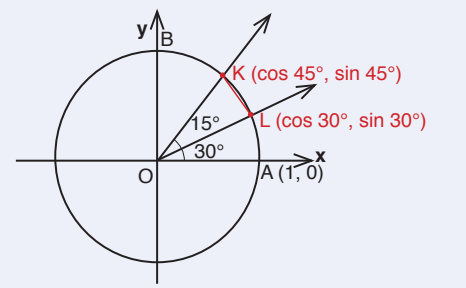


Deniz fenerinden kayıklara doğru gelen ışık hüzmelerinin arasındaki açı 30° dir. Kırmızı kayığın deniz yüzeyi ile yaptığı açı ise 45° dir. Buna göre yeşil kayığın 10 m yüksekliğindeki fenere olan uzaklığını, trigonometrik cetvel kullanmadan nasıl bulursunuz?

Etkinlik

- 30° , 45° ve 60° nin trigonometrik oranlarını dik üçgenler yardımıyla bulunuz. Bu açılar yardımıyla 15° , 75° ve 105° lik açılarının trigonometrik oranlarını bulup bulamayacağınızı tartışınız.
- $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $0 < y < \pi$ olmak üzere $\sin x = \frac{2}{3}$ ve $\cos y = \frac{2}{3}$ ise $\cos(x - y)$ ifadesinin yaklaşık değerini trigonometrik cetvel yardımıyla bulunuz.
- Dik üçgenler yardımıyla $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$ değerini bularak bu değeri $\cos(x - y)$ ile karşılaştırınız.
- $\sin(x + y)$, $\cos(x + y)$, $\tan(x + y)$ ve $\cot(x + y)$ ifadelerinin eşitlerini x ve y nin trigonometrik oranları cinsinden bulmaya çalışınız.

Örnek



$\cos 15^\circ$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Ölçüleri 45° ve 30° olan açılarının bitim noktalarının koordinatları K ve L olsun.

Şekildeki \widehat{KOL} nde K ve L arasındaki uzaklığı bulalım.

$$|KL| = \sqrt{(\cos 45^\circ - \cos 30^\circ)^2 + (\sin 45^\circ - \sin 30^\circ)^2} \dots (I)$$

$|OK| = |OL| = 1$ br olduğundan \widehat{KOL} nde kosinüs teoreminden de yararlanarak $|KL|$ nu bulabiliriz.

$$|KL|^2 = |OK|^2 + |OL|^2 - 2 \cdot |OK| \cdot |OL| \cdot \cos 15^\circ$$

$$|KL|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 15^\circ \text{ ise } |KL| = \sqrt{2 - 2 \cos 15^\circ} \dots (II)$$

(I) ve (II) eşitliklerinden,

$$\sqrt{2 - 2 \cos 15^\circ} = \sqrt{(\cos 45^\circ - \cos 30^\circ)^2 + (\sin 45^\circ - \sin 30^\circ)^2}$$

$$2 - 2 \cos 15^\circ = \cos^2 45^\circ - 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ - 2 \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ$$

$$2 - 2 \cos 15^\circ = \underbrace{\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ}_1 + \underbrace{\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ}_1 - 2(\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ)$$

$$2 - 2 \cos 15^\circ = 2 - 2(\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ)$$

$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$ bağıntısı elde edilir. 30° ve 45° nin trigonometrik oranlarını yerine yazarsak,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ bulunur. Buradan}$$

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ bağıntısı elde edilir.



Örnek

1. a ve b açılarının trigonometrik oranları belli iken $a - b$ açısının kosinüs değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ bağıntısında b yerine $-b$ yazıldığında,

$$\cos[a - (-b)] = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin(-b)$$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ bağıntısı elde edilir.

2. $\sin(a + b)$ ve $\sin(a - b)$ değerlerini kosinüs cinsinden yazarak bulalım.

ÇÖZÜM

$$\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b \text{ olur. Buradan da}$$

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ bağıntısı, bu bağıntıda b yerine $-b$ yazılırsa

$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$ bağıntısı elde edilir.

3. $\tan(a + b)$ ve $\cot(a + b)$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}$$

eşitliklerinden yararlanarak pay ve paydayı $\cos a \cdot \cos b$ ifadesine bölersek,

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \text{ bağıntısı, bu bağıntıda a yerine } -b \text{ yazarsak}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \text{ bulunur.}$$

$$\cot(a + b) = \frac{1}{\tan(a + b)} \text{ ve } \cot(a - b) = \frac{1}{\tan(a - b)} \text{ yararlanarak da}$$

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b} \text{ ve } \cot(a - b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a} \text{ bağıntıları bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

İki sayının toplam ve farkının trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir:

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin (a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} , \quad \tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cot (a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot b + \cot a} , \quad \cot (a - b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$



Örnek

1. $\sin 15^\circ$ ve $\tan 75^\circ$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$ eşitliğinde $a = 60^\circ$ ve $b = 45^\circ$ yazalım.

$$\sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ olur.}$$

$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ eşitliğinde $a = 45^\circ$ ve $b = 30^\circ$ için

$$\tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} \text{ ise } \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

2. $\frac{\cos 63^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 63^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 57^\circ \cdot \cos 33^\circ + \cos 57^\circ \cdot \sin 33^\circ}$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

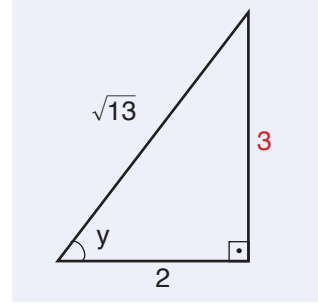
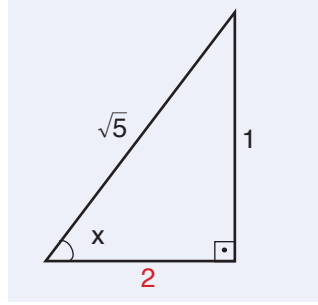
$$\frac{\cos 63^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 63^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 57^\circ \cdot \cos 33^\circ + \cos 57^\circ \cdot \sin 33^\circ} = \frac{\cos (63^\circ - 18^\circ)}{\sin (57^\circ + 33^\circ)} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

3. $\cot \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cot \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ ifadesinde, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} = x$ ve $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} = y$ diyelim.

Bu durumda, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $\cos y = \frac{2}{\sqrt{13}}$ bulunur.

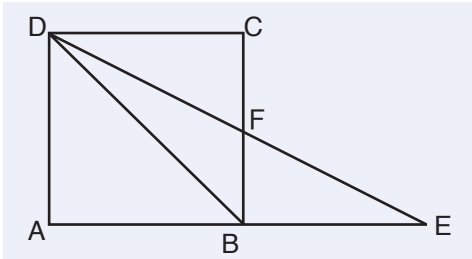


Yukarıdaki trigonometrik oranlar yardımıyla,

$$\cot \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = \cot (x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} - 1}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$$

$$\cot \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = \frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

4.



Şekildeki ABCD karesinde DB köşegen A, B, E ve D, F, E noktaları doğrusaldır.

$|AB| = |BE|$ ise $\tan(\widehat{BDE})$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Şekilde $m(\widehat{BDE}) = x$, $m(\widehat{DEB}) = y$ diyelim.

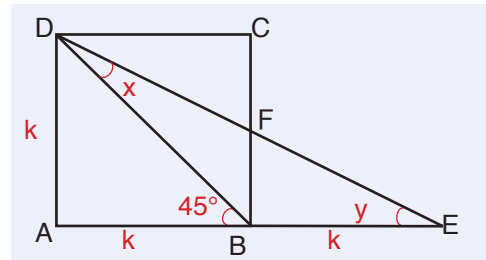
[DB] köşegen olduğundan $m(\widehat{DBA}) = 45^\circ$ tir.

\widehat{DEB} nde $x + y = 45^\circ$ dir. Buradan

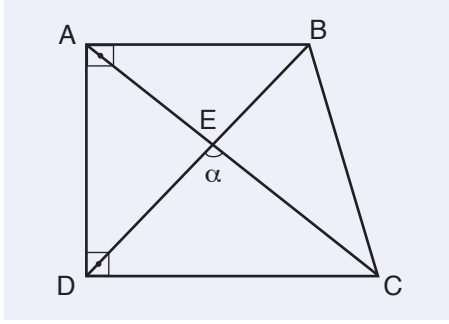
$x = 45 - y$ dir.

$$\tan x = \tan (45^\circ - y) = \frac{\tan 45^\circ - \tan y}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan y} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\tan x = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$



5.



Yandaki ABCD dik yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$,
 $|AB| = 3$ br, $|AD| = 4$ br ve $|DC| = 4$ br
 olarak veriliyor.

$m(\widehat{DEC}) = \alpha$ ise $\sin \alpha$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

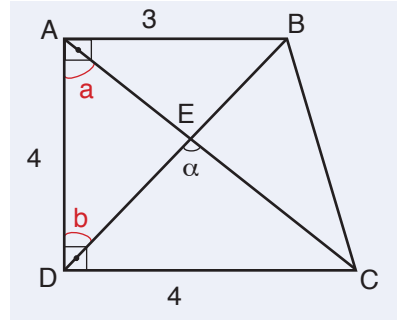
$m(\widehat{DAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ADB}) = b$ olsun. \widehat{AED} nde $a + b = \alpha$ dır.

ABD dik üçgeninde $|DB|^2 = 4^2 + 3^2$ ise

$|DB| = 5$ br, \widehat{ADC} nde $|AC|^2 = 4^2 + 4^2$ ise $|AC| = 4\sqrt{2}$ br
 olur. Buradan,

$\sin \alpha = \sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$= \frac{4}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \text{ br bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Önceki etkinlikte bulduğunuz bağıntıları ve 30° , 45° ve 60° nin trigonometrik oranlarını kullanarak aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\sin 15^\circ = \sin (\dots + \dots) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\tan 75^\circ = \tan (\dots + \dots) = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{1 - \dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

$$\cot 15^\circ = \cot (\dots - \dots) = \frac{\dots\dots\dots + 1}{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

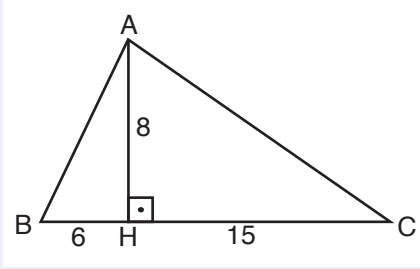
a) $\cos 18^\circ \cdot \sin 22^\circ + \sin 18^\circ \cdot \cos 22^\circ$

b) $\cos 23^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ$

c) $\frac{\tan 17^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 17^\circ \cdot \tan 13^\circ}$

ç) $\frac{\cot 42^\circ \cdot \cot 18^\circ - 1}{\cot 42^\circ + \cot 18^\circ}$

3.

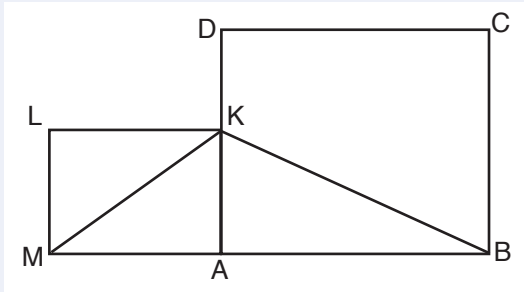


ABC üçgeninde $|AH| \perp |BC|$,
 $|AH| = 8$ br, $|BH| = 6$ br, $|CH| = 15$ br ise
 $\tan(\widehat{BAC})$ değeri kaçtır?

4. $0 < x < \pi$ ve $0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x = \frac{1}{2}$ ve $\tan y = \frac{1}{3}$ olarak veriliyor. $x + y$ açısının kaç radyan olduğunu bulunuz.

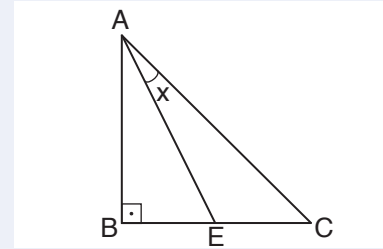
5. ABC üçgeninde $\sin \widehat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ve $\sin \widehat{B} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ise C açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



ABCD ve AKLM karedir. $|AK| = |KD|$
 olduğuna göre $\cot(\widehat{MKB})$ değerini
 bulunuz.

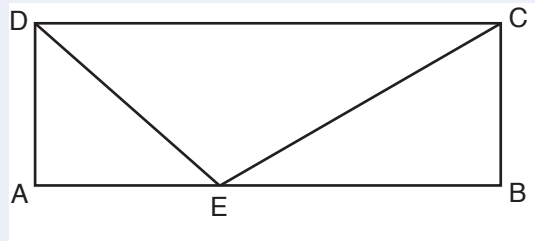
7. ABC üçgeninde $[AB] \perp [BC]$, $|AB| = |BC|$,
 $|BE| = |EC|$ ve $m(\widehat{EAC}) = x$ ise $\tan x$ değeri
 bulunuz.



8. $\cos(\arctan 2 + \arctan 3)$ değerini bulunuz.

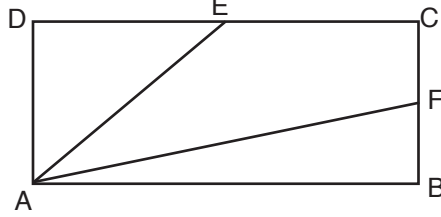
9. $\sin x - \cos y = \frac{1}{2}$ ve $\cos x - \sin y = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $\sin(x + y)$ değerini hesaplayınız.

10.



ABCD dikdörtgeninde $|AD| = |AE| = \frac{|BE|}{2}$
 ise $\cot(\widehat{DEC})$ değerini bulunuz.

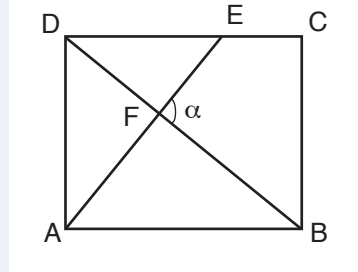
11.



ABCD dikdörtgeninde $|BF| = |FC| = 3br$ ve $|DE| = |EC| = 6br$ ise $\sin(\widehat{EAF})$ değerini bulunuz.

12. $\text{arccot } 2 + \text{arccot } 3$ toplamı kaç radyandır?

13. ABCD karesinde, $|DE| = 2|EC|$ ve $m(\widehat{EFB}) = \alpha$ ise $\cos \alpha$ değerini bulunuz.

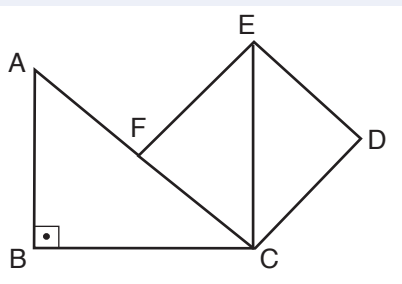


14. $\frac{\tan 41^\circ + \tan 19^\circ}{1 - \tan 41^\circ \cdot \tan 19^\circ}$ değeri kaçtır?

15. $\frac{\cos 72^\circ \cdot \cos 27^\circ - \sin 72^\circ \cdot \sin 27^\circ}{\sin 29^\circ \cdot \cos 52^\circ + \cos 29^\circ \cdot \sin 52^\circ}$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

16. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ve $\tan x = \frac{5}{12}$ olmak üzere $\pi < y < 2\pi$ ve $\cos y = \frac{3}{5}$ olmak üzere $\sin(x + y)$ değeri kaçtır?

17.



ABC üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $|AB| = |FE| = 2 \cdot |AF|$ dir. DEFC kare olduğuna göre $\tan(\widehat{BCE})$ değeri kaçtır?

18. $\tan 53^\circ = x$ ve $\cot 17^\circ = y$ olduğuna göre, $\cot 20^\circ$ ifadesinin x ve y cinsinden değeri nedir?

19. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ve $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere, $\sin x = \frac{2}{3}$ ve $\tan y = 3$ ise, $\cos(x + y)$ nin değeri kaçtır?

YARIM AÇI FORMÜLLERİ



Etkinlik

- Ölçüsü 5° olan bir açının sinüs değeri m iken ölçüsü bu açının iki katı olan bir açının trigonometrik oranlarını toplam veya fark formülleri yardımıyla bulunuz.
- $\sin 60^\circ = \sin (2 \cdot 30^\circ) = 2 \cdot \sin 30^\circ$
 $\cos 90^\circ = \cos (2 \cdot 45^\circ) = 2 \cdot \cos 45^\circ$ eşitliklerinin doğruluğunu tartışınız.
- Ölçüsü $2x$ derece olan bir açının trigonometrik oranlarını, ölçüsü x derece olan açının trigonometrik oranları cinsinden nasıl yazılabileceğini tartışınız.



Örnek

1. $\cos 20^\circ = a$ iken $\cos 40^\circ$ nin a cinsinden eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\cos 40^\circ &= \cos (20^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \cdot \sin 20^\circ \\ \cos 40^\circ &= \cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ \\ \cos 40^\circ &= \cos^2 20^\circ - (1 - \cos^2 20^\circ) \\ \cos 40^\circ &= 2\cos^2 20^\circ - 1 \\ \cos 40^\circ &= 2a^2 - 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

2. $\cos 2x$ ifadesinin $\cos x$ ve $\sin x$ cinsinden eşitlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\cos (a + b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \text{ eşitliğinde } a \text{ ve } b \text{ yerine } x \text{ yazalım.} \\ \cos (x + x) &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

3. $\sin 2x$ ifadesinin eşitini $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden yazalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\sin (a + b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \text{ eşitliğinde } a \text{ ve } b \text{ yerine } x \text{ yazarsak,} \\ \sin (x + x) &= \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x \\ \sin 2x &= 2\sin x \cdot \cos x \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

4. $\tan 2x$ ifadesini $\tan x$ ve $\cot 2x$ ifadesini $\cot x$ cinsinden yazalım.

ÇÖZÜM

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \text{ ve } \cot (a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot b + \cot a} \text{ eşitliklerinde}$$

a ve b yerine x yazarsak,

$$\tan (x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \cdot \tan x} \quad \cot (x + x) = \frac{\cot x \cdot \cot x - 1}{\cot x + \cot x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} \text{ bulunur.}$$



Tanım ve Bilgi

Yarım açı formülleri şunlardır:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

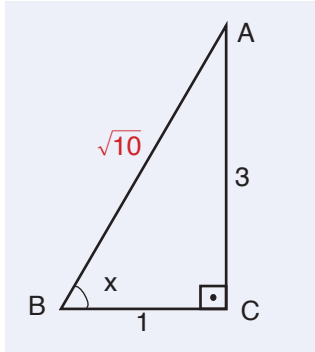


Örnek

1. $\tan x = 3$ ise $\sin 2x$ ve $\cos 2x$ değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\tan x = 3$ ise diğer trigonometrik oranları bulabilmek için yardımcı dik üçgenimizi çizelim.



$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 - 1 = \frac{2}{10} - 1 = -\frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

2. $\frac{\cos x + 1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2}$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$$\frac{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 + 1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \cot \frac{x}{2} \text{ olur.}$$

3. $\frac{\sin 66^\circ}{\sin 22^\circ} - \frac{\cos 66^\circ}{\cos 22^\circ}$ ifadesinin en sade şeklini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \frac{\sin 66^\circ}{\sin 22^\circ} - \frac{\cos 66^\circ}{\cos 22^\circ} &= \frac{\sin 66^\circ \cdot \cos 22^\circ - \cos 66^\circ \cdot \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ} = \frac{\sin(66^\circ - 22^\circ)}{\sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ} = \frac{\sin 44^\circ}{\sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ} = 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. $\sin^2 \frac{\pi}{8}$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ eşitliğinde x yerine $\frac{\pi}{8}$ yazarsak,

$$\cos \frac{2\pi}{8} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8} \text{ eşitliğinde } \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \text{ olur.}$$

5. $\sin a - \cos a = \frac{2}{3}$ ise $\sin 2a$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\sin a - \cos a = \frac{2}{3}$ eşitliğinde her iki tarafın karesini alalım. $(\sin a - \cos a)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$\sin^2 a + \cos^2 a - 2\sin a \cdot \cos a = \frac{4}{9}, \quad 1 - \sin 2a = \frac{4}{9} \text{ ise } \sin 2a = \frac{5}{9} \text{ bulunur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıda verilen eşitliklerin doğru olup olmadıklarını belirtiniz. Yanlış olanların doğrularını yazınız.

	Doğru	Yanlış
(A) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
(B) $\sin 2x = 2\sin x$
(C) $\cos 2x = 1 - 2\cos 2x$
(Ç) $\cos 4x = \cos^2 2x - 1$
(D) $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$
(E) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
(F) $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$
(G) $\cos 2x = 2\sin^2 x$
(Ğ) $\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{4}$

2. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\tan x = 3$ ise $\cos 2x$ değerini bulunuz.

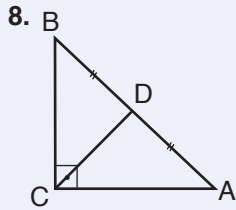
3. $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$ değerini hesaplayınız.

4. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ için $\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ ise $\sin x$ değerini bulunuz.

5. $\frac{\sin 33^\circ}{\sin 11^\circ} - \frac{\cos 33^\circ}{\cos 11^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $2\cos^2 22,5^\circ - 1$ değerini hesaplayınız.

7. $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$ ise $\sin 2x$ değerini hesaplayınız.



ABC üçgeninde $[AC] \perp [BC]$, $|AC| = 8$ br, $|BC| = 6$ br,
 $|AD| = |BD|$ olduğuna göre $\tan(\widehat{BDC})$ değerini bulunuz.

9. $\sec\left(2\arctan \frac{1}{3}\right)$ değerini hesaplayınız.

10. $\sin 78^\circ = m$ ise $\tan 24^\circ$ nin m cinsinden eşitini bulunuz.

11. $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ için $\frac{\cos 2y + 1}{\sin 2y} = \frac{4}{3}$ ise $\cos 2y$ değerini bulunuz.

12. $0 < a < \frac{\pi}{2}$ için $\frac{\cos 3a}{\cos a} + \frac{\sin 3a}{\sin a} = 1$ olduğuna göre $\cos 2a$ değerini bulunuz.

13. $\frac{1}{\sin 70^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

14. $\frac{1}{\cot 15^\circ} - \frac{1}{\tan 15^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

DÖNÜŞÜM VE TERS DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ



Etkinlik

- $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$, $\cos 70^\circ + \cos 10^\circ$ gibi toplama durumundaki trigonometrik ifadelerin çarpma durumundaki trigonometrik ifadeler biçiminde nasıl yazılabileceğini tartışınız.
 - Ya da tam tersine $\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ$, $\sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ$ biçimindeki ifadelerin trigonometrik toplam biçiminde nasıl yazılabileceğini tartışınız.
 - $\sin(x + y)$ ve $\sin(x - y)$ ifadelerinin açılımlarını taraf tarafa toplayarak yukarıdaki problemlerin çözümleri için bağıntılar elde etmeye çalışınız.
- ☞ Benzer şekilde $\cos(x + y)$ ve $\cos(x - y)$ ifadelerinin açılımlarını kullanarak nasıl bağıntılar elde edilebilir? Tartışınız.



Örnek

1. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ve

$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$\sin(x + y)$ ve $\sin(x - y)$ açılımlarını yazarak taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ + \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \\ \hline \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cdot \cos y \end{array}$$

$x + y = a$ ve $x - y = b$ olsun. Buradan $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ olur.

Bu eşitlikler yukarıda kullanılırsa,

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

Benzer işlemlerle $\sin(x + y)$ ve $\sin(x - y)$ açılımları taraf tarafa çıkarılarak,

$$\begin{array}{r} \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ - \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \\ \hline \sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \cdot \sin y \end{array}$$

Buradan $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

2. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ve

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$\cos(x+y)$ ve $\cos(x-y)$ açılımlarını yazarak taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ + \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \hline \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cdot \cos y \end{array}$$

$x+y = a$ ve $x-y = b$ olsun. Buradan, $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ olur.

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ elde edilir.

Benzer işlemlerle $\sin(x+y)$ ve $\sin(x-y)$ açılımları taraf tarafa çıkarılarak,

$$\begin{array}{r} \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ - \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \hline \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y \end{array}$$

Buradan $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ eşitlikleri yerine yazıldığında,

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ elde edilir.

3. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ + \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b \end{array}$$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ bulunur.

$\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$ açılımları ile benzer işlemler yapılarak,

$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$ ve

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ eşitlikleri elde edilir.



Tanım ve Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

Dönüşüm formülleri

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Ters dönüşüm formülleri

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \text{ biçimindedir.}$$



Örnek

1. $\frac{\sin 75^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ - \cos 75^\circ}$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{\sin 75^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ - \cos 75^\circ} &= \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cancel{2} \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2}}{\cancel{2} \cdot \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2}} = \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 75^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ - \cos 75^\circ} = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

2. $8x = \pi$ ise $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$ ifadesinin değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \cdot \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2}} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cancel{\cos x}}{2 \cdot \cos 2x \cdot \cancel{\cos x}} = \tan 2x$$

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ ise } \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ bulunur.}$$

3. $\frac{\sin 7x + \sin 6x + \sin 5x}{\cos 7x + \cos 6x + \cos 5x} = \tan 6x$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \frac{\sin 7x + \sin 6x + \sin 5x}{\cos 7x + \cos 6x + \cos 5x} &= \frac{2 \cdot \sin \frac{7x+5x}{2} \cdot \cos \frac{7x-5x}{2} + \sin 6x}{2 \cdot \cos \frac{7x+5x}{2} \cdot \cos \frac{7x-5x}{2} + \cos 6x} = \frac{2 \cdot \sin \frac{12x}{2} \cdot \cos \frac{2x}{2} + \sin 6x}{2 \cdot \cos \frac{12x}{2} \cdot \cos \frac{2x}{2} + \cos 6x} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 6x \cdot \cos x + \sin 6x}{2 \cdot \cos 6x \cdot \cos x + \cos 6x} \\ &= \frac{\sin 6x \cdot (\cancel{2 \cos x} + 1)}{\cos 6x \cdot (\cancel{2 \cos x} + 1)} \\ &= \tan 6x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ ifadesinin eşitini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ ifadesinde ters dönüşüm formülünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{8} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki toplam durumundaki trigonometrik ifadeleri örneğe uygun biçimde çarpım durumunda yazınız.

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 20^\circ$$

$$\cos 70^\circ + \cos 20^\circ =$$

$$\sin 50^\circ - \sin 20^\circ =$$

$$\cos 20^\circ + \cos 10^\circ =$$

$$\cos 50^\circ + \sin 50^\circ =$$

$$\tan 10^\circ - \tan 80^\circ =$$

$$\sin 4x - \sin 2x =$$

$$\cos 5x + \cos 3x + \cos x =$$

$$\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x =$$

2. Aşağıda verilen eşitliklerin doğru olup olmadıklarını belirtiniz. Yanlış olanların doğrularını yazınız.

$$\frac{\sin 9x + \sin 7x}{\cos 9x - \cos 7x} = -1$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -\sin 10^\circ$$

$$a + b = 90^\circ \text{ ise } \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -1$$

$$\frac{\cos 70^\circ + \cos 40^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 40^\circ} = \tan 55^\circ$$

$$\frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{\cos 3x + \cos 2x + \cos x} = \tan 2x$$

$$\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = -\sqrt{3}$$

3. $7x = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 4x - \sin 2x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

4. $18x = \pi$ olduğuna göre $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. Aşağıda çarpım durumunda verilen trigonometrik fonksiyonları örneğe uygun biçimde ters dönüşüm formüllerini kullanarak toplam durumuna getiriniz.

$\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ = -\frac{1}{2} \left[\cos(40^\circ + 20^\circ) - \cos(40^\circ - 20^\circ) \right] = -\frac{1}{2} (\cos 60^\circ - \cos 20^\circ)$
$\sin 70^\circ \cdot \cos 20^\circ =$
$\cos 50^\circ \cdot \cos 20^\circ =$
$\sin 4x \cdot \cos x =$
$\sin 6a \cdot \sin 3a =$
$\cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x =$

6. Aşağıda verilen eşitliklerin doğru veya yanlış olduklarını belirtiniz. Yanlış olanların doğrularını yazınız.

$\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{4}$
$\sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ$
$\sin \frac{23\pi}{24} \cdot \cos \frac{7\pi}{24} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$
$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = -\frac{1}{16}$
$\sin a \cdot \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \cos 8a \cdot \cos 16a = -\frac{\sin 32a}{32}$
$\frac{1}{\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ} = 4$

7. $\cos 5^\circ = m$ ise, $\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ$ değerini m cinsinden bulunuz.

8. $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$ çarpımının değerini bulunuz.

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$ BİÇİMİNDEKİ TRİGONOMETRİK DENKLEMLER



Motivasyon



Dikdörtgen şeklindeki kitaplığın kenar uzunlukları $\tan x$ ve $\cot x$ birimdir. Kitaplığın çevre uzunluğu $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ br ise x açısını nasıl buluruz?



Etkinlik

(I) $\sin x = \frac{1}{2}$

(II) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(III) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(IV) $\cot x = \sqrt{3}$

- Yukarıdaki denklemleri inceleyiniz. Ölçüleri 30° , 150° , 210° , 330° , 390° , 510° , -30° , -150° , -1470° olan açılardan hangilerinin bu denklemleri sağladığını bulunuz.
 - (I) denklemini sağlayan açılar arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Bu açılardan başka sağlayan açılar var mıdır? Bu denklemin çözüm kümesinin genel olarak nasıl ifade edilebileceğini tartışınız.
 - (I) denklemi için yaptığınız incelemeyi diğer denklemler için de yaparak çözüm kümelerini bulunuz.
- ☞ $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$ ve $\cot x = a$ biçimindeki trigonometrik denklemlerin çözüm kümeleri için bir genellemeye ulaşmaya çalışınız.



Örnek

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $\tan x = 1$ ç) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ÇÖZÜM

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ denklemini sağlayan x değerlerinden biri 60° dir. x açısının kosinüsü 1 ve 4. bölge lerde aynı değerleri alacağından x açısının ölçüleri,

$$x_1 = 60^\circ, 420^\circ, 780^\circ, \dots$$

$$x_2 = -60^\circ, -420^\circ, -780^\circ, \dots \text{ dur. Buradan denklemin çözüm kümesi,}$$

$$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad x_2 = -60^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olarak yazılır.}$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ denklemini sağlayan x değerlerinden biri 210° dir. x açısının sinüsü 3 ve 4. bölgelerde aynı değerleri alacağından x açısının ölçüleri,

$$x_1 = 210^\circ, 570^\circ, 930^\circ, \dots$$

$x_2 = -30^\circ, -390^\circ, -750^\circ, \dots$ olur. Buradan denklemin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \vee x_2 = -30^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olarak yazılır.}$$

c) $\tan x = 1$ denklemini sağlayan x değerlerinden biri 45° dir. x açısının tanjantı 1 ve 3. bölgelerde aynı değerleri alacağından x açısının ölçüleri,

$x = \dots -135^\circ, 45^\circ, 225^\circ, \dots$ olur. Buradan denklemin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = 45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olarak yazılır.}$$

d) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ denklemini sağlayan x değerlerinden biri 120° dir. x açısının kotanjantı 2 ve 4.

bölgelerde aynı değerleri alacağından x açısının ölçüleri,

$x = \dots -240^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 480^\circ, \dots$ olur. Buradan denklemin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = 120^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olarak yazılır.}$$



Tanım ve Bilgi

1. $\sin x = \sin \alpha$ denkleminin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = \alpha + 360^\circ \cdot k \vee x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$ denklemin çözüm kümesi ise

$$\mathcal{C} = \{x \mid f(x) = g(x) + 360^\circ \cdot k \vee f(x) = 180^\circ - g(x) + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ dir.}$$

2. $\cos x = \cos \alpha$ denkleminin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = \alpha + 360^\circ \cdot k \vee x_2 = -\alpha + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ denkleminin çözüm kümesi ise

$$\mathcal{C} = \{x \mid f(x) = g(x) + 360^\circ \cdot k \vee f(x) = -g(x) + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ dir.}$$

3. $\tan x = \tan \alpha$ ve $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = \alpha + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\tan(f(x)) = \tan(g(x))$ ve $\cot(f(x)) = \cot(g(x))$ denklemlerinin çözüm kümesi ise,

$$\mathcal{C} = \{x \mid f(x) = g(x) + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ dir.}$$



Örnek

1. $\cos(2x - 60^\circ) = \sin x$ denkleminin gerçel sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos(2x - 60^\circ) = \sin x$ denklemini $\cos(2x - 60^\circ) = \cos(90^\circ - x)$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda,

$$2x_1 - 60^\circ = 90^\circ - x_1 + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad 2x_2 - 60^\circ = -(90^\circ - x_2) + 360^\circ \cdot k \text{ yazılabilir.}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 150^\circ + 360^\circ.k & \vee & \quad 2x_2 - 60^\circ = -90^\circ + x_2 + 360^\circ.k \\ x_1 &= 50^\circ + 120^\circ.k & \vee & \quad x_2 = -30^\circ + 360^\circ.k \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buradan denklemin çözüm kümesi,

$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = 50^\circ + 120^\circ.k, \quad \vee \quad x_2 = -30^\circ + 360^\circ.k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde yazılır.

2. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ denkleminin $[0, 360^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ denkleminde $\sin x = t$ dönüşümü uygulayalım.

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ denklemini çözersek,

$$(2t - 1)(t - 2) = 0 \text{ için } t_1 = \frac{1}{2} \text{ veya } t_2 = 2 \text{ bulunur.}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ ise; } \sin x = \sin 30^\circ \text{ yazılır.}$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ.k \quad \vee \quad x_2 = 150^\circ + 360^\circ.k \text{ bulunur.}$$

$\sin x = 2$ ise denklemin çözüm kümesi \emptyset dir.

Sonuç olarak $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi,

$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = 30^\circ + 360^\circ.k \quad \vee \quad x_2 = 150^\circ + 360^\circ.k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ bulunur.

3. $\sin 4x + \sin 2x = \cos x$ denkleminin $[0, 180^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin 4x + \sin 2x = \cos x$ denkleminde dönüşüm formülünü uygulayalım.

$$2\sin \frac{4x + 2x}{2} \cdot \cos \frac{4x - 2x}{2} = \cos x$$

$$2\sin 3x \cdot \cos x = \cos x$$

$2\sin 3x \cdot \cos x - \cos x = 0$ denkleminde ortak paranteze alalım.

$$\cos x (2\sin 3x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \sin 3x = \frac{1}{2} \text{ denklemlerini çözelim.}$$

a. $\cos x = 0$ ise $\cos x = \cos 90^\circ$ denkleminde,

$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ.k \quad \vee \quad x_2 = -90^\circ + 360^\circ.k \text{ bulunur.}$$

$$k = 0 \text{ için } x_1 = 90^\circ \quad \vee \quad x_2 = -90^\circ \notin [0, 180^\circ)$$

$$k = 1 \text{ için } x_1 = 450^\circ \notin [0, 180^\circ) \quad x_2 = 270^\circ \notin [0, 180^\circ)$$

$k \in \mathbb{Z}$ için farklı değerlere karşılık $\cos x = 0$ denkleminin $[0, 180^\circ)$ aralığında tek kökü vardır. Bu durumda $\mathcal{C}_1 = \{90^\circ\}$ dir.

b. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ise $\sin 3x = \sin 30^\circ$ denkleminde,

$$3x_1 = 30^\circ + 360^\circ.k \quad \vee \quad 3x_2 = 180^\circ - 30^\circ + 360^\circ.k$$

$$x_1 = 10^\circ + 120^\circ.k \quad \vee \quad x_2 = 50^\circ + 120^\circ.k$$

$$k = 0 \text{ için } x = 10^\circ \quad \vee \quad x = 50^\circ$$

$$k = 1 \text{ için } x = 130^\circ \quad \vee \quad x = 170^\circ$$

$$k = 2 \text{ için } x = 250^\circ \notin [0, 180^\circ)$$

$k \in \mathbb{Z}$ için bu denkleminde dört farklı kökü olur.

$\mathcal{C} = \{10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ\}$ bulunur.

Denklemin $[0, 180^\circ)$ aralığındaki çözüm kümesi ise,

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{10^\circ, 50^\circ, 90^\circ, 130^\circ, 170^\circ\}$ şeklinde bulunur.

4. $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$ denklemini çarpanlarına ayıralım.

$$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 3\sin x & & -4\cos x \\ \sin x & & +\cos x \end{array}$$

$$(3\sin x - 4\cos x) \cdot (\sin x + \cos x) = 0$$

$3\sin x - 4\cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x + \cos x = 0$ denklemleri elde edilir.

a. $3\sin x - 4\cos x = 0$ denklemini çözelim.

$$\frac{3\sin x}{3\cos x} = \frac{4\cos x}{3\cos x}$$

$$\tan x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \arctan \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{x \mid x = \arctan \frac{4}{3} + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

b. $\sin x + \cos x = 0$ denklemini çözelim.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = -1 \text{ ise } x = -45^\circ + 180^\circ \cdot k \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{x \mid x = -45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Buradan denklemin çözüm kümesi,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{x \mid x_1 = \arctan \frac{4}{3} + 180^\circ \cdot k \quad \vee \quad x_2 = -45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olur.}$$



Uygulamalar

1. Aşağıdaki denklemlerin genel çözüm kümelerini yazınız.

a) $\tan x = \tan 20^\circ$

b) $\sin x = \sin 40^\circ$

c) $\cos x = \sin 50^\circ$

ç) $\cot x = \tan 10^\circ$

d) $\sin x = -\cos 2^\circ$

e) $\cos x = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$

f) $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$

g) $\cos x = \sin \frac{\pi}{6}$

ğ) $\cot x = \tan (-40^\circ)$

2. Aşağıdaki denklemlerin genel çözüm kümelerini yazınız.

a) $\cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

b) $\sin 2x = \sin (x - 20^\circ)$

c) $\tan 4x = \tan (-x)$

ç) $\cot (2x + 20^\circ) = \cot x$

d) $\sin \left(3x - \frac{\pi}{5} \right) = -\sin x$

e) $\cos (4x - 60^\circ) = \sin x$

f) $\tan \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cot 4x$

g) $\cot (3x - 10^\circ) = \tan (-20^\circ)$

3. Aşağıda verilen denklemlerin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümelerini yazınız.

a) $\sin x = \sin \frac{3\pi}{5}$

b) $\cot x = \cot \frac{\pi}{3}$

c) $\cos x = \cos \frac{\pi}{8}$

ç) $\sin x = \cos 20^\circ$

d) $\cot x = \tan 40^\circ$

e) $\sin x = \cos 20^\circ$

f) $\sin 2x = \sin (x + 135^\circ)$

g) $\sin 2x = \sin 5x - \sin 3x$

ğ) $\tan \frac{3x}{4} = \cot \frac{\pi}{6}$

h) $\cos (3x - 40^\circ) = \sin (x + 45^\circ)$

ı) $\cos 2x - 4\sin x - 3 = 0$

i) $\cos 5x \cdot \cos 3x = \cos 6x \cdot \cos 2x$

4. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\tan (\pi + 2x) = \cot 3x$

b) $\sin 7x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

c) $\sin 4x + \sin 2x = 0$

ç) $\cos 5x \cdot \cos 3x - \sin 5x \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin 8x \cdot \sin 2x = \sin 7x \cdot \sin 3x$

e) $\arctan x + \arctan (1 - x) = \arctan \frac{4}{3}$

f) $\tan 3x \cdot \cot x = 1$

5. $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2x \right) = 0$ denklemini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

6. $\cot x - 2 \cos^2 x = 0$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

$a \cos x + b \sin x = c$ BİÇİMİNDEKİ TRİGONOMETRİK DENKLEMLER



Etkinlik

$\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$ denklemini çözmeye çalışınız.

• $\sqrt{3}$ yerine $\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$ yazınız.

• Denklemleri düzenleyerek toplam ve fark formüllerini kullanınız.

• Önceki kazanımlardan öğrendiğiniz bilgilerden yararlanarak denklemleri çözmeye çalışınız.

☞ $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$ biçiminde verilen denklemleri çözümünde nasıl bir yol izleyebileceğinizi tartışınız.



Örnek

$\cos x + \sin x = 1$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$\cos x + 1 \cdot \sin x = 1$ denkleminde $\tan 45^\circ = 1$ değerini yerine yazalım.

$$\cos x + \tan 45^\circ \cdot \sin x = 1$$

$$\cos x + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \sin x = 1 \text{ eşitliğinde payda eşitleyerek,}$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin x}{\cos 45^\circ} = 1 \text{ olur. Fark formülünden,}$$

$\cos(x - 45^\circ) = \cos 45^\circ$ denklemleri elde edilir. Denklemlerde,

$$x - 45^\circ = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \text{veya} \quad x - 45^\circ = -45^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \text{veya} \quad x_2 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{x \mid x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad x_2 = 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olur.}$$



Tanım ve Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$ biçimindeki denklemlere **doğrusal denklem** denir. Bu tür denklemler

$$\cos x + \frac{b}{a} \cdot \sin x = \frac{c}{a} \text{ şeklinde düzenlenip } \frac{b}{a} = \tan \alpha \text{ değeri yerine yazıldıktan sonra}$$

çözüm kümesi bulunur.



Örnek

$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}$ denkleminin gerçekte sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

ÇÖZÜM

$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}$ denkleminde eşitliğin her iki tarafını üçe bölelim. Denklem bu durumda,

$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ şeklinde olur.}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ \text{ değerini yerine yazalım.}$$

$$\cos x - \tan 30^\circ \cdot \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ eşitliğinde payda eşitleyelim.}$$

$$\cos x \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\cos (x + 30^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos (x + 30^\circ) = 1 \text{ bulunur.}$$

$$\cos (x + 30^\circ) = \cos 0^\circ \text{ şeklinde yazarak denklemi çözebiliriz.}$$

$$x_1 + 30^\circ = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad x_2 + 30^\circ = -0^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$x_1 = x_2 = -30^\circ + 360^\circ \cdot k \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{x \mid x = -30^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\} \text{ olur.}$$



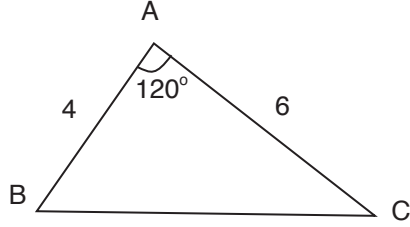
Uygulamalar

- $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- $a \cdot \sin x + \cos 2x = 1$ denkleminin çözüm kümesinin bir elemanı 60° ise a kaçtır?
- $\frac{3}{\cos x} = \frac{4}{\sin x}$ olduğuna göre $\cos x$ in pozitif değerini bulunuz.
- $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0$ denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki köklerini bulunuz.
- $x \cdot \cos 40^\circ - \sin 40^\circ = x$ ifadesinde x in $(-\cot 20^\circ)$ ye eşit olduğunu gösteriniz.
- $a = -5 \cdot \sin x + 12 \cdot \cos x$ ise a nın alabileceği en küçük değerini bulunuz.
- $2 \cdot \sin \alpha + \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ise $\tan 2\alpha$ neye eşittir?
- $2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin 2x = 4$ eşitliği veriliyor. Buna göre $\tan x$ in alacağı değerler toplamını bulunuz.

BÖLÜM SONU SORULARI

1. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ve $\cot x = -\frac{4}{3}$ olduğuna göre $\frac{2\sin x + \cos x}{\tan x + 1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

2.

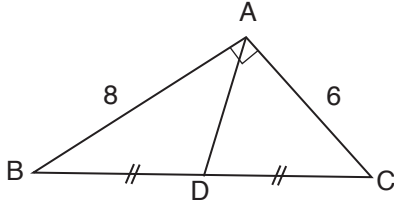


Şekilde verilen ABC üçgeninde,
 $AB = 4$ birim, $AC = 6$ birim ve
 $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ ise ABC üçgeninin
 çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

3. $\sec\left(2 \cdot \arctan \frac{1}{2}\right)$ değeri kaçtır?

4. $\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$ çarpımının değerini bulunuz.

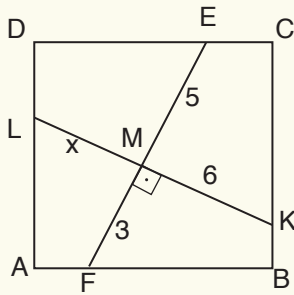
5.



ABC dik üçgeninde,
 $AC = 6$ birim, $AB = 8$ birim ve
 $ID = IC$ olduğuna göre
 $\sin(\widehat{ADB})$ değerini bulunuz.

6. Bir \widehat{ABC} üçgeninde $\cos \widehat{A} = \frac{3}{5}$ ve $\sin \widehat{B} = \frac{5}{13}$ ise $\tan \widehat{C}$ değerini bulunuz.

7.

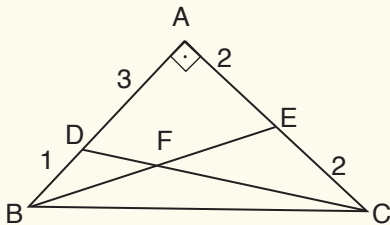


ABCD karesinde,
 $[EF] \perp [KL]$
 $EM = 5$ birim, $FM = 3$ birim ve
 $KL = 6$ birim ise
 $LM = x$ kaç birimdir?

8. $a - b = \frac{5\pi}{4}$ ise $\frac{\sin b \cdot \cos a - \cos b \cdot \sin a}{\cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a}$ değerini bulunuz.

9. $\tan \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{1 + \cos x}{\sin x}$ değerini bulunuz.

10.



ABC dik üçgeninde, $AE = EC = 2$ birim,
 $AD = 3$ birim, $ID = 1$ birim
 ise $\cot(\widehat{DFE})$ değerini bulunuz.

11. $\frac{\sin 64^\circ + \sin 56^\circ}{\cos 64^\circ + \cos 56^\circ}$ işleminin sonucu kaçtır?

12. $\sin 2x - \sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

13. $\sin 2x + 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos 2x = 0$ denkleminde $\tan x$ in alacağı değerler toplamını bulunuz.

14. $\frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cdot \cos 80^\circ}{\sin 160^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.

15. Aşağıdaki soruları çözerek bulduğunuz yanıtları yandaki yanıtlarla eşleyiniz.

I. $3\sin x + 4 \cos x = 5$ olduğuna göre $\tan x$ değeri kaçtır?

a. 1

b. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

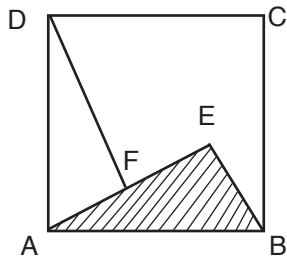
II. $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$ çarpımının sonucu kaçtır?

c. $\frac{3}{4}$

III. $\cos^4 \frac{5\pi}{8} - \sin^4 \frac{5\pi}{8}$ işleminin sonucu kaçtır?

ç. $\frac{1}{4}$

16.



ABCD karesinde $[AE] \perp [DF]$

$|AF| = 2$ birim ve

$|FE| = 3$ birim olduğuna göre

ABE üçgensel bölgesinin alanını bulunuz.

17. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos 4x = \cos^2 \frac{\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

18. $f(x) = 4 \cdot \cos(ax)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{5}$ ise a kaçtır?

A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

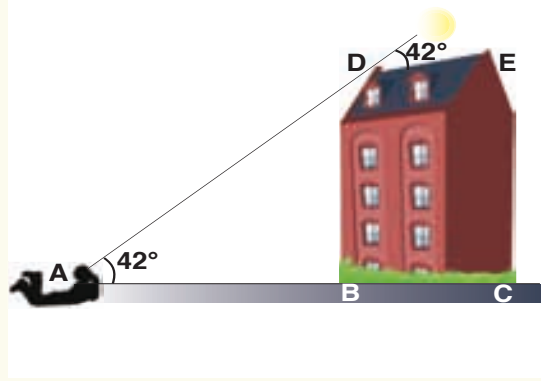
E) 10

19.



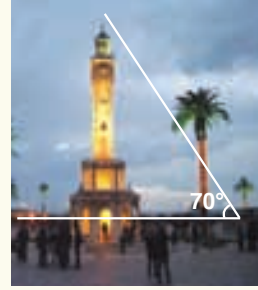
Şekildeki dönme dolabın merkezinden köşeye uzaklığı 3 m olan düzgün sekizgen bir reklam levhası hazırlamak için kaç m^2 levhaya ihtiyaç vardır?

20. Mustafa, güneş batarken apartmanın gölgesinin 30 metreye ulaştığı A noktasında yatarak 42° lik açıyla güneşe bakıyor. Bu bilgilere göre apartmanın yüksekliğini bulabilir misiniz? Açıklayınız.



21. İzmir Saat Kulesi, Konak alanındadır. 1901'de Sultan II. Abdülhamit'in tahta çıkışının 25. yılı dolayısıyla Sadrazam Küçük Said Paşa tarafından yaptırılmıştır. İzmir'in sembolü olarak kabul edilen Saat Kulesi'nin altındaki odanın dört köşesinde çeşmeler bulunmaktadır.

Yerden göz seviyesine kadar yüksekliği 1,65 metre olan bir turist, saat kulesine 8,5 metre uzaklıktan 70° lik açıyla baktığında kulenin tepe noktasını görmektedir. Saat Kulesi'nin yüksekliğini hesaplayınız.

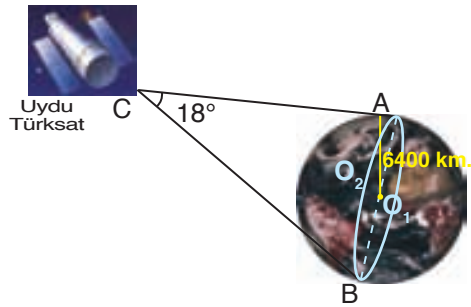


22.



Şekildeki balon, yerden 40° lik ve 54° lik açılarla A ve B noktalarındaki kazıklara şekildeki gibi gergin iki halatla bağlanıyor. A ve B noktaları arasındaki uzaklık 10 metre olduğuna göre balonun yerden yüksekliğini bulunuz.

23. Dünya' mızın yarıçapı yaklaşık 6400 km dir. Türksat 2A uydusu kapsama alanı içindeki iki şehir, şekildeki gibi A ve B dir. ACB açısının ölçüsünün 18° olduğu bilinmektedir. Bu iki şehir uydunun kapsama alanı içindeki en uzak iki şehir olduğuna göre bu uydunun Dünya'ya en yakın uzaklığını bulunuz (O_1 Dünya' nın merkezi, O_2 ise kapsama alanını sınırlayan çemberin merkezi).



TRİGONOMETRİ TESTİ

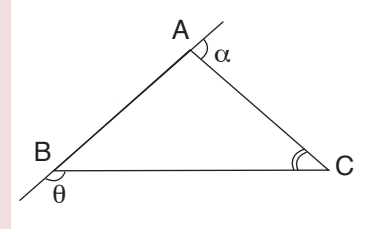
1. $\cos x + \sin y = \frac{2}{3}$ ve $\sin x - \cos y = \frac{1}{2}$ ise $\sin(x - y)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{25}{36}$ B) $\frac{25}{47}$ C) $\frac{11}{36}$ D) $\frac{47}{36}$ E) $\frac{47}{72}$

2. Yanda verilen üçgende ,

$\tan \alpha = -\sqrt{3} - 2$, $\tan \theta = 2 - \sqrt{3}$ ise $\cot(\widehat{ACB})$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



3. $8 \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ bir işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{3}$

4. $\frac{1}{2 \cdot \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

5. $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 2x \cdot \sin 7x}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) -2 D) -1 E) 2

6. $\frac{1 + \tan^2 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. $30x = \pi$ ise $\frac{\cos 11x + \cos 9x}{\sin 11x + \sin 9x}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 3

8. $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ için $\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\tan \frac{\alpha}{4}$ B) $\tan \frac{\alpha}{4}$ C) $-\cot \frac{\alpha}{4}$ D) $\cot \frac{\alpha}{4}$ E) $\sin \frac{\alpha}{4}$

9. $\frac{\cos 9x + \cos 4x + \cos 6x}{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}$ ifadesinin eđiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cot 4x$ B) $\cot 5x$ C) $2 \cdot \cot 4x$ D) $2 \cdot \cot 5x$ E) $\cot 3x$

10. $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{3}{\cos 15^\circ}$ işleminin sonucu kaçıtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

11. $\cos 72^\circ - \cos 36^\circ - \frac{1}{2}$ işleminin sonucu kaçıtır?

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

12. $\arctan \sqrt{3} + \arctan (-1)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{12\pi}{7}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{12\pi}{13}$

13. $\cos 2x - 5 \cdot \cos x + 4 = 0$ denkleminin çözümler kümesinin $[0, 2\pi)$ aralığında kaç elemanı vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. $2 \cdot \sin x + 3 \cdot \sin x - 2 = 0$ denkleminin çözümler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

C) $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{x \mid x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

E) $\{x \mid x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

15. $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$ B) $\left\{0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$ C) $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ D) $\left\{0, \frac{4\pi}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right\}$

16. İki komşu kenarın uzunluğu 6 cm ve 7 cm olan ve bu iki kenar arasındaki açının ölçüsü 30° olan paralel kenarın alanı kaç cm^2 dir?

- A) 21 B) 42 C) $21\sqrt{3}$ D) $42\sqrt{3}$ E) 84

17. $\sec \left(\arccos \left(\frac{3}{5} \right) \right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\sqrt{3}$

BÖLÜM SONU SORULARININ CEVAP ANAHTARLARI

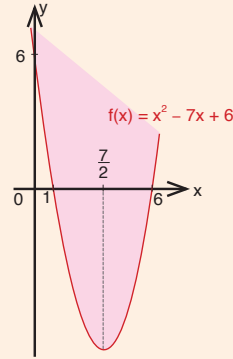
1. BÖLÜM

1. 30 2. $-\frac{3}{2}$ 3. 12 4. -36 5. $\frac{15}{7}$ 6. $14 - 2x$ 7. $4x - 11$ 8. 16 9. $-2x^2 - 4x + 13$
 10. $2\sqrt{10}$ 11. 8 12. 8 13. 4 14. 4 15. -19 16. $m + n$ 17. $45x^2$ 18. A
 19. $\frac{3x}{2}$ 20. I) d II) b III) a

2. BÖLÜM

1. C 2. 48 3. $-\frac{21}{4}$ 4. 3 5. $4x^2 - 16x + 13 = 0$ 6. I) b II) d III) a 7. a) $\zeta = \{-2\}$
 b) $\zeta = \{3\}$ c) $\zeta = \{2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\}$ 8. a) $\zeta = \{4, -1\}$ b) $\zeta = \{2, -2, 3, -3\}$ c) $\zeta = \left\{-\frac{5}{8}\right\}$
 d) $\zeta = \left\{-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ 9. $\zeta = \{(x, y) \mid (2, -2), (-2, 2)\}$ 10. $\zeta = \left\{(x, y) \mid \left(0, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, 0\right)\right\}$
 11. $a \in [-1, 5]$ 12. $x \in (0, 1)$ ve $x \in (2, \infty)$ 13. $\zeta = \emptyset$ 14. $(0, -4)$ 15. $k = 6$
 16. $A(\widehat{ABC}) = 27$ birimkare 17. $n = 2, m = 6, m + n = 8$ 18. 2 19. $x = 60$
 20. $R = 10 + \sqrt{110}$ 21. 243 km 22. $a = 11, b = 7$ olur. 23. Parabol

24. Tepe noktasının ordinatı 25. $x = 2$ 26.



3. BÖLÜM

1. $-\frac{8}{5}$ 2. $R = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$ 3. $\frac{5}{3}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 5. $\frac{24}{25}$ 6. $-\frac{63}{16}$ 7. 2 8. 1 9. $\frac{3}{2}$ 10. 2
 11. $\sqrt{3}$ 12. $\zeta = \left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$ 13. $\frac{5}{2}$ 14. 2 15. I) ζ II) a III) b 16. 5
 17. $x = \mp \frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{N}^+$ 18. E 19. $18\sqrt{2} \text{ m}^2$ 20. 27,012 m. 21. 25,003 m.
 22. 21,4952 m. 23. 60894,386299 km.

BÖLÜM SONU TESTLERİNİN CEVAP ANAHTARLARI

1. BÖLÜMÜN CEVAP ANAHTARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
D	D	E	A	E	B	E	C	D	E	B	A	D	C	C	B	E	A	C	B	B

2 . BÖLÜMÜN CEVAP ANAHTARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	D	B	B	C	C	E	B	E	B	B	D	C	C	A	E	C	C	E

3. BÖLÜMÜN CEVAP ANAHTARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
E	E	B	D	C	E	A	B	A	E	A	B	B	D	B	A	A

SÖZLÜK

A

açı: Başlangıç noktaları ortak olan, iki ışının birleşimi.

analitik düzlem: Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

apsis: Koordinat düzleminde bir noktanın ordinatlar eksenine olan uzaklığı.

apsisler eksen: Koordinat düzlemini oluşturan yatay eksen (x eksen).

aralık: İki sayı arasındaki açıklık.

asal polinom: Başkatsayısı 1 olan ve indirgenemeyen polinom.

B

başlangıç kenarı: Yönlü açıda sabit kabul edilen kenar.

birim çember: Merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı 1 birim olan çemberdir.

bitim kenarı: Yönlü açının sabit olmayan kenarı.

boş küme: Hiç elemanı olmayan küme.

Ç

çözüm kümesi: Denklemleri sağlayan elemanların oluşturduğu küme.

D

denklem: Bilinmeyenlerin bazı değerleri için sağlanan eşitlik.

denklem sistemi: İki veya daha çok denklemden oluşan ve hepsinin birlikte ortak çözümünü istenen takım.

E

EBOB: Sıfırdan farklı en az iki polinomu bölebilen polinomlardan derecesi en büyük olanıdır.

EKOK: Sıfırdan farklı, en az iki polinoma kalansız bölünebilen polinomlardan derecesi en küçük olanıdır.

İ

indirgenemeyen polinom: En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinom.

M

mutlak değer: Bir sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı.

N

negatif yön: Bir çemberde, saatin dönme yönü.

O

ordinat: Koordinat düzleminde bir noktanın apsisler eksenine olan uzaklığı.

Ö

önerme: Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren cümle.

P

parabol: İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği.

periyodik fonksiyon: Bir f fonksiyonunun tanım kümesindeki her x ögesi için, $f(x+T) = f(x)$ eşitliğinin gerçekleşmesi.

polinom denklem: $P(x)$ derecesi sıfırdan farklı polinom olmak üzere $P(x) = 0$ şeklindeki denklem.

pozitif yön: Bir çember üzerinde, saatin dönme yönünün tersi.

R

radyan: Birim çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayın ölçüsünü 1 birim varsayan açı (yay) ölçü birimi.

Y

yönlü açı: Bir kenarı başlangıç (sabit), diğer kenarı bitim (hareketli) olarak düşünülen açı.

KAYNAKÇA

1. T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara, 2011.
2. T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı, Devlet Kitapları Müdürlüğü, Ankara, 2005.
3. Pat, H. , The Changing Role of the Teachers, THE Journal, Nov.2000 Vol.28.
4. Kulm, G. , Assesing Higher Order Thinking in Mathematics. American Association for the Advancement of Science 1333 M Street, NW Washington, 1993.
5. Anton, M. , Calculus with Analytic Geometry, Fourth Edition, John Wiley Sous, Inc, New York, 1992.
6. Gradowski, G. (editor), Designs for Active Learning, A Division of the American Library Association, Chicago, 1998.
7. Türk Dil Kurumu Yazım Kılavuzu, Türk Dil Kurumu Basımevi, Ankara, 2005.
8. Brown R.G., Advanced Mathematics, Houghton Mifflin Company, Boston, 1994.
9. Dönmez A., Matematiğin Öyküsü ve Serüveni Cilt 1-2, Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul, 2002.
- 10.Schmit A.; Lück S.; Saverman J.D., LS-9 Mathematisches Unterrichtswerk, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart, 2000.
- 11.Nakatani N.; Nassiet F.; Perrinaud J.C.; Porte D.; Rivoallan L., Mathematiques, Dimathe-me 2e, Didier, Paris, 1994.
- 12.Ana Britanica, Ana Yayıncılık, İstanbul, 1994.