

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- Küme kavramı
- Kümelerin gösterimlerinin ve kümeleri ifade etmenin farklı yollarını
- Evrensel küme, boş küme, sonlu küme ve sonsuz küme kavramlarını
- Alt küme kavramı ve özelliklerini
- İki kümenin eşitliğini

Neden Öğreneceğiz?

En genel manada matematik; soyut veya somut nesneleri, bu nesnelere ait özellikleri ve bunlar arasında ilişkileri matematiksel bir dil ve tutarlılıkla ortaya koyma ve uygun genellemelerde bulunma çabasıdır. Bu bağlamda, modern matematiğin en temel kavramlarından birisi küme kavramıdır. Kümeler, nesnelerle ilgili düşünebileceğimiz en basit ilişkilerden olan gruplandırma ve sınıflandırmalara karşılık gelmektedir. Kümeler konusunda, nesnelere odaklanmadan nesneler arasındaki gruplandırma ilişkilerinin genel kural ve özellikleri üzerinde çalışacağız.

Matematiğin birçok konusu kümeler üzerine inşa edilebilir. Örneğin, üçüncü üniteye göreceğimiz fonksiyonlar, kümeler aracılığıyla tanımlanmakta ve de fonksiyonların kullanıldığı matematiğin her alanında kümelerden faydalanılmaktadır. Benzer şekilde, kümeler yardımıyla elimizdeki bilgi ve verileri düzenler, bunlar üzerinde istatistiksel analizler yapabiliriz. İstatistikte kümeleri kullanmak, bize veriler üzerinde daha düzenli bir çalışma imkanı sunar.

HAZIR MIYIZ?

1. Günlük dilde kullandığımız “küme” kelimesi ne anlama gelmektedir?

Küme kelimesinden türetilmiş kelime ve deyimler bulunuz ve bunların anlamlarını araştırınız.

2. Aşağıda verilen toplulukların her birisinin tam listesini yazmaya çalışınız.

- Türkiye’nin etrafını çevreleyen denizler
- Beş tane asal sayı
- Türkiye’nin nüfusu en kalabalık 5 şehri
- Son iki sene içinde okuduğunuz kitaplar
- 4 ile 16 arasındaki tek sayılar

Buna göre;

- a. Topluluklara ait bileşenleri yazmaya çalışılırken belirsizlikle karşılaştınız mı? Nedeni açıklayınız.
- b. Yazdığınız topluluk listelerinden hangi şıkta verilenler arkadaşlarınızın yazdığı topluluk listeleriyle aynıdır? Hangileri farklıdır veya farklı olma ihtimali vardır? Nedenini açıklayınız.

3. Aşağıda her bir şıkta verilenleri varsa ortak özellikleri yönüyle tanımlayınız veya ifade ediniz.

Örnek: 2, 4 ve 6 sayılarını için “1 ile 7 arasındaki çift tam sayılar” ifadesini kullanabiliriz.

- a. Karadeniz, Akdeniz, Ege, Marmara
- b. Afrika, Antarktika, Avustralya, Güney Amerika, Kuzey Amerika, Asya, Avrupa
- c. Buzdolabı, çamaşır makinesi, bulaşık makinesi
- ç. Kare, dikdörtgen
- d. 2, 3, 5, 11, 17

4. Ardışık iki doğal sayının karelerinin farkı 11 olduğuna göre, bu iki sayının toplamı kaçtır?

5. Aşağıdaki ifadelerin sonucunu bulunuz.

a. 2^3 b. 2^5 c. 2^7

6. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a. $x + y = 15$ b. $2x + y = 14$
 $x - y = 3$ $x + y = 11$

7. $2^a - 1 = 15$ ise a kaçtır?

8. Bir topluluğun içinde “a, 1, 3, Dünya, Ankara, Güneş, Neptün, Halley kuyruklu yıldızı, Edirne, c, kalem, b, silgi, Kâğıt, Defter, İzmir, Ay, Erzurum, Kitap, 5” vardır. Buna göre,

- a. Verilen bu topluluğun elemanlarını bir cümle ile tanımlayınız.
- b. Verilenlerden kendi aralarında benzerlik gösterenleri gruplayınız.
- c. Oluşturduğunuz her bir gruba bir ad vererek bu grupları inceleyen kişinin daha kolay algılayabileceği şekilde düzenleyiniz.
- ç. Farklı düzenlemeler mümkün müdür? Açıklayınız.
- d. Oluşturduğunuz her bir grupta kaç nesne olduğunu belirleyiniz.
- e. Oluşturduğunuz her bir grubu ortak özellikleri yönüyle tanımlayınız.

1.1.1. Küme Kavramı

Başlarken



Çoğu zaman, elimizdeki bilgileri veya etrafımızdaki varlıkları sayma, sıralama ve düzenleme ihtiyacı hissederiz. Bunları yaparken gruplandırma ve sınıflandırmalar yaparız. Örneğin, küçük yaşlardaki bir çocuk oyuncaklarını renklerine, büyüklüklerine, şekillerine göre gruplandırabilir. Küçük yaşlardan itibaren çevremizdeki dünyayı anlamak için karşılaştığımız varlıkların isimlerini öğrenip zihinlerimizde gruplandırırız: Sert cisimler, metalle vurulunca tiz ses çıkartan cisimler, mavi renkli cisimler, sıvılar, katılar, canlılar, suda yaşayanlar, havada uçanlar gibi. Daha sonra yaptığımız sınıflandırmalara uygun olarak bu varlıkların özelliklerini inceleriz. Canlı veya cansızların fiziki, kimyasal ve biyolojik özelliklerini incelemek etrafımızdaki dünyayı anlama çabasının birer neticesidir. Bu çabalar neticesindedir ki kimyada periyodik cetveli oluşturur; biyolojide canlıları adlandırır, sınıflandırır ve aralarında ki ilişkileri inceleriz. Yani “sistematik” ile uğraşırız.

Fizik, kimya ve biyoloji gibi matematik de etrafımızdaki dünyayı anlama çabalarımızın bir ürünüdür. İlgilendiğimiz şeyler, hem etrafımızdaki canlı veya cansız varlıklar gibi somut olabilir, hem de sayılar ve edindiğimiz bilgiler gibi soyut olabilir. Ayrıca, nesnelerle ilgili yaptığımız gruplandırmalarla sınıflandırmaların özelliklerini ve nesneler arasındaki ilişkileri, nesnelere odaklanmadan incelemek işlerimizi kolaylaştırarak doğru genellemeler yapmamıza veya uygun analogiler (benzerlikler) kurmamıza imkan verir. Örneğin, kümeler konusuyla nesne toplulukları arasında gruplandırmalar veya belirli özellikleri sağlamasını istediğimiz sınıflandırmalar yapar; kümelere ait işlemlerle bu sınıflandırmaların genel özelliklerini inceler ve fonksiyonlar konusuyla da nesneler arasındaki ilişkileri inceleriz.

Matematiksel olarak kümeler, gruplandırma ile sınıflandırma becerilerinin temelini oluşturur ve problem çözmede kullanılır.

Neler Öğreneceğiz?

- Küme kavramını
- Kümelerin gösterimini

Anahtar Terimler

- Küme
- Kümenin elemanları
- Liste yöntemi
- Ortak özellik yöntemi
- Venn şeması

Sembol ve Gösterimler

- $\{ \}$
- \in
- \notin
- $A = \{x \mid x \text{ verilen } P \text{ özelliğini sağlar}\}$
- $x|$
- $x:$
- $s(A)$
- ...

Matematik Tarihi
Ernst Zermelo



(1871 – 1953)

Zermelo, kümeler için paradoksların yer bulamadığı aksiyomlar sistemi geliştiren ilk matematikçilerdendir. Bu aksiyomlar sistemi farklı matematikçiler tarafından da geliştirilerek “aksiyomatik küme teorisi” kapsamında günümüzde de yaygın olarak kabul görmektedir.



“Küme” kelimesi günlük kullanımda, “tümsek biçimindeki yığın” anlamında kullanıldığı gibi, “birbirine benzer veya aynı cinsten olan şeylerin oluşturduğu bütün, takım, öbek, grup” anlamlarına da gelmektedir. Dolayısıyla,

“Yandaki resimde bir meyve kümesi görülmektedir.”

cümlesinde, “küme” “yığın” anlamındadır. Bundandır ki, alt kısmı düz olup yığını andıran bulutlara “kümülüs bulutları” diyoruz. Bununla birlikte,

“Masa üzerinde bir küme meyve var.”

cümlesindeki “bir küme” sıfat olarak kullanılmakta ve “pek çok” manasına gelmektedir. Öte yandan, Said Faik Abasıyanık’tan alıntılıdığımız

“Bin bir kuş, parlak yapraklı ağaçlara kümelendi.”

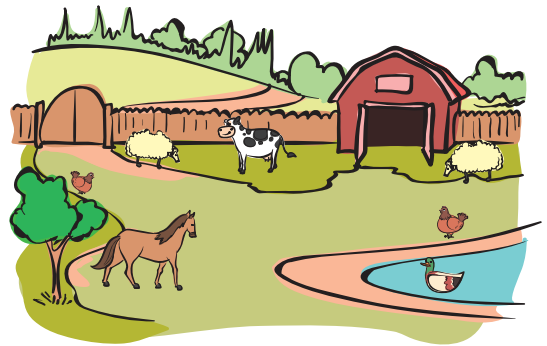
cümlesindeki “kümelenmek” fiili “bir yere yığınla toplanmak, yığılmak” anlamına gelmektedir.

“Küme” kelimesinin, belirli bir alana ait bir terminolojinin parçası olarak da kullanıldığını görüyoruz. Örneğin, sporda “küme düşmek”, eğitim bilimlerinde “küme çalışması” gibi kullanımlar olmakta.

Matematikte ise küme kelimesinin, yukarıdaki anlamlarıyla yakından ilişkili olan terminolojik bir kullanımı vardır. Yani yukarıdaki anlamları içine alan ama daha özel durumları ifade eden bir kavram olarak kullanılmaktadır.

Şimdi kümenin matematikteki kullanımını anlamaya yönelik olarak yandaki resme göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Resimdeki çiftlikte hangi tür hayvanlar yetiştirilmektedir?
- Resimdeki hayvan türlerinden her birinin sayısını bulunuz.
- Bu resimdeki en sevimli hayvan hangisidir?
- Sizin en sevimli hayvan olarak belirlediğiniz hayvan bir başkasının belirlediğiyle her zaman aynı olabilir mi?



Küme terimini matematiksel bir kavram olarak ilk kullanan Georg Cantor (1845 –1918), kümeyi iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğu olarak tanımlamıştır.

Bu tanımda, nesnelerin iyi tanımlanmış olmasından kastedilen, bu nesneleri algı ve düşüncelerimizle belirleyebilmemizdir. Topluluğu, yani kümeyi oluşturan nesnelerin belirlenmesinde göreceliliğe yer verilmez. Diğer bir anlatımla, verilen bir nesnenin kümeye ait olup olmadığının cevabının evet ya da hayırdan birinin olacağı bilinmelidir. Örneğin, “**sınıfınızdaki kahverengi gözlü öğrenciler**” topluluğu bir küme belirtirken, “**haftanın bazı günleri**”nin oluşturduğu topluluk bir küme belirtmez.

Kümeyi oluşturan nesneler canlı varlıklar olabileceği gibi, cansız varlıklar, sayılar veya şekiller de olabilir. Örneğin, “**12’den küçük ve 2 ile bölünebilen doğal sayılar**” bir küme belirtir.

Birbirinden farklı nesnelerin kümeyi oluşturmamasından dolayı, nesnelerin küme içinde tekrar etmesi durumunda bunlar arasında bir eşlik olduğunu varsayarak nesnelerin tekrarsız olmasını kabul ederiz. Örneğin, “**1, 1, 2**” nesnelerinin oluşturduğu küme “**1, 2**” nesnelerinin oluşturduğu kümedir. Çünkü iki kere tekrar etmesine rağmen **1, 1** aynı şeyi yani 1 rakamını/sayısını ifade eder. Başka bir örnek olarak, **MATEMATİK** kelimesinin harflerinden oluşan küme **M, A, T, E, İ, K** harflerinin oluşturduğu kümedir.

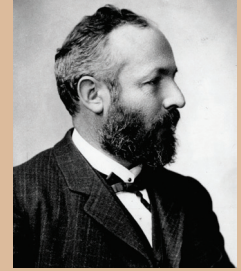
Georg Cantor’un yaklaşımıyla yapılan bu küme tanımı “**yalın küme teorisinin**” bir parçası olarak bilinmektedir. Bu yaklaşımın bazı durumları açıklamakta yetersiz kaldığından Bertrand Russell, 1903 yılında verdiği bir paradoks örneğiyle ortaya koymuştur. Bunun devamında günümüzde de genel kabul gören “**sezgisel küme teorisi**” veya “**aksiyomatik küme teorisi**” gibi daha kapsamlı ve tutarlı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Ancak bu yaklaşımlar bu kitapta yer veremeyeceğimiz kadar teknik bilgi ve detay gerektirmektedir. Diğer taraftan, burada ele alacağımız ve lise öğrenimi boyunca karşınıza çıkacak bütün kümeleri Cantor’un tanımıyla ifade edebileceğimiz için küme kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Küme, iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesnelerden oluşan topluluktur.

Şimdi bu tanıma göre küme kavramını örneklerle anlamaya çalışalım. Örneğin; yukarıda çiftlikteki hayvanlarla ilgili ilk iki sorunun cevabı birer küme oluşturur. Çünkü çiftlikte yetiştirilen hayvan türleri ve sayıları bellidir ancak son sorunun cevabı bir küme oluşturmaz çünkü çiftlikteki en sevimli hayvan kişiye göre değişiklik gösterebilir. Ancak belli bir grubun, örneğin sınıftaki arkadaşlarınızın en sevimli buldukları hayvanlardan oluşan topluluk bir küme belirtir.

Matematik Tarihi

Georg Ferdinand Ludwig
Philipp Cantor



(1845 –1918)

Cantor, küme kavramının matematikte ilk olarak kullanıldığı makalesini 1878 yılında yayınladı.

Bu makalede, ait olma ilişkisinin, kümedeki her terim için belirlenmesini sağlayan her özelliğin bir kümeyi tanımladığı vurgulanmıştır.

Cantor, kümenin elemanlarını belirlemek için iyi tanımlanmış bir özelliğin yeteceği düşüncesindeydi.

Ancak, bu düşüncesinin yeterli olmadığı, Bertrand Russell (1872 – 1970) tarafından 1903 yılında ortaya konmuştur.

Bunu biliyor muydunuz?

Doğru olduğu varsayıldığında çelişki ürettiği gibi yanlış olduğu varsayıldığında da çelişki üreten yargısal ifadeler **paradoks** denir. Paradokslar yanlış veya doğru olduklarına karar verilemeyen hüküm bildiren ifadelerdir.

Örnek 1

Aşağıdaki topluluklardan hangilerinin bir küme belirttiğini inceleyelim:

- a. Türkiye'deki en güzel iller
- b. Türkiye'deki yükseklikleri 1000 metreyi aşan dağlar
- c. Sınıfınızdaki başarılı öğrenciler

Çözüm

- a. Türkiye'deki en güzel iller topluluğu iyi tanımlı olmadığından bir küme belirtmez. Çünkü bir şehrin en güzel illerden olup olmadığı kişiden kişiye değişir.
- b. Türkiye'deki yükseklikleri 1000 metreyi aşan dağlar topluluğu bir küme belirtir. Çünkü elemanları bellidir.
- c. Sınıfımızdaki başarılı öğrenciler denilince bir belirsizlik söz konusudur. Burada başarının bir ölçüsü belirtilmemiştir. Dolayısıyla küme belirtmez.

Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle isimlendirilirler. Ancak bir sembol veya özel bir isim gibi farklı şekillerde de adlandırılabilirler.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin elemanları denir.

Eğer a, A kümesine ait bir eleman ise $a \in A$ biçiminde yazılır. "a, A kümesinin elemanıdır." diye okunur.

Eğer b, A kümesine ait bir eleman değilse $b \notin A$ biçiminde yazılır. "b, A kümesinin elemanı değildir." şeklinde okunur.

Herhangi bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

Örneğin, GEOMETRİ kelimesinin harflerinden oluşan küme A olsun.

Buna göre $A = \{G, E, O, M, T, R, İ\}$ ve $s(A) = 7$ 'dir.

Bir kümeyi oluşturan nesnelerin sırasını değiştirmek oluşan topluluğu değiştirmeyeceğinden kümeyi de değiştirmes. Örneğin, a ve b harflerinin oluşturduğu küme ile b ve a harflerinin oluşturduğu küme aynı kümelerdir.

Örnek 2



Adıyaman ilinin ilçelerinin oluşturduğu kümenin elemanları "Besni, Kâhta, Sincik, Tut, Gölbaşı, Gerger, Samsat, Çelikhan, Merkez İlçe"dır. Bu kümeyi A ile gösterelim.

Çözüm

Adıyaman'ın bir ilçesi olduğundan dolayı, "Besni $\in A$ " dır. Ancak, Kahraman Maraş'ın bir ilçesi olan Pazarcık için "Pazarcık $\notin A$ " dır.

A kümesinin eleman sayısı $s(A) = 9$ 'dur.

Bir kümenin elemanlardan oluştuğunu biliyoruz. Peki bir kümeyi kendisini oluşturan elemanları kullanarak nasıl gösterebiliriz?

Alışveriş listesindeki veya sınıf yoklama defterindeki sınıf listesindeki benzer olarak kümenin elemanlarını tek tek listeleyebilir ve hatta bunları bir şema veya diyagram ile gösterebiliriz. Ancak bu iki yöntem her zaman mümkün ya da pratik olmayabileceğinden kümenin elemanlarının sağladığı ortak şartları ifade ederek o kümenin nelerden oluştuğunu belirtebiliriz.

Dolayısıyla, kümeler için yaygın olarak kullanılan 3 gösterim yöntemi vardır:

- Liste yöntemi
- Ortak özellik yöntemi
- Venn Şeması yöntemi

Kümelerin "Liste Yöntemi"yle Gösterimi

Bu yöntemde, kümenin elemanları liste şeklinde herhangi bir sırayla verilir. Listenin başladığını belirtmek için açan küme parantezi " $\{$ ", bittiğini belirtmek için de kapatan küme parantezi " $\}$ " kullanılır. Bu küme parantezleri içinde verilmiş olan küme elemanlarının veya bu elemanları temsil eden sembollerin farklılığını belirtmek için aralarında virgül kullanılır.

Örneğin, Adıyaman ilinin ilçelerinin oluşturduğu A kümesini liste yöntemiyle

$A = \{\text{Besni, Kâhta, Sincik, Tut, Gölbaşı, Gerger, Samsat, Çelikhan, Merkez İlçe}\}$

biçiminde gösterebiliriz. Benzer şekilde alfabemizdeki sesli harflerden oluşan S kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $S = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$ şeklindedir.

Örnek 3

$A = \{a, e, \{a, b\}\}$ veriliyor. Buna göre $s(A)$ kaçtır, bulalım.

Çözüm

A kümesinin elemanları a, e ve $\{a, b\}$ dir.

Dolayısıyla $s(A) = 3$ 'tür.

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi **bir küme başka bir kümenin elemanı olabilir**.

Örnek 4

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesine göre

1, A kümesinin elemanı olduğu için $1 \in A$

2, A kümesinin elemanı olduğu için $2 \in A$

7, A kümesinin elemanı olmadığı için $7 \notin A$

n, A kümesinin elemanı olmadığı için $n \notin A$ olur.

Örnek 5

100'den küçük pozitif tam sayılar kümesini liste yöntemiyle gösterelim.

Çözüm

Bu kümeyi K ile adlandırırsak, $K = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ şeklinde ifade edebiliriz. Burada kullandığımız üç nokta " \dots " kümenin elemanlarının belirgin bir kural dahilinde devam ettiği anlamına gelmektedir. Bu örnekte, K kümesinin görülmeyen elemanları 4'ten sonra birer birer artarak 99'a kadar devam eden tam sayılar olduğu anlaşılmaktadır.

Kümelerin "Venn Şeması Yöntemi"yle Gösterimi

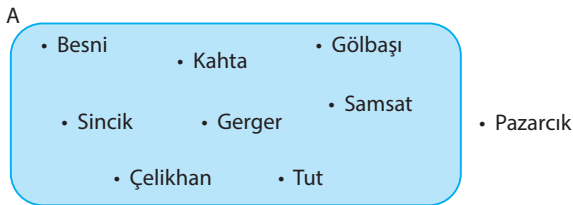
Bu yöntemde, kümenin elemanları kapalı bir eğri veya bir çokgenin içinde, her bir elemanın yanına birer nokta "•" konularak gösterilir. Bu gösterim şekli ismini literatüre ilk kazandıran John Venn'den (1834 – 1923) almaktadır.

Bu gösterimde, eğri içinde kalanlar kümenin elemanları, dışında kalanlar da kümeye ait olmayan elemanlardır.

Örnek 6

Adıyaman ilinin ilçelerinin oluşturduğu kümeyi Venn şeması ile gösterelim.

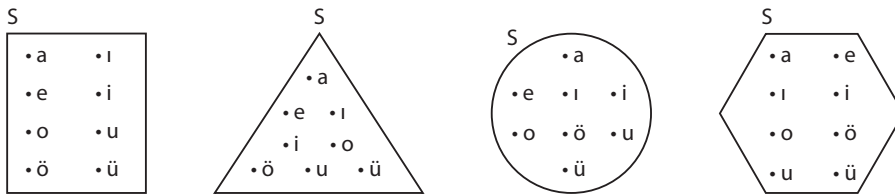
Çözüm



Örnek 7

Alfabemizdeki sesli harflerin oluşturduğu S kümesini aşağıdaki Venn diagramlarından herhangi biri ile veya benzeri bir biçimde gösterebiliriz.

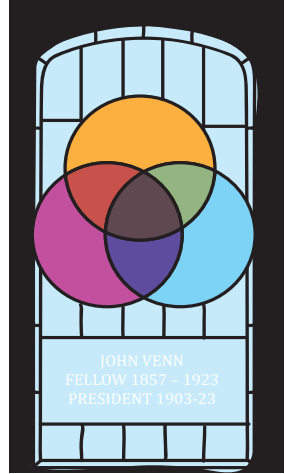
Çözüm



Kümelerin Ortak Özellik Yöntemi'yle Gösterimi

Bir kümenin elemanlarını listelemek ve Venn şeması içinde belirtmek her zaman uygun olmayabilir. Bir kümeyi oluşturan elemanları anlaşılır biçimde tarif etmemizi sağlayacak; sadece kümede olması gereken elemanların taşıdığı şartları veya özellikleri belirterek de bir kümeyi gösterebiliriz. Buna ortak özellik yöntemiyle gösterim diyoruz.

Bunu biliyor muydunuz?



Resimdeki mozaik cam, Venn şeması gösterimini matematiğe kazandıran John Venn'in (1834 – 1923) anısına Cambridge Üniversitesi'nde bir fakülte binasında bulunmaktadır. Camdaki yazı şöyledir:

JOHN VENN
Öğretim Üyesi 1857–1923
Rektör 1903–1923.

Bir A kümesini oluşturan elemanların sağlayacağı şartları veya sahip olacağı özellikleri P sembolü ile gösterelim. Bu durumda, A kümesini ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösteririz:

$$A = \{k \mid k, P \text{ şartını sağlar}\} \text{ veya } A = \{k: k \text{ sağlar } P \text{ şartını}\}$$

Burada kullandığımız “ \mid ” ve “ $:$ ” sembolleri birbirlerinin yerine kullanılabilir ve “öyle ki” anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, yukarıdaki gösterimleri

“A kümesi, k elemanlarından oluşmaktadır öyle ki; k, P şartını sağlar”

yani, “A kümesi P şartını sağlayan elemanlardan oluşmaktadır” şeklinde okuruz.

Bu durumda, herhangi bir x elemanı, P şartını sağlıyorsa A kümesine ait bir elemandır, yani $x \in A$ dır. Eğer x elemanı P şartını sağlamıyorsa A kümesine ait değildir, yani $x \notin A$ dır.

Ortak özellik yöntemiyle gösterimde, verilen bir kümenin elemanlarının sağlamasını istediğimiz şartlar gerektiğinde sözel bir şekilde, gerektiğinde matematiksel bir ifadeyle verilebilir. Örneğin, Adıyaman ilinin ilçelerinin oluşturduğu küme ortak özellik yöntemiyle

$$A = \{x \mid x, \text{Adıyaman ilinin bir ilçesidir}\}$$

biçiminde yazılır.

Benzer şekilde bir B kümesi -3 'ten büyük ve 3 'ten küçük tamsayılardan oluşsun. B kümesini ortak özellik yöntemiyle

$$B = \{x \mid -3 < x < 3 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde gösteririz; “B kümesi x elemanlarından oluşur öyle ki x ler -3 'ten büyük, 3 'ten küçük tamsayılarıdır” şeklinde okuruz.

Aşağıda resimleri verilen 6 canlı, bir C kümesi oluştursun. Yani

$$C = \{x \mid x \text{ aşağıdaki resimdeki canlılardan biridir}\}$$

olarak verilsin.



Şimdi, $D = \{x \mid x, P \text{ şartını sağlar ve } x \in C\}$ şeklinde bir D kümesi oluşturmak için ne gibi bir P şartı ifade edebileceğimizi düşünelim. Bu sorunun birçok cevabı olabilir. Bazı olası cevapları şu şekilde belirtebiliriz:

$$D = \{x \mid x \in C \text{ ve } x \text{ bir bitkidir}\}$$

$$E = \{x \mid x \in C \text{ ve } x \text{ bir hayvandır}\}$$

$$F = \{x \mid x \in C \text{ ve } x \text{ suda yaşar}\}$$

$$G = \{x \mid x \in C \text{ ve } x \text{ uçabilir}\}$$

Örneğin, G kümesi resimdeki kuştan oluştuğundan $s(G) = 1$ 'dir.

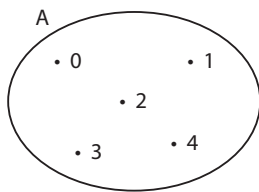
Ortak özelliklerle gösterim yöntemi, özellikle eleman sayısı çok olan kümelerin gösteriminde büyük kolaylık sağlar. Örneğin, 1000'e kadar olan asal sayıları ortak özellik yöntemi ile kolayca gösterebiliriz:

$$A = \{x \mid x < 1000 \text{ ve } x \text{ bir asal sayı}\}$$

Örnek 8

A kümesi 5 ten küçük doğal sayılardan oluşan küme olsun. A kümesini, ortak özellik yöntemi, liste yöntemi ve Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



$$A = \{x \mid x < 5 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Örnek 9

10 ile 35 arasındaki asal sayıların kümesini liste yöntemiyle, Venn şemasıyla ve ortak özellik yöntemiyle yazalım.

Anahtar Bilgi

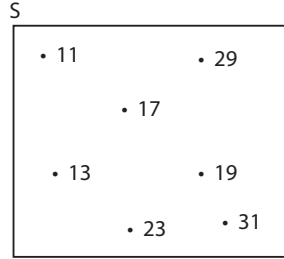
Bir kümeyi oluşturan elemanların ortak bir özelliğinin olma şartı yoktur.

Örneğin $A = \{\text{Ayşe, elma, yıldız, +, n, 3, 8}\}$ bir küme belirtir.

Çözüm

10 ile 35 arasındaki asal sayıların kümesi S olsun.

$$S = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\} = \{x \mid x \text{ bir asal sayı ve } 10 < x < 35\}$$

**Örnek 10**

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{2, 4, 5\}$ kümelerini kullanarak tanımlanan

$C = \{x: y \in A, z \in B \text{ ve } x = y \cdot z\}$ kümesini liste yöntemiyle gösterelim.

Çözüm

A kümesinden alacağımız her bir elemanı B kümesinin elemanlarıyla çarparak C kümesinin elemanlarını oluşturacağız.

$y = 1$ ve $z = 2$ için $x = 1 \cdot 2 = 2$ olduğundan $2 \in C$ dir.

$y = 1$ ve $z = 4$ için $x = 1 \cdot 4 = 4$ olduğundan $4 \in C$ dir.

$y = 1$ ve $z = 5$ için $x = 1 \cdot 5 = 5$ olduğundan $5 \in C$ dir.

$y = 2$ ve $z = 2$ için $x = 2 \cdot 2 = 4$ olduğundan $4 \in C$ dir ki bunu zaten bulmuştuk.

$y = 2$ ve $z = 4$ için $x = 2 \cdot 4 = 8$ olduğundan $8 \in C$ dir.

$y = 2$ ve $z = 5$ için $x = 2 \cdot 5 = 10$ olduğundan $10 \in C$ dir.

Dolayısıyla, $C = \{2, 4, 5, 8, 10\}$ olarak bulunur.

KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

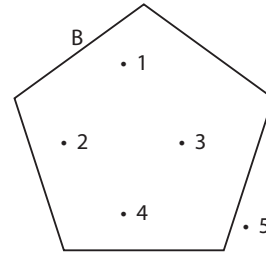
- İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğuna denir.
- Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin denir.
- Kümelerin üç farklı gösterim yöntemi şunlardır: ve
- "|" ve ":" sembolleri yönteminde kullanılır ve anlamına gelir.
- Aşağıdaki toplulukların küme oluşturup oluşturmadıklarını belirtiniz.
 - En zevkli dersler
 - Sivas'a komşu olan iller
 - Türkiye'deki biyosfer rezerv alanları
 - Alfabemizdeki sert ünsüzler

6 ve 7. sorularda boşlukları \in veya \notin ile doldurunuz.

- $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ verilmek üzere
 - 1 A
 - 2 A
 - 4 A
 - 5 A
- $L = \{p \mid p \text{ bir asal sayı}\}$ için
 - 1 L
 - 2 L
 - 3 L
 - 4 L
 - 15 L
 - 17 L
 - 123 L
 - 127 L

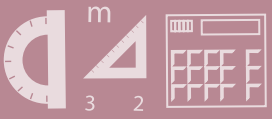
Alıştırmalar

1.



B kümesi ile ilgili aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- $2 \in B$
 - $5 \in B$
 - $B = \{a \mid a \text{ bir doğal sayı ve } 1 \leq a < 5\}$
 - $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - $s(B) = 4$
2. $C = \{k \mid -4 \leq k < 3 \text{ ve } k \in \mathbb{Z}\}$ kümesini liste yöntemiyle gösteriniz ve $s(C)$ değerini bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

3. $A = \{x \mid x^2 = 9 \text{ ve } x \text{ bir tamsayı}\}$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

4. $B = \{k \mid k, \text{"M"} \text{ harfi ile başlayan bir ay}\}$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

5. Gökkuşağını oluşturan renklerin kümesini aşağıdaki yöntemlerle gösteriniz.

- a. Liste yöntemiyle
- b. Venn Şeması yöntemiyle
- c. Ortak özellik yöntemiyle

Uygulama

1. Türkiye'nin komşu ülkelerinin oluşturduğu kümeyi liste yöntemiyle gösteriniz.

2. Aşağıdaki kümeleri Venn şeması ile gösteriniz (Bazı bilgilere ulaşmak için çeşitli kaynaklarda araştırma yapmanız gerekebilir.)

- a. $G = \{\text{İlkbahar, Sonbahar, Yaz, Kış}\}$
- b. $J = \{j \mid j, \text{Türkiye'nin en büyük üç gölünden biri}\}$
- c. $H = \{z \mid z, \text{olimpiyat oyunlarında bugüne kadar ödül aldığımız bir spor dalı}\}$
- d. $O = \{o: o, \text{bir okyanus}\}$

3.



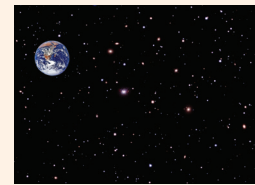
Akciğerli balıklar, solungaçlarına ek olarak akciğere benzer organlara sahiptirler. Oksijenin az olduğu sulara akciğerlerini kullanarak nefes alabilirler. Kurak dönemlerde balçığa saplanıp akciğer solunumu yaparak kurak dönemlerin geçmesini bekleyebilirler. Bu bilgiler ve araştırmalarınız sonucunda akciğerli balıkların yaşadıkları kıtaların kümesini yazarak eleman sayısını bulunuz.

1.1.2. Boş Küme ve Evrensel Küme

Başlarken

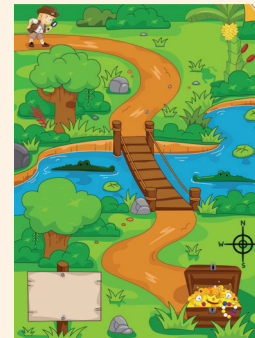
Aşağıdaki sorulara cevap veriniz:

- Oluşturabileceğimiz en az elemana sahip küme nedir?
- Üç elemanlı bir küme düşünün. Bu kümenin elemanlarından birisini bu kümeden çıkartın. Elinizde nasıl bir küme kaldı? Benzer şekilde eleman çıkarma işlemini daha ne kadar devam ettirebilirsiniz?
- Öyle üç küme yazınız ki, 2'şer tane elemanı olsun? Kaç tane küme $s(A) = 1$ eşitliğini sağlar? Kaç tane küme $s(B) = 0$ eşitliğini sağlar?
- Kanatlarıyla uçabilen tavşanlara kümesi nasıl bir kümedir?
- 5'ten büyük çift asal sayılar nasıl bir küme oluşturur?
- Resimdeki sepetteki eşyaların kümesi nedir?



Şimdi de şu sorulara cevap veriniz:

- Elemanı sadece kendiniz olan bir küme düşünün. Bu kümeye bildiğiniz tüm canlı veya cansız varlıkları ekleyerek genişletin. Nasıl bir küme elde ettiniz?
- Oluşturabileceğimiz en fazla elemana sahip küme nedir?
- "Evren" kelimesinin anlamı nedir?
- Bir bilgisayar oyunundan alıntılanan yandaki ikinci resimdeki veya sevdiğiniz herhangi bir bilgisayar oyunundaki bir karakter için "evren" in ne olabileceğini tartışınız?



Yukarıda ilk kısımdaki soruların cevabı aynı kümeyi yani "boş kümeyi" işaret etmektedir. Boş sepet örneğinde olduğu gibi, boş kümenin hiç elemanı yoktur. Herhangi bir kümeden elemanlarını çıkartırsak boş kümeyi elde ederiz. Boş kümede eleman olmadığı için eleman çıkarma işlemini daha fazla devam ettiremeyiz. Bu nedenle en az eleman sayısına sahip küme boş kümedir. Dolayısıyla boş küme, kümeler konusunda önemli bir boşluğu doldurmaktadır. Boş küme \emptyset ya da $\{ \}$ sembolleriyle gösterilir. Yalnızca boş küme için geçerli olan başka bir özellik de şöyledir:

$$s(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ dir.}$$

Yani $s(A) = 0$ ise $A = \emptyset$ dir ve $A = \emptyset$ ise $s(A) = 0$ 'dır.

Anahtar Bilgi

Herhangi bir doğal sayı, bir kümenin eleman sayısı kullanılarak ifade edilebilir.

Örneğin,

$0 = s(\{ \})$ (boş kümenin eleman sayısı)

$1 = s(\{0\})$

$2 = s(\{0, 1\})$

$3 = s(\{0, 1, 2\})$

$4 = s(\{0, 1, 2, 3\})$

...

$n = s(\{0, 1, 2, \dots, n-1\})$

olur.

Neler Öğreneceğiz?

- Boş kümeyi
- Evrensel kümeyi

Anahtar Terimler

- Boş küme
- Evrensel küme

Sembol ve Gösterimler

- \emptyset
- $\{ \}$
- E

Dikkat

$\{\emptyset\}$ ve $\{0\}$ kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki ayrı kümedir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

10 ile 11 arasındaki doğal sayılar kümesi S ile temsil edilecek olursa S kümesinin eleman sayısı sıfırdır. Çünkü 10 ile 11 arasında bir doğal sayı bulunmaz.

Bu durumu $s(S) = 0$ şeklinde gösteririz. Yani $S = \{ \}$ dir.

$B = \{b \mid 3b = 11 \text{ ve } b \in \mathbb{N}\}$ kümesi 3 katı 11 olan doğal sayılardan oluşmaktadır. Ancak böyle bir doğal sayı olmadığı için $B = \emptyset$ dir.

$D = \{x \mid x + 3 = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$ kümesi boş kümedir. Çünkü $x + 3 = 0$ eşitliğinin çözümü $x = -3$ 'tür ve -3 negatif bir tam sayı olup bir doğal sayı değildir. Böylece $D = \emptyset$ veya $D = \{ \}$ olduğu görülür.

Girişte ikinci kısımdaki sorularda olduğu gibi, kendimizden başlayarak etrafımızdaki canlı ve cansız varlıklardan bir küme oluşturmak istediğimizde oluşturabileceğimiz en çok eleman barındıran küme; içinde bulunduğumuz uzayı, yani evreni verecektir. Benzer bir durumu, giriş kısmındaki gibi bir bilgisayar oyununa ait karakter örneği için düşünersek daha farklı sınırlı bir evrenden bahsedebiliriz. Şimdi, bu örneklerden esinlenerek kümeler için evren tanımını yapalım.

Üzerinde işlem yapılan tüm kümelere ait elemanları içine alan kümeye “evrensel küme” diyoruz. Evrensel küme genellikle “ E ” sembolü ile gösterilir.

Örnek 1

$A = \{\text{elma, mandalina, armut}\}$ ve

$B = \{\text{portakal, muz, elma}\}$

kümelerini içine alan bir evrensel kümeyi bulalım.

Çözüm

$A = \{\text{elma, mandalina, armut}\}$ ve $B = \{\text{portakal, muz, elma}\}$ için

$E = \{x \mid x \text{ bir meyve}\}$ veya $E = \{x \mid x \text{ bir yiyecek}\}$ birer evrensel küme olabileceği gibi

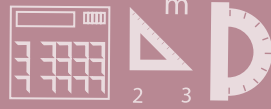
$E = \{\text{elma, mandalina, armut, portakal, muz, kiraz}\}$ kümesi de bir evrensel küme olabilir.

Ancak;

$E = \{\text{elma, muz}\}$ kümesi bir evrensel küme olamaz. Bu durumda olabilecek en az sayıda elemana sahip evrensel küme

$E = \{\text{elma, mandalina, armut, portakal, muz}\}$ dir.

Çünkü, evrensel kümenin ele alınan durumla ilgili tüm elemanları içermesi gerekir.



KENDİMİZİ SINAYALIM



Kavrama ve Muhakeme Soruları

1. Elemanı olmayan kümeye denir ve veya sembolü ile gösterilir.
2. Üzerinde tartışılan problemin bütün elemanlarını içeren kümeye denir ve sembolü ile gösterilir.

Alıştırmalar

3. Aşağıdaki kümelerden hangileri boş küme değildir?
 - I. Karesi negatif olan tam sayılar kümesi
 - II. $A = \{x \mid x \text{ hem tek sayı hem de çift sayıdır}\}$
 - III. Ölümsüz canlılar kümesi
 - IV. 91 in bölenlerinin kümesi
 - V. 0'dan küçük doğal sayılar kümesi
 - VI. $D = \{d \mid d, "P" \text{ harfi ile başlayan bir ilimiz}\}$
 - VII. $B = \{b \mid b, \text{ Türkiye'de 1940 yılından önce açılmış bir baraj}\}$
 - VIII. $A = \{a \mid a \text{ bir çift sayı ve } a \text{ bir asal sayı}\}$

4. Bulunduğunuz ildeki lise öğrencileri üzerine bir araştırma yapan bir araştırmacı için evrensel küme-yi ortak özellik yöntemi ile yazınız.
5. "Alfabemizdeki sert ünsüzler" için evrensel küme ne olabilir?
6. " $0 < 2x + 5 < 12$ eşitsizliğini sağlayan tek sayılar" için evrensel küme ne olabilir?

Neler Öğreneceğiz?

- Sonlu küme kavramını
- Sonsuz küme kavramını

Anahtar Terimler

- Sonlu küme
- Sonsuz küme

Matematik Tarihi
Bernard Bolzano



(1781-1848)

Bolzano, doğal sayıların ötesinde sayılabilme ve bir bakıma adını koymadan, sonsuz kümeler üzerinde çalışmış ve bu özellikteki ilk çalışma olarak tarihteki yerini almıştır. Bolzano, çalışmalarında, kümeleri kullanarak fakat sayı kavramını kullanmadan sonsuzluğu tanımlamayı başarmıştır.

1.1.3. Sonlu ve Sonsuz Küme

Başlarken

Düşünce, kurgu ve hayallerimizle de beslenen matematik, çoğu zaman gözlemleyemediğimiz veya laboratuvarında deneysel olarak test edemeyeceğimiz şeyleri anlamamıza yardımcı olur. Örneğin matematikte yokluğu 0 ile veya boş küme ile özdeşleştirir; sonsuzluğu anlamak için tutarlı argümanlar geliştiririz. Sonsuz kavramı hakkında daha iyi fikir sahibi olmak için aşağıdaki durumlar üzerinde düşününüz:

Henüz anaokuluna giden Ali'nin Minnoş isimli sevimli bir kedisi var. Ali annesine "anne seni Minnoşun tüyleri kadar çok seviyorum" diyor.

İlköğretim 3. sınıf öğrencisi olan Ayşe ile annesi deniz kenarında büyük bir kumsalda gezinti yapıyor. Ayşe annesine teşekkür etmek için "anne seni dünyanın tüm kumsallarındaki kum tanecikleri kadar çok seviyorum" diyor.

Biyolojiye ilgi duyan Duygu annesine "anne seni yeryüzündeki tüm ağaçların yaprakları kadar çok seviyorum" diyor.

Astronot olmak isteyen Enes annesine "anne seni gökyüzündeki yıldızlar kadar çok seviyorum" diyor.

Sizce Ali, Ayşe, Duygu ve Enes'in kıyas olarak kullandıkları kümelerden en çok elemana sahip olanı hangisidir?

Matematiği çok seven birisi olarak siz annenizi çok sevdiğinizi belirtmek için nasıl bir cümle kurarsınız?

Hangisi daha büyüktür: doğal sayıların sayısı mı, yıldızların sayısı mı?

Sonsuz küme deyince aklınıza ne geliyor?



Yukarıdaki sorular ve tartışmalardan da anlaşılacağı üzere saymaya kalktığımızda bitkin düşüp yorulacağımız, sayacak kadar zamanımızın olmayacağı gibi nedenlerle saymakla bitmez şeklinde nitelendirdiğimiz şeylere sonsuz diyemeyiz. Örneğin 1,000,000,000 sayısına kadar tek tek saymak bizim için çok zaman alıcı ve yorucu bir aktivite olacaktır. Ancak bizden çok daha hızlı sayabilen günümüz bilgisayarları için bu kolay bir iştir. Ayrıca 1,000,000,000 sayısına kadar sayabilen bu sayının 1 fazlasına kadar da sayabilir. Bütün bunlar bize eleman sayıları saymakla bitecek veya bitmeyecek kümelerin yani sonlu veya sonsuz kümelerin matematiksel bir tanımına ihtiyaç olduğunu göstermektedir.

Bir A kümesinin eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebiliyorsa A ya “**sonlu küme**” denir ve bu sayı $s(A)$ ile gösterilir.

Sonlu kümelerin sınırları vardır. Bir başka ifadeyle sonlu kümelerin bir başlangıcı ve sonu vardır. Örneğin, 10’a kadar olan çift doğal sayılar kümesini ele aldığımızda 0’dan başlayarak 8’e kadar olan çift sayıları saydığımızda bu kümeyi tamamlamış oluruz. Bu durumu sembollerle açıklamak gerekirse:

$$A = \{x \mid x < 10, x \text{ bir çift sayı ve } x \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ ve } s(A) = 5 \text{ dir.}$$

0 ile başlayan 8 ile biten ve çift doğal sayılardan oluşan 5 elemanlı A kümesi sonlu bir kümedir.

Sonlu olmayan kümelere “**sonsuz küme**” denir. Sonsuz bir kümenin eleman sayısı belirlenemez. Yani bir doğal sayı ile ifade edilemez.

Negatif olmayan tam sayılar yani doğal sayılar kümesi sonsuz elemanlı bir kümedir. Çünkü, n bir doğal sayı ise bir fazlası olan $n + 1$ ’de bir doğal sayıdır. Diğer bir deyişle herhangi bir doğal sayıdan büyük bir doğal sayı her zaman vardır. Dolayısıyla doğal sayılar kümesi sonlu sayıda elemana sahip değildir. Yani sonsuz bir kümedir. Doğal sayılar kümesini liste yöntemi ile

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu kümenin başlangıcı belli fakat sonu belli değildir.

Negatif tam sayılar kümesi de doğal sayılar kümesi gibi sonsuz bir kümedir. Bu kümenin başlangıcı sınırsız olup en büyük elemanı -1 ’dir.

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

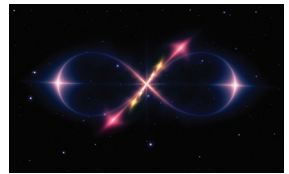
Tam sayılar kümesi her iki taraftan da sınırsız olan sonsuz bir kümedir:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Bunu biliyor muydunuz?

Gökbilimciler gözlemlenebilir evrende en azından 7×10^{22} yıldız olduğunu tahmin etmektedir. Bu Samanyolu-muzda bulunan 300 milyar yıldızın 230 milyar katıdır.

Bunu biliyor muydunuz?



Sonsuzun matematikteki sembolü ∞ şeklindedir. Sonsuz kelimesi, sonu olmayan, sınırlı olmayan, bitmeyen manalarında kullanılmaktadır. Sonsuz, düşünebildiğimiz her doğal sayıdan daha büyüktür.

$C = \{k \mid k, \text{Türkiye'de yayınlanan yerel, bölgesel ve ulusal bir gazete}\}$ olsun. Türkiye İstatistik Kurumunun yayınladığı "Kültür İstatistikleri"ne göre 2011 yılında Türkiye'de yayınlanan yerel, bölgesel ve ulusal gazetelerin sayısı, $s(C) = 2905$ 'tir. Bu durumda C kümesi sonlu bir kümedir.

Her bir doğal sayı, bir rasyonel sayı olduğundan ve de doğal sayılar kümesi sonsuz bir küme olduğundan rasyonel sayılar kümesinin sonsuz bir küme olduğu sonucuna ulaşırız.

Örnek 1

B kümesi 12 ile 18 sayılarını ortak bölen pozitif tam sayılar olsun. K kümesi ise 12 ile 18 sayılarının ortak katları olan tam sayılar olarak verilsin.

- a. B ve K kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.
- b. B ve K kümelerinin eleman sayılarıyla ilgili ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm

- a. 12'nin pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 4, 6 ve 12'dir. 18'in pozitif tam sayı bölenleri 1, 2, 3, 6, 9 ve 18'dir. Dolayısıyla 12 ile 18 sayılarını ortak bölen pozitif tam sayılar 1, 2, 3 ve 6'dır. Yani $B = \{1, 2, 3, 6\}$ olarak bulunur.

12'nin katları, ..., -72, -60, -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ... dir. Benzer şekilde 18'in katları ..., -72, -54, -36, -18, 0, 18, 36, 54, 72, ... olur. Bu nedenle 12 ile 18 sayılarının ortak katları olan tam sayılar kümesi

$K = \{..., -72, -36, 0, 36, 72, ...\}$ olur.

- b. $s(B) = 4$ olduğundan B sonlu bir kümedir. Fakat K kümesinin eleman sayısını belirtebilecek bir doğal sayı olmadığından K kümesi sonsuz bir kümedir.

Örnek 2

Aşağıda belirtilen kümelerin sonlu veya sonsuz olma durumlarını inceleyelim.

- a. Birbirinden farklı n ve m ($n < m$ olsun) gibi herhangi iki doğal sayı arasındaki doğal sayıların oluşturduğu küme
- b. Birbirinden farklı x ve y ($x < y$ olsun) gibi herhangi iki rasyonel sayı arasındaki rasyonel sayıların oluşturduğu küme

Çözüm

(a) seçeneğindeki kümeyi D, (b) seçeneğindeki kümeyi de R ile gösterelim. Bu durumda bu kümeleri ortak özellik yöntemiyle

$$D = \{k \mid n < k < m \text{ ve } k \text{ bir doğal sayı}\}$$

$$R = \{z \mid x < z < y \text{ ve } z \text{ bir rasyonel sayı}\}$$

şeklinde gösterebiliriz. Doğal sayılar birer birer arttığından **n**'den itibaren **m**'ye kadar bu iki sayının arasında kalan **m - n - 1** tane doğal sayı olacaktır. Yani $s(D) = m - n - 1$ olduğu sonucuna ulaşırız ki, bu bize D kümesinin sonlu bir küme olduğunu belirtir.

Şimdi dikkatlerimizi R kümesine yöneltelim. $a < b$ şartını sağlayan herhangi iki a ve b rasyonel sayıları arasında kalan başka bir rasyonel sayı bulabilir miyiz? Bu iki sayıyı toplayıp 2'ye bölersek aradığımız türde bir sayı bulmuş oluruz. Çünkü, a ve b bir rasyonel sayı iken $\frac{a+b}{2}$ de bir rasyonel sayıdır ve $a < \frac{a+b}{2} < b$ olur. Bu durumu şu şekilde ifade edebiliriz:

Birbirinden farklı herhangi iki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı bulunabilir.

Bu özelliği a ile $\frac{a+b}{2}$ ve $\frac{a+b}{2}$ ile b için tekrar uygularsak

$$a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+3b}{4} < b$$

Eşitsizliklerini sağlayan yeni $\frac{3a+b}{4}$ ve $\frac{a+3b}{4}$ rasyonel sayılarını elde etmiş oluruz.

Böylece a ile b arasında yer alan 3 farklı rasyonel sayı bulmuş olduk.

Elde ettiğimiz yukarıdaki özelliği tekrar tekrar kullanarak R kümesinin sonsuz bir küme olduğu sonucuna varabiliriz. İkinci bir yol olarak R kümesinin sonsuz bir küme olduğunu şöyle de gösterebiliriz:

Önce R kümesinin sonlu bir küme olduğunu varsayalım. Bu durumda sonlu kümelelerin eleman sayıları bir doğal sayı olacağından $s(R) = r$ olacak şekilde bir r doğal sayısı bulunmalıdır. Bu durumda R kümesinde, küçükten büyüğe doğru sıralayabileceğimiz farklı r tane rasyonel sayı olacaktır. Yukarıdaki işlemlerimiz r'nin en az 3 olduğunu gösteriyor. Bu r tane rasyonel sayıdan arka arkaya gelen herhangi iki tanesine yukarıdaki özelliği uygularsak bu ikisi arasında kalan dolayısıyla da a ve b arasında kalan yeni bir rasyonel sayı elde etmiş oluruz. Yani elimizde R kümesinde olan **r + 1** tane eleman oldu. Bu ise yaptığımız varsayımın uyuşmadığından varsayımımızın hatalı olduğunu gösterir. O halde, R kümesi sonlu bir küme değil sonsuz bir kümedir.

Burada izlediğimiz gösterim şekli çelişki yöntemiyle ispata bir örnektir.

Anahtar Bilgi

Rasyonel sayılar kümesi ortak özellik yöntemiyle

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Anahtar Bilgi

Bilinen matematiksel kural, özellik, sonuç veya tanımları kullanarak yeni sonuçların gösterilmesine **ispat** denir.

Anahtar Bilgi

Çelişki yöntemi ile ispat, verilen ifadenin tersinin doğru olduğunu kabul edip bir çelişki elde etme şeklinde yaptığımız ispatlara denir.

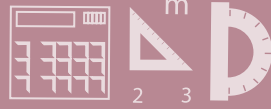
Örnek 3

Aşağıda verilen kümelerden sonlu ve sonsuz olanlarını bulalım.

- a. 3 ile tam bölünebilen tam sayılar kümesi
- b. 0 ile 1000 arasındaki doğal sayılar kümesi
- c. $\{x \mid x, \text{Türkiye'nin bir ilidir}\}$
- ç. $\{n \mid n, 2 \text{ ile } 3 \text{ arasında bir doğal sayıdır}\}$
- d. $\left\{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ve } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{7}\right\}$

Çözüm

- a. “3 ile bölünebilen tam sayılar kümesi” $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ olup sonsuz bir kümedir.
- b. “0 ile 1000 arasındaki doğal sayılar” kümesi $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$ olup sonlu bir kümedir.
- c. Türkiye’nin Nisan 2013 itibariyle 81 ili olduğundan “Türkiye’nin illeri” kümesi sonlu bir kümedir.
- ç. 2 ile 3 arasında doğal sayı bulunmadığından “2 ile 3 arasında doğal sayılar” kümesi boş kümedir. Boş küme ise sonlu bir kümedir.
- d. Herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı bulunabileceğinden “ $\frac{2}{3}$ ile $\frac{5}{7}$ arasındaki rasyonel sayılar” kümesi de sonsuz bir kümedir.



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1. Sonlu eleman sayısına sahip kümeler denir.
2. Sonlu olmayan kümeler denir.
3. Sonsuz kümelerin eleman sayıları neden bir doğal sayı ile ifade edilemez?
4. Rasyonel sayılar kümesini liste veya Venn şemasıyla gösterebilir misiniz? Açıklayınız.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki kümelerden hangileri bir sonlu kümedir?
 - I. $\{x \mid x \text{ bir doğal sayı ve } x < 12\}$
 - II. $\{x \mid x \text{ bir tam sayı ve } x < 12\}$
 - III. $\{y \mid y \text{ bir doğal sayı ve } y > 12\}$
 - IV. $\{z \mid z \text{ bir pozitif çift sayı}\}$
 - V. 4'ten küçük tamsayılar kümesi

2. Hem 9' hem de 15'e bölünebilen tamsayılardan oluşan kümenin eleman sayısı kaçtır?
3. Hem 9'u hem de 15'i bölebilen tamsayılardan oluşan kümenin eleman sayısı kaçtır?
4. $a < b$ olmak üzere a ve b rasyonel sayıları için $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+3b}{4} < b$ olduğunu gösteriniz.
5. Rasyonel sayılar kümesini ortak özellik yöntemiyle göstermek neden diğer yöntemlere göre daha avantajlıdır? Açıklayınız.
6. Aşağıdaki kümelerden hangileri sonlu kümedir?
 - I. Tüm dünyadaki öğrenciler
 - II. 3 ile bölünebilen doğal sayılar
 - III. 0 ile 100 arasındaki doğal sayılar
 - IV. 0 ile 100 arasındaki rasyonel sayılar

Neler Öğreneceğiz?

- Alt küme kavramı ve özelliklerini
- Eşit küme kavramını

Anahtar Terimler

- Alt küme
- Eşit küme

Sembol ve Gösterimler

- \subset
- \supset
- \subseteq
- \supseteq
- \subsetneq
- $=$
- \neq

1.1.4. Alt Küme ve İki Kümenin Eşitliği

Başlarken

Yandaki resimde birbirlerinin içine yerleştirilebilen matruşka bebekleri görülmektedir. Yaptığımız birçok gruplandırma ve sınıflandırmalar da çoğu zaman iç içe yapılar oluşturur. Örneğin, sınıfınızdaki öğrenciler aynı zamanda okulunuzun da bir öğrencisidir. Okulunuzdaki öğrenciler de şehrinizde bulunan öğrenciler topluluğunun bir üyesidir. Benzer şekilde dünyamız, güneş sistemine ait bir gezegen; güneş sistemi de samanyolu galaksisinin bir parçasıdır. Dünyada bulunan her şeyi, samanyolu galaksisinin bir parçası olarak da görebiliriz.



Buna benzer durumları, bir kümenin elemanlarının aynı zamanda başka bir kümenin elemanı olma şeklinde ele alabiliriz.

Sizce doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar arasındaki ilişkiyi nasıl açıklayabiliriz?

Bu kümeler arasındaki ilişkiyi birbirini kapsama veya içermeye yönüyle ifade edebilir misiniz?

MATEMATİK ATÖLYESİ

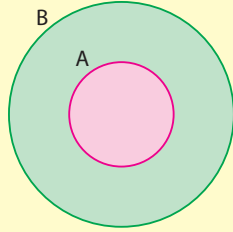
Odadaki Nesneler

Bu atölye çalışmasında bir kümenin elemanları kullanılarak yazılabilecek kümeleri inceleyeceğiz.

- Resimdeki nesneleri inceleyiniz.
- Odadaki tüm nesnelerin kümesi O olsun. Kitaplıktaki nesnelerin kümesi K olsun.
- O ve K kümelerinin elemanlarını liste yöntemiyle yazınız.
- K kümesinin elemanları O kümesinde de bulunuyor mu? Açıklayınız.
- K kümesinde olup O kümesinde olmayan eleman var mı? Açıklayınız.
- O kümesinde olup K kümesinde olmayan eleman var mı? Açıklayınız.



A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin “alt kümesi” denir ve $A \subset B$ veya $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. Aynı durum için, B kümesi A kümesini “kapsar” da deriz ve gösterim olarak $B \supset A$ veya $B \supseteq A$ dan birini kullanırız. Bu kümelerin Venn şemasıyla gösterimi şöyledir:



Bu kitap boyunca tutarlılığı sağlamak için alt küme sembolü olarak \subset ve kapsama sembolü olarak \supset kullanılacaktır.

Eğer A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değilse, A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir. Bu durumu $A \not\subset B$ gösterimi ile ifade ederiz.

Odadaki nesneler etkinliğinde O ve K kümeleri incelendiğinde K kümesinde bulunan her elemanın aynı zamanda O kümesinde de bulunduğundan K kümesi, O kümesinin alt kümesidir. Bu durum $K \subset O$ şeklinde gösterilir. Diğer taraftan O kümesinde K da olmayan elemanlar olduğundan $K \not\subset O$ dir.

Örnek 1

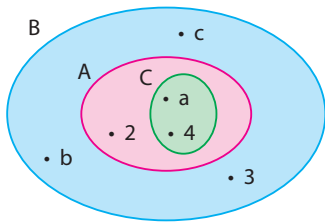
$$A = \{a, 2, 4\}$$

$$B = \{a, b, c, 2, 3, 4\} \text{ ve}$$

$$C = \{a, 4\}$$

kümelerini karşılaştıralım.

Çözüm



A kümesinin bütün elemanları aynı zamanda B kümesinin de elemanı olduğu için A kümesi B kümesinin alt kümesidir yani $A \subset B$ veya B kümesi A kümesini kapsar, yani $B \supset A$ dır. Bu durumu Venn şemasıyla yandaki gibi gösterebiliriz.

C kümesinin her bir elemanı aynı zamanda hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanı olduğundan, C kümesi hem A kümesinin hem de B kümesinin birer alt kümesidir. Yani, $C \subset B$ ve $C \subset A$ dır.

Dikkat

Herhang, bir A kümesi için $A \subset A$ dır.

Örnek 2

Doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar kümesini karşılaştıralım.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

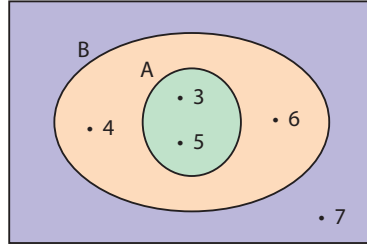
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\} \text{ dir.}$$

Bu durumda her doğal sayı bir tam sayı ve her tam sayı da bir rasyonel sayı olduğundan; doğal sayılar kümesi tam sayılar kümesinin bir alt kümesi, tam sayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. Bu durumu şu şekilde gösterebiliriz:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Örnek 3

D



Verilen Venn şemasındaki kümelerin birbirleriyle olan ilişkisini bulalım.

Çözüm

$A = \{3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ve $D = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dir.

Buradan $A \subset B$, $B \subset D$ ve $A \subset D$ olduğu görülür.

Örnek 4

$A = \{2, 3, a, b\}$ ve $B = \{2, a, c\}$ kümelerini karşılaştıralım.

Çözüm

B kümesinin elemanlarından birisi olan "c", A kümesinin elemanı değildir. Bu nedenle B kümesi, A kümesinin bir alt kümesi değildir. Benzer şekilde "3" A kümesinin elemanı olup B kümesinin elemanı değildir. Bu yüzden A kümesi, B kümesinin bir alt kümesi değildir. Bu durumda $B \not\subset A$ ve $A \not\subset B$ olur.

Örnek 5

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{3, 4, 5\}$$

$$D = \{7, 8, 9\}$$
 kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin doğruluk durumlarını inceleyelim.

- a. $B \subset A$ b. $C \subset A$ c. $C \subset B$ ç. $D \subset A$

Çözüm

- a. B kümesi A kümesinin alt kümesidir ifadesi doğrudur. Çünkü, B kümesinin bütün elemanları aynı zamanda A kümesinin de elemanıdır. Görsel olarak bu durumu, her iki kümenin elemanlarını aşağıdaki gibi eşleştirerek de inceleyebiliriz. B kümesinin elemanlarını, A kümesinin elemanları ile eşleştirdiğimiz zaman B kümesinde açıkta bir eleman kalmadığı için B kümesi A kümesinin alt kümesidir diyebiliriz.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

- b. C kümesi, A kümesinin alt kümesidir ifadesi doğrudur:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$C = \{3, 4, 5\}$$

- c. C kümesi, B kümesinin alt kümesidir ifadesi doğrudur:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{3, 4, 5\}$$

- ç. D kümesi, A kümesinin alt kümesidir ifadesi yanlıştır. Çünkü, D kümesinin bir elemanı olan 9, A kümesinin elemanı olmadığı için D kümesi, A kümesinin alt kümesi değildir. Yani $D \not\subset A$ dir.

D kümesinin elemanlarını A kümesinin elemanları ile eşleştirdiğimiz zaman D kümesinde en az bir eleman açıkta kaldığı için D kümesi A kümesinin alt kümesi değildir diyebiliriz.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D = \{7, 8, 9\}$$

Örnek 6

$$A = \{3, 6, 7, 9, 11, 17, 19, 21, 23, 25, 36\}$$

kümesinin elemanlarını kullanarak ortak özellik yöntemine göre alt kümeler oluşturalım.

Çözüm

$$B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \text{ bir asal sayı}\}$$

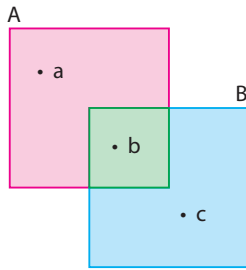
$$C = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N} \text{ ve } y \in A\}$$

$$D = \{z \mid z \in A \text{ ve } 10 < z < 21\}$$

Siz de, A kümesinin elemanlarını kullanarak ortak özellik yöntemine göre 3 tane alt küme oluşturunuz. Daha sonra bu kümeleri liste yöntemiyle yazınız.

MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında bir kümenin elemanları kullanılarak yazılabilecek alt küme sayısını inceleyeceğiz.



Bu etkinlikte bir kümenin elemanları kullanılarak yazılabilecek alt küme sayısını inceleyeceğiz.

| Küme | Eleman Sayısı | Alt Kümeler | Alt Kümelerin Sayısı | |
|----------------------|----------------|---|----------------------|-------|
| $A = \emptyset$ | $s(A) = 0$ | \emptyset | 1 | 2^0 |
| $B = \{1\}$ | $s(B) = 1$ | $\emptyset, \{1\}$ | 2 | 2^1 |
| $C = \{1, 2\}$ | $s(C) = \dots$ | $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ | 4 | 2^2 |
| $D = \{1, 2, 3\}$ | $s(D) = \dots$ | $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ | | |
| $E = \{1, 2, 3, 4\}$ | $s(E) = \dots$ | | | |

Yukarıdaki tabloyu inceleyiniz. Buna göre;

- E = {1, 2, 3, 4} kümesinin alt kümelerini ve alt küme sayılarını bularak tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.
- Boş küme ile ilgili nasıl bir genelleme yapabilirsiniz? Açıklayınız.
- A, B, C, D ve E kümeleriyle alt kümeleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
- A, B, C, D ve E kümelerinin eleman sayılarıyla alt küme sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

Alt kümelerle ilgili bazı özellikler şunlardır:

- **Boş küme her kümenin alt kümesidir:**

Herhangi bir A kümesi için, $\emptyset \subset A$ dır.

Boş kümenin tanımı gereği elemanı yoktur. Dolayısıyla, boş kümenin hiçbir elemanı yoktur ki boş olmayan herhangi A kümesinin elemanlarından farklı olsun. Bundan dolayı, boş küme, herhangi bir kümenin alt kümesidir.

- **Her küme, evrensel kümenin alt kümesidir:**

Herhangi bir A kümesi için, $A \subset E$ dir.

Evrensel kümenin tanımı gereği, A kümesinin bütün elemanları evrensel kümede olmalıdır. A kümesinin, evrensel kümeden farklı olmamasından dolayı da A kümesi evrensel kümenin bir alt kümesi olur.

- **Her küme kendisinin alt kümesidir:**

Herhangi bir A kümesi için, $A \subset A$ dır.

Alt küme tanımı gereği bir kümenin diğer bir kümenin alt kümesi olabilmesi için bütün elemanlarının diğer kümenin de elemanı olması gerekir. A kümesinin de bütün elemanları zaten kendisinin, yani A kümesinin, elemanı olmasından dolayı $A \subset A$. Yani, her küme kendisinin alt kümesidir.

Alt kümenin bu özelliğini bir de çelişki yöntemi ile ispat edelim.

$A \subset A$ ifadesinin doğruluğunu göstermeye çalışıyoruz. Dolayısıyla, $A \subset A$ ifadesinin doğru olmadığını varsayalım.

$A \not\subset A$ olsun.

$A \not\subset A$ ise A kümesinde, A kümesinde olmayan en az bir eleman olması gerekir.

Bu elemana x diyelim.

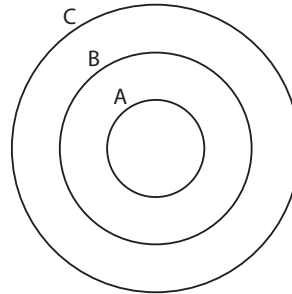
$x \in A$ ve $x \notin A$ olur.

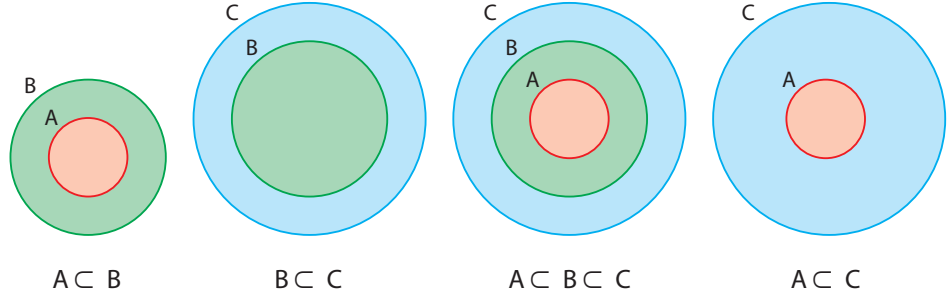
x hem A kümesinin elemanı olması hem de elemanı olmaması bir çelişkidir. Yani böyle bir durum olamaz. Dolayısıyla $A \not\subset A$ önermemiz yanlış olacaktır.

Bu durumda $A \subset A$ ifadesine doğrudur diyebiliriz.

- **A kümesi, B kümesinin alt kümesi ve B kümesi, C kümesinin alt kümesi ise A kümesi, C kümesinin alt kümesi olur:**

Herhangi bir A, B ve C kümeleri için, $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.





$A \subset B$ ise A kümesinin bütün elemanları B kümesinin de elemanıdır. Bir başka ifadeyle, A kümesinin hiçbir elemanı yoktur ki B kümesinin elemanı olmasın. Benzer şekilde, $B \subset C$ ise B kümesinin bütün elemanları C kümesinin de elemanıdır. A kümesinde, B kümesinden farklı hiçbir eleman olmadığı ve B kümesinde de C kümesinden farklı hiçbir elemanı olmadığı için A kümesinin her elemanı C kümesinin de elemanı olacaktır. Yani, A kümesi, C kümesinin alt kümesi olacaktır.

Örnek 7

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin alt kümelerini bulalım.

Çözüm

- 0 elemanlı alt küme : $\{ \}$
- 1 elemanlı alt kümeler : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
- 2 elemanlı alt kümeler : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$
- 3 elemanlı alt kümeler : $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
- 4 elemanlı alt küme : $\{1, 2, 3, 4\}$ 'dir.

Buna göre A kümesinin 16 tane alt kümesi vardır: $2^4 = 16$ 'dır.

- n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir.
- Herhangi bir A kümesinin alt kümeleri sayısı $2^{s(A)}$ dir.

Örnek 8

Aşağıda verilen kümelerin alt küme sayılarını bulalım.

- a. $A = \{a, b, c, d, e\}$
- b. $B = \{x \mid x < -2 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$
- c. $C = \{x \mid -1 \leq x < 3 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

Çözüm

- a. $s(A) = 5$ olup A kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^5 = 32$ 'dir.
- b. -2 'den küçük doğal sayı olmadığı için $s(B) = 0$ olup B kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^0 = 1$ 'dir.
- c. $C = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $s(C) = 4$ olup C kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^4 = 16$ 'dir.

Örnek 9

Bir A kümesinin alt kümelerinin sayısı ile kendisi hariç alt kümelerinin sayısının toplamı 127'dir. Bu kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s(A) = n$ olsun. n elemanlı kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n olduğunu biliyoruz. n elemanlı kümenin kendisi hariç alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ olduğundan

$$2^n + 2^n - 1 = 127$$

$$2 \cdot 2^n = 128$$

$$2^n = 64$$

$$2^n = 2^6$$

$$n = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek 10

$$A = \{5, 6\} \text{ ve}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

olduğuna göre $A \subset K \subset B$ şartını sağlayan K kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

$A \subset K$ olduğundan $\{5, 6\}$ kümesi K kümesinin elemanları olmalıdır. B kümesinin A kümesinden farklı elemanları $\{7, 8, 9\}$ dur. Bu elemanlarla oluşturulacak her bir alt kümeye A kümesinin eklenmesiyle K kümesi oluşturulabilir. Bu durumda 3 elemanlı bir kümenin $2^3 = 8$ tane farklı K kümesi oluşturulabilir.

Bu örnek "B'nin alt kümelerinin kaç tanesinde 5 ve 6 eleman olarak bulunur" biçiminde de ifade edilebilirdi. Bu durumda da yukarıdaki çözüme benzer şekilde, 5 ve 6 dışındaki elemanlar olan 7, 8, 9 ile yazılabilecek tüm alt kümeler yazılıp bunların her birine 5 ve 6'yı eleman olarak ekleme yöntemini deneyebiliriz. 7, 8, 9 elemanları ile 8 alt küme oluşturulabileceğinden cevap 8 olacaktır.

Örnek 11

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

kümesinin 6'yı içeren ama 9'u içermeyen alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

A kümesinin 6 ve 9 dışında 3 elemanı vardır. Bu üç elemanla $2^3 = 8$ tane alt küme yazılabilir. Bu alt kümelerin her birine 6'yı eklersek her bir küme 6'yı içermiş ama 9'u içermemiş olur.

Örnek 12

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında

- a. c elemanı bulunmaz.
- b. c elemanı bulunur.
- c. a elemanı bulunur, c elemanı bulunmaz.
- ç. a ve c elemanları birlikte bulunur.
- d. a ve c elemanları birlikte bulunmaz.
- e. a veya c elemanları bulunur.
- f. a ve c elemanları birlikte bulunur, d elemanı bulunmaz.

Çözüm

- a. Kümeden c elemanı çıkartılırsa geriye kalan $B = \{a, b, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinden hiçbirinde c elemanı bulunmaz. Bu durumda $2^4 = 16$ alt kümede c elemanı yoktur.
- b. A kümesinin tüm alt kümelerinden c elemanı bulunmayan alt kümeleri çıkartılırsa geriye c elemanın bulunduğu alt kümeleri kalır. $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$ alt kümede c elemanı bulunur.

II. yol

$B = \{a, b, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin her birine c elemanını eklersek, c elemanı olan alt kümeleri oluşturmuş oluruz.

$2^4 = 16$ alt kümede c elemanı yoktur. Bunların her birine c elemanı eklediğimizde c elemanı olan alt kümeler oluşmuş olur. Yani 16 alt kümede c elemanı bulunur.

- c. A kümesinden a ve c elemanlarını çıkartırsak $B = \{b, d, e\}$ kümesi elde edilir. B kümesinin alt kümelerinde a ve c elemanları bulunmaz. $2^3 = 8$ alt kümede a ve c elemanları bulunmaz. Bu, 8 alt kümeye a elemanını eklersek a elemanı bulunan c elemanı bulunmayan alt kümeleri oluşturmuş oluruz. Yani, 8 alt kümede a elemanı bulunurken c elemanı bulunmaz.

- ç. A kümesinden a ve c elemanlarını çıkartırsak $B = \{b, d, e\}$ kümesi elde edilir. B kümesi ile oluşturulacak alt kümelerde a ve c elemanları bulunmaz.
 $2^3 = 8$ alt kümede a ve c elemanları bulunmaz. Bu 8 alt kümeye a ve c elemanlarını eklersek a ve c elemanlarını birlikte bulunduran alt kümeler oluşturulmuş olur.
- d. a ve c elemanları birlikte bulunmaz demek a ve c elemanlarının birlikte bulunduğu durumlar haricindeki tüm durumları kapsar.
 Bir önceki örnekte a ve c elemanlarının birlikte bulunduğu alt kümelerin sayısını 8 olarak bulmuştuk. Tüm alt kümelerin sayısı $2^5 = 32$ 'dir.
 a ve c elemanlarının birlikte bulunmadığı alt kümeler ise $32 - 8 = 24$ 'tür.
- e. a veya c elemanları bulunan alt kümeler a ve c elemanlarının olmadığı alt kümeler haricindeki kümelerdir. a ve c elemanlarının olmadığı alt kümelerin sayısını 8 olarak bulmuştuk. Tüm alt kümelerin sayısından 8 i çıkartarak a veya c elemanları bulunan alt kümelerin sayısını bulabiliriz.
 $32 - 8 = 24$ 'tür.
- f. A kümesinden a, c ve d elemanları çıkartılarak $B = \{b, e\}$ kümesi oluşturulur. B kümesi ile oluşturan kümelerde a, c ve d elemanları bulunmaz.
 $2^{s(B)} = 2^2 = 4$ tane alt kümede a, c ve d elemanları bulunmaz.
 Bu kümelere a ve c elemanlarını eklersek, 4 alt kümede a ve c elemanları bulunurken d elemanları bulunmaz.

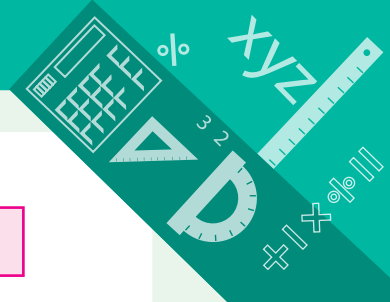
MATEMATİK ATÖLYESİ

Eşit Kümeler

Bu atölye çalışmasında iki kümenin aynı elemanlara sahip olma durumunu inceleyeceğiz.

- $M = \{x \mid x, 2 \text{ ile } 6 \text{ arasındaki doğal sayılar}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $N = \{x \mid 5 \leq x^2 \leq 27 \text{ ve } x \text{ doğal sayı}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $S = \{x \mid 5 \leq x^2 \leq 27 \text{ ve } x \text{ tam sayı}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- M ile N kümelerinin elemanları arasında nasıl bir ilişki vardır?
- N ile S kümelerinin elemanları arasında nasıl bir ilişki vardır?
- M kümesinin her elemanı N kümesinin ($M \subset N$) ve N kümesinin her elemanı da M kümesinin ($N \subset M$) bir elemanı olduğunu fark ettiniz mi? M ile N kümelerinin elemanları arasındaki ilişki N ile S arasında da var mıdır?

(Burada M ve N eşit kümelerdir ($M = N$), fakat N ve S kümeleri eşit kümeler değildir ($N \neq S$)).



Eşit Kümeler

Aynı elemanlara sahip kümelere **eşit kümeler** denir ve bu durumu $A = B$ ile gösterilir.

Eğer A ve B kümeleri eşit kümeler değilse bu durumu $A \neq B$ şeklinde ifade ederiz.

A ve B kümeleri eşit kümeler ise A kümesinin her elemanı B kümesinin ($A \subset B$) ve B kümesinin her elemanı da A kümesinin ($B \subset A$) bir elemanıdır.

$$A = B \text{ ise } A \subset B \text{ ve } B \subset A \text{ dir.}$$

Bu durumun tersi de doğrudur. Yani,

$$A \subset B \text{ ve } B \subset A \text{ ise } A = B \text{ dir.}$$

Örneğin,

$$A = \{\text{Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar}\}$$

$$B = \{\text{Haftanın günleri}\} \text{ ve}$$

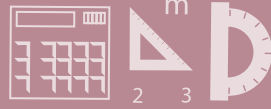
$$C = \{x \mid x \text{ haftanın P ile başlayan bir günü}\}$$

kümeleri verilsin. Bu durumda $A = B$ dir. Ancak $A \neq C$ ve $B \neq C$ dir.

Örneğin,

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\} \text{ ve } B = \{x \mid 2 < x < 8 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\} \text{ verilsin.}$$

B kümesini liste yöntemiyle gösterelim: $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dir. Buradan A ve B kümelerinin eşit olduğu, yani $A = B$ olduğu görülür.



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1. Aşağıda verilen ifadelerdeki boşlukları anlamlı bir şekilde doldurunuz.
 - a. A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin
 - b. A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise B kümesi A kümesini
 - c. A kümesi B kümesinin alt kümesi ise veya şeklinde gösterilir.
 - ç. B kümesi A kümesini kapsar ise veya şeklinde gösterilir.
 - d. B kümesi C kümesinin alt kümesi değil ise şeklinde gösterilir.
 - e. A ve B kümelerinin bütün elemanları aynı ise bu kümelere denir ve şeklinde gösterilir.
 - f. n elemanlı bir kümenin tane alt kümesi vardır.
 - g. Her küme, bir alt kümesidir.

2. $B = \{a, \{a, b\}, c, d, \{c\}\}$ kümesi veriliyor.
Aşağıda verilen ifadelerin yanına doğru olanların yanına 'D' yanlış olanların yanına 'Y' yazınız.

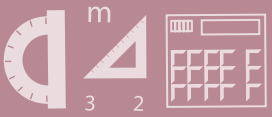
- | | |
|---------------------------|------------------------|
| a. $a \in B$ (...) | b. $\{a\} \in B$ (...) |
| c. $\{a, b\} \in B$ (...) | ç. $\{c\} \in B$ (...) |
| d. $s(B) = 6$ (...) | e. $s(B) = 5$ (...) |
| f. $s(B) = 4$ (...) | |

3. A ve B herhangi iki küme olmak üzere, 9-14. sorulardaki boşlukları \subset , \supset ve $=$ sembollerinden birisi ile doldurun.

- | | |
|--|--|
| a. $\emptyset \dots A$ | b. $A \dots B$ ve $B \dots A$ ise $A = B$ dir. |
| c. $A \dots \emptyset$ | |
| ç. $A \dots B$ ise $A \subset B$ ve $B \subset A$ dır. | |
| d. $A \dots B$ ve $B \dots C$ ise $A \subset C$ dir. | |

4. $A = \{0, 1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{6, 9\}\}$
olduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur? Bulunuz.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a. $1 \in A$ | b. $2 \in A$ |
| c. $a \in A$ | ç. $\{a\} \in A$ |
| d. $6 \in A$ | e. $\{6, 7, 8\} \in A$ |
| f. $0 \in A$ | g. $\{0, 6, 9\} \subset A$ |
| ğ. $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$ | h. $\{a, b, c\} \subset A$ |
| ı. $\{\{a, b, c\}\} \subset A$ | i. $\{2, 3, \{6, 9\}\} \subset A$ |
| j. $\{2, 3, a, b, c\} \subset A$ | |



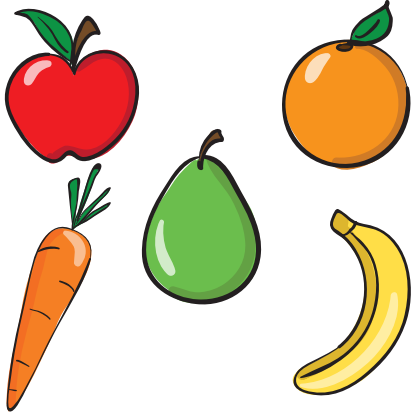
KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırmalar

1. $A = \{\spadesuit, \bullet, \star, \blacksquare, \blacktriangle\}$ kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?
2. Alt küme sayısı 256 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?
3. Bir kümenin eleman sayısı 2 arttırıldığında alt küme sayısı 192 artıyor.
Buna göre, bu küme kaç elemanlıdır?
4. Eleman sayısı ile alt kümelerinin sayısının toplamı 11 olan kümenin eleman sayısı kaçtır?
5. $A = \{k, l, m, n, o, ö, p\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında
 - a. k elemanı bulunmaz.
 - b. k elemanı bulunur.
 - c. k elemanı bulunmaz, m elemanı bulunur.
 - ç. n elemanı bulunur, p elemanı bulunmaz.
 - d. ö ve p elemanları birlikte bulunur.
 - e. n ve o elemanları birlikte bulunmaz.
 - f. k ve l elemanları birlikte bulunur, m elemanı bulunmaz.
6. $s(A) = 3$ ve $s(B) = 4$ olmak üzere A ve B kümelerinin alt kümelerinin sayıları toplamı kaçtır?
7. $C = \{a, b, c\}$
 $E = \{a, b, c, d, e\}$
olduğuna göre $C \subset D \subset E$ şartını sağlayan D kümelerini yazınız.
8. $A = \{x \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{N}\}$ ve
 $B = \{y \mid 0 \leq y^2 \leq 9, y \in \mathbb{Z}\}$
kümesini liste yöntemi ile yazınız. Bu kümelerin eşit küme olup olmadığını açıklayınız.
9. K kümesinin bazı alt kümeleri $\{k\}$, $\{a, k, 2\}$, $\{k, a, 1\}$, $\{a, 1\}$ olduğuna göre K kümesinin en az kaç alt kümesi vardır?

KENDİMİZİ SINAYALIM

10. Akşam evine misafir gelen Tuğba hanımın, dolabında "elma, portakal, muz, armut, havuç" vardır. Tuğba hanım misafirlerine;



- Havuç ve elma içermeyen kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- Havuç ve elma içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- Havuç içeren ama elma içermeyen kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- İçinde havucunda olduğu 3 çeşit içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?
- İçinde havucun olmadığı 3 çeşit içeren kaç farklı ikram tabağı hazırlayabilir?

BÖLÜM ÖZETİ

Küme, iyi tanımlanmış farklı nesnelerden oluşan topluluktur. Burada nesneler canlı ve cansız varlıklar gibi somut ya da sayılar ve şekiller gibi soyut da olabilir. Kümelere ait bazı özellikler şunlardır:

- Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle isimlendirilir. Ancak bir sembol veya özel bir isim gibi farklı şekillerde de adlandırılabilirler.
- Kümeler elemanlarından oluşur. a, A kümesine ait ise, $a \in A$ biçiminde yazılır ve “a, A kümesinin elemanıdır.” diye okunur. b elemanı A kümesine ait değilse, $b \notin A$ biçiminde yazılır ve “b, A kümesinin elemanı değildir.” diye okunur.
- Kümelerde her eleman bir kez yazılır, tekrarlanmaz.
- Elemanların yerlerinin değiştirilmesi kümeyi değiştirmez.
- Verilen bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

Kümelerin gösteriminde yaygın olarak kullanılan liste yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması olmak üzere 3 gösterim türü vardır.

Hiç elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme \emptyset ya da $\{ \}$ sembolleriyle gösterilir.

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri içine alan kümeye evrensel küme denir. **Evrensel küme** “E” sembolü ile gösterilir.

Bir A kümesinin eleman sayısı bir doğal sayı ise A ya **sonlu küme** denir. Sonlu olmayan kümeye de **sonsuz küme** denir.

Bir B kümesinin her elemanı A kümesinin de bir elemanı ise B kümesi, A kümesinin alt kümesidir ve bu durum $B \subset A$ şeklinde gösterilir. B, A'nın **alt kümesidir** diye okunur veya $A \supset B$ şeklinde gösterilir. A kümesi B kümesini **kapsar** diye okunur.

A ve B kümeleri eşit kümeler ise A kümesinin her elemanı B kümesinin ($A \subset B$) ve B kümesinin her elemanı da A kümesinin ($B \subset A$) bir elemanıdır.

Eğer A kümesi, B kümesinin bir alt kümesi değilse bu durum $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

Alt kümelerle ilgili bazı özellikler şunlardır:

- Boş küme her kümenin alt kümesidir:
- Herhangi bir A kümesi için, $\emptyset \subset A$ dır.
- Her küme, evrensel kümenin alt kümesidir:
- Herhangi bir A kümesi için, $A \subset E$ dır.
- Her küme kendisinin alt kümesidir:
- Herhangi bir A kümesi için, $A \subset A$ dır.
- A kümesi, B kümesinin alt kümesi ve B kümesi, C kümesinin alt kümesi ise A kümesi, C kümesinin alt kümesi olur: Herhangi bir A, B ve C kümeleri için, $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dır.
- n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir: Herhangi bir A kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^{s(A)}$ dır.

Doğal sayılar kümesi tam sayılar kümesinin, tam sayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

Doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar kümeleri birer sonsuz kümedir.

$n < m$ şartını sağlayan herhangi iki n ve m doğal sayıları arasındaki doğal sayılar kümesi $m - n - 1$ elemanlı sonlu bir kümedir:

$$D = \{k \mid n < k < m \text{ ve } k \in \mathbb{N}\} \text{ ve } s(D) = m - n - 1 \text{ 'dir.}$$

İki farklı rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı daima bulunabilir.

$x < y$ şartını sağlayan herhangi iki x ve y rasyonel sayıları arasındaki rasyonel sayılar kümesi

$$R = \{z \mid x < z < y \text{ ve } z \in \mathbb{Q}\}$$

bir sonsuz kümedir.

Rasyonel sayılar kümesini ortak özellik yöntemiyle

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$$

şeklinde gösteririz.

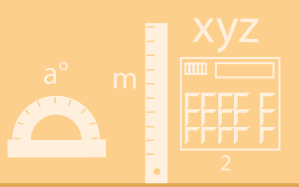
Aynı elemanlara sahip kümelere “**eşit kümeler**” deriz ve bu durumu $A = B$ ile gösteririz. Eğer A ve B kümeleri eşit kümeler değilse bu durumu $A \neq B$ şeklinde ifade ederiz.

A ve B kümeleri eşit kümeler ise A kümesinin her elemanı B kümesinin ($A \subset B$) ve B kümesinin her elemanı da A kümesinin ($B \subset A$) bir elemanıdır.

$$A = B \text{ ise } A \subset B \text{ ve } B \subset A \text{ dir.}$$

Bu durumun tersi de doğrudur. Yani,

$$A \subset B \text{ ve } B \subset A \text{ ise } A = B \text{ dir}$$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Kavram Yoklama ve Muhakeme

1. Aşağıda verilen kümeleri liste yöntemiyle ve Venn şeması ile gösteriniz.

- a. $A = \{x : -2 < x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$
b. $B = \{x \mid x \text{ ler } 20 \text{ den küçük tek sayılar}\}$
c. $C = \{x : 2 < x^2 \leq 18, x \in \mathbb{N}\}$
ç. $D = \{x : 2 < x^2 \leq 15, x \in \mathbb{Z}\}$

2. En az bir eleman bulunan ve kendisinden farklı olan alt kümeleri sayısı 511 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

3. $A = \{x \mid x, \text{ yılın aylarından biri}\}$
 $B = \{x \mid x, \text{ kış mevsiminin bir ayı}\}$
kümeleri verilmiş olsun.

A ve B kümeleri arasındaki alt küme ilişkilerini sembol kullanarak yazınız.

4. A ve B kümeleri için $s(A) = 2$ ve $s(B) = 3$ olduğu biliniyor.
Bu kümelere ait alt kümelerin sayıları toplamı kaçtır?

5. Aşağıdaki kümeleri sonlu ya da sonsuz küme diye sınıflandırınız.

- a. 3 ile bölünebilen doğal sayılar kümesi
b. 0 ile 1000 arasındaki doğal sayılar kümesi
c. Bir haftadaki günlerin kümesi
ç. Tamsayılar kümesi
d. Bir doğru parçası üzerindeki noktalar kümesi

6. x ve y birbirinden farklı herhangi iki rasyonel sayı olsun.

Aşağıdaki kümeleri sonlu ya da sonsuz küme diye sınıflandırınız.

- a. x ile y arasındaki doğal sayılar
b. x ile y arasındaki tam sayılar
c. x ile y arasındaki rasyonel sayılar

7. 4 elemanlı A kümesinin alt küme sayısı ile b elemanlı B kümesinin alt küme sayıları toplamı 48 ise b kaçtır?



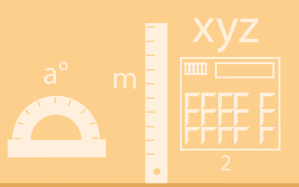
BÖLÜM DEĞERLENDİRME



8. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde
- b eleman olarak bulunur.
 - a eleman olarak bulunmaz.
 - a ve b birlikte eleman olarak bulunur.
 - b veya c eleman olarak bulunur.
 - d eleman olarak bulunurken a eleman olarak bulunmaz.
 - e ve f birlikte eleman olarak bulunurken c eleman olarak bulunmaz.
9. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin kaç alt kümesinde a ile c birlikte görülmez?
10. $A = \{k, l, m, n, o\}$ kümesinin 2 elemanlı kaç alt kümesinde m elemanı bulunur?

11. $A = \{k, l, m\}$ ve $B = \{j, k, l, m, n, o\}$ kümeleri veriliyor. $A \subset B \subset C$ olacak biçimde, kaç farklı B kümesi oluşturulabilir?

12. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $B = \{1, 3\}$ ve $C = \{7, 3, 1, 9, 5\}$ olsun.
 Bu durumda aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
- $B \subset A$
 - $A \subseteq C$
 - $B \subset C$
 - $\emptyset \subset B$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Uygulama ve Problem Çözme

1. 2011 yılında en çok ziyaret edilen 10 müze şu tabloda verilmiştir:

| Müze | Ziyaretçi Sayısı | Şehir |
|-------------------------------------|------------------|----------|
| Ayasofya Müzesi | 3.196.110 | İstanbul |
| Topkapı Sarayı | 3.024.152 | İstanbul |
| Mevlana Müzesi | 1.735.424 | Konya |
| Antalya Noel Baba Müzesi | 587.692 | Antalya |
| Kariye Müzesi | 387.481 | İstanbul |
| İstanbul Arkeoloji Müzesi | 382.148 | İstanbul |
| Hacıbektaş Müzesi | 362.307 | Nevşehir |
| Ankara Anadolu Medeniyetleri Müzesi | 317.277 | Ankara |
| Bodrum Sualtı Arkeoloji Müzesi | 292.538 | Muğla |
| Efes Müzesi | 291.713 | İzmir |

Kaynak: Kültür Varlıkları ve Müzeler Genel Müdürlüğü

Tablodaki verileri kullanarak aşağıda belirtilen kümeleri liste yöntemi ile gösteriniz.

- Ziyaretçi sayısı 1 milyondan fazla olan müzeler kümesi
- Ziyaretçi sayısı 300.000 ile 400.000 arasında olan müzeler kümesi
- Müzelerin bulunduğu şehirler kümesi
- Tablodaki verilere göre İstanbul'daki müzeler kümesi

2. 2011 yılında en çok ziyaret edilen 10 ören yeri şu tabloda verilmiştir:

| Ören Yeri | Ziyaretçi Sayısı | Şehir |
|------------------------|------------------|-----------|
| İzmir Efes | 1.999.959 | İzmir |
| Denizli Hierapolis | 1.625.143 | Denizli |
| Nevşehir Göreme | 906.721 | Nevşehir |
| Antalya Myra | 544.846 | Antalya |
| Çanakkale Troya | 515.905 | Çanakkale |
| Nevşehir Kaymaklı | 415.026 | Nevşehir |
| Antalya Aspendos | 410.161 | Antalya |
| Antalya Perge | 399.805 | Antalya |
| Efes St. Jean Anıtı | 355.803 | İzmir |
| İzmir Bergama Akropolü | 295.927 | İzmir |

Kaynak: Kültür Varlıkları ve Müzeler Genel Müdürlüğü

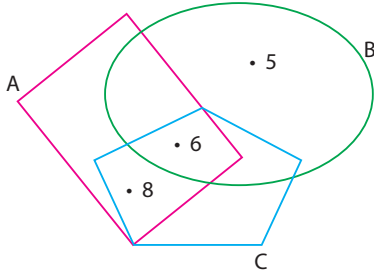
Tablodaki verileri kullanarak aşağıda belirtilen kümeleri liste yöntemi ile gösteriniz.

- Ziyaretçi sayısı 3 milyondan fazla olan ören yerleri kümesi
- Ziyaretçi sayısı 1 milyondan fazla olan ören yerleri kümesi
- Ziyaretçi sayısı 400.000 ile 550.000 arasında olan ören yerleri kümesi
- Ören yerlerinin bulunduğu şehirler kümesi
- Tablodaki verilerde belirtilen Antalya'daki ören yerleri kümesi



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

3. Aşağıdaki A, B ve C kümelerinin elemanları 1'den 10'a kadar doğal sayılardan oluşmaktadır. 5, 6 ve 8 sayıları sizin için kümelere yerleştirilmiştir.



Bu kümelerin diğer elemanlarını her bir kümenin elemanlarının toplamı 30 olacak şekilde bulup kümelere yerleştiriniz.

Araştırma Soruları

- Doğal sayılar kümesi \mathbb{N} , ile Tam sayılar kümesi \mathbb{Z} ile, rasyonel sayılar kümesini ise \mathbb{Q} ile gösterilir. Neden bu gösterimlerin kullanıldığını araştırınız.
- Küme kavramının tarihsel gelişim sürecine bu bölümde ismi geçen George Cantor, Ernst Zermelo ve Bernard Bolzano'nun katkılarını daha ayrıntılı olarak araştırınız.

3. Aksiyom ne demektir? Araştırınız.

4. Kümelerin tanımını anlatırken bahsettiğimiz Bertrand Russell'ın paradoksu şu şekildedir.

"Bir A kümesi, kendi kendisinin elemanı olmayan bütün kümelerin oluşturduğu topluluktur."

Bu durumun neden paradoks olduğu üzerinde düşünerek gerekçelerinizi arkadaşlarınızla tartışınız.

Bu paradoks, yalın küme teorisi kapsamında yapmış olduğumuz küme tanımı için problem teşkil etmektedir. Çünkü tanımını verdiğimiz herhangi bir topluluğun küme oluşturamayacağını belirtmektedir.

5. Sadece bir erkek berberin olduğunu bir kasaba düşünelim. Bu kasabadaki her erkek şu seçeneklerden yalnızca birini yaparak daima traşlı gezmektedir:

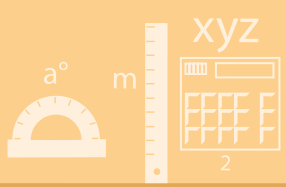
Birinci seçenek: Kendi kendisini traş etmekte

İkinci seçenek: Kasabanın berberine traş olmakta

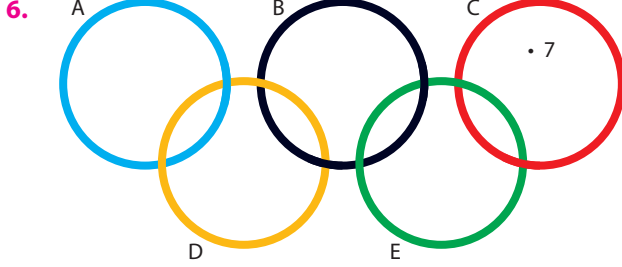
T kümesi bu kasabadaki traşlı olan erkekler topluluğu, E kümesi de bu kasabadaki erkekler topluluğu olsun. Bu durumda aşağıdaki soruları cevaplayınız:

- Kasabanın berberi E kümesinin bir elemanı mıdır?
- E ve T kümeleri eşit kümeler midir?
- Kasabanın berberi T kümesinin elemanı olabilir mi?

Bir paradoks olup olmadığını sınıfta tartışınız.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME



6. Olimpiyat oyunlarının sembolü 1912 yılında modern olimpiyat oyunlarının kurucusu Baron Pierre de Coubertin tarafından tasarlanmıştır. İlk tasarlandığı zaman, o yıl olimpiyat oyunlarına katılan ülkelerin bayraklarının rengini temsilen farklı renklerde halkalar kullanılmıştır. Daha sonraları ise uluslararası birlik ve beraberliği sembolize eden halkalar olarak anılmaya başlamıştır. İsveçli psikiyatrist Carl Jung halkaları devamlılığı ve insanlığı temsil ettiğini söylemektedir.

Yukarıdaki Olimpiyat logosu kullanılarak oluşturulmuş kümelerin her bölgesinde 1 den 9 a kadar olan rakamlar birer kere kullanılacak şekilde ve C kümesi hariç diğer kümelerin elemanlarının sayı değerleri toplamı 15 olacak şekilde rakamları kümelere yerleştirilecektir. $7 \in C$ olarak şekildeki gibi verilmiştir.

Kalan sekiz rakamı diğer bölgelere kaç farklı şekilde yerleştirebilirsiniz?

7. Arkadaşlarınızla iki veya daha fazla grup halinde ve her grupta en az bir kişi olarak şu oyunu oynayınız:

Rastgele oluşturduğunuz kelimeleri bir kutuya atınız. Her grup eşit süre kullanarak sırayla kutudan bir kelime seçtikten sonra o kelimeyle ilişkisi olan yeni kelimeler içeren kümeler oluştursun. Oluşturulan kümeleri ve eleman sayılarını kayıt altına alınız. Oyun sonunda kazanan grubu şu iki şekilde belirleyebilirsiniz:

- Oluşturulan kümelerin eleman sayıları toplamı en çok olanlar.
- Oluşturulan kümelerdeki kelimelerin harfleri toplamı en çok olanlar.

Örnek olarak, A grubu "Okul" kelimesiyle ilgili olarak şu kümeyi oluşturabilir

$O = \{\text{Ders, Öğrenci, Öğretmen, Sınıf, Arkadaş}\}$

B grubu "Deniz" kelimesiyle ilgili olarak

$D = \{\text{Su, Mavi, Gemi, Batmak, Liman, Balık, Balina, Ada, Dalga, Kumsal, Sahil}\}$

kümesini oluşturabilir.

Bölüm 1.2. Kümelerde İşlemler

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- Kümelerde birleşim, kesişim, fark ve tümlleme işlemlerini
- Bu işlemlerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri
- Ayrık küme kavramını
- Sıralı ikilileri ve iki kümenin kartezyen çarpımını
- Kümelerde işlemleri kullanarak problem çözme



Neden Öğreneceğiz?

Aritmetik işlemlerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini biliyoruz. Bu işlemler, sayı nesneleri üzerinde cebirsel bir yapı oluşturmamızı, sayılar arasında ilişkiler kurmamızı sağlar. Bu ilişkilere ait özellikleri belirlememiz sayıların kullanıldığı konu veya problemlerde bize büyük kolaylıklar sağlar. Benzer bir durum kümeler için de söz konusudur. İki kümenin birleşim işlemi, bu kümelerin elemanlarının bir arada düşünülmesi durumunda; kesişim işlemi, iki kümede ortak olan elemanların tespitinde; fark işlemi, bir kümenin diğer bir kümede olmayan elemanlarının belirlenmesinde; tümlleme işlemi de, bir kümenin dışında kalan elemanları belirlemede kullanılır.

Bu işlemler, kümeler üzerinde cebirsel bir yapı oluşturur. Bu işlemler ve özelliklerinden yararlanmakla kümeler, birçok uygulama alanı bulur ve problem çözümlerinde etkin bir şekilde kullanılır.

HAZIR MIYIZ?

1. Nüfus müdürlüklerine her kişi için bir tane asıl ikamet yeri bildirilebilmektedir. Bu çerçevede Adana ilinde ikametgahı olan insanlar topluluğu için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
 - I. Aladağ ve Yüreğir'de ikametgahı olan insanlar Adana'da ikametgahı olanların içinde bir topluluk oluşturur.
 - II. Bir kişinin hem Seyhan'da hem de Ceyhan'da ikametgahı olamaz.
 - III. Yumurtalık ilçesinde ikametgahı olan bir kişi aynı zamanda Adana nüfusuna da kayıtlıdır.



| Matematik kursuna katılan öğrencilerin numaraları | Resim kursuna katılan öğrencilerin numaraları |
|---|---|
| 121 | 120 |
| 143 | 132 |
| 150 | 143 |
| 151 | 145 |
| 162 | 150 |

Yandaki tabloda bir sınıftaki matematik ve resim kurslarına katılan öğrencilerin okul numaraları verilmiştir.

Her bir kursa katılanları bir küme olarak düşünüp aşağıdaki şıklarda belirtilenleri yapınız.

- a. Matematik kursuna katılan öğrencilerin numaralarının kümesini liste yöntemiyle ve Venn şemasıyla gösteriniz.
- b. Resim kursuna katılanların numaralarının kümesini liste yöntemiyle ve Venn şemasıyla gösteriniz.
- c. 12 kişilik bu sınıfta matematik ve resim kurslarından hiçbirine katılmayan öğrencilerin numaraları 123, 144, 148, 155 olarak veriliyor. Bu sınıftaki öğrenciler kümesini büyük bir Venn şeması ile gösteriniz. Bu kümeyi bir evrensel küme gibi düşünerek içine matematik kursuna katılanların ve resim kursuna katılanların kümelerinin Venn şemalarını çizin. Çiziminizi arkadaşlarınızla paylaşıp en doğru çizimi sınıfta tartışınız.
3. Türkiye'nin illerini evrensel küme olarak düşünelim. Bu durumda Avrupa kıtasında olan iller ve Asya kıtasında olan iller biçiminde iki küme tanımlayalım.
 - a. Bu iki kümenin ortak elemanları nelerdir?
 - b. Avrupa'da olup Asya'da olmayan iller hangileridir?
 - c. Marmara denizine kıyısı olan iller ve Ege denizine kıyısı olan illeri birer küme olarak düşünelim. Bu iki kümenin kesişimi nedir? Bu kümelerin birbirlerinden farklı elemanlarını ayrı ayrı bulunuz.
 - d. Karadeniz'e kıyısı olan illeri bir küme olarak düşünelim. Ege denizine kıyısı olan iller ile Karadeniz'e kıyısı olan iller kümelerini karşılaştıralım. Bu kümelerin ortak elemanları var mıdır? Bu kümeleri nasıl isimlendirebiliriz?



1.2.1. Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemleri

Başlarken

Bazen yeni öğrendiğimiz bilgiler, zihinlerimizde yapageldiğimiz sınıflandırmalara uymaz ve şaşıarak bu durumu çok ilginç buluruz.

Örneğin, "yumurtlayan canlılar" ile "yavrularını kendi sütüyle besleyen canlılar" şeklindeki sınıflandırmaları düşünelim:

- A kümesi yumurtlayan canlılardan oluşsun. Bu kümenin dört elemanını bulunuz ve başka neler olabileceğini düşününüz.
- B kümesi yavrularını kendi sütüyle besleyen canlılar kümesi olsun. Bu kümenin de 4 elemanını yazarak başka neler olabileceği üzerinde düşününüz.
- Hem yumurtlayan hem de yavrularını kendi sütüyle besleyen canlılar var mıdır? Varsa bu canlılar A kümesinin mi yoksa B kümesinin mi elemanıdır?
- Yanda resimleri verilen iki canlı türünün A ve B kümelerinde olup olmadıklarını araştırınız.
- Hem A hem de B de olan canlılar kümesini nasıl ifade edebiliriz?



Dikenli karıncayıyen (Echidna)



Ornitorenk veya Platypus (Ornithorhynchus anatinus)

Neler Öğreneceğiz?

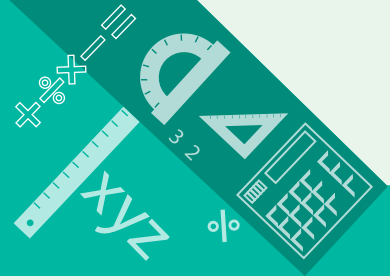
Kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerini ve bu işlemlerin özelliklerini

Anahtar Terimler

- Birleşim işlemi
- Kesişim işlemi

Sembol ve Gösterimler

- \cup
- \cap



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, iki kümenin birleşimi ve ortak elemanlarının gösterimini inceleyeceğiz.

Hasan Amca kuru üzüm ve zeytin ticareti yapmaktadır. Hasan Amca;

- “Afyon, Ankara, Kırıkkale, Çankırı ve Sivas” illerindeki bayilerine kuru üzüm,
- “Afyon, Ankara, Kırşehir, Kayseri” illerindeki bayilerine ise zeytin göndermektedir. Hasan amcanın kuru üzüm gönderdiği bayilerinin bulunduğu şehirlerin kümesi K, zeytin gönderdiği bayilerinin kümesi Z olsun. Buna göre;

- K kümesindeki illeri liste biçiminde yazınız.
- Z kümesindeki illeri liste biçiminde yazınız.
- K ve Z kümesindeki illerin listesini birleştirerek tek bir küme şeklinde yazınız.
- K ve Z kümelerindeki ortak illerin listesini tek bir küme olarak yazınız.
- K ile Z kümelerindeki illeri Venn şemasıyla bir arada nasıl gösterebiliriz?



Seçmeli Dersler

Sınıfınızdan Sosyal Etkinlik, Diksiyon ve Hitabet seçmeli derslerini alan arkadaşlarınızı öğreniniz.

- Sosyal Etkinlik seçmeli dersini alan öğrencileri liste ve Venn şeması yöntemleriyle gösteriniz.
- Diksiyon ve Hitabet seçmeli dersini alan öğrencileri liste ve Venn şeması yöntemleriyle gösteriniz.
- Sosyal Etkinlik, Diksiyon ve Hitabet seçmeli derslerinin üçünü de alan bütün öğrencileri liste ve Venn şeması yöntemleriyle gösteriniz.
- Sosyal Etkinlik, Diksiyon ve Hitabet seçmeli derslerinden en az ikisini alan öğrencileri liste ve Venn şeması yöntemleriyle gösteriniz.



Oluşturduğunuz bu dört küme arasındaki ilişkileri inceleyip arkadaşlarınızla tartışınız.

Bu kümelerin ortak ve farklı yanları nelerdir?

Bu kümeleri farklı Venn şemalarıyla göstermek isterseniz nasıl bir şema çizersiniz?

Farklı kümeleri oluşturan elamanların bazıları ortak olabilir. Örneğin farklı iki yemek için kullanılan malzemeler birer küme oluşturur. Bu yemeklerde ortak kullanılan bazı malzemeler olabileceği gibi yemeğin birinde kullanıldığı halde diğerinde kullanılmayacak malzemeler de olabilir.

Bu yemekleri yapmak için gerekli malzemeler için alışverişe giden birisinin aldığı malzemelerin oluşturduğu kümeyi düşününüz.

Her iki yemekte de kullanılacak malzemelerin oluşturduğu kümeyi düşününüz.

Kümelerde birleşim ve kesişim işlemleri, bu tür kümeleri ifade etmektedir.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere bu iki kümenin ortak elamanlarının oluşturduğu kümeye **A ve B kümelerinin kesişim kümesi** denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. A ve B kümelerinden oluşturduğumuz kesişim kümesi ortak özellik yöntemiyle

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 1

$A = \{a, b, c, 1\}$, $B = \{1, a, 3, 4\}$ ve $C = \{4, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor.

- a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $B \cap C$

kümelerini liste yöntemiyle gösteriniz

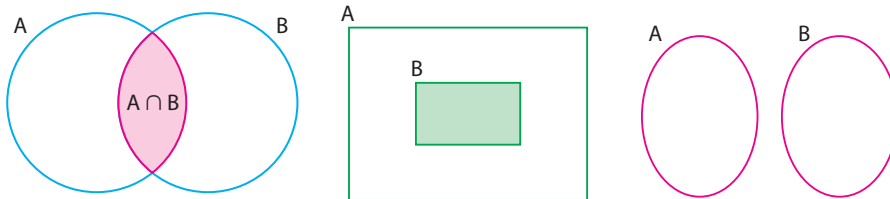
Çözüm

- a. A ve B kümelerinde ortak olan elemanlar 1 ve a dır, $A \cap B = \{1, a\}$ olur.
b. A ve C kümelerinde ortak eleman olmadığından $A \cap C = \{\}$ dir.
c. B ve C kümelerinin ortak elemanı sadece 4 tür, $B \cap C = \{4\}$ olur.

Verilen iki A ve B kümeleri için şu durumlardan bahsedilebilir:

- ortak elemanları olabilir.
- biri diğerinin alt kümesi olabilir.
- hiç ortak elemanları olmayabilir.

Bu durumları gösteren Venn şemaları şöyledir:



Anahtar Bilgi

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

Anahtar Bilgi

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

Dikkat

Kümelerin birleşimi yazılırken ortak olan elemanlar bir defa yazılır.

Anahtar Bilgi

Ortak özellik yöntemiyle gösterimde, keşişim işleminde **ve** bağlacı, birleşim işleminde ise **veya** bağlacı kullanılır.

A ve B kümelerinin elemanlarının tamamının oluşturduğu kümeye **A ve B kümesinin birleşim kümesi** denir ve **$A \cup B$** şeklinde gösterilir. A ve B kümelerinden oluşturduğumuz birleşim kümesi ortak özellik yöntemiyle

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ ve $C = \{a, b, c, h\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre,

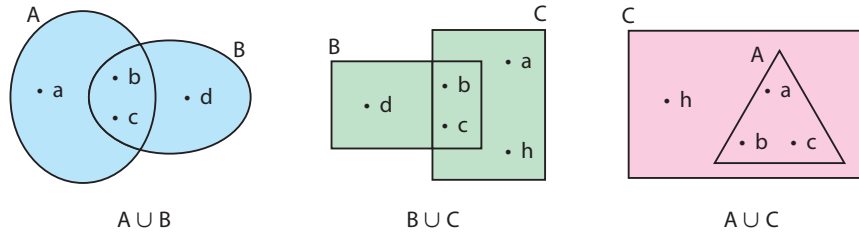
- a.** $A \cup B$ **b.** $B \cup C$ **c.** $A \cup C$

kümelerini liste yöntemiyle ve Venn şemasıyla gösteriniz.

Çözüm

- a.** $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ olur. Kümelerin birleşimi yazılırken ortak olan elemanlar bir defa yazılır.
b. $B \cup C = \{b, c, d, a, h\}$
c. $A \cup C = \{a, b, c, h\}$ olur.

Bu birleşim kümelerinin Venn şemalarıyla gösterimleri şöyledir:



$A \cup B$ kümesi, A ve B kümelerinin elemanlarına bağlı olarak farklılık gösterebilir.

Olabilecek farklı durumlardaki Venn şeması gösterimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. İlk sütunda, birleşimi oluşturan kümelerin hiç ortak elemanı olmadığı durum; ikinci sütunda, ortak elemanların olup kümelerin birbirlerini kapsamadığı durum; üçüncü sütunda da kümelerden birinin diğerini kapsadığı durum gösterilmiştir.

| $A \cap B = \emptyset$ iken | $A \cap B = \emptyset$, $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ iken | $B \subset A$ iken |
|---|---|---|
| <p>$A \cup B$ boyalı bölgedir.</p> | <p>$A \cup B$ boyalı bölgedir.</p> | <p>$A \cup B$ boyalı bölgedir.</p> |

Örnek 3

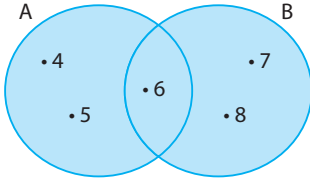
$A = \{4, 5, 6\}$ ve $B = \{6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$

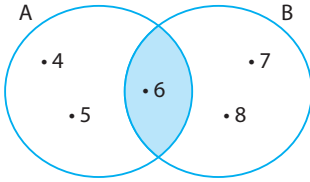
kümelerini liste yöntemiyle yazınız ve Venn şemasıyla gösteriniz.

Çözüm

- a. $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ dir ve bu durumda A, B ve $A \cup B$ kümelerinin Venn şeması ile gösterimi şöyledir:



- b. $A \cap B = \{6\}$ dir. Bu durumda A, B ve $A \cap B$ kümelerinin Venn şeması ile gösterimi şöyledir:

**Örnek 4**

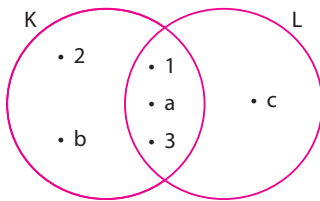
$K = \{1, 2, 3, a, b\}$

$L = \{1, 3, a, c\}$ ve

kümeleri için $K \cup L$ ve $K \cap L$ kümelerini Venn şeması ve liste yöntemi ile gösteriniz.

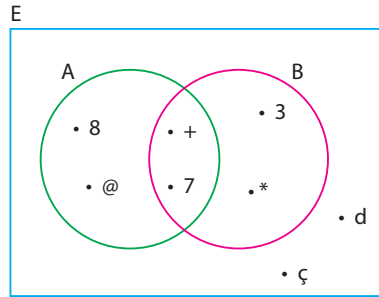
Çözüm

$K \cup L = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ ve $K \cap L = \{1, 3, a\}$ olduğundan



elde edilir.

Örnek 5



Yandaki Venn şemasını kullanarak aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle gösterelim.

- a. E b. A
c. B ç. $A \cap B$
d. $A \cup B$

Çözüm

- a. Evrensel küme dikdörtgen içindeki bütün elemanlardan oluşur. Dolayısıyla, $E = \{8, @, +, 7, 3, *, d, \text{ç}\}$ dir.
- b. A kümesi kendisine ait çemberin içindeki elemanları içerdiğinden $A = \{8, @, +, 7\}$ dir.
- c. Benzer şekilde B kümesi, $B = \{+, 7, 3, *\}$ dir.
- ç. $A \cap B$ kümesi, A ve B kümelerinin kesiştiği (iki çemberin üst üste geldiği bölge) bölgedeki elemanları kapsar. Bu yüzden, $A \cap B = \{+, 7\}$ dir.
- d. $A \cup B$ kümesi, A ve B kümelerinin kapsadığı bütün (iki çemberin kapsadığı bölgeler) bölgelerdeki elemanlardan oluşur. Bu nedenle, $A \cup B = \{8, @, +, 7, 3, *\}$ dir.

Örnek 6

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ evrensel kümesi, $A = \{1, 3, 4, 5\}$

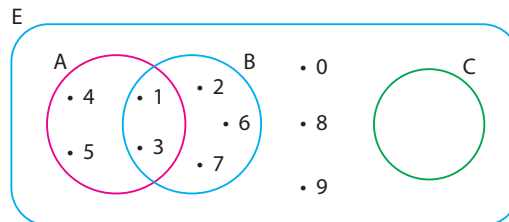
$B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ ve $C = \{ \}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle ve Venn şemasıyla gösteriniz.

- a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $A \cup B$ ç. $A \cup C$ d. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Çözüm

- a. Önce A ve B kümeleri için ortak elemanları bulalım. 1 ve 3 hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanıdır. Dolayısıyla 1 ve 3, $A \cap B$ kümesinin elemanlarını oluşturur. Bu durumda $A \cap B = \{1, 3\}$ dir. Bu kümeleri Venn Şeması ile şöyle gösterebiliriz:



- b.** C kümesi boş küme olduğundan hiç elemanı yoktur. Dolayısıyla, C kümesinin A kümesi ile ortak elemanı da olmayacağından $A \cap C = \{ \}$ olur.
- c.** A ve B kümelerinin birleşim kümesi, her iki kümenin bütün elemanlarını içerir. A veya B kümelerinin elemanları birleşim kümesini oluşturur.
Dolayısıyla $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dir.
- ç.** C kümesi boş küme olduğu için, A kümesi ile birleşiminde sadece A kümesinde olan elemanlar yer alır. Bu nedenle, $A \cup C = \{1, 3, 4, 5\}$ dir.
- d.** $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 4, 5\}$ **c.** ve **d.** den dolayı.
 $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 3, 4, 5\}$ olarak bulunur.

Örnek 7

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 5, 7\} \text{ ve}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\} \text{ olsun.}$$

Buna göre,

a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

eşitliklerini her iki taraftaki kümeleri liste yöntemiyle yazarak test ediniz.

Çözüm

a. $B \cap C = \{3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \emptyset$ olduğundan

$$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3, 4\} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan; $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4\}$ olur. Böylece $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ eşitliğini bu örnek için doğrulamış olduk.

b. $B \cup C = \{3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ olduğundan

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{2, 3, 4\} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan; $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3\} \cup \{2, 4\} = \{2, 3, 4\}$ dir.

Böylece $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliğini bu örnek için doğrulamış olduk.

Örnek 8

$$A = \{k, l, m\}$$

$$B = \{k, l, m, n, s\} \text{ verilsin.}$$

$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini

- Liste yöntemi ile
- Venn şeması yöntemi ile göstererek

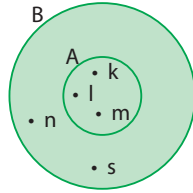
" $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ " özelliğini test ediniz.

Çözüm

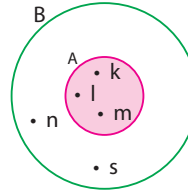
$$a. \quad A \cup B = \{k, l, m, n, s\} = B$$

$$A \cap B = \{k, l, m\} = A$$

b.



$A \cup B$ kümesi $A \cup B = B$



$A \cap B$ kümesi $A \cap B = A$

Yukarıdaki iki örnekte verilen kümeler için kesişme ve birleşme işlemlerinin bazı özellikleri sağladığını gördük. Benzer şekilde, verilen $A = \{2, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 5, 7, 8\}$ ve $C = \{1, 2, 3, 6\}$ kümeleri için aşağıdaki soruları cevaplayarak kümelerde kesişme ve birleşme işlemlerinin başka ne gibi özellikleri olduğunu keşfedelim.

- $A \cup \emptyset$ kümesini liste yöntemi ile yazınız. Elde ettiğiniz kümeyle A kümesi arasında nasıl bir ilişki vardır?
- $A \cap \emptyset$ kümesini liste yöntemi ile yazınız. Elde ettiğiniz kümeyle \emptyset arasında nasıl bir ilişki vardır?
- $A \cup A$ ve $A \cap A$ kümelerini liste yöntemiyle yazarak bu kümelerle A kümesi arasındaki ilişkiyi bulunuz.
- $A \cup B$ ve $B \cup A$ kümelerini liste yöntemiyle yazarak bu iki küme arasındaki ilişkiyi bulunuz. Benzer şekilde $A \cap B$ ve $B \cap A$ kümelerini liste yöntemiyle yazarak bu iki küme arasındaki ilişkiyi bulunuz.
- $B \cup C$ kümesini yazınız ve bu kümeyi A kümesiyle birleştiriniz. Diğer taraftan $A \cup B$ kümesini yazınız ve bu kümeyi C kümesiyle birleştirerek $A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cup B) \cup C$ kümeleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

Benzer şekilde $B \cap C$ kümesini yazınız ve bu kümeyle A kümesinin kesişimini bulunuz. Diğer taraftan $A \cap B$ kümesini yazınız ve bu kümenin C kümesiyle kesişimini bulunuz. $A \cap (B \cap C)$ ve $(A \cap B) \cap C$ kümeleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

Verilen küme örnekleri üzerinde kesişim ve birleşim işlemlerinin bir takım özellikleri sağladığını gördük. Ancak bu yaptıklarımız, bu özelliklerin herhangi bir küme için sağlandığından emin olmak yeterli değildir. Şimdi bu gözlemlediğimiz özelliklerin herhangi bir küme için de sağlandığını gösterelim, yani ispat edelim.

Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemlerinin Özellikleri

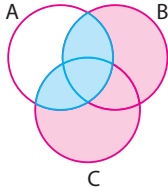
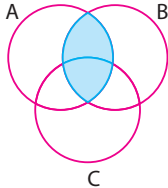
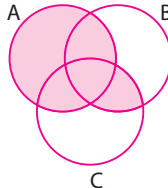
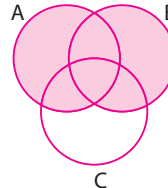
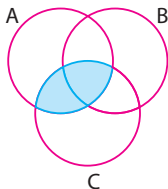
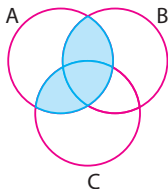
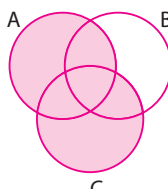
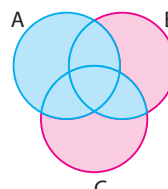
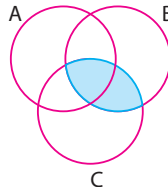
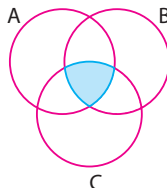
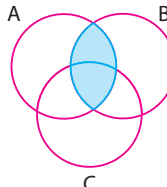
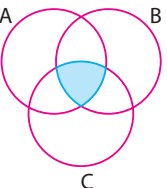
| BİRLEŞİMİN ÖZELLİKLERİ | KESİŞİMİN ÖZELLİKLERİ |
|--|---|
| Boş küme ile ilgili ilişkiler | |
| Herhangi bir kümenin boş kümeyle birleşimi kümenin kendisidir. Çünkü boş kümeden birleşim kümesine katılacak hiç eleman yoktur. | Boş kümenin hiçbir elemanı olmadığından herhangi bir kümeyle de ortak elemanı yoktur. Bu nedenle kesişimleri boş kümedir. |
| $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Kümenin kendisi ile ilişkisi | |
| Bir kümenin kendisi ile birleşimi kendisidir. Çünkü bir kümede bir eleman sadece bir kez yazılabilir. Bu yüzden, birleşim kümesinde sadece A kümesinin elemanları olacaktır. | Bir kümenin kendisi ile kesişimi kendisidir. Çünkü bir kümenin kendisi ile bütün elemanları aynıdır ve ortaktır. Dolayısıyla kesişimde kümenin bütün elemanları bulunmalıdır. |
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| İki kümenin birbiriyle ilişkileri | |
| Birleşim kümesinin tanımı gereği, A ile B kümelerinin birleşim kümesi, B ile A kümelerin birleşim kümesine eşittir. Çünkü bir kümedeki elemanların sırası kümeyi farklı bir küme yapmaz. | A ile B kümelerinin kesişim kümesi, B ile A kümesinin bütün elemanları B kümesinde de olan ortak elemanlardır. Dolayısıyla A kümesi ile B kümesinin kesişimi, A kümesidir. |
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $A \subset B$ şartı varsa | |
| A kümesi B kümesinin bir alt kümesi ise A kümesinin bütün elemanları B kümesinde de vardır. Dolayısıyla A kümesi ile B kümesinin birleşimi B kümesidir. | A kümesi B kümesinin bir alt kümesi ise A kümesinin bütün elemanları B kümesinde de olan ortak elemanlardır. Dolayısıyla A kümesi ile B kümesinin birleşimi A kümesidir. |
| $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ | $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ |

Anahtar Bilgi

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup B = \emptyset$ ise ($A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$)

Anahtar Bilgi

\Rightarrow sembolü **ise** anlamında kullanılır.

| Kesişimin birleşim üzerine dağılımı (Venn şeması ile gösterim) | | Birleşimin kesişim üzerine dağılımı (Venn şeması ile gösterim) | |
|---|---|---|---|
|  $A \cap (B \cup C)$ |  $A \cap B$ |  $A \cup (B \cap C)$ |  $A \cup B$ |
|  $A \cap C$ |  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |  $A \cup C$ |  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | |
| Birleşim ve kesişim işlemlerinde birleşim özellikleri | | | |
| $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | |
| $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ olduğunu Venn şeması ile gösterelim. | | | |
|  $(B \cap C)$  $A \cap (B \cap C)$ | |  $A \cap B$  $A \cap (B \cap C)$ | |

Siz de $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ olduğunu Venn şeması ile gösteriniz.

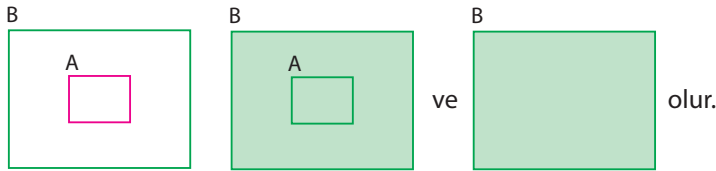
Örnek 9

" $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ " ve " $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ " özelliklerini Venn şeması yardımı ile gösterelim.

Çözüm

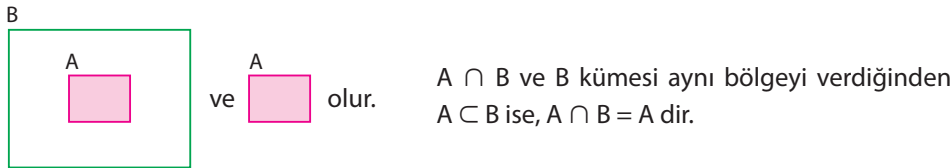
$A \subset B$ durumunda A ile B, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin Venn şeması ile gösterimleri sırasıyla şu şekildedir:

$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini boyalı bölgelerle gösterirsek



$A \cup B$ ve B kümeleri aynı bölgeyi verdiği için $A \subset B$ ise, $A \cup B = B$ dir.

Diğer taraftan, $A \cap B$ ve A kümelerini boyalı bölgeyle gösterirsek



Şimdi de siz, yukarıda verilen kümelerde kesişim ve birleşim işlemlerinin diğer özelliklerinin doğruluğunu Venn Şeması yardımıyla gösteriniz.

Örnek 10

$A \cap B = \{a, b, c\}$, $A \cap C = \{c, d, e\}$ ise $A \cap (B \cup C)$ kümesini bulalım.

Çözüm

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$ olur.

Birleşim işleminin özelliklerinin ortak özellik yöntemi yardımıyla ispatları şöyledir:

1. Bir kümenin boş küme ile birleşimi kümenin kendisidir:

$$A \cup \emptyset = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in \emptyset\} = \{x \mid x \in A\} = A$$

2. Bir kümenin kendisiyle birleşimi kümenin kendisidir:

$$A \cup A = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$$

3. A, B ve C gibi üç kümenin birleşimi herhangi ikisinin birleşimiyle üçüncüsünün birleşimine eşittir:

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C\} = \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C)\} \\
 &= \{x \mid x \in (A \cup (B \cup C))\} \\
 &= A \cup (B \cup C)
 \end{aligned}$$

4. A kümesi B kümesinin alt kümesi ise A ile B nin birleşimi B kümesidir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B\} = B$$

5. İki kümenin birleşimi boş küme ise bu kümelerin her ikisi de boş kümedir. Gerçekten; $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \emptyset$ ise hem A kümesinin hem de B kümesinin hiç elemanı yoktur. Yani her ikisi de boş kümedir.

Kesişim işleminin özelliklerinin ortak özellik yöntemi yardımıyla ispatları şöyledir:

1. Bir kümenin boş küme ile kesişimi boş kümedir:

$$A \cap \emptyset = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in \emptyset\} = \{x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$$

2. Bir kümenin kendisiyle kesişimi kümenin kendisidir:

$$A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$$

3. A, B ve C gibi üç kümenin kesişimi herhangi ikisinin kesişimiyle üçüncüsünün kesişimine eşittir:

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ ve } x \in C\} = \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } x \in C\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cap C)\} \\
 &= \{x \mid x \in (A \cap (B \cap C))\} \\
 &= A \cap (B \cap C)
 \end{aligned}$$

4. A kümesi B kümesinin alt kümesi ise A ile B nin kesişimi A kümesidir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in A\} = A$$

5. Birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

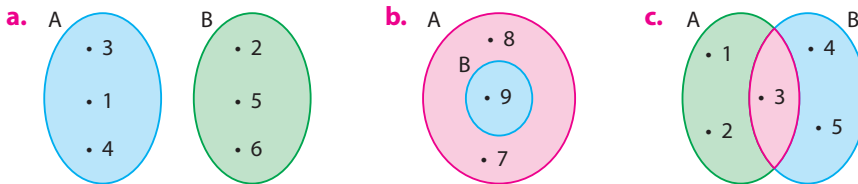
$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\} \\
 &= \{x \mid x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]\} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

6. Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$$\begin{aligned}
 A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\} \\
 &= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\} \\
 &= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\} \\
 &= \{x \mid x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]\} \\
 &= (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

Örnek 11

Aşağıdaki şekilde verilen a, b ve c şıkları için şekillere göre $s(A \cup B)$, $s(A)$, $s(B)$, ve $s(A \cap B)$ sayılarını ve aralarındaki ilişkileri bulunuz.

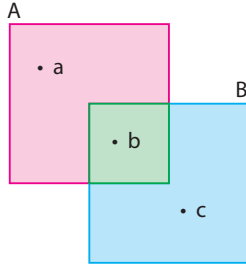


Çözüm

- a.** $s(A \cup B) = 6$, $s(A) = 3$, $s(B) = 3$ ve $s(A \cap B) = 0$ elde edilir.
Burada $A \cap B = \emptyset$ ve $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğu görülür.
- b.** $s(A \cup B) = s(A) = 3$, $s(B) = s(A \cap B) = 1$ elde edilir.
Bu durumda $A \cap B = B$ ve $s(A \cup B) = s(A)$ olduğu görülmektedir.
- c.** $s(A \cup B) = 5$, $s(A) = 3$, $s(B) = 3$ ve $s(A \cap B) = 1$ elde edilir.
Burada $A \cap B \neq \emptyset$ ve $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğu görülür.
Bu örnekte, $A \cap B$ kümesinin durumu ne olursa olsun $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliği gözlemlenmektedir.

MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, iki kümenin birleşiminin eleman sayısının bulunmasını inceleyeceğiz.



Şemadaki a, b, ve c harfleri bulundukları bölgelerdeki eleman sayılarını gösterebilir. Buna göre;

- $s(A)$ yı bulunuz.
- $s(B)$ yı bulunuz.
- $s(A \cap B)$ yı bulunuz.
- $s(A \cup B)$ yı bulunuz.
- "A ve B kümelerinin birleşiminin eleman sayısı $s(A) + s(B)$ dır." diyebilir miyiz? Neden?

$A \cup B$ kümesi oluşturulurken A kümesindeki ve B kümesindeki elemanlar bir araya getirilir. Ortak olan elemanların tekrar etmemesi gerektiğinden kesişimde bulunan elemanların birleşim kümesinde birer defa bulunmasına dikkat edilir. Bu durumu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

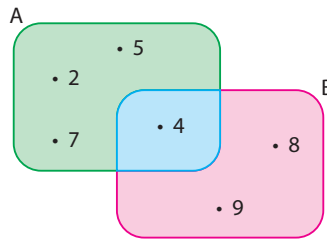
Herhangi bir A ve B kümeleri için, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ dir.

Bu eşitliğin özel bir durumu olarak, A ile B kümelerinin kesişimleri boş küme ise $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

Anahtar Bilgi

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

Örnek 12



Şemada verilenleri kullanarak

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğinin doğruluğunu test edelim.

Çözüm

$s(A) = 4$, $s(B) = 3$ ve $s(A \cap B) = 1$ dir. Buradan $s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$ olarak bulunur.

Diğer taraftan $A \cup B = \{2, 5, 7, 4, 8, 9\}$ olduğundan $s(A \cup B) = 6$ elde edilir.

Örnek13

$$s(A) = 9$$

$$s(B) = 6 \text{ ve}$$

$s(A \cap B) = 4$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nı bulalım.

Çözüm

İki kümenin birleşiminin eleman sayısını veren kuralı kullanabiliriz.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 9 + 6 - 4 = 11 \text{ olur.}$$

Örnek14

A kümesinin eleman sayısı 8, B kümesinin eleman sayısı 7 ve iki kümenin birleşiminin eleman sayısı 12 olduğuna göre iki kümenin kesişiminin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Soruya göre $s(A) = 8$, $s(B) = 7$ ve $s(A \cup B) = 12$ olarak verilmiş, $s(A \cap B)$ istenmektedir.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ olduğundan}$$

$$12 = 8 + 7 - s(A \cap B) \Rightarrow s(A \cap B) = 3 \text{ olur.}$$

O halde verilen kümelerin kesişiminin eleman sayısı 3 tür.

Örnek15

Bir A kümesinin eleman sayısı, B kümesinin eleman sayısının 3 katıdır. Bu iki kümenin birleşim ve kesişiminin eleman sayıları toplamı 16 olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre $s(A) = 3 \cdot s(B)$ ve $s(A \cup B) + s(A \cap B) = 16$ dır.

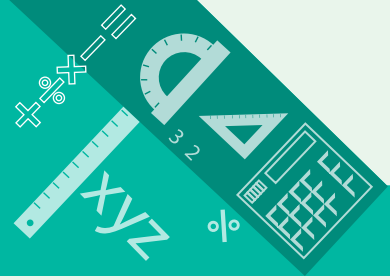
Diğer taraftan, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğini,

$$s(A \cup B) + s(A \cap B) = s(A) + s(B) \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

Verilenleri bu eşitlikte yerine yazarsak

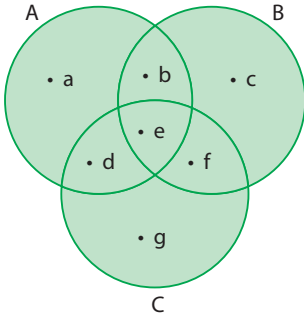
$$16 = 3 \cdot s(B) + s(B) \text{ olur.}$$

Buradan $s(B) = 4$ ve $s(A) = 3 \cdot 4 = 12$ elde edilir.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında üç kümenin birleşiminin eleman sayısının bulunmasını inceleyeceğiz.



Şemadaki a, b, c, d, e, f ve g harfleri bulundukları bölgelerdeki eleman sayılarını gösterebilir.

Buna göre;

- A, B ve C kümelerinin eleman sayılarını, verilen harfler cinsinden bulunuz.
- Kümelerin ikişerli kesişimlerinin eleman sayılarını, verilen harfler cinsinden bulunuz.
- A, B ve C kümelerinin üçünün kesişiminin eleman sayısını ifade eden harf hangisidir?
- A, B ve C kümelerinin birleşiminin eleman sayısı $s(A) + s(B) + s(C)$ dir, diyebilir miyiz? Neden?

Yol gösterme

İstenenleri bulabilmek için şöyle bir yol izlenebilir:

- $s(A) = a + b + e + d$
- $s(A \cap B) = b + e$
- $s(A \cap C) = \dots\dots\dots$
- $s(B \cap C) = \dots\dots\dots$
- $s(A \cap B \cap C) = \dots\dots\dots$
- $b = s(A \cap B) - s(A \cap B \cap C)$
- $d = \dots\dots\dots$
- $f = \dots\dots\dots$
- $e = \dots\dots\dots$

- $a = s(A) - s(A \cap B) - d = \dots\dots\dots$
- $c = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
- $g = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Yukarıda yazdığınız eşitlikleri kullanarak 3 kümenin birleşiminin eleman sayısı formülünü çıkarınız.

$$s(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f + g = \dots\dots\dots$$

İki kümenin eleman sayılarıyla ilgili olarak

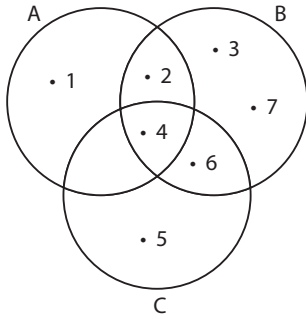
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğini görmüştük. Şimdi iki küme arasındaki bu ilişkiyi üç küme için genelleştireceğiz.

Herhangi A, B ve C kümeleri için, şu eşitlik sağlanır:

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

Bu eşitlik üç kümenin eleman sayısının, kümelerin eleman sayıları, ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayıları ve üçünün kesişiminin eleman sayısı cinsinden yazılabileceğini gösteriyor.

Yukarıdaki etkinlik bu bağıntının nasıl elde edildiğini adım adım açıklamaktadır.

Örnek 1

Yanda verilen A, B ve C kümelerini kullanarak

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

eşitliğini kontrol edelim.

Çözüm

$s(A) = 3$, $s(B) = 5$ ve $s(C) = 3$, $s(A \cap B) = 2$, $s(B \cap C) = 2$, $s(A \cap C) = 1$ ve $s(A \cap B \cap C) = 1$ dir. Buradan,

$$s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C) = 3 + 5 + 3 - 2 - 2 - 1 + 1 = 7$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olduğundan $s(A \cup B \cup C) = 7$ 'dir.

Böylece, verilen eşitliğin bu örnekte sağlandığı görülür.

Örnek 2

A, B ve C kümeleri için $s(A \cup B) = 14$, $s(A \cup C) = 12$, $s(B \cup C) = 11$,
 $s(A \cup B \cup C) = 12 + s(A \cap B \cap C)$ ise $s(A) + s(B) + s(C)$ toplamını bulalım.

Çözüm

İki kümenin birleşiminin eleman sayısı ile ilgili olarak şu eşitlikleri biliyoruz.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$s(A \cup C) = s(A) + s(C) - s(A \cap C)$$

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C)$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayınca

$$s(A \cup B) + s(A \cup C) + s(B \cup C) = 2(s(A) + s(B) + s(C)) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C)$$

elde edilir. $s(A \cup B) = 14$, $s(A \cup C) = 12$ ve $s(B \cup C) = 11$ olduğundan

$$37 = 14 + 12 + 11 = 2(s(A) + s(B) + s(C)) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) \text{ eşitliğine ulaşırız.}$$

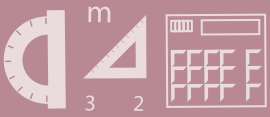
Diğer taraftan, $s(A \cup B \cup C) = 12 + s(A \cap B \cap C)$ ve

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \text{ olduğundan}$$

$$12 = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) \text{ bulunur.}$$

Bunu yukarıda elde ettiğimiz eşitlikten taraf tarafa çıkartırsak

$$25 = s(A) + s(B) + s(C) \text{ sonucunu elde ederiz.}$$



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1 – 5. sorulardaki boşluklara uygun kelime veya kelime gruplarını yazınız.

1. A ve B kümelerinin bütün elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin denir.
2. A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin denir.
3. Küme işlemlerinde “ve” bağlacı genellikle temsil eder.
4. Küme işlemlerinde “veya” bağlacı genellikle temsil eder.
5. Bir otobüsteki yolcularla ilgili şu kümeler veriliyor:
Otobüsteki 15 yaşından büyük yolcular A kümesini, gözlüklü yolcular G kümesini, bayan yolcular B kümesini, ilk durakta inecek yolcular D kümesini oluşturuyor.

Bu durumda $A \cap G$ kümesi 15 yaşından büyük olan gözlüklü yolculardan oluşmaktadır. Benzer şekilde siz de aşağıdaki kümeleri hangi yolcuların oluşturduğunu belirtiniz.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a. $D \cap G$ | b. $G \cap D$ |
| c. $D \cap (B \cup G)$ | ç. $(D \cap B) \cup (D \cap G)$ |
| d. $(A \cup G) \cap (D \cup B)$ | e. $(A \cup G) \cap (A \cup B)$ |
| f. $A \cup (G \cap B)$ | g. $A \cap D \cap G$ |

Alıştırma Soruları

1. Kış mevsiminin ayları ile yılın ilk üç ayından oluşan kümelerin bileşim ve kesişim kümelerini liste yöntemiyle yazınız.
2. $M = \{6, 8, 10, \dots, 36\}$ ve $R = \{22, 23, 24, \dots, 44\}$ kümeleri veriliyor. $s(M \cap R)$ ve $s(M \cup R)$ değerlerini hesaplayınız.

3. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, d, f, g, h\}$
 $C = \{f, h, k\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre;

- a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
özelliklerinin sağlandığını gösteriniz.

4. $K = \{x \mid 11 < x < 64, x = 3n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$
 $L = \{x \mid 14 < x < 74, x = 4n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$ ve $M = \{x \mid 17 < x < 84, x = 5n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$ olduğuna göre

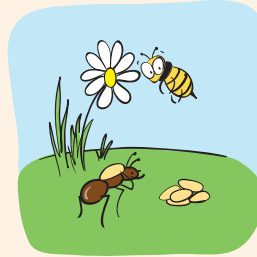
- a. K, L ve M kümelerinin üçünün birleşiminin eleman sayısı kaçtır?
- b. K, L ve M kümelerinin üçünün kesişiminin eleman sayısı kaçtır?

1.2.2. Kümelerde Fark İşlemi

Başlarken

Kişiler, varlıklar, nesneler, olaylar arasında karşılaştırmalar yaparız. Karşılaştırmalarımızın sonucu algılarımıza yön verir. Örneğin, karıncalarla arılar karşılaştırılırken; karıncalar çok çalışkandır. Bir de kanatları olsa, arılardan daha çok iş yapardı. Kanatları olmamasına rağmen kocaman buğdayları sırtlarında taşıyarak bütün yaz kışa hazırlık yaparlar. Arılar da çok çalışkandır. Bir sürü çiçeği dolaşmak, polen yükleriyle uçmak kolay değildir. Ayrıca arılar, karıncalardan farklı olarak bal yaptıklarından insanlara fayda sağlarlar.

Örnekte de görüldüğü gibi karşılaştırma yapılırken ortak ve ortak olmayan yönler belirlenmeye çalışılmaktadır. Benzer karşılaştırmaların, kümelerde fark işlemi olarak karşımıza nasıl çıktığını bu kısımda göreceğiz.



Neler Öğreneceğiz?

Kümelerde fark işlemi ve ayrık küme kavramını

Anahtar Terimler

- İki kümenin farkı
- Ayrık küme

Sembol ve Gösterimler

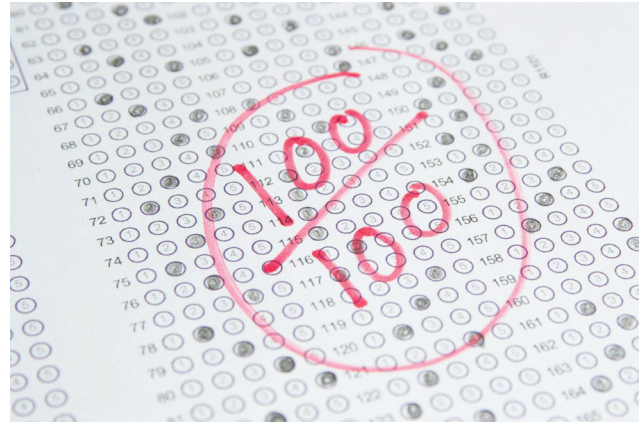
- $A - B$

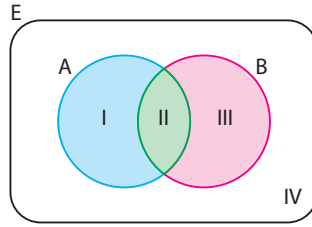
Bu atölye çalışmasında bir kümenin diğer bir kümeden farkını inceleyeceğiz.

Sınıfınızdaki öğrencilerin bir önceki yıl Matematik ve Türkçe derslerinden aldıkları notlarını öğreniniz.

Matematik dersinden notu 4 olan öğrencilerin kümesini M ile gösteriniz ve elemanlarını yazınız.

- Türkçe dersinden notu 4 olan öğrencilerin kümesini T ile gösteriniz ve elemanlarını yazınız.
- Hem matematik hem de Türkçe derslerinden notları 4 olan öğrencilerin kümesini yazınız.
- Matematik dersinden notu 4 olan ve Türkçe dersinden notu 4 olmayan öğrencilerin kümesini yazınız.
- Türkçe dersinden notu 4 olan ve matematik dersinden notu 4 olmayan öğrencilerin kümesini yazınız.





Yandaki Venn şeması, iki küme için olabilecek durumların tümünü göstermektedir. Bu durumlar farklı bölgeler olarak gösterilerek numaralandırılmıştır. Bu bölgelerden bazılarını veren küme ve küme işlemlerini daha önceki bölümlerde görmüştük. Önce bunları hatırlayalım.

II numaralı bölge A ve B kümelerinin kesişimini gösterip A ve B kümelerinde ortak olan elemanlardan oluşur. Yani $A \cap B$ yi gösterir.

I, II ve III numaralı bölgelerin hepsi birlikte A ve B kümelerinin birleşimini temsil eder. Yani $A \cup B$ yi belirtir.

I, II, III ve IV bölgeleri ise evrensel kümeyi oluşturur. Yani E yi ifade ederler.

Şimdi ise, I ve III numaralı bölgelerin özelliklerini inceleyeceğiz. I numaralı bölgeye dikkat edersek B kümesinin elemanları bu bölgede bulunmamaktadır. Yani, bu bölgede A kümesini de olup B kümesinde olmayan elemanlar bulunmaktadır. Benzer şekilde, III numaralı bölgede ise B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlar bulunmaktadır. Bu bölgeleri ifade etmek için kümelerde fark işlemini kullanıyoruz.

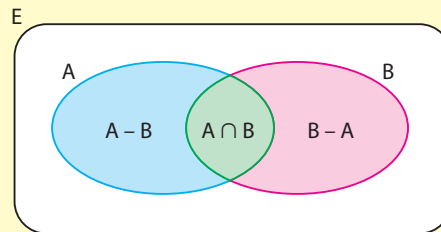
A kümesinde olup, B kümesinde olmayan elemanların kümesine “**A kümesinin B kümesinden farkı**” veya “**A fark B kümesi**” deriz ve $A - B$ şeklinde gösteririz.

Farklı A ve B kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerinin de farklı kümeler olduğuna dikkat ediniz. Şimdi bu kümeleri ortak özellik yöntemiyle gösterelim:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \text{ ve } x \notin A\}$$

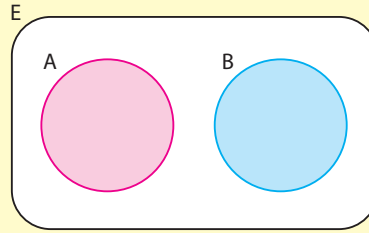
Fark işlemlerini kullanarak A ve B kümelerinin birbirlerine göre durumlarını şu şekilde gösterebiliriz:



Bu gösterimden de anlaşılacağı gibi $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ dir.

Eğer $A \cap B$ kümesi boş küme ise yani A ve B kümelerinin ortak elemanı yok ise bu kümeler **ayrık kümeler** olarak adlandırılır.

Ayrık A ve B kümeleri için $A \cap B = \emptyset$ olduğundan yukarıdaki gösterim yerine yandaki Venn şemasını da kullanabiliriz:



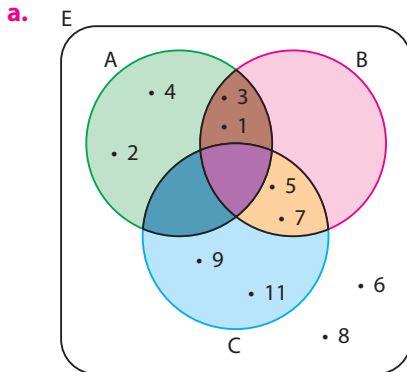
Örnek 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $C = \{5, 7, 9, 11\}$ kümeleri verilsin.

E evrensel kümesi için $E - (A \cup B \cup C) = \{6, 8\}$ olduğu bilindiğine göre

- E, A, B ve C kümelerini Venn şeması
- $A - B$ ve $B - A$ kümelerini liste yöntemi
- $A - C$ ve $C - A$ kümelerini liste yöntemi ile gösterelim.

Çözüm



b. $A - B = \{2, 4\}$, $B - A = \{5, 7\}$

c. A ve C kümelerinin ortak elemanı olmadığından ayrık kümelerdir. Bu durumda

$A - C = \{1, 2, 3, 4\} = A$ ve

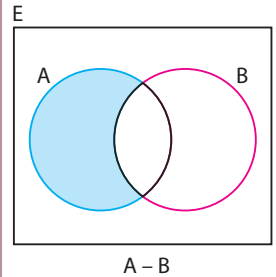
$C - A = \{5, 7, 9, 11\} = C$ dir.

Kümelerde Fark İşlemiyle İlgili Özellikler

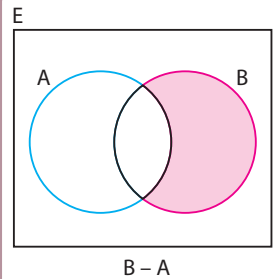
A, B, C kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere kümelerde fark işleminin özellikleri şöyledir:

- Bir kümenin kendisinden farkı boş kümedir. Gerçekten;
 $A - A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin A\} = \{x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$
- Bir kümenin boş kümeden farkı kendisidir. Gerçekten;
 $A - \emptyset = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin \emptyset\} = \{x \mid x \in A\} = A$
- Bir kümenin evrensel kümeden farkı boş kümedir. Gerçekten;
 $A - E = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin E\} = \{x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$
- A ve B kümeleri eşit kümeler değil ise A'nın B'den farkı, B'nin A'dan farkına eşit değildir.

Anahtar Bilgi



Anahtar Bilgi

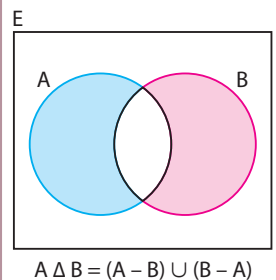


Anahtar Bilgi

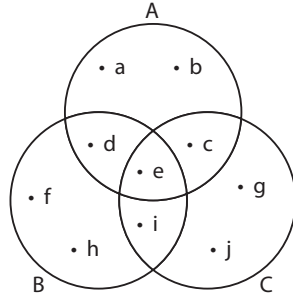
$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$$

Anahtar Bilgi

A fark B ve B fark A kümelerinin birleşim kümesine **A simetrik fark B kümesi** denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir. Yani,
 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ dir.



Örnek 2



A, B ve C kümeleri aşağıdaki Venn şemasıyla verilmiştir.

Buna göre,

a. $(A \cup B) - C$

b. $A - (B \cup C)$

c. $(A - C) \cup (B - C)$

kümelerini liste yöntemi ile yazalım.

Çözüm

a. $(A \cup B) - C = \{a, b, d, f, h\}$,

b. $A - (B \cup C) = \{a, b\}$

c. $(A - B) \cup (A - C) = \{a, b, c\} \cup \{a, b, d\} = \{a, b, c, d\}$

Örnek 3

E evrensel kümesi ile A, B ve C kümeleri aşağıdaki gibidir.

$A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 7, 8\}$, $C = \{3, 6\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Bu kümeleri Venn şemasıyla gösteriniz ve aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle belirleyiniz.

a. $A - B$

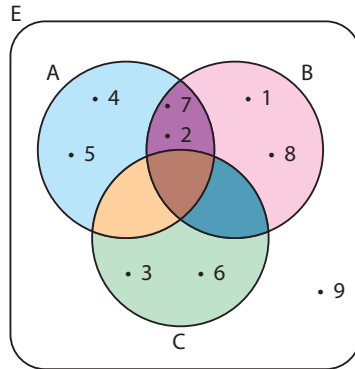
b. $A - C$

c. $B - C$

ç. $E - A$

d. $B - E$

Çözüm



a. $A - B$ kümesi, A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan, yani 4 ve 5 ten oluşur. Dolayısıyla, $A - B = \{4, 5\}$ dir.

b. $A - C$ kümesi, A kümesinde olup C kümesinde olmayan elemanlardan oluşur.

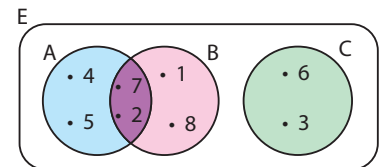
Dolayısıyla, $A - C = \{2, 4, 5, 7\}$ dir.

c. Benzer şekilde, $B - C = \{1, 2, 7, 8\}$ olarak bulunur.

ç. $E - A$ kümesinin elemanları evrensel kümenin A kümesinden farklı olan elemanlarıdır: 1, 3, 6, 8 ve 9 dur. Yani, $E - A = \{1, 3, 6, 8, 9\}$ olur.

d. $B - E$ kümesinin elemanları B kümesinde olup evrensel kümede olmayan elemanlardan oluşur. Ama B kümesindeki elemanlar evrensel kümede de olacağından, $B - E = \emptyset$ dir.

Bu örnekte, A ve B kümelerinin C kümesi ile ortak elemanları yoktur, yani $A \cap C = \emptyset$ ve $B \cap C = \emptyset$ dir. Bu durumda yukarıdaki Venn şemasını yandaki gibi de gösterebiliriz.



Anahtar Bilgi

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $A - E = \emptyset$
- $A \neq B$ ise $A - B \neq B - A$

KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1 – 4. sorulardaki boşluklara uygun kelime veya kelime gruplarını yazınız.

1. A kümesinin B kümesinden farklı olan elemanları ile oluşturulan kümeye denir.
2. Hiçbir ortak elemanı olmayan iki kümeye denir.
3. = $\{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin C\}$
4. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümeleri dir.

Alıştırma Soruları

1. Aşağıda belirtilen kümeleri Venn şeması ile gösteriniz.
 - a. $A - A$
 - b. $A - B$
 - c. $(A - B) - C$
2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$
 kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini Venn şeması kullanarak gösteriniz.
3. E evrensel kümesi ile A, B ve C kümeleri şu şekilde veriliyor:

$E = \{a, b, c, \text{ç}, d, e, f, g, h, ı\}$, $A = \{a, b, \text{ç}, e, h\}$,
 $B = \{a, c, \text{ç}, d, g\}$, $C = \{\text{ç}, d, h\}$

Buna göre aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle gösteriniz.

- a. $A - B$
 - b. $A - C$
 - c. $B - A$
 - ç. $B - C$
 - d. $(A - B) - C$
4. A ve B iki kümedir.

$$s(A) = 2 \cdot s(B)$$

$$s(A - B) = 8 \text{ ve}$$

$A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 6 olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$
 $C = \{5, 6, 7\}$

kümeleri için $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ olduğunu gösteriniz.

6. Herhangi A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin her birini Venn şeması kullanarak gösteriniz.
 - a. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
 - b. $(A - B) \cup B = A \cup B$
 - c. $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
 - ç. $A - (A - B) = A \cap B$
 - d. $A - (B - A) = A$
7. Herhangi A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin her birini Venn şeması kullanarak gösteriniz.
 - a. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
 - b. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
 - c. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

Neler Öğreneceğiz?

- Kümelerde tümlleme işlemi ve özelliklerini

Anahtar Terimler

- Tümlleme
- De Morgan kuralları

Sembol ve Gösterimler

- A'
- \overline{A}

Matematik Tarihi
Augustus De Morgan



(1806-1871)

Kümelerdeki kesişim, birleşim ve tümlleme işlemleri arasındaki ilişkinin kuralını ortaya atan İngiliz matematikçi ve mantıkçıdır.

1.2.3. Kümelerde Tümlleme İşlemi

Başlarken

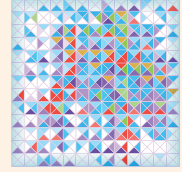
Bir şeyin eksiğini tamamlayarak onu bir bütün haline getiren şey için tümlleyen sözcüğü kullanılır.

Yandaki ilk resimde Osmanlı'nın en büyük saraylarından biri olan Edirne sarayından kalan bir bölüm görülmektedir. Bu sarayın bütün halini zihninizde canlandırdığınızda bu resimdeki bölümün tümlleyeni de belirlemiş oluruz.

İkinci resimdeki tamamlanmayı bekleyen bulmaca için, eksik olan yerdeki parçalar tümlleyeni belirtmektedir.

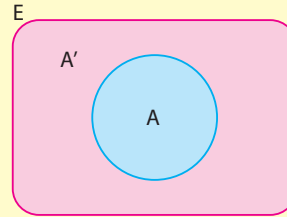
Bir bütünü gösteren üçüncü resimdeki geometrik şekil için ise tümlleyen yoktur.

Benzer bir durumu kümeler için de düşünebiliriz. Verilen bir kümenin tümlleyeni, bu kümeye eklenince evrensel küme verecek elemanlardan oluşan kümedir.



Bir A kümesinin dahil olduğu evrensel küme alalım. Bu evrensel kümenin elemanı olup, A kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye A nın tümlleyeni denir ve A' ya da \overline{A} ile gösterilir. Biz bu kitapta A' gösterimini kullanacağız. A ve A' kümeleri yukardaki Venn şemasında gösterilmiştir. A' kümesini ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterebiliriz:

$$A' = E - A = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$



Örnek 1

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ ve evrensel küme $E = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ olsun. A kümesinin tümlleyeni yazalım.

Çözüm

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olduğundan evrensel kümede olup A da olmayan elemanlar kümesi $A' = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ olur.

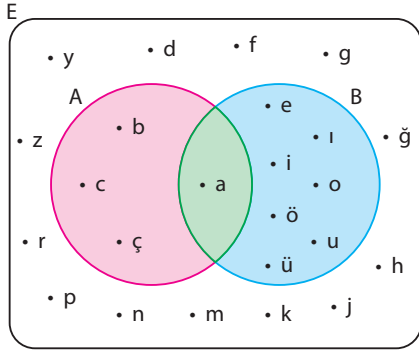
Örnek 2

$E = \{x \mid x \text{ alfabemizdeki bir harf}\}$ evrensel kümesi ve alfabemizin ilk dört harfinden oluşan A kümesi ile $B = \{a, e, i, o, ö, u, ü\}$ kümesi veriliyor. Buna göre

- E, A, B kümelerini Venn şeması yöntemi ile gösterelim.
- A' ve B' kümelerini liste yöntemiyle gösterelim.

Çözüm

- Bu üç küme Venn şemasıyla şu şekilde gösterilir:



- Evrensel kümede olup A da olmayanlar A' kümesinin verdiğiinden
 $A' = \{d, e, f, g, ğ, h, ı, i, j, k, l, m, n, o, ö, p, r, s, ş, t, u, ü, v, y, z\}$ olarak bulunur.
 Benzer şekilde $B' = \{b, c, ç, d, f, g, ğ, h, j, k, l, m, n, r, p, s, ş, t, v, y, z\}$ olur.

Örnek 3

$E = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ evrensel kümesi ile

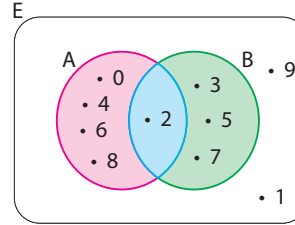
$A = \{x \mid x \text{ bir çift rakam}\}$ ve

$B = \{x \mid x \text{ tek basamaklı bir asal sayı}\}$ kümeleri veriliyor.

- Verilen kümeleri Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.
- $s(E), s(A), s(B), s(A')$ ve $s(B')$ değerlerini bulup aralarındaki ilişkileri belirleyiniz.

Çözüm

- a. Venn şeması gösterimleri aşağıdaki gibidir.



- b. $s(E) = 10$, $s(A) = 5$, $s(B) = 4$, $s(A') = 5$ ve $s(B') = 6$ olarak bulunur.

Burada dikkat edersek; $s(E) = s(A) + s(A') = s(B) + s(B') = 10$ olur.

Ayrıca, $A \cap A' = \emptyset$ olduğundan $s(A \cap A') = 0$ 'dır.

Benzer şekilde, $B \cap B' = \emptyset$ ve de $s(B \cap B') = 0$ olur.

Tümleme işleminin bazı özelliklerini önce bir örnek üzerinde görelim:

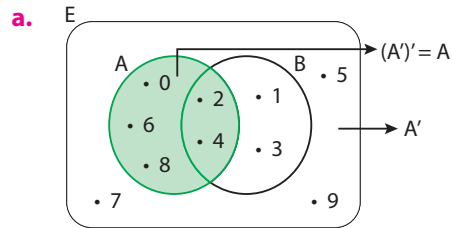
Örnek 4

$E = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ evrensel kümesi ile $A = \{x \mid x \text{ bir çift rakam}\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor.

Aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ve Venn şeması ile bulunuz.

- a. $(A')'$ b. E' c. $A \cup A'$

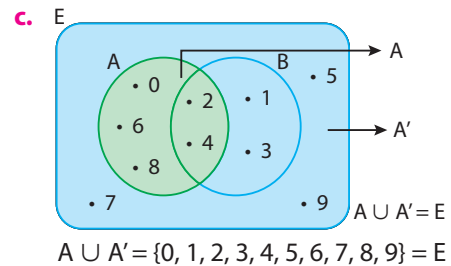
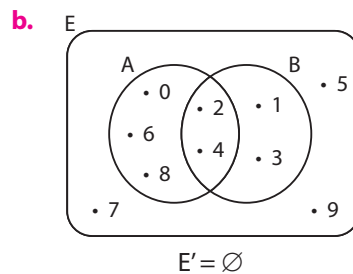
Çözüm



$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ olduğundan

$(A')' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ olur.

Her iki gösterimden de anlaşılacağı gibi $(A')' = A$ olur.



Şimdi örnek üzerinde gördüğümüz özellikleri ortak özellik yöntemi ve tümlleme işleminin tanımını kullanarak herhangi bir A kümesi ve E evrensel kümesi için gösterelim:

$$\begin{aligned} \text{a. } (A')' &= \{x \mid x \notin A' \text{ ve } x \in E\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in E\} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E' &= \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin E\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } A \cup A' &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A'\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \notin A\} \\ &= \{x \mid x \in E\} \\ &= E \end{aligned}$$

Tümlleme işleminin özelliklerini aşağıdaki şekilde çoğaltabiliriz:

ç. $\emptyset' = E$ dir. Şöyle ki, a şıkkındaki özelliği E için uygularsak, $(E')' = E$ elde ederiz. Diğer taraftan b şıkkını kullanarak bu eşitlikteki E' yerine \emptyset yazabiliriz. Bu da bize $(\emptyset)' = E$ sonucunu verir.

$$\begin{aligned} \text{d. } E - A &= A' \text{ dir. Çünkü} \\ E - A &= \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\} \\ &= \{x \mid x \in E \text{ ve } x \in A'\} \\ &= \{x \mid x \in A'\} \\ &= A' \end{aligned}$$

dir. Yani, evrensel kümenin A kümesinden farkı A kümesinin tümlleyenidir.

e. Bir kümenin tümlleyeni ile kendisinin kesişimi boş kümedir: $A \cap A' = \emptyset$. Bu durumu şu şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A'\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin A\} \\ &= \{x \mid x \text{ imkansız bir şartı sağlar}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Anahtar Bilgi

- $(A')' = A$
- $E' = \emptyset$
- $A \cup A' = E$
- $\emptyset' = E$
- $E - A = A'$
- $A \cap A' = \emptyset$

Anahtar Bilgi

- $A - B = A \cap B'$

Anahtar Bilgi

$$A - B = A \cap B'$$

Yukarıda ortak özellik yöntemini kullanarak gösterdiğimiz özelliklerden son üçünü siz de Venn şeması yöntemiyle gösteriniz.

Bir A kümesinin tümleyeninin, evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanlardan oluştuğunu yukarıda d şikkındaki özellik olarak gördük, bunu şu şekilde de ifade edebiliriz:

$$E - A = E \cap A'$$

çünkü $E \cap A' = A'$ dir. Bu özelliği fark ve kesişim işlemlerinin tanımını ve ortak özellik yöntemini kullanarak şu şekilde genelleştirebiliriz:

$$\begin{aligned} A - B &= \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B'\} \\ &= A \cap B' \end{aligned}$$

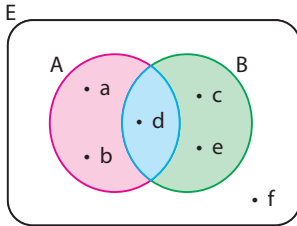
Dolayısıyla,

$$A - B = A \cap B'$$

eşitliğini elde ettik. Siz de bu eşitliği Venn şeması kullanarak gösteriniz.

MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, De Morgan kurallarını inceleyeceğiz.



- $(A \cap B)'$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $A' \cup B'$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $(A \cap B)'$ kümesiyle $A' \cup B'$ kümesinin elemanlarını karşılaştırınız.

Benzer şekilde,

- $(A \cup B)'$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $A' \cap B'$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
- $(A \cup B)'$ kümesiyle $A' \cap B'$ kümesinin elemanlarını karşılaştırınız.

A ile B iki küme olsun. Bu takdirde

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

dir. Bu eşitlikler **De Morgan kuralları** olarak bilinir.

Anahtar Bilgi

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Örnek 5

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evrensel kümesi ile $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 5\}$ kümeleri veriliyor. Bu kümeler için De Morgan kurallarını test edelim.

Çözüm

$A' = \{4, 5, 6\}$ ve $B' = \{1, 4, 6\}$ olduğundan $A' \cup B' = \{1, 4, 5, 6\}$ ve $A' \cap B' = \{4, 6\}$ bulunur.

Diğer taraftan $A \cap B = \{2, 3\}$ olup, $(A \cap B)' = \{1, 4, 5, 6\} = A' \cup B'$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ olup, $(A \cup B)' = \{4, 6\} = A' \cap B'$ olduğu görülür.

Böylece De Morgan kurallarını verilen kümeler için test etmiş olduk.

Örnek 6

A ve B herhangi iki küme olsun.

$(A - B)' = A' \cup B$ olduğunu kümelerde işlemleri kullanarak gösterelim.

Çözüm

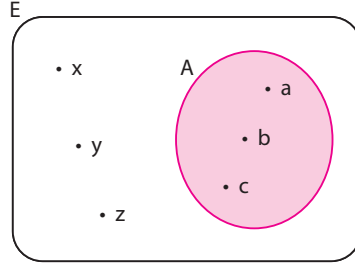
$(A - B)' = (A \cap B)'$, çünkü $(A - B) = A \cap B'$ dir.

$= A' \cup (B')'$, burada De Morgan kuralını kullandık.

$= A' \cup B$, burada $(B')' = B$ eşitliğini kullandık.

Böylece göstermek istediğimiz eşitliği elde etmiş olduk.

Örnek 7



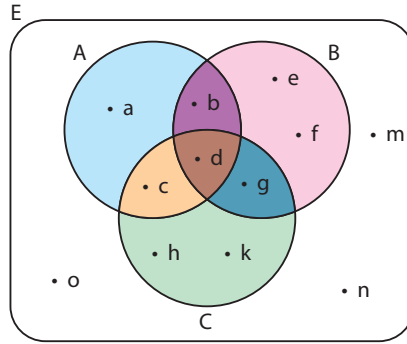
Venn şemasıyla verilen E ve A kümeleri için aşağıdaki kümeleri bulunuz.

- a. $E - A$ b. $A - E$
- c. $E' \text{ ve } \emptyset'$ ç. $A \cup A'$
- d. $A \cap A'$

Çözüm

- a. $E - A = \{x, y, z\} = A'$
- b. $A - E = \emptyset$
- c. $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = \{a, b, c, x, y, z\} = E$
- ç. $A \cup A' = \{a, b, c\} \cup \{x, y, z\} = E$
- d. $A \cap A' = \{a, b, c\} \cap \{x, y, z\} = \emptyset$ olur.

Örnek 8



Şekilde verilenlere göre

- a. $A - (B \cap C)$
- b. $(A \cup B) - (B \cap C)$
- c. $(B \cap C) - A$
- ç. $B - (A \cap B \cap C)$
- d. $A' \cap (B \cap C)$
- e. $C \cup (A \cap B)'$

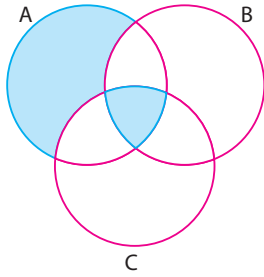
kümelerini liste yöntemiyle gösterelim.

Çözüm

Öncelikle, $B \cap C = \{d, g\}$, $A \cap B = \{b, d\}$ ve $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olarak bulalım.

- a. $A - (B \cap C) = \{a, b, c\}$
- b. $(A \cup B) - (B \cap C) = \{a, b, c, e, f\}$
- c. $(B \cap C) - A = \{g\}$
- ç. $B - (A \cap B \cap C) = \{b, e, f, g\}$
- d. $A' \cap (B \cap C) = \{g\}$
- e. $C \cup (A \cap B)' = \{a, c, d, e, f, g, h, k, m, n, o\}$

Örnek 9



Venn şemasındaki boyalı kısmı veren kümeyi bulalım.

Çözüm

Boyalı iki kısım $A - (B \cup C)$ ve $A \cap B \cap C$ kümeleriyle verildiğinden

$[A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C]$ kümesi boyalı kısımları verir.

Bu kümeyi aşağıdaki gibi farklı şekilde de ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
 [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C] &= [A \cap (B \cup C)'] \cup [A \cap B \cap C] && (A - B) = A \cap B' \\
 &= [A \cap (B' \cap C')] \cup [A \cap B \cap C] && \text{De Morgan kuralı} \\
 &= A \cap [(B' \cap C') \cup (B \cap C)] && \text{Dağılma özelliği}
 \end{aligned}$$

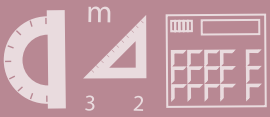
Örnek 10

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ eşitliğinin doğruluğunu küme işlemleri yardımıyla gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' && A - B = A \cap B' \\
 &= A \cap (B' \cap C') && \text{De Morgan kuralı} \\
 &= A \cap A \cap (B' \cap C') && A \cap A = A \\
 &= A \cap (A \cap B') \cap C' && A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
 &= (A \cap B') \cap (A \cap C') && A \cap B = B \cap A \\
 &= (A - B) \cap (A - C) && A - B = A \cap B'
 \end{aligned}$$

Böylece istenen sonucu gösterdik.



KENDİMİZİ SINAYALIM

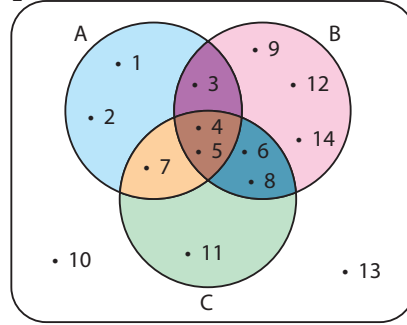
Kavrama ve Muhakeme

1. Evrensel kümedeki elemanlardan, A kümesine ait olmayanların oluşturduğu kümeye denir ve biçiminde gösterilir.
2. Evrensel kümenin tümleyeni
3. Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni

Alıştırmalar

1. $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ evrensel kümesi ile $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4, 5\}$ kümelerine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.
 - a. $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin tümleyenlerini liste yöntemi ile gösteriniz.
 - b. $A' \cup B'$ ve $A' \cap B'$ kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.
 - c. Bulduğunuz bu kümeleri karşılaştırınız.

2. E



Yukarıdaki şekilde verilenlerden aşağıdaki kümeleri liste şeklinde yazınız.

- | | | |
|------------------|-------------------------|------------------------|
| a. A | b. E | c. B |
| ç. C | d. $A \cap B$ | e. $A \cap C$ |
| f. $(B \cap C)'$ | g. $A \cap B \cap C$ | ğ. $A \cup B$ |
| h. $B \cup C$ | ı. $(A \cup C)'$ | i. $A \cap (B \cup C)$ |
| j. A' | k. $(A \cup B \cup C)'$ | |

3. $E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } x < 10\}$

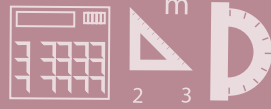
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ bir çift sayı ve } x < 10\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ bir tek sayı ve } x < 10\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } x < 6\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki kümeleri liste şeklinde yazınız.

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| a. $A \cap B$ | b. $A \cup B$ |
| c. $A' \cup B$ | ç. $(B \cup C)'$ |
| d. $A \cap C'$ | e. $A \cap B'$ |
| f. $(B \cap C)'$ | g. $(A \cup C) \cap B$ |
| ğ. $(C' \cup A) \cap B$ | h. $(C \cap B) \cup A$ |
| ı. $(A \cap B)' \cup C$ | i. $(A' \cup C) \cap B$ |
| j. $(A' \cup B') \cap C$ | k. $(A' \cap C) \cup (A \cap B)$ |



KENDİMİZİ SINAYALIM

4. $E = \{x \mid -3 < x < 6 \text{ ve } x \text{ bir tam sayı}\}$ evrensel kümesi ve $A = \{x \mid x \text{ bir tamsayı ve } |x - 1| < 2\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre A kümesinin tümleneni bulunuz.

5. De Morgan kurallarını Venn şemasıyla gösteriniz.

6. Her hangi bir A, B ve C kümeleri için

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

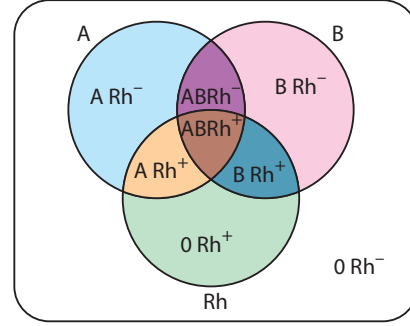
eşitliğinin sağlandığını küme işlemlerine ait özellikleri kullanarak gösteriniz.

7. A ve B kümeleri ile E evrensel kümesi için $s(E) = 16$, $s(B - A) = 6$ ve $s((A \cup B)') = 5$ ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

8. A ve B kümeleri ile E evrensel kümesi için $s(E) = 15$, $s(A - B) = 5$ ve $s(A' \cap B') = 3$ olduğu biliniyor.

Buna göre $s(B)$ ve $s(A \cup B)$ değerlerini bulunuz.

9. E



Kan nakillerinde alıcı, vericinin antijenlerinin tamamına sahip olmalıdır. Bir kişide A, B ve Rh antijenlerinden herhangi biri, ikisi veya hepsi olabilir ya da hiçbiri olmayabilir. Bu şekilde mümkün olan sekiz farklı kan grubu, yukarıdaki Venn şeması ile gösterilmiştir. Burada E kümesi dikkate alınan bütün kişileri göstermektedir.

Örneğin; kan grubu A Rh⁻ olan bir kişi A antijenine sahiptir, B ve Rh antijenlerine sahip değildir; O Rh⁺ olan bir kişi Rh antijenine sahiptir, A ve B antijenlerine sahip değildir; olan bir kişi A ve B antijenlerine sahiptir, Rh antijenine sahip değildir.

Buna göre aşağıda verilen kümelerdeki antijenlerle hangi kan gruplarının oluştuğunu bulunuz.

- | | |
|--------------------------|------------------|
| a. $A \cap B$ | b. $A \cup Rh$ |
| c. $A \cup B$ | ç. $(A \cup B)'$ |
| d. $(A \cup B \cup Rh)'$ | e. $A' \cap B$ |

Neler Öğreneceğiz?

Sıralı ikilileri ve iki kümenin kartezyen çarpım kümesini

Anahtar Terimler

- Sıralı ikili
- Kartezyen çarpım

Sembol ve Gösterimler

- (a, b)
- $A \times B$

1.2.4. Kartezyen Çarpım Kümesi

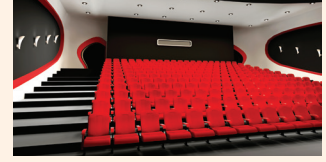
Başlarken

Bir sinema salonunda koltukların numaralandırılışına dikkat ettiğimizde bir harf ile bir numaranın beraber kullanıldığını görürüz ve bu durum yerlerin tespitinde sade ve etkin bir kolaylık sağlar.

Yandaki ikinci resimdeki astrolop deniz yolculuklarında konum ve yön tespitinde yüzyıllar boyu vazgeçilmez bir alet olarak kullanıldı.

Günümüzde ise üçüncü resimdeki gibi uydu destekli GPS sistemini kullanan navigasyon cihazları yardımıyla bulunduğumuz yerin koordinatlarını net olarak belirleyebiliyoruz ve bu bize çok amaçlı faydalar sağlıyor.

Bu bahsettiğimiz örneklerde basit ve karmaşık boyutlarda sıralı ikililer ve kümelerin kartezyen çarpımı doğrudan veya dolaylı olarak kullanılıyor.



Endülüs dönemine ait astrolob



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında sıralı ikililerin yazılımını inceleyeceğiz.

Tabloda Ali'nin boy ve kiloları verilerek ikili olarak yazılmıştır.

Siz de üç arkadaşınızın boy ve kilolarını tablo halinde yazınız ve elde ettiğiniz verileri ikililer olarak yazınız.

| İsim | Veri | | Sıralı İkili |
|------|----------|-----------|--------------|
| | Boy (cm) | Kilo (kg) | (boy, kilo) |
| Ali | 158 | 52 | (158, 52) |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

- Her bir ikili hangi öğrenciyi temsil etmektedir?
- İkililerdeki sayıların yeri değiştiğinde ikilinin anlamı değişir mi? Tartışınız.

İkililerin matematiksel tanımlarını vermeden önce bir örnekle ikililer oluşturalım.

Ülkemizdeki bazı illerin trafik kodu ve bu illerimizdeki ilçe sayılarını gösteren ikililer oluşturalım. Bu ikililerin birinci bileşenleri il plaka kodunu, ikinci bileşenleri de ilçe sayılarını gösterebiliriz.

| | Plaka kodu | İlçe sayısı |
|-----------|------------|-------------|
| Ankara | 06 | 25 |
| Erzurum | 25 | 20 |
| Trabzon | 61 | 17 |
| Erzincan | 24 | 8 |
| Eskişehir | 26 | 14 |
| Hatay | 31 | 11 |
| Aydın | 09 | 16 |

Bu durumda oluşturacağımız ikililer (06, 25), (25, 20), (61, 17), (24, 8), (26, 14), (31, 11), (09, 16) olur.

A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. A kümesinden alınan bir a elemanı ile B kümesinden alınan bir b elemanı kullanılarak oluşturulan (a, b) şeklindeki yeni elemana **sıralı ikili** denir. Bu durumda a, (a, b) sıralı ikilisinin ilk bileşeni; b ise ikinci bileşeni olur.

Sıralı ikilide elemanların yazılış sırası önemlidir. Eğer a ve b birbirinden farklı ise (a, b) ve (b, a) farklı ikilileri belirtir.

SIRALI İKİLİLERİN EŞİTLİĞİ

$a = c$ ve $b = d$ ise (a, b) ve (c, d) ikililerine eşit ikililer deriz ve bu durumu $(a, b) = (c, d)$ şeklinde gösteririz. Eğer (a, b) sıralı ikilisi (c, d) sıralı ikilisine eşitse $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır. Şimdi sıralı ikilerin eşitliğini örneklerle inceleyelim.

Örnek 1

$(x + 2, y - 1) = (5, 8)$ ise $x + y$ toplamını bulalım.

Çözüm

$$x + 2 = 5 \quad \text{ve} \quad y - 1 = 8$$

$$x = 3 \quad \text{ve} \quad y = 9 \quad \text{olup} \quad x + y = 3 + 9 = 12 \quad \text{bulunur.}$$

Matematik Tarihi

René Descartes



1596-1650

Analitik geometri, Descartes'in buluşudur. Kartezyen koordinat sistemi, analitik geometride cebirin geometriye uygulanmasıdır.

Anahtar Bilgi

İki kümenin kartezyen çarpımı da bir kümedir. Bu kümenin elemanları sıralı ikililerden oluşur.

Örnek 2

$(2, m - 1) = (n + 3, 9)$ eşitliğine göre m ve n değerlerini bulalım.

Çözüm

$$2 = n + 3 \text{ ise } n = -1$$

$$m - 1 = 9 \text{ ise } m = 10 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 3

$(3a + 7, 2ab) = (16, 18)$ ise $a + b$ toplamını bulalım.

Çözüm

İkililerin eşitliğinden $3a + 7 = 16$ ve $2ab = 18$ olur. İlk eşitlikten $a = 3$ bulunur.

Bulunan a değerini ikinci eşitlikte yerine koyup b değerini bulalım:

$$2 \cdot 3b = 18$$

$$\text{Buradan } b = 3 \text{ olur.}$$

Böylece, $a + b = 3 + 3 = 6$ sonucu elde edilir.

A ve B kümeleri verilsin. İlk bileşeni A dan ve ikinci bileşeni B den alınarak oluşturduğumuz tüm sıralı ikililerin kümesine **A kartezyen çarpım B kümesi** denir ve **$A \times B$** şeklinde gösterilir. A ve B kümelerinden oluşturduğumuz bu yeni kümeyi ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterebiliriz:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$A \times B$ yi oluştururken, sıralı ikililerin birinci bileşenlerinin A kümesinden, ikinci bileşenlerinin B kümesinden alındığına dikkat edilir. Farklı bileşenlerin yer değiştirilmesiyle yeni bir ikili elde edildiğinden

$$A \neq B \text{ iken } A \times B \neq B \times A \text{ dır.}$$

Burada aklımıza gelebilecek sorulardan biri de, kartezyen çarpımı oluşturan kümelerden en az birinin boş küme olup olamayacağıdır. Boş küme ile herhangi bir kümenin kartezyen çarpımı alındığında, ikili oluşturacak bir elemanı boş kümede bulamayacağımızdan kartezyen çarpım da boş küme olacaktır. Yani, herhangi bir A kümesi için

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

olur.

Herhangi bir küme için olduğu gibi kartezyen çarpım kümesinin elemanlarını da liste yöntemiyle, Venn şemasıyla ve yukarıda gösterdiğimiz gibi ortak özellik yöntemiyle gösterebiliriz. Bunlara ek olarak kartezyen çarpımı grafik şeklinde de gösterebiliriz. Bu gösterim birçok durum için daha kolay ve anlatıcı bir durum olmaktadır. Şimdi bu gösterim yöntemlerine örnekler verelim.

Örnek 4

$A = \{a, b\}$ ve

$B = \{3, 5, 7\}$

kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini liste yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm

$A \times B = \{(a, 3), (a, 5), (a, 7), (b, 3), (b, 5), (b, 7)\}$ ve

$B \times A = \{(3, a), (5, a), (7, a), (3, b), (5, b), (7, b)\}$ olur.

Bu örnekte $A \times B \neq B \times A$ dır.

Örnek 5

$A = \{1, 2, 3\}$ ve

$B = \{p, s, c\}$ olsun. $A \times B$ kümesini

a. Liste yöntemiyle b. Venn şemasıyla c. Grafiğini çizerek
gösterelim.

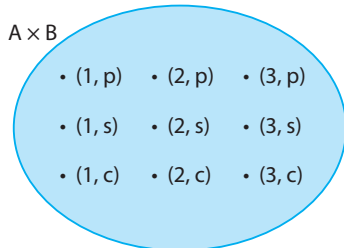
Çözüm

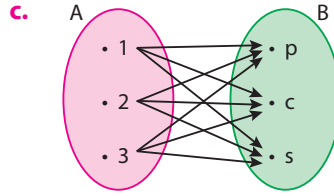
a. Liste yöntemiyle gösterim:

$A \times B = \{(1, p), (1, s), (1, c), (2, p), (2, s), (2, c), (3, p), (3, s), (3, c)\}$

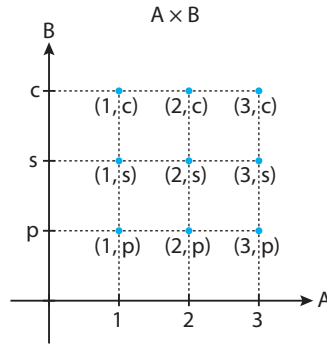
b. Venn Şemasıyla gösterim:

$A \times B$





Grafik ile gösterim için yandaki iki yöntemi de kullanabiliriz. İlkinde A ve B kümeleri Venn şemasıyla gösterilir ve kartezyen çarpımdaki her bir ikili, birinci bileşenlerden ikinci bileşenlere giden birer ok ile temsil edilir.



Bu gösterime alternatif olarak yandaki şekilde de $A \times B$ nin grafik çizimi yapılabilir:

Bu çizimi elde ederken kartezyen çarpımdaki ilk küme olan A kümesinin elemanlarını yatay eksene yerleştiririz ve yatay ekseni A ile gösteririz. Dikey eksene ise kartezyen çarpımdaki ikinci kümenin yani B kümesinin elemanlarını yerleştirip bu ekseni de B ile gösteririz. Daha sonra A kümesinin her bir elemanından B eksenine dikey kesikli çizgiler çizeriz. Benzer şekilde B kümesinin her bir elemanından A eksenine paralel olacak yatay kesikli çizgiler çizeriz.

Bu bize ızgaraya benzer bir şekil verir. Bu ızgarayı oluşturan kesikli çizgilerin kesişme noktaları, kartezyen çarpımı oluşturan ikileri temsil eder ve bu noktaları koyu olarak gösteririz. Örneğin, 1'den çıkan dik çizginin p den çizilen yatay çizgiyle kesiştiği nokta (1, p) ikilisini vermektedir.

$A \times B$ nin grafiği denilince daha çok bu ikinci gösterim kastedilmektedir.

Örnek 6

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, d\} \text{ ve}$$

$$C = \{d, e\} \text{ kümeleri veriliyor. Buna göre,}$$

a. $A \times (B \cup C)$

b. $(A \times B) \cup (A \times C)$

kümelerini oluşturunuz. Daha sonra bu oluşturduğunuz kümeleri karşılaştırınız.

Çözüm

a. $A \times (B \cup C)$ kümesini oluşturmak için önce $(B \cup C)$ kümesini oluşturalım:

$$(B \cup C) = \{b, d, e\}$$

Şimdi $A \times (B \cup C)$ kümesini oluşturalım:

$$A \times (B \cup C) = \{(a, b), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), (c, b), (c, d), (c, e)\}$$

b. $(A \times B) \cup (A \times C)$ kümesinin elemanlarını elde etmek için önce $(A \times B)$ ve $(A \times C)$ kümelerini oluşturalım:

$$(A \times B) = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$$

$$(A \times C) = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$$

Şimdi bu iki kümenin birleşim kümesini oluşturalım. Elemanlar bir kümede tekrarlanmadığından, eşit sıralı ikililerin birer defa birleşimde yer aldığına dikkat edelim:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, b), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), (c, b), (c, d), (c, e)\}$$

Elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırdırca $A \times (B \cup C)$ ve $(A \times B) \cup (A \times C)$ kümelerinin eşit kümeler olduğu sonucuna ulaşırız.

Örnek 7

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\} \text{ ve}$$

$$C = \{5, 6\} \text{ kümeleri veriliyor. Bu kümeler için}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \text{ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.}$$

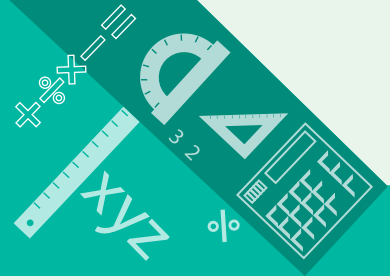
Çözüm

$$A \times (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \times \{5\} = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\} \cap \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$$

$$= \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\} \text{ olur.}$$

Buradan $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ eşitliği görülür.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, $A \times B$ kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı ile A ve B kümelerinin eleman sayıları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Aşağıda verilen birinci sütun A kümesi olarak alacağımız kümeleri, birinci satır ise B kümesi olarak alacağımız kümeleri göstermektedir. Buna göre;

- a. $A \times B$ tablosunu doldurunuz. Örnek olarak $\{1\} \times \{1\}$, $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri sizin için tabloda gösterilmiştir.

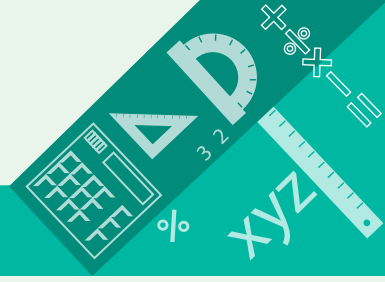
| $A \times B$ | $\{1\}$ | $\{1, 2\}$ | $\{1, 2, 3\}$ | $\{1, 2, 3, 4\}$ | $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ |
|---------------------|--------------|------------|--|--|---------------------|
| $\{1\}$ | $\{(1, 1)\}$ | | | | |
| $\{1, 2\}$ | | | $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ | | |
| $\{1, 2, 3\}$ | | | | | |
| $\{1, 2, 3, 4\}$ | | | | | |
| $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | | | | $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$ | |

- b. Oluşturulan $A \times B$ tablosuna göre aşağıdaki $s(A \times B)$ tablosunu doldurunuz. Bu tablonun ilk sütunu A kümesinin eleman sayısını, ilk satırı B kümesinin eleman sayısını, tablodaki ilgili yerler ise $A \times B$ kümesinin eleman sayısını göstermektedir. Örnek olarak $A \times B$ tablosunda oluşturulan Kartezyen çarpımların eleman sayıları verilmiştir.

| $s(A \times B)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|---|---|----|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | | 6 | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | 20 | |

- c. Oluşturduğunuz bu ikinci tabloyu kullanarak $s(A \times B)$ ile $s(A)$ ve $s(B)$ arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz. Cevaplarınızı arkadaşlarınızla tartışınız.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında, kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısını inceleyeceğiz.



- Pinar, arkadaşları olan Ayşe ile Betül ün mezuniyet törenleri için birer çiçek almak istiyor. Çiçek olarak da “karanfil, kamelya, açelya, papatya” arasından bir tercih yapmak istiyor. Fakat hangi çiçeği alacağına karar veremiyor.
- Pinar’ın arkadaşlarına çiçek alabilme alternatiflerini (arkadaşının adı, alabileceğim çiçek) şeklinde göstererek yazınız.
- Pinar her bir arkadaşına bir çiçek almak koşuluyla kaç farklı seçim yapabilir?
- Pinar’ın arkadaşları bir küme olarak düşünülürse bu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- Pinar’ın seçim yapabileceği çiçeklerin oluşturduğu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- (arkadaşının adı, alabileceğim çiçek) şeklindeki ikililerin oluşturduğu kümenin eleman sayısı kaçtır?
- Pınarın arkadaşlarının oluşturduğu kümenin eleman sayısı ile çiçeklerin oluşturduğu kümenin eleman sayısı çarpımı sonucunda oluşturduğunuz sıralı ikililer kümesinin eleman sayısı arasındaki ilişkiyle ilgili ne söyleyebilirsiniz?

Şimdi bu atölye çalışmasında verilen durumu genelleylim. Yani kartezyen çarpımın eleman sayılarıyla kümelerin eleman sayılarını karşılaştıralım. Bunun için $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$ kümelerini alalım. Birinci elemanı A dan ikinci elemanı B den alarak;

$$\begin{array}{l} (a_1, b_1) (a_1, b_2) \dots (a_1, b_m) \\ (a_2, b_1) (a_2, b_2) \dots (a_2, b_m) \\ \vdots \\ (a_n, b_1) (a_n, b_2) \dots (a_n, b_m) \end{array}$$

sıralı ikilileri oluşturulabilir. Burada A kümesindeki her eleman B deki tüm elemanlarla eşleneceğinden sadece a_1 için m tane ikili oluşacaktır. Bunun gibi A daki her eleman için m tane ikili oluşacağından ve A da n tane eleman olduğundan, toplamda $m \times n$ tane ikili oluşur. Bu durumu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

$$s(A) = m \text{ ve } s(B) = n \text{ ise } s(A \times B) = m \cdot n \text{ dir.}$$

Örnek 8

$A = \{k, p, r\}$ ve

$B = \{5, 8\}$

kümeleri için $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ kartezyen çarpım kümelerini bularak eleman sayılarını belirleyelim.

Çözüm

$$A \times A = \{(k, k), (k, p), (k, r), (p, k), (p, p), (p, r), (r, k), (r, p), (r, r)\}, \quad s(A \times A) = 9$$

$$A \times B = \{(k, 5), (k, 8), (p, 5), (p, 8), (r, 5), (r, 8)\}, \quad s(A \times B) = 6$$

$$B \times A = \{(5, k), (5, p), (5, r), (8, k), (8, p), (8, r)\}, \quad s(B \times A) = 6$$

$$B \times B = \{(5, 5), (5, 8), (8, 5), (8, 8)\}, \quad s(B \times B) = 4$$

olur.

Örnek 9

$$A \times C = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$B \times D = \{(2, 7), (2, 8), (3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$$

kartezyen çarpım kümeleri veriliyor. Buna göre,

a. A , B , C ve D kümelerini bulalım.

Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulalım.

b. $A \times (B \cap C)$

c. $D \times (A \cup C)$

ç. $(A \cup B) \times (C \cup D)$

d. $(B \cup C) \times (A \cap D)$

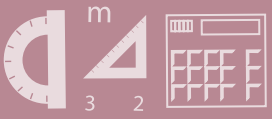
Çözüm

a. $A \times C$ kümesinde kartezyen çarpımı tanımı gereği sıralı ikililerin birinci birleşenleri A kümesinin, ikinci bileşenler ise C kümesinin elemanlarıdır. Küme elemanlarında tekrar olamayacağı için $A = \{1, 2\}$ ve $C = \{3, 4, 5\}$ olur.

Benzer şekilde $B \times D$ kümesindeki sıralı ikililerin birinci bileşenleri B kümesini, ikinci bileşenleri ise D kümesini oluşturur.

$B = \{2, 3, 4\}$ ve $D = \{7, 8\}$ dir.

- b.** $A = \{1, 2\}$ olduğundan $s(A) = 2$ 'dir. Diğer taraftan bulduğumuz B ve C kümeleri için $B \cap C = \{3, 4\}$ olduğundan $s(B \cap C) = 2$ 'dir. Buradan,
 $s(A \times (B \cap C)) = s(A) \times s(B \cap C) = 2 \times 2 = 4$ olarak bulunur.
- c.** $s(D) = 2$ ve $A \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğundan $s(A \cup C) = 5$ 'tir. Böylece, $s(D \times (A \cup C)) = s(D) \times s(A \cup C) = 2 \times 5 = 10$ olur.
- ç.** $(A \cup B) = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğundan $s(A \cup B) = 4$ ve $(C \cup D) = \{3, 4, 5\} \cup \{7, 8\} = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ olduğundan $s(A \cup B) = 5$ 'tir.
 $s((A \cup B) \times (C \cup D)) = s(A \cup B) \times s(C \cup D) = 4 \times 5 = 20$
- d.** $B \cup C = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$ olduğundan $s(B \cup C) = 4$ ve $A \cap D = \{1, 2\} \cap \{7, 8\} = \emptyset$ olduğundan $s(A \cap D) = 0$ 'dir. Buradan, $s((B \cup C) \times (A \cap D)) = s(B \cup C) \times s(A \cap D) = 4 \times 0 = 0$ olur.



KENDİMİZİ SINAYALIM

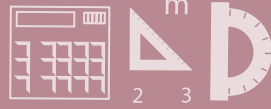
Kavrama ve Muhakeme

1. a ve b herhangi iki eleman olmak üzere, a ve b elemanlarının (a, b) biçiminde yazılmasıyla bir elde edilir.
2. (a, b) de a ya (a, b) nin, b ye (a, b) nin denir.
3. (a, b) (b, a) dır. ($a \neq b$)
4. (.....,) = (.....,) ise $a = c$ ve $b = d$ dir (Boşlukları a, b, c ve d ile doldurunuz).
5. A ve B boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere, $x \in A$ ve $y \in B$ için (x, y) ikililerin kümesine A kümesi ile B kümesinin denir ve $A \times B$ biçiminde gösterilir.

Alıştırma Soruları

1. $(a - 4, b + 7) = (11, 8)$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?
2. $(2x + y, 7) = (5, x - y)$ olduğuna göre, (x, y) ikilisini bulunuz.

3. $(2^{k+1}, 81) = (256, 3^{m-2})$ olduğuna göre $k + m$ kaçtır?
4. $(a^5, b + a + 2) = (32, 12)$ olduğuna göre b kaçtır?
5. $(2x + y, x - y) = (10, -2)$ olduğuna göre (x, y) sıralı ikilisini bulunuz.
6. $(7^{a+b}, 3^{2a-4b}) = (49, 1/9)$ olduğuna göre (a, b) sıralı ikilisini bulunuz.
7. $A = \{k, l, m\}$ ve $B = \{a, e, i\}$ için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulunuz.
8. $s(A) = 4$ ve $s(A \times B) = 24$ ise $s(B)$ kaçtır?
9. $A \times B = \{(a, v), (e, v), (a, y), (e, y), (a, z), (e, z)\}$ olduğuna göre A ve B kümelerini liste biçiminde yazınız.
10. $M = \{t, p, r\}$, $N = \{8, 9\}$ kümeleri için $M \times N$, $N \times M$, $N \times N$ ve $M \times M$ kartezyen çarpım kümelerini ve bu kümelerin eleman sayılarını bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

11. Bir satıcı 5 farklı televizyon ve 7 farklı buzdolabını, bir televizyon bir buzdolabı şeklinde beraber satmak şartı ile kaç farklı biçimde satabilir?
12. $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid 6 < x \leq 9 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesini liste biçiminde yazınız.
13. A, B ve C kümeleri için $s(A) = 4$, $s(B) > 3$, $B \cap C = \emptyset$ ve $s((A \times B) \cup (A \times C)) = 64$ ise C kümesinin eleman sayısı en çok kaç olabilir?
14. A, B ve C kümeleri için $s((A \times B) \cup (A \times C)) = 54$ ve $s(B \cup C) = 9$ ise A kümesinin eleman sayısını bulunuz.
15. A, B ve C kümeleri için $s((A \times B) \cap (A \times C)) = 24$ ve $s(A) = 6$ ise $B \cap C$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.
16. A, B ve C kümeleri için $s(A) = 4$, $s(B) = 7$ ve $s(C) = 9$ olduğuna göre $(A \times B) \cup (A \times C)$ kümesinin eleman sayısı en az ve en çok kaç olabilir?
17. A, B ve C kümeleri için $s(A) = 5$, $s(B) = 8$ ve $s(C) = 11$ olduğuna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısı en az ve en çok kaç olabilir?
18. $A \subset C$ ve $B \subset D$ ise $A \times B \subset C \times D$ olduğunu gösteriniz.
19. Kartezyen çarpımın birleşim işlemi üzerine dağılma özelliğini ifade eden şu eşitliği gösteriniz:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
20. Kartezyen çarpımın kesişim işlemi üzerine dağılma özelliğini ifade eden aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Neler Öğreneceğiz?

- Kümelerde birleşim, kesişim, fark ve tümlleme işlemlerini ve bu işlemlerin özelliklerini, gerçek hayat durumlarının modellemesini içeren problemlerin çözümünde kullanmayı

1.2. 5. Kümelerde İşlemlerle İlgili Problemler

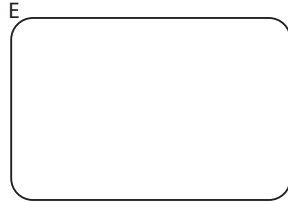
Başlarken

Günlük hayatta birçok problemle karşılaşırız. Yapısal olarak benzer problemler çok farklı ifadelerle karşımıza çıkabilir. Problemin doğru bir matematiksel dille yazılmasıyla birçok zorluğun üstesinden gelebilir, matematiksel ilişkileri kullanarak problemin çözümüne ulaşabiliriz. Örneğin, küme işlemleriyle ilgili elde ettiğimiz özellikleri kullanarak birçok problemi çözebiliriz. Matematiksel ilişkileri kullanarak elimizdeki bilgilerin ima ettiği yeni bilgilere ulaşabilir ve hemen fark edilmesi mümkün olmayan sonuçlara ulaşabiliriz.

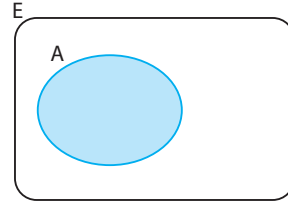


Daha önce evrensel kümeyi üzerinde tartışılan problemin bütün elemanlarını içeren küme olarak tanımlamış evrensel kümenin probleme göre değişiklik gösterdiğini söylemiştik.

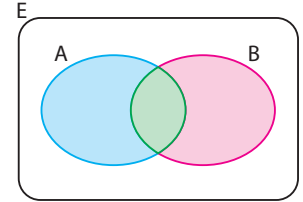
Bir fabrika ve alt birimlerini ele alalım. A kümesi montaj işini yapabilen çalışanları, B kümesi de üretim işini yapabilen çalışanları gösterebilir. Bu verileri gözümüzde canlandıralım.



Fabrika çalışanlarını "E" kümesi olarak gösterelim.

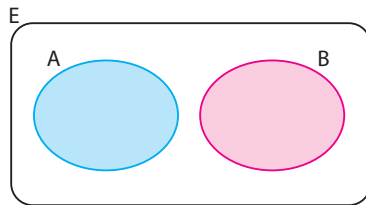


Alt birimlerdeki çalışanları fabrika çalışanları içine yerleştirelim. A kümesi montaj işini yapabilen çalışanlar.

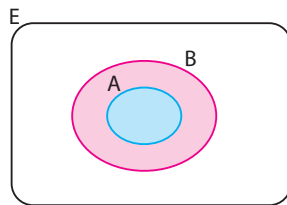


B kümesi de üretim işini yapabilen çalışanlar.

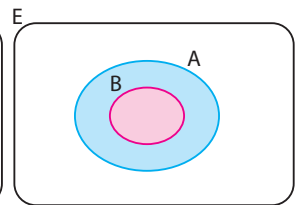
Fabrika çalışanlarını modellediğimiz bu küme şeması genel durumu göstermektedir. Verilecek bilgilere göre farklı şemalar da oluşturabiliriz:



A ve B işlerini birlikte yapabilen kimse olmayabilir.

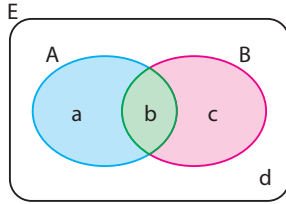


A işini yapabilen herkes B işini de yapabilir.



B işini yapabilen herkes A işini de yapabilir.

Genel durumdaki her bir bölgenin sahip olduğu eleman sayılarını aşağıdaki gibi belirtelim:



Burada

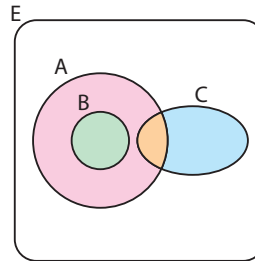
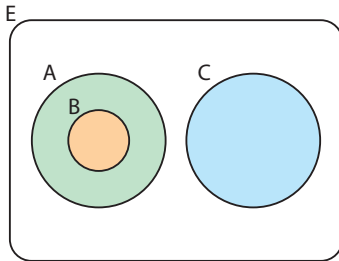
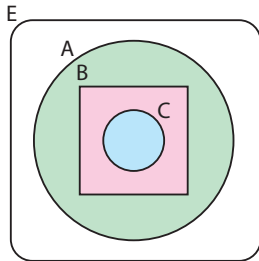
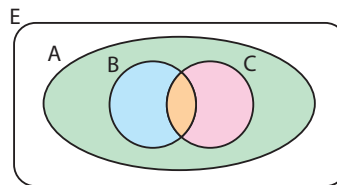
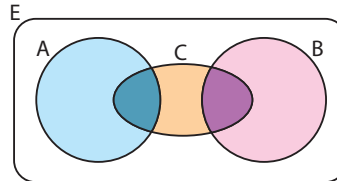
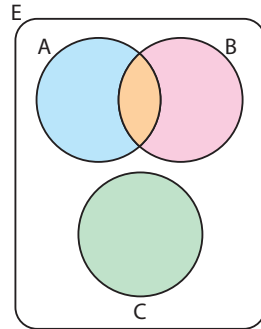
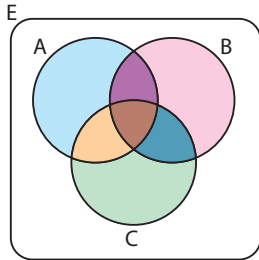
A kümesi: Montaj işini yapabilen çalışanlar,

B kümesi: Üretim işini yapabilen çalışanlar

olmak üzere;

| | |
|--|-----------------|
| Tüm çalışanların sayısı | $a + b + c + d$ |
| A işini yapabilen çalışanların sayısı | $a + b$ |
| B işini yapabilen çalışanların sayısı | $b + c$ |
| A ve B işini yapabilen çalışanların sayısı | b |
| A veya B işini yapabilen çalışanların sayısı | $a + b + c$ |
| Yalnız A işini yapabilen çalışanların sayısı | a |
| Yalnız B işini yapabilen çalışanların sayısı | c |
| A veya B işini yapamayan çalışanların sayısı | d |
| A işini yapamayan çalışanların sayısı | $c + d$ |
| B işini yapamayan çalışanların sayısı | $a + d$ |

Bu fabrikada bir de araştırma geliştirme birimi olduğunu ve bu birimde çalışabilenlerin C kümesini oluşturduğunu düşünelim. A, B ve C kümelerinin birbirlerine göre olabilecek durumları aşağıda gösterilmiştir. Bu durumların fabrika çalışanları açısından ne anlama geldiğini arkadaşlarınızla tartışınız:



Şimdi kümelerin bu durumlarını dikkate alarak ve kümelerde işlemleri kullanarak problemler çözelim.

Örnek 1

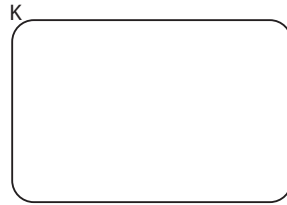


Trafik kazalarında kaza sebebi çok yüksek oranda sürücü hatalarından kaynaklanmaktadır. Bir bölgede 100 kaza üzerinde yapılan incelemede kaza yapan 68 sürücü alkollü çıkmıştır. 42 sürücü de aşırı hızlıdır. Bu kazalardan 24 tanesinde alkol ya da aşırı hız kaza sebepleri arasında değildir.

Buna göre aşırı hız sebebiyle kaza yapanların kaç tanesi aynı zamanda alkollüdür?

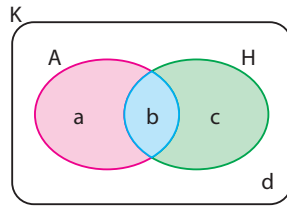
Çözüm

Problemi Anlayalım:



Problemde 100 trafik kazası incelendiği için evrensel küme bu kazalardan oluşan K kümesi olsun. Yani her bir kazayı K kümesinin bir elemanı olarak düşünelim. Bu durumda $s(K) = 100$ olur.

Problemde kaza sebeplerinin üç kategoride ele alındığını görüyoruz: alkol, aşırı hız ve diğer sebepler. Alkol sebebiyle meydana gelen kazalar kümesini A ve aşırı hız sebebiyle oluşan kazalar kümesini H ile gösterelim.



Probleme uygun şema çizerken K evrensel kümesi içinde alkol sebebiyle meydana gelen kazalar kümesi A 'yı ve aşırı hız sebebiyle oluşan kazalar kümesi H 'yi çizmek yeterlidir. K kümesi içinde fakat A ya da H içinde olmayan kazalar da böylece diğer kazalar kümesini oluşturacaktır.

Verilenler:

Şemada her bölgenin eleman sayısını küçük bir harfle isimlendirelim. Problemde verilen sayıları yazarsak

$a + b + c + d = 100$ veya $s(K) = 100$ olur. Burada K evrensel kümeyi göstermektedir.

$$a + b = 68 \text{ veya } s(A) = 68$$

$$b + c = 42 \text{ veya } s(H) = 42$$

$$d = 24 \text{ veya } s((A \cup H)') = 24$$

elde edilir. Burada $s(A - H) = a$, $s(H - A) = c$, $s(A \cap H) = b$ olduğuna dikkat edelim.

İstenenler:

Problemde istenen aşırı hız yapan alkollü araç kullanıcılarının sayısıdır. Bu A ile H kümelerinin kesişimidir. Dolayısıyla istenen b sayısının değeridir, yani $s(A \cap H)$ değeri istenmektedir.

Plan Yapalım:

1. Strateji: a, b, c ve d ile ilgili elde ettiğimiz dört denklemi kullanarak b sayısını bulabiliriz.

2. Strateji: $s(K) = 100$, $s(A) = 68$, $s(H) = 42$ ve $s((A \cup H)') = 24$ bilgilerini kullanarak $s(A \cap H) = ?$ sorusunu çözebiliriz.

1. Strateji:

Elde ettiğimiz dört denklem yerine koyma metoduyla çözümlenerek b bulunabilir.

Planı Uygulayalım:

| | | | |
|--|-----------------------|-----|------------------------------------|
| | $a + b + c + d = 100$ | | $(a + b) + c + (d) = 100$ |
| | $a + b = 68$ | ise | $68 + c + 24 = 100$ |
| | $b + c = 42$ | | $c = 100 - 92 = 8$ |
| | $d = 24$ | | |
| | $b + c = 42$ | ise | $b + 8 = 42, b = 34 \text{ olur.}$ |

Bulduğumuz sonucu problemde istenen bilgi için ifade edelim:

Problemde ele alınan 100 kaza içinden aşırı hız sebebiyle kaza yapanların 34 tanesi aynı zamanda alkollüdür.

2. Strateji:

Verilenlerden istenene ulaşmamızı sağlayacak birleşim, kesişim, tümlleme işlemlerinin özelliklerini ve evrensel kümeye ait özellikleri kullanalım.

Planı Uygulayalım:

$s(A)$ ve $s(H)$ değerlerini bildiğimizden, $s(A \cup H)$ değerini elde edersek

$$s(A \cup H) = s(A) + s(H) - s(A \cap H)$$

eşitliğini kullanarak $s(A \cap H)$ değerine ulaşabiliriz.

Diğer taraftan $s((A \cup H)')$ ve $s(K)$ değerlerini bildiğimizden ve K evrensel küme olduğundan

$$s((A \cup H)') + s(A \cup H) = s(K)$$

eşitliğini kullanarak $s((A \cap H))$ değerini elde edebiliriz. Bu durumda, bu eşitliklere verilen değerleri yazalım:

$$24 + s((A \cup H)) = 100$$

buradan $s((A \cup H)) = 76$ elde edilir. Şimdi de ilk eşitlikte elde ettiğimiz bilgileri kullanalım.

$$76 = 68 + 42 - s(A \cap H)$$

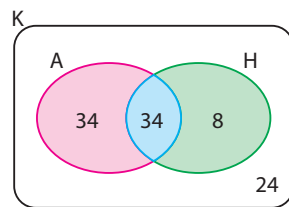
Buradan $s(A \cap H) = 34$ elde ederiz.

Bulduğumuz sonucu problemde istenen bilgi için ifade edelim:

Problemde ele alınan 100 kazadaki 34 sürücünün hem aşırı hızlı hem de alkollü olduğu tespit edilmiştir. Diğer bir ifadeyle, problemde ele alınan 100 kaza içinden aşırı hız sebebiyle kaza yapanların 34 tanesi aynı zamanda alkollüdür.

Kontrol Edelim:

Şimdi de bulduğumuz değerleri şemadaki yerlerine yazarak verilenlerle örtüşüp örtüşmediğini bulalım.



$$\text{Gerçekten de } a + b + c + d = 34 + 34 + 8 + 24 = 100$$

$$a + b = 34 + 34 = 68$$

$$b + c = 34 + 8 = 42$$

$$d = 24 \text{ olur.}$$

Örnek 2

A fark B kümesinin 8 tane alt kümesi, B fark A kümesinin de kendisinden başka 15 tane alt kümesi vardır. Bu iki kümenin birleşiminin 10 elemanı olduğuna göre bu kümelerin kesişiminin eleman sayısının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

Problemi anlayalım:

Verilenler: $A - B$ kümesinin alt kümelerinin sayısı 8, $B - A$ kümesinin kendisinden başka alt kümelerinin sayısı 15 ve $s(A \cup B) = 10$ olarak verilmiş.

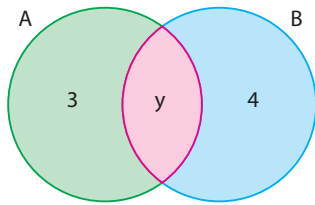
İstenenler: $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı isteniyor. Yani $s(A \cap B) = ?$

Plan yapalım:

Problemde alt küme sayıları verilen kümelerin eleman sayılarını bulmak bizi çözüme yaklaştıracaktır. Daha sonra bahsi geçen kümelerin eleman sayılarının gösterildiği bir şema çizmek çözüme yardımcı olacaktır.

Planı uygulayalım:

$A - B$ kümesinin eleman sayısı x olsun. $A - B$ kümesinin 8 tane alt kümesi olduğundan $2^x = 8$ eşitliği sağlanır. Buradan $2^x = 2^3$ ve $x = 3$ bulunur. $A - B$ kümesinin eleman sayısı z olsun. $B - A$ kümesinin kendisinden başka 15 tane alt kümesi olduğundan elimizde $2^z - 1 = 15$ eşitliği olur. Buradan $2^z = 2^4$ ve $z = 4$ elde edilir.



Şemayı çizerek bulduğumuz değerleri yerlerine yazalım.

Burada $s(A \cap B) = y$ olsun.

Şemaya göre $s(A \cup B) = 3 + y + 4$ olur.

Birleşim kümesinde 10 eleman olduğundan $3 + y + 4 = 10$ olur ve $y = 3$ olarak bulunur. Yani bu kümelerin kesişiminin eleman sayısı 3 tür.

Kontrol Edelim:

Bulduğumuz değerleri şemadaki yerlerine yazarak verilenlerle örtüşüp örtüşmediğini bulalım. Buna göre $A - B$ kümesinin $2^3 = 8$ tane alt kümesi, $B - A$ kümesinin kendisinden farklı $2^4 - 1 = 15$ tane alt kümesi ve bu iki kümenin birleşiminin $3 + 3 + 4 = 10$ elemanı olduğu görülmektedir.

Örnek 3



Japonca, Fransızca ve Arapça dillerinden en az birini bilenlerden oluşan bir sınıftaki öğrencilerin 5 tanesi bu yabancı dillerin üçünü de bilmektedir. Bu yabancı dillerin en az ikisini bilen 20, en fazla ikisini bilen 30 kişi olduğuna göre, bu sınıfta bu yabancı dillerin sadece birini bilen kaç kişi vardır? Ayrıca bu sınıfta kaç öğrenci bulunmaktadır?

Çözüm

Problemi anlayalım:

Problemde bir sınıftaki Japonca, Fransızca ve Arapça dillerini bilen öğrenci sayıları hakkında çeşitli bilgiler verilmiş. Bu bilgileri daha iyi düzenlemek için, Japonca bilen öğrenciler kümesini J, Fransızca bilen öğrenciler kümesini F ve Arapça bilen öğrenciler kümesini A ile gösterelim. Sınıftaki öğrenciler kümesi de E evrensel kümesi olsun.

Verilenler: Bu sınıftaki öğrenciler bu dillerden en az birini biliyor. Bu nedenle sınıf mevcudu $s(E) = s(J \cup F \cup A)$ dır. Diğer bir ifadeyle, $s((J \cup F \cup A)') = 0$ 'dir.

Öğrencilerin 5 i bu üç dili de bildiğinden $s(J \cap F \cap A) = 5$ olur.

Bu yabancı dillerin en az ikisini bilen 20 öğrenci olduğundan

$s(J \cap F) + s(J \cap A) + s(F \cap A) - 2s(J \cap F \cap A) = 20$ 'dir. (Neden bu eşitliğin sağlandığını açıklayınız.)

Bu yabancı dillerin en fazla ikisini bilen 30 öğrenci olduğundan,

$s(J \cup F \cup A) - s(J \cap F \cap A) = 30$ dur. (Neden bu eşitliğin sağlandığını açıklayınız.)

İstenilenler: Problemde sadece bir yabancı dil bilenlerin sayısı ve sınıf mevcudu isteniyor. Yani $s(J \cap F) + s(J \cap A) + s(F \cap A) - 3s(J \cap F \cap A) = ?$

$s(J \cup F \cup A) = ?$

Plan yapalım ve planı uygulayalım:

Sınıf mevcudunu bulmak için $s(J \cap F \cap A) = 5$ değerini $s(J \cup F \cup A) - s(J \cap F \cap A) = 30$ eşitliğinde yerine yazarsak $s(J \cup F \cup A) = 35$ olur.

Sadece bir yabancı dil bilenlerin sayısını bulmak için $s(J \cap F \cap A) = 5$ eşitliğini

$s(J \cap F) + s(J \cap A) + s(F \cap A) - 2s(J \cap F \cap A) = 20$ eşitliğinden taraf tarafa çıkartabiliriz.

Böylece $s(J \cap F) + s(J \cap A) + s(F \cap A) - 3s(J \cap F \cap A) = 15$ olur.

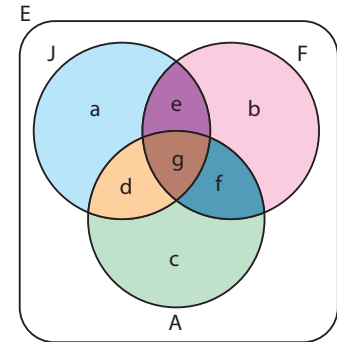
Bu durumda sınıfta 35 öğrenci var ve bu öğrencilerden yalnızca bir yabancı dil bilenlerin sayısı 15'tir.

Kontrol edelim:

Yalnız iki yabancı dil bilenlerle üç dili de bilenler en az iki yabancı dil bilen öğrenciler olacağından $15 + 5 = 20$ 'dir.

En fazla iki dil bilenlerle üç dili de bilenler bu sınıftaki öğrencilerin tümü olacağından $30 + 5 = 35$ olur.

Bu sorunun daha kısa olan ikinci bir çözümünü yandaki Venn şemasını kullanarak yapınız. Bu şemadaki harfler bulundukları bölgelerdeki öğrenci sayılarını göstermektedir.



Örnek 4



Bir sınıfta seçmeli yabancı dil olarak İngilizce dersi alan 25 ve Almanca dersi alan 20 öğrenci bulunmaktadır. Her iki dersi de alan 7 öğrenci vardır. Bu iki dersten ikisini de almayanların sayısı sadece birini alanların sayısından 25 eksik olduğuna göre sınıfta kaç öğrenci vardır?

Çözüm

Problemi anlayalım:

Bir sınıfta seçmeli yabancı dil olarak İngilizce ve Almanca dersi alan öğrencilerle ilgili bilgiler verilmiş. İngilizce dersini alan öğrenciler kümesini I , Almanca dersini alan öğrenciler kümesini de A ile gösterelim. Sınıftaki öğrenciler kümesini de E evrensel kümesi olarak alalım.

Verilenler:

İngilizce dersini alan 25 öğrenci olduğundan $s(I) = 25$ 'tir.

Almanca dersini alan 20 öğrenci olduğundan $s(A) = 20$ 'dir.

Her iki dersi de alan 7 öğrenci olduğundan $s(I \cap A) = 7$ 'dir.

Bu derslerin ikisini de almayanların sayısı $s((I \cup A)')$ ve bu derslerden sadece birini alanların sayısı $s(I - A) + s(A - I)$ dir. Buna göre, bu iki dersten ikisini de almayanların sayısı sadece birini alanların sayısından 25 eksik olduğundan

$$s((I \cup A)') = s(I - A) + s(A - I) - 25 \text{ 'tir.}$$

Ayrıca sınıf mevcudu $s(E)$ dir ve $s(E) = s((I \cup A)') + s(I \cup A)$ dir.

İstenilenler: Sınıftaki öğrenci sayısı istenmektedir. Yani $s(E) = ?$

Plan yapalım:

$s(E)$ değerini bulmak için $s((I \cup A)')$ ve $s(I \cup A)$ değerlerini bulalım.

$s((I \cup A)')$ değerini bulmak için $s(I - A)$ ve $s(A - I)$ değerlerini bulalım.

Verilenlerde bu değerlere ulaşmamızı sağlayacak eşitlikleri tespit edelim.

Planı uygulayalım:

Verilenleri ve $s(I \cup A) = s(I) + s(A) - s(I \cap A)$ eşitliğini kullanarak $s(I \cup A) = 25 + 20 - 7 = 38$ elde edilir.

Verilenler ve $s(I - A) = s(I) - s(I \cap A)$ eşitliğinden $s(I - A) = 25 - 7 = 18$ olur.

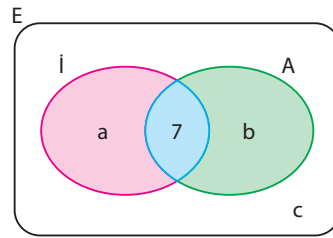
Benzer şekilde $s(A - I) = s(A) - s(I \cap A)$ eşitliğinden $s(A - I) = 20 - 7 = 13$ elde edilir.

Verilen $s((I \cup A)') = s(I - A) + s(A - I) - 25$ eşitliğinde bu değerler yerine yazıldığında $s((I \cup A)') = 18 + 13 - 25 = 6$ olur.

$s(E) = s((I \cup A)') + s(I \cup A)$ eşitliği ve bulduğumuz değerler kullanılarak

$s(E) = 6 + 38 = 44$ sonucu elde edilir.

Bu durumda sınıfta 44 öğrenci bulunmaktadır.



İkinci bir çözümü yandaki Venn şemasını kullanarak da yapabiliriz. Bu şemadaki harfler bulundukları bölgelerdeki öğrenci sayılarını göstermektedir.

Verilenler ve şema göz önünde bulundurularak $a + 7 = 25$, $b + 7 = 20$, $c = a + b - 25$ eşitlikleri elde edilir. İstenen ise sınıf mevcudu olan $a + b + c + 7$ değeridir.

Buradan $a = 18$, $b = 13$, $c = 6$ olur ve sınıf mevcudu $18 + 13 + 6 + 7 = 44$ olarak bulunur.

Kontrol edelim:

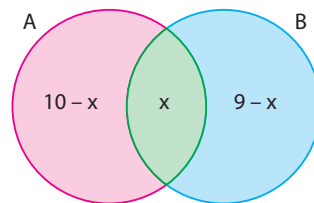
Şemada bulunan değerler yerine yazılarak her bir aşamada yapılanların doğruluğu kontrol edilebilir.

Yukarıda çözdüğümüz örneklerde problem çözme aşamaları açık bir şekilde verilerek çözümler oluşturulmuştur. Benzer bir yaklaşım bütün problem çözümlerine uygulanır. Bundan sonra bu bölümde göreceğimiz diğer problemlerin çözümünde bu aşamaları ayrıca belirtmeksizin seri bir şekilde uygulayacağız.

Örnek 5

$s(A) = 10$, $s(B) = 9$, $s(A \cup B) = 15$ ise $s(A - B)$ değerini bulalım.

Çözüm



$s(A \cap B) = x$ olsun.

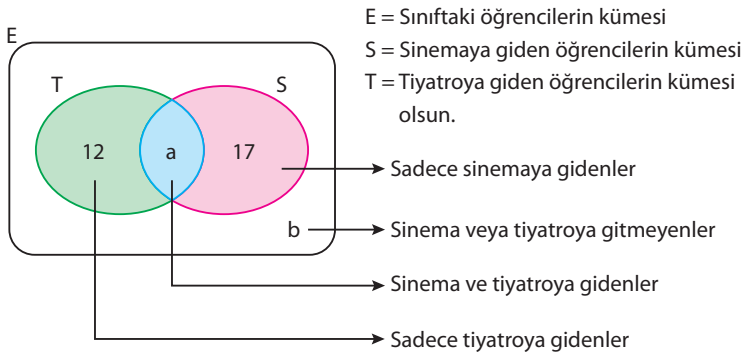
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğinde verilen değerleri yerine yazarsak $15 = 10 + 9 - x$ ve de $x = 4$ olur. Yani $s(A \cap B) = 4$ 'tür. Buradan

$s(A - B) = s(A) - s(A \cap B) = 10 - 4 = 6$ olur.

Örnek 6

Bir sınıfta tiyatro ve sinema etkinliği yapılacaktır. Öğrencilerden sadece tiyatroya giden öğrencilerin sayısı 12 kişi, sadece sinemaya giden öğrencilerin sayısı 17 kişidir. Bu iki etkinlikten en az birine katılanların sayısı 37 ve en çok birine katılanların sayısı 38'dir. Buna göre sınıf mevcudu kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm



Bu iki etkinlikten en az birine katılanlar denildiğinde yalnız sinema, yalnız tiyatro ve hem tiyatro hem de sinema etkinliklerine katılanlar anlaşılır. Buna göre,

$12 + a + 17 = 37$ olur. Buradan $a = 8$ olarak bulunur.

Bu iki etkinlikten en çok birine katılanlar denildiğinde yalnız sinema ve yalnız tiyatroya giden öğrenciler ile bu iki etkinliğe de katılmayan öğrenciler anlaşılır.

Bu nedenle, $12 + 17 + b = 38$ olur ve $b = 9$ olarak bulunur. Bu durumda sınıf mevcudu $s(E)$ şöyle bulunur: $s(E) = 12 + a + 17 + b = 12 + 8 + 17 + 9 = 46$. Yani sınıf mevcudu 46 kişidir.

Örnek 7

Bir sınıftaki öğrencilerden 18'i basketbol, 15'i voleybol, 8 öğrenci her iki sporu yapmaktadır. 11 öğrencide bu iki sporu yapmadığına göre sınıf kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

E sınıftaki öğrenciler kümesi, B sınıftaki basketbol oynayan öğrenciler kümesi ve V sınıftaki voleybol oynayan öğrenciler kümesi olsun. Verilenleri şu şekilde yazabiliriz:

$s(B) = 18$, basketbol oynayan öğrencilerin sayısı

$s(V) = 15$, voleybol oynayan öğrencilerin sayısı

$s(B \cap V) = 8$, basketbol ve voleybol oynayan öğrencilerin sayısı

$s((B \cup V)') = 11$, bu iki sporu da yapmayan öğrencilerin sayısı

Ayrıca;

$s(E)$, sınıftaki öğrencilerin sayısı

$s(B \cup V)$, basketbol veya voleybol oynayan öğrencilerin sayısı olur. Bizden istenen ise $s(E)$ değeridir.

$s(E) = s(B \cup V) + s((B \cup V)') = 11$ olduğundan $s(E)$ değerini bulmak için $s(B \cup V)$ değerini bulmak yeterlidir.

Diğer taraftan bu değeri bulmak için $s(B) = 18$, $s(V) = 15$ ve $s(B \cap V) = 8$ değerlerini kullanabiliriz. Şöyle ki:

$$s(B \cup V) = s(B) + s(V) - s(B \cap V) = 18 + 15 - 8 = 25$$

Buradan,

$$s(E) = s(B \cup V) + s((B \cup V)') = 25 + 11 = 36 \text{ olur.}$$

Venn şemasını kullanarak siz de ikinci bir çözüm yapınız.

Örnek 8



Bir sınıfta voleybol oynayan 18, futbol oynayan 15, masa tenisi oynayan 17 kişi vardır. Futbol ve voleybol oynayan 4, futbol ve masa tenisi oynayan 8, voleybol ve masa tenisi oynayan öğrenci sayısı 10 dur. Her üç sporla da ilgilenen öğrenci sayısı 2 olup sınıfta diğer sporlarla ilgilenen 5 kişi daha olduğuna göre sınıf mevcudu kaçtır?

Çözüm

Problemde verilenleri şemadaki değişkenlere göre yazalım:

Futbol ve voleybol oynayan: $b + 2 = 4$,

Futbol ve masa tenisi oynayan: $e + 2 = 8$,

Voleybol ve masa tenisi oynayan: $d + 2 = 10$,

Voleybol oynayan: $a + b + d + 2 = 18$,

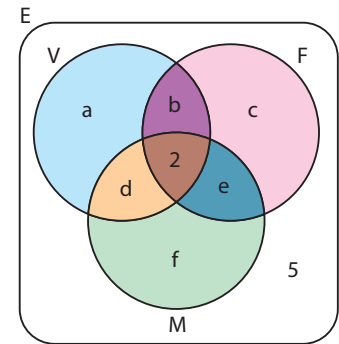
Futbol oynayan: $b + c + e + 2 = 15$,

Masa tenisi oynayan: $d + e + f + 2 = 17$,

Sınıf mevcudu: $a + b + c + d + e + f + 2 + 5 = ?$

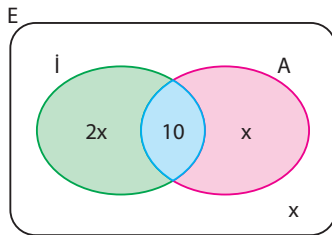
Buradan $b = 2$, $e = 6$, $d = 8$, $a = 6$, $c = 5$, $f = 1$ olarak bulunur.

Bu durumda $a + b + c + d + e + f + 2 + 5 = 6 + 2 + 5 + 8 + 6 + 1 + 7 = 35$ olur.



Örnek 9

İngilizce ve Almanca dillerini bilenler ve bu iki dili de bilmeyenlerden oluşan 46 kişilik bir sınıfta yalnız İngilizce bilenlerin sayısı, yalnız Almanca bilenlerin iki katıdır. Yalnız Almanca bilenlerle bu iki dili hiç bilmeyenlerin sayısı eşit ve 10 öğrenci bu iki dili de bildiğine göre bu iki dili bilmeyen kaç öğrenci vardır?

Çözüm

İ İngilizce bilenlerin kümesi, A Almanca bilenlerin kümesi ve E sınıftaki öğrencilerin kümesi olsun. Verilenleri Venn şeması üzerinde gösterelim:

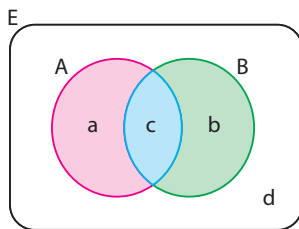
$s(E) = 46$ verildiği ve şemaya göre $s(E) = 2x + 10 + x + x$ olduğundan $x = 9$ olarak bulunur. Yani her iki dili de bilmeyen öğrencilerin sayısı 9 dur.

Örnek 10

Bir şirkette çalışanların %80 i A işini, %70 i B işini yapabiliyorlar. Bu şirkette çalışanlardan 26 kişi ise her iki işi de yapabiliyor. Şirkette her iki işi de yapamayan kimse olmadığına göre bu iş yerinde kaç kişi çalışmaktadır?

Çözüm

E evrensel kümesi bu şirket çalışanlarının, A kümesi A işini yapabilenlerin ve B kümesi B işini yapabilenlerin kümesi olsun. Bu Venn şemasıyla şu şekilde verilir.



Bu iş yerinde her iki işi de yapamayan kimse olmadığından $d = 0$ 'dır.

Dolayısıyla, $s(E) = s(A \cup B)$ dir.

A işini yapabilenlerin sayısı, $s(A) = a + c$ dir. (İş yeri çalışanlarının %80'idir.)

B işini yapabilenlerin sayısı $s(B) = b + c$ dir. (İş yeri çalışanlarının %70'idir.)

A ve B işini de yapanların sayısı $s(A \cap B) = 26$ dir. (İş yeri çalışanlarının %x'idir.)

Şirkette çalışanlar: $s(E) = a + b + c + d$ (İş yeri çalışanlarının %100'dür.)

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

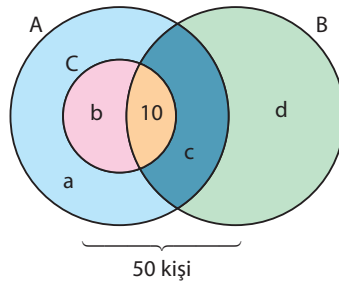
$$\%100 = \%80 + \%70 - \%x \Rightarrow \%x = \%150 - \%100 = \%50$$

26 kişi şirkette çalışanların %50'sini yani yarısını oluşturuyor ise şirkette çalışanların sayısı $26 \cdot 2 = 52$ 'dir.

Örnek 11

A, B, C dillerinin konuşulduğu 50 kişilik bir grupta, üç dili de konuşan 10 kişi, yalnızca bir dil konuşabilenler 21 kişidir. C dilini konuşabilenlerin hepsinin A dilini de konuştuğu bilindiğine göre bu dillerden yalnızca ikisini konuşan kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm



C dilini konuşanların hepsi A dilini de konuşuyorsa C kümesi A kümesinin alt kümesidir ($C \subset A$). Her üç dili de konuşanların sayısı $s(A \cap B \cap C) = 10$ dur.

Tek dil konuşabilenlerin sayısı $a + d = 21$ 'dir.

A, B ve C dillerinden en az birini konuşanların sayısı $a + b + c + d + 10 = 50$ 'dir.

Bu eşitlikleri kullanarak bizden istenen yalnız iki dil konuşabilenlerin sayısı olan $b + c = 19$ değeri bulunur.

Örnek 12

Matematik ve fizik seçmeli derslerinden yalnız birinin seçildiği 30 kişilik bir kursta fizik seçen kız ve erkekler 8 kişidir. Bu kursta 18 erkek vardır. Kızlardan matematik dersini seçen 10 kişi ise erkeklerden fizik dersini seçen kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

Kızların sayısı: k

Fizik seçen kızların sayısı: y

Fizik seçen erkeklerin sayısı: x olsun.

Eldeki verilere göre aşağıdaki gibi bir tablo oluşturabiliriz.

| | Erkek | Kız | Toplam |
|-----------|-------|-----|--------|
| Fizik | x | y | 8 |
| Matematik | | 10 | |
| Toplam | 18 | k | 30 |

Kız ve erkeklerin toplamı: $18 + k = 30$ ise bu kursta $k = 30 - 18 = 12$ kişi kızdır.

Kızlardan 10 tanesi matematik seçtiğine göre:

$y + 10 = k$ ve $k = 12$ olduğundan $y = 12 - 10 = 2$ dir. Yani kızlardan 2 kişi fizik seçmiştir.

Diğer taraftan $x + y = 8$ ve $y = 2$ olduğundan $x = 8 - 2 = 6$ 'dır.

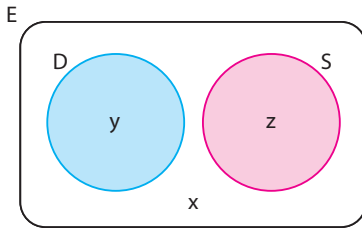
Bu durumda erkeklerden 6 kişi fizik seçmiştir.

Örnek 13

Herkesin satranç bildiği 20 kişilik bir grupta dama bilenler sudoku bilmemektedir. Bu grupta sadece bir oyun bilen 5 kişi vardır. Satranç ve dama bilen 8 kişi olduğuna göre satranç ve sudoku bilen sayısının kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

Herkes satranç bildiğine göre evrensel kümemiz satranç oynayanlardır. Dama bilen sudoku bilmediğine göre bu iki küme ayrık kümelerdir. Bu durumları Venn şeması ile modelleyelim.



Bu grupta sadece bir oyun bilen 5 kişi olduğundan $x = 5$ 'dir.

Satranç ve dama bilen 8 kişi olduğundan $y = 8$ 'dir.

Satranç bilen 20 kişi olduğuna göre $x + y + z = 20$ 'dir.

Buradan $z = 7$ kişinin satranç ve sudoku bildiği sonucuna ulaşırız.

Örnek 13

Bir turist grubu Almanca ve İngilizce dillerinden en az birini bilenlerden oluşmuştur. Grubun % 60'ı Almanca, % 80'ni İngilizce biliyor. Grupta her iki dili konuşan 8 kişi vardır. Bu turist grubunda kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm

Grubu 100 kişi kabul edelim.

$$s(A \cup I) = s(A) + s(I) - s(A \cap I)$$

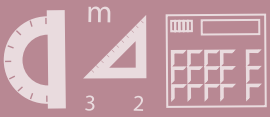
$$100 = 60 + 80 - s(A \cap I)$$

$$s(A \cap I) = 40$$

40 8 kişiye karşılık gelirse

100 x kişi

$$x = \frac{100 \cdot 8}{40} = 20 \text{ bulunur.}$$



KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırma ve Uygulama Soruları

1. E evrensel kümesi ile A ve B kümeleri için $s(E) = 43$, $s(A \cap B) = x$, $s((A \cup B)') = x$, $s(B - A) = 3x + 1$ $s(A - B) = 17$ ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır?
2. $s(A \cap B) \neq \emptyset$, $s(A \cup B) = 4x - 6$, $s(A) = 2x + 4$, $s(B) = 3x - 2$ ise $s(A \cap B)$ nın alabileceği en küçük doğal sayı değeri için $s(A \cup B)$ kaç olur?
3. A ve B iki kümedir. $s(A) = 2 \cdot s(B)$, $s(A - B) = 10$ ve $A \cap B$ kümesinin alt kümelerinin sayısı 64 olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?
4. 42 kişilik bir sınıfta 21 öğrenci matematikten, 19 öğrenci fizikten, 20 öğrenci kimya dersinden ödev almıştır. Öğrencilerden 4 ü yalnız matematikten, 6 sı yalnız fizikten, 8 i yalnız kimyadan ve 4 öğrenci de her üç dersten ödev almıştır. Bu üç dersten de ödev almayan kaç öğrenci vardır?
5. 40 kişilik bir grupta 18 kişi İspanyolca konuşmayı biliyor, 20 kişi Japonca konuşmayı bilmiyor. Her iki dilden en az birini bilenlerin sayısı 30 ise iki dilden yalnız birisini bilen kişi sayısı kaçtır?
6. 38 kişilik bir grupta 14 kişi futbol, 7 kişi futbol ve basketbol, 10 kişi yalnızca basketbol, 8 kişi de yalnızca voleybol oynayabilmektedir. Voleybol oynayanlar diğer iki sporu oynayamamaktadır. Bu spor dallarından en az birini oynayan kaç kişi vardır?
7. 38 kişilik bir grupta futbol, voleybol ve basketbol sporlarını yapan ve bu üç sporu da yapmayan sporcular vardır. Bu spor dallarından yalnızca birini yapan 18, her üç sporu yapan 6, hiç birini yapmayan 5 sporcu olduğuna göre yalnızca 2 sporu yapan kaç sporcu vardır?
8. Bir iş yerinde A, B ve C işlerinden en az birini yapan işçiler vardır. Her üç işi de yapan 4 kişidir. Yalnız iki işi yapabilenler üç işi de yapabilenlerin üç katıdır. A işini yapabilenler 11, B işini yapabilenler 14 ve C işini yapabilenler 18 kişi olduğuna göre yalnızca bir iş yapabilen kaç kişi vardır?
9. Bir sınıfta yalnız masa tenisi ve yalnız basketbol ve her iki sporu da oynayan öğrenciler vardır. Sınıf mevcudu 22 kişidir. Yalnızca masa tenisi oynayanlar yalnızca basketbol oynayanların 4 katıdır. Her ikisini de oynayan 12 öğrenci varsa basketbol oynayan kaç öğrenci vardır?
10. 34 kişilik bir sınıfta seçmeli derslerden yalnız matematik, yalnız geometri, hem matematik hem de geometri dersini seçen ve bu iki dersi de seçmeyen öğrenciler vardır. Yalnız matematik ve yalnız geometri derslerini seçen 18, matematik veya geometri dersini seçen 23 öğrenci varsa en az bir ders seçenlerle en çok bir ders seçen öğrencilerin sayıları toplamı kaçtır?
11. Herkesin İngilizce ve Fransızca dillerin en az birini bildiği bir sınıfta İngilizce bilenler Fransızca bilenlerin iki katından 2 fazladır. İki dil bilen 6 kişi olduğuna göre ve sınıfta 23 kişi olduğuna göre Fransızca bilen kaç kişi vardır?

BÖLÜM ÖZETİ

Bölüm Özeti

Kümelerde Birleşim İşlemi: A ile B kümelerinin bütün elemanlarının bir araya getirilmesiyle oluşan kümeye A birleşim B kümesi denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} \text{ dir.}$$

Kümelerde kesişim işlemi: A ile B kümelerinin ortak elemanlardan meydana gelen kümeye A kesişim B kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} \text{ dir.}$$

A ve B kümeleri için $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ dir.

A, B ve C kümeleri için, $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ dir.

Kümelerde Fark İşlemi: A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye A fark B kümesi denir ve $A - B$ biçiminde gösterilir.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

Eğer $A \cap B$ kümesi boş küme ise yani A ve B kümelerinin ortak elemanı yok ise bu kümeler **ayrık kümeler** olarak adlandırılır.

Kümelerde tümleme işlemi: Bir A kümesinin dâhil olduğu evrensel kümeyi alalım. Bu evrensel kümenin elemanı olup, A kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye A'nın tümleyeni denir ve A' ya da \bar{A} ile gösterilir.

$$A' = E - A = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$

De Morgan Kuralları: Herhangi iki A ve B kümeleri için;

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

eşitliği sağlanır.

Kartezyen çarpım kümesi: A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. A kümesinden alınan bir a elemanı ile B kümesinden alınan b elemanı ile oluşturulan (a, b) şeklindeki yeni elemana sıralı ikili denir. (a, b) sıralı ikilisinde a ya birinci bileşen b ye ise ikinci bileşen denir.

$(a, b) = (c, d)$ ise $a = c$ ve $b = d$ dir. Benzer şekilde, $a = c$ ve $b = d$ ise $(a, b) = (c, d)$ dir.

A kartezyen çarpım B kümesi $A \times B$ şeklinde gösterilir ve ortak özellik yöntemiyle şu şekilde tanımlanır:

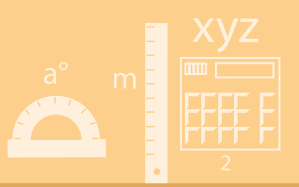
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

$A \times B$ kümesi sıralı ikililerden oluşur ve bu sıralı ikililerin birinci bileşenleri A kümesinden, ikinci bileşenleri B kümesinden alınır.

A ve B kümeleri farklı kümelerse $A \times B$ ve $B \times A$ kümeleri de farklı kümelerdir.

$$s(A) = m \text{ ve } s(B) = n \text{ ise } s(A \times B) = m \cdot n \text{ dir.}$$

$A \times B$ ve $B \times A$ kartezyen çarpım kümelerinin eleman sayıları aynıdır.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Kavrama ve Muhakeme

1. Aşağıda verilen ifadelerin yanına doğru olanların yanına 'D' yanlış olanların yanına 'Y' yazınız.

(...) Bir kümenin kendisiyle birleşiminin eleman sayısı kendisinin eleman sayısının iki katıdır.

(...) Üç kümenin birleşimi herhangi ikisinin birleşimiyle üçüncüsünün birleşimine eşittir.

(...) Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılıma özelliği yoktur.

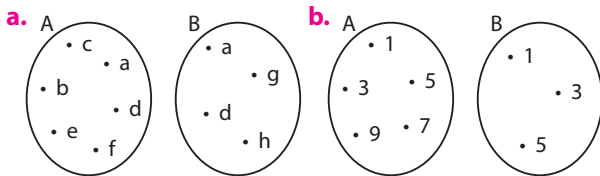
(...) A ve B kümeleri eşit kümeler olmasalar bile A'nın B'den farkı B'nin A'dan farkına eşittir.

(...) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ eşitliği geçerlidir.

2. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- Sonlu iki kümenin birleşimi sonlu bir kümedir.
- Sonsuz bir kümenin her alt kümesi sonlu bir kümedir.
- Sonlu bir küme ile sonsuz bir kümenin birleşimi sonsuz bir kümedir.
- Sonlu bir küme ile sonsuz bir kümenin kesişimi sonlu bir kümedir.

3. Aşağıda verilen kümelerin birleşim ve kesişimini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

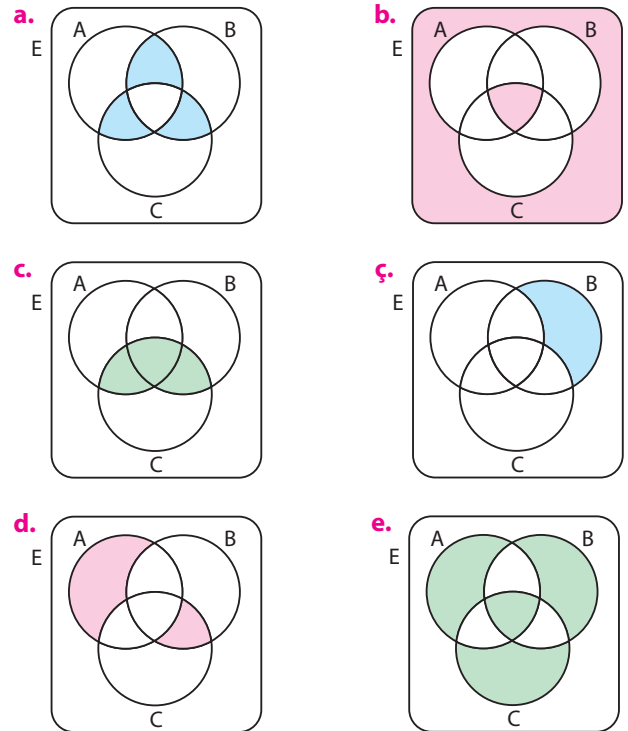


4. $E = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, 1, 2\}$ ve $C = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz?

- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| a. $A \cap B$ | b. $A \cup C$ |
| c. $B \cap C$ | ç. $A \cap (B \cap C)$ |
| d. $(A \cap B) \cap C$ | e. $A \cap \emptyset$ |
| f. $A \cap E$ | g. $A \cap (B \cup C)$ |
| ğ. $A \cup (B \cap C)$ | h. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| ı. $A \cup \emptyset$ | i. $B \cup E$ |
| j. $A \cup (B \cup C)$ | k. $E \cup (B \cap C)$ |

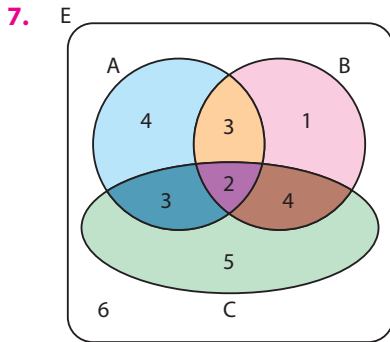
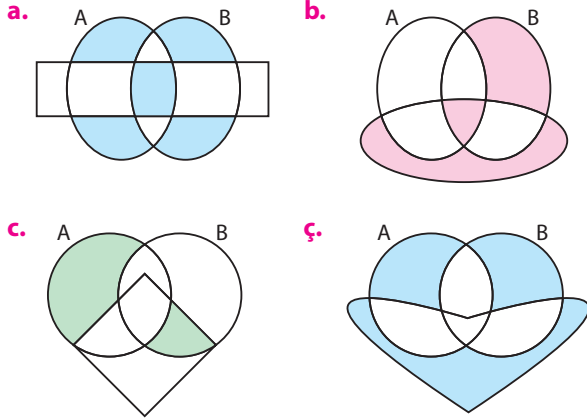
5. Aşağıdaki şekilde Venn şeması ile verilen kümelerin boyalı bölgeleri gösteren ifadeleri yazınız.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

6. Aşağıdaki şekilde Venn şemasıyla verilen kümelerin boyalı bölgeleri gösteren ifadeleri yazınız.

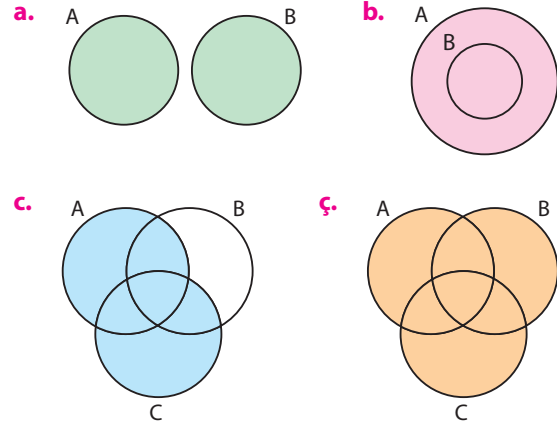


Şekilde verilen sayılar bulundukları yerdeki eleman sayılarını belirtmektedir.

Buna göre aşağıda ki ifadeleri bulunuz.

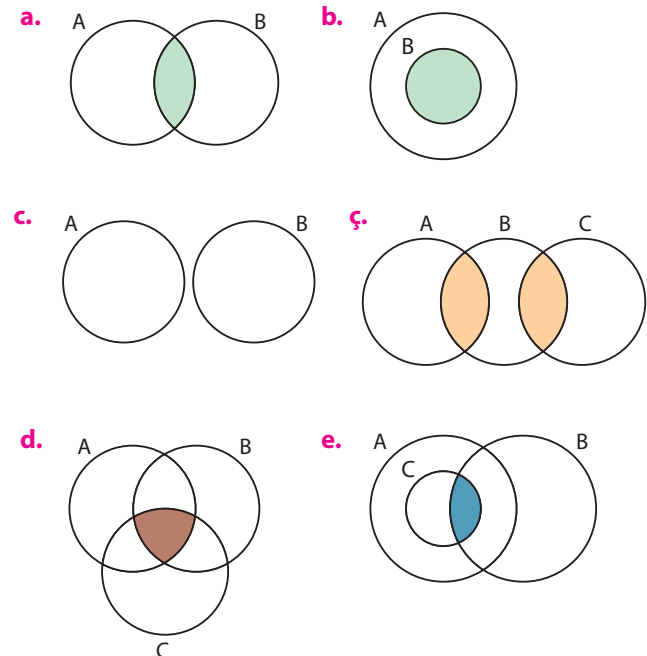
- a. $s(A)$ b. $s(B)$ c. $s(C)$
 ç. $s(E)$ d. $s(A \cup B)$ e. $s(A \cup C)$
 f. $s(B \cup C)$ g. $s(A \cap B)$ ğ. $s(A \cap C)$
 h. $s(A \cap B \cap C)$ ı. $s(A \cup B \cup C)$ i. $s((A \cup B) \cap C)$
 j. $s((A \cap B) \cup C)$

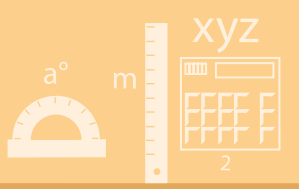
8. Aşağıda verilen boyalı bölgeleri kesişim ve birleşim sembollerini kullanarak ifade ediniz.



9. $A = \{1, 2, 3, d, e\}$, $B = \{1, 3, p, r\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini bulunuz.

10. Aşağıda verilen boyalı bölgeleri kesişim, birleşim ve fark sembollerini kullanarak ifade ediniz.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

11. $(a, 5)$ ve $(3, b-1)$ birer sıralı ikili olmak üzere $(a, 5) = (3, b-1)$ ise a ve b sayılarını bulunuz.

12. $\{a, b\}$ ile (a, b) arasındaki farkı açıklayınız.

13. $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $U = \{u, v, y, z\}$ kümeleri için

a. $s(T \times U)$,

b. $s(U \times T)$,

c. $s(T \times T)$,

ç. $s(U \times U)$

değerlerini bulunuz.

14. $s(A \times B) = 12$ elemanlı olacak şekilde A ve B kümeleri için üçer örnek yazınız.

Uygulama soruları

1. Verilen A ve B kümeleri için $s(A) + s(B') = 9$, $s(A') + s(B) = 13$ ise $s(E)$ ise kaçtır?

2. E evrensel kümesi ile A ve B kümeleri için $s(A \cup B) = 2 \cdot s[(A \cup B)']$, $s(B - A) = s(A) - s(B) = 2$, $s(A) + s(A') = 15$ ise $s(B)$ kaçtır?

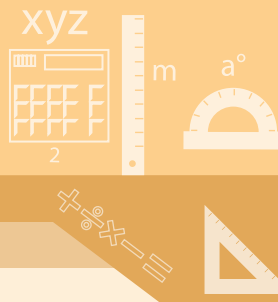
3. Bir gruptaki kişiler farklı zamanlarda yapılacak A , B ve C gezilerden en az birine katılacaktır. A gezisine katılan 12 kişi, B gezisine katılan 10 kişi, C gezisine katılan 8 kişi, A ve B gezisine katılan 5 kişi, B ve C gezisine katılan 4 kişi, A ve C gezisine katılan 3 kişidir. Her üç geziye de katılacak 1 kişi olduğuna göre bu grupta kaç kişi olduğunu bulunuz?

4. Herhangi A ve B kümeleri için A kümesinin eleman sayısının 3 katı, B kümesinin eleman sayısının 5 katına eşit ve bu değer kesişimlerinin de 15 katına eşittir. A veya B kümelerinin eleman sayısı 84 olduğuna göre bu kümelerin eleman sayılarını bulunuz?

5. A , B ve C aynı evrensel kümede işlem yapılan üç küme olmak üzere $s(C) + s(B') = 12$, $s(B) + s(C') = 16$ ve $s(A') = 9$ olduğuna göre $s(A')$ yı bulunuz?

6. A ve B iki küme olmak üzere, $A \subset B$ ve $s(A) + 2 \cdot s(B) = 15$ veriliyor. Buna göre $s(A \cap B)$ en az kaçtır bulunuz?

7. M ve N iki küme olmak üzere $s(M - N) = 4$, $s(N - M) = 3$, $s(M) = 10$ veriliyor buna göre $s(M \cup N)$ kaçtır bulunuz?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

8. A ve B iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = 14$, $s(A \cap B) = 4$ ve $2 \cdot s(A) = s(B)$ veriliyor. Buna göre $s(B - A)$ kaçtır bulunuz?
9. A ve B herhangi iki küme olmak üzere, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $s(A) = 4$, $s(B) = 5$ olarak veriliyor. Buna göre $A \cup B$ kümesinin en az ve en çok kaç elemanlı olabileceğini bulunuz?
10. A ve B herhangi iki küme olmak üzere, $s(A - B) = 8$, $s(A \cup B) = 24$ ve $s(A \cap B) = 6$ olarak veriliyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.
- a. $s(B - A)$
- b. $s(B)$
11. Bir sınıfta 30 öğrenci arasında polisiye kitap okuyan 18, komedi kitap okuyan 22 kişi vardır. Buna göre sadece polisiye kitap okuyan kaç kişi vardır. Bulunuz?
12. Belirli bir sayıdaki sinema seyircisi arasında yapılan bir ankette "ne tür filmler hoşunuza gitti." sorusuna seyirciler; "196 dramalar sevdim. 153 komedi sevdim. 88 bilim kurgu sevdim. 59 Dram ve komedi sevdim. 37 drama ve bilim kurgu sevdim. 32 komedi ve bilim kurgu sevdim. 21 üç tür filmi de sevdim" şeklindedir. Buna göre ankete katılan kaç kişi vardır?

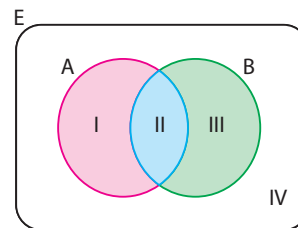
13. Bir şirkette A işini yapan %50, B işini yapan %80 ve her iki işi yapan 3 kişi olduğuna göre bu şirkette çalışan kaç kişi vardır.

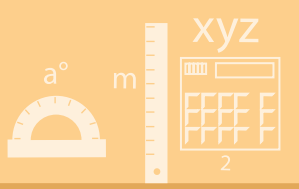
14. Tuz, %60 ı sodyum (Na) ve %40 ı kloridan (Cl) oluşan bir besindir. Sodyum ise besinlerde doğal olarak bulunan bir mineraldir. Yetişkin bir insanın günlük tuz ihtiyacı ortalama 6–8 gramdır. Aşağıdaki tabloda bazı besinlerin 100 gramlarındaki sodyum ve kalori miktarları verilmiştir.

| | Na (mg/100 gr) | Kalori/100 gr |
|-----------------------|----------------|---------------|
| Beyaz Peynir (Edirne) | 252 | 301 |
| Lor Peyniri | 406 | 203 |
| Kaşar Peyniri | 710 | 373 |
| Midye | 289 | 96.5 |
| Tavuk Yumurtası | 138 | 142 |
| Makarna | 2 | 358 |
| İrmik | 2 | 354 |
| Elma | 1 | 61 |
| Kuru Kayısı | 26 | 258 |

A kümesi 100 gramında en az 150 miligram Sodyum (Na) içeren besinler olsun. B kümesi 100 gramında en çok 150 kalori içeren besinler olsun.

Tablodaki besinlerin Venn şemasında hangi bölgeye gelebileceklerini bulunuz.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Proje

İnsan kaynakları uzmanı olarak bir şirkette çalışıyorsunuz. Şirketinizdeki açık pozisyon için yedi aday başvurmuştur. Bu yedi adayın diploma, tecrübe, İngilizce, ve referans durumlarına bağlı nitelikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu niteliklerden biri, birkaçı ya da hepsini göz önünde bulundurarak kararınıza varabilirsiniz. Bir başka ifa-

deyle nitelikler kümesinin bir alt kümesi sizin karar alt kümeniz olacaktır. Kararınız için nitelikler alt kümenizi oluşturunuz ve verilerinize göre karar tablosunu kabul veya ret olmak üzere doldurunuz. Karar sürecinizi küme gösterimleri kullanarak açıklayınız.

| | Diploma | İş Tecrübesi | Yabancı Dil | Referans | Kabul |
|--------|------------------------|--------------|-------------|----------|-------|
| Aday 1 | Matematik | Az | İleri | Mükemmel | |
| Aday 2 | Matematik | Çok | Orta | İyi | |
| Aday 3 | Matematik Öğretmenliği | Çok | Başlangıç | Nötr | |
| Aday 4 | Matematik Öğretmenliği | Orta | İleri | Mükemmel | |
| Aday 5 | Bilgisayar Mühendisi | Az | İleri | İyi | |
| Aday 6 | Bilgisayar Mühendisi | Orta | Orta | Mükemmel | |
| Aday 7 | İşletme | Çok | Orta | İyi | |



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - I

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanları D, yanlış olanları ise Y harfiyle belirtiniz.

(....) 2'nin katı olan 15'ten küçük beş sayı bir küme oluşturur.

(....) $\{\emptyset\}$ kümesi boş kümedir.

(....) 64 tane alt kümesi olan küme 6 elemanlıdır.

(....) Her küme kendisinin alt kümesidir.

(....) $(A - B) \cap (A - B') = \emptyset$ dir.

2. Aşağıdaki kümeleri SONLU veya SONSUZ olarak belirtiniz.

(.....) Bir haftadaki günlerin kümesi

(.....) 2 ile bölünebilen doğal sayıların kümesi

(.....) 2010 yılı içinde doğan çocukların kümesi

(.....) Tamsayılar kümesi

(.....) Bir doğru parçası üzerindeki noktalar kümesi

3. Aşağıdaki boşluklara uygun olan kavramları yazınız.

Boş küme, eşit küme, birleşim kümesi, kesişim kümesi, sonsuz küme, ayrık kümeler

a. Aynı elemanlardan oluşan kümelere kümeler denir.

b. Boş kümeden farklı, ortak elemanları bulunmayan kümelere denir.

c. İki veya daha fazla kümenin ortak elemanlarından oluşan kümeye bu kümelerin denir.

ç. İki veya daha fazla kümenin tüm elemanlarından oluşan kümeye bu kümelerin denir.

d. Hiç elemanı olmayan kümeye denir.

e. Sonlu olmayan kümelere denir.

4. Aşağıdaki her bir kümeye aynı özellikte eleman ekleyerek kümenin eleman sayısını ne kadar artırabileceğinizi düşününüz.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$B = \{a, b, c, \text{ç}, d, \dots\}$

$C = \{\text{karga, leylek, papağan, saka, güvencin, \dots}\}$

$D = \{\text{Tuz gölü, Van gölü, Manyas gölü,}$

$\text{Mogan gölü, \dots}\}$

Buna göre bu kümelerin her biri için,

a. Bu kümeleri kapsayan daha çok elemanlı kümeler oluşturunuz.

b. Bu kümeleri kapsayan en geniş kümeleri ortak özellik yöntemiyle yazınız.

5. Aşağıdaki sayı kümelerini eleman sayıları yönüyle iki gruba ayırınız. Sizce bu grupların isimleri ne olmalıdır? Neden?

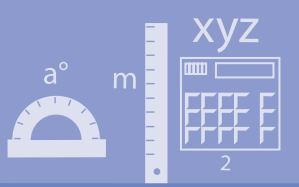
a. Çift sayılar kümesi,

b. Tam sayılar kümesi,

c. İki basamaklı sayılar kümesi,

ç. 100 sayısını tam bölenlerinin kümesi,

d. 23 sayısının çarpanlarının kümesi.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - I

6. Aşağıdaki kümelerden hangileri eşit kümedir?

$$A = \{x \mid x, 2 \text{ ile } 7 \text{ arasındaki bir doğal sayı} \}$$

$$B = \{x \mid 6 < x^2 \leq 36 \text{ ve } x \text{ bir doğal sayı} \}$$

$$C = \{1 \text{ den } 6 \text{ ya kadar olan doğal sayılar} \}$$

$$D = \{x \mid 2x - 3 \leq 9 \text{ ve } x \text{ bir pozitif tam sayı} \}$$

7. $A = \{a, b, c, d\}$

$$B = \{b, c, d, e\}$$

$$C = \{a, b, c, h, k\} \text{ kümeleri veriliyor.}$$

Buna göre aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle yazınız.

a. $A \cup B$

b. $A \cap C$

c. $A \cup (B \cap C)$

8. $E = \{a, b, c, d, e, k, l, m, n\}$ evrensel kümesi ile

$$A = \{a, b, m, n\}$$

$$B = \{k, l, m, n\}$$

$$C = \{a, b, c, d\}$$

kümeleri için aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle yazınız.

a. $A \cap B$

b. $A \cap C$

c. $B \cap C$

ç. $A \cap (B \cap C)$

d. $(A \cap B) \cap C$

e. $A \cap \emptyset$

f. $A \cap E$

g. $A \cap (B \cup C)$

ğ. $A \cup (B \cap C)$

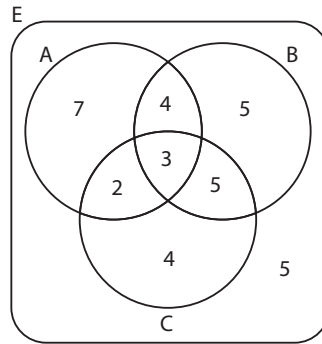
h. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ı. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

9. A kümesinin eleman sayısı 6, B kümesinin eleman sayısı 5 tir. A ve B kümelerinin birleşiminin eleman sayısı 8 olduğuna göre bu iki kümenin kesişiminin eleman sayısını bulunuz.

10. $A \cap (B \cup C) = \{a, b, c, d, e\}$ ve $A \cap B = \{a, d, e\}$ kümeleri veriliyor. $C \cap A$ kümesinin eleman sayısı en az kaç olur?

11. Aşağıda verilen kümelerdeki sayılar bulundukları bölgelerdeki eleman sayılarını göstermektedir. Buna göre aşağıda istenenleri bulunuz.



a. $s(A)$

b. $s(B)$

c. $s(C)$

ç. $s(A \cup B)$

d. $s(A \cup C)$

e. $s(C \cup B)$

f. $(A \cup B \cup C)$

g. $s(A \cap B)$

ğ. $s(A \cap C)$

h. $s(B \cap E)$

ı. $s((A \cap C) \cup (B \cap C))$

i. $s((B \cup A) \cap C)$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - I

12. C kümesinin eleman sayısı, D kümesinin eleman sayısının 2 katıdır. Bu iki kümenin birleşim ve kesişiminin eleman sayıları toplamı 12 olduğuna göre A kümesinin eleman sayısını bulunuz.

13. $B \not\subset A$, $s(A - B) = 4$, A kümesinin alt kümelerinin sayısı 256 olduğuna göre B kümesinin eleman sayısı en az kaç olabilir?

14. $K = \{x \mid 9 < x < 50, x = 3n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$,
 $L = \{x \mid 12 < x < 48, x = 5n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$
 olduğuna göre

- a.** K ve L kümelerinin birleşiminin eleman sayısı kaçtır?
- b.** K ve L kümelerinin kesişiminin eleman sayısı kaçtır?

15. $K = \{y \mid 1 < y < 50, y = 2n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$,
 $L = \{y \mid 1 < y \leq 45, y = 3n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$
 $M = \{y \mid 1 < y < 54, y = 4n \text{ ve } n \text{ bir doğal sayı}\}$
 olduğuna göre

- a.** K, L ve M kümelerinin birleşiminin eleman sayısı kaçtır?
- b.** K, L ve M kümelerinin kesişiminin eleman sayısı kaçtır?

16. Akşam evine misafir gelen Hatice hanımın, dolabında "elma, portakal, muz, armut, havuç" vardır. Hatice hanım misafirlerine;

- a.** Havuç ve elma içermeyen kaç farklı meyve tabağı hazırlayabilir?
- b.** Havuç ve elma içeren kaç farklı meyve tabağı hazırlayabilir?
- c.** Havuç içeren ama elma içermeyen kaç farklı meyve tabağı hazırlayabilir?
- ç.** İçerisinde havucunda olduğu 3 çeşit meyve içeren kaç farklı meyve tabağı hazırlayabilir?
- d.** İçerisinde havucunda olmadığı 3 çeşit meyve içeren kaç farklı meyve tabağı hazırlayabilir?

17. $K = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

- a.** 2 ve 4 bulunur?
- b.** 2 ve 4 bulunmaz?
- c.** 2 bulunur 4 bulunmaz?

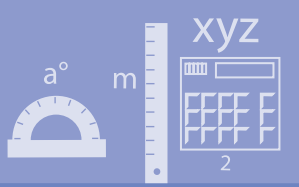
18. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 3, 5, 7\}$

$C = \{7, 9, 11, 13\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıda verilen kümeleri bulunuz.

- a.** $A - B$
- b.** $B - A$
- c.** $A - (B \cup C)$
- ç.** $A \cap (C - A)$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - I

19. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere

$$s(E) = 24$$

$$s(B - A) = 9$$

$$s((A \cap B)') = 12$$

ise B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

20. A kümesinin alt küme sayısı 16, B kümesinin kendisinden farklı alt küme sayısı 63 tür. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğuna göre $A \cup B$ en az kaç elemanlıdır?

21. A kümesinin eleman sayısı 6, B kümesinin kendisinden farklı alt küme sayısı 255 tir. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğuna göre $A \cap B$ en çok kaç elemanlıdır?

22. $A = \{1, 2, 3\}$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

olmak üzere $A \subset B \subset C$ koşuluna uyan A ve C den farklı kaç farklı B kümesi yazılabilir?

23. $(A \cup B)' \cap (A \cup B)$ kümesini en sade biçimde yazınız.

24. $[A' \cap (A \cap B)] \cup [A \cap (A \cap B)']$ kümesini küme işlemleri kullanarak en sade biçimde yazınız.

25. E evrensel kümesinin alt kümeleri A ve B dir. Buna göre, $[E \cap (A \cap B)'] \cup [(A' \cup B)' \cap (A \cap B)']$ kümesini en sade biçimde yazınız.

26. E evrensel küme M ve N ise bu evrensel kümenin alt kümeleri olsun. Buna göre $(M - N) \cup (M - N') = M$ olduğunu gösteriniz.

27. E evrensel küme A ve B ise bu evrensel kümenin alt kümeleri olsun. Buna göre, $(A - B) \cap (A - B') = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

28. A ve B iki küme olsun.

$$s(A) = 4 \cdot s(A \cap B)$$

$$s(A - B) = 12$$

$$s(B - A) = 6$$

ise $s(A \cup B)$ yi bulunuz.

29. $(2x - 4, 6) = (9, 3z + 2)$ eşitliğini sağlayan x ve z sayılarını bulunuz.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - I

30. $A = \{a, b, c\}$
 $B = \{3, 6, 8\}$
 kümeleri için aşağıdaki kartezyen çarpım kümelerinin grafiklerini çiziniz.

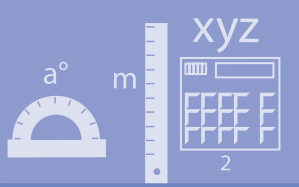
- a. $A \times B$
- b. $B \times A$
- c. $A \times A$
- ç. $B \times B$

31. $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (9, 5), (9, 8), (9, 6), (7, 5), (7, 6), (3, 8), (7, 5)\}$
 kartezyen çarpım kümesi için A ve B kümelerini bulunuz.

32. $M \times N = \{(p, t), (z, 1), (2, k), (z, t), (z, r), (a, 3), (p, k), (p, d), (p, r), (a, d), (a, r), (a, t)\}$
 kartezyen çarpım kümesi veriliyor. Buna göre;
 a. "1, 2, 3" yazan yerlere gelmesi gereken elemanları bulunuz.
 b. M ve N kümelerini belirleyiniz.

33. Aşağıdaki noktalı yerleri uygun şekilde doldurunuz.
 a. $s(A \times A) = 49$ ise $s(A) = \dots$ dir.
 b. $s(A \times B) = 24$ ve $s(A) = 6$ ise $s(B) = \dots$ dir.
 c. $s(A \times \emptyset) = \dots$ dir.
 ç. A'nın eleman sayısı \dots ise $s(A \times A) = s(A)$ dir.

- 34.** 30 oyuncunun bulunduğu bir kulüpte futbol veya voleybol oynayan 20 oyuncu, futbol oynamayan 14 oyuncu, oynamayan 18 oyuncu vardır. Her iki oyunu da oynayan kaç oyuncu vardır?
- 35.** Herkesin İngilizce ve İspanyolca dillerinden en az bir dil bildiği 42 kişilik bir sınıfta İngilizce bilenlerin sayısı, İspanyolca bilenlerin sayısının 2 katından 3 fazladır. Bu sınıfta hem İngilizce hem de İspanyolca bilen 3 kişi olduğuna göre yalnız İspanyolca bilen kaç kişi vardır?
- 36.** Bir turist kafesinde 14 kişi Almanca, 16 kişi Fransızca, 20 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca ve Fransızca, 9 kişi Almanca ve İngilizce, 10 kişi Fransızca ve İngilizce, 7 kişi her üç dili de konuşmaktadırlar. Kafilede kaç kişi vardır?
- 37.** Gaziantep, Bursa ve Erzurum şehirlerinden en az birini görenlerin olduğu bir grupta üç ili de gören 4, Gaziantep'i gören 14, Erzurum'u gören 17, Bursa'yı gören 11, Gaziantep ve Bursa'yı gören 5, Gaziantep ve Erzurum'u gören 9, Erzurum ve Bursa'yı gören 5 kişi olduğuna göre bu grup kaç kişidir?
- 38.** Bir okuldaki 9. Sınıf öğrencilerinin %50'si Fizik, %60'ı Tarih ve %30'u her iki dersten başarılıdır. 40 öğrenci ise bu derslerden başarısız ise yalnız Fizik dersinden başarılı kaç öğrenci vardır?
- 39.** E evrensel kümesi 1 den başlayıp 100 e kadar olan ve 100 ü de içeren tam sayılardan oluşuyor. A kümesi çift sayılardan ve B kümesi 5 ile bölünebilen sayılardan oluştuğuna göre $s(A \cap B)$, $s(A - B)$ ve $s(B - A)$ değerlerini bulunuz.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - II

1. Küme kavramı ile ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. Bir kümenin elemanları ortak bir özelliğe sahip olmalıdır.
- II. Bir kümenin en az bir elemanı olmalıdır.
- III. Bir kümedeki tekrarlı elemanlar farklı elemanlar olarak göz önüne alınmalıdır.
- IV. Bir kümenin elemanı başka bir kümenin de elemanı olabilir.
- V. Aynı sayıda elemana sahip olan kümeler eşit kümelerdir.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Kümelerin gösterim yöntemlerine dair aşağıdaki ifadelerden hangisi veya hangileri yanlıştır?

- I. Her küme Venn şeması ile gösterilebilir.
- II. Her küme liste yöntemi ile yazılamaz.
- III. Her küme ortak özellik yöntemi ile yazılabilir.

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

3. Aşağıdakilerden hangisi boş kümedir?

- A) $A = \{x \mid x, \text{bir sınıfımızdaki uzun boylu öğrencidir}\}$
- B) $B = \{x \mid x, 2 \text{ basamaklı bir sayıdır}\}$
- C) $C = \{x \mid x, 0 \text{ dan küçük bir doğal sayıdır}\}$
- D) $D = \{x \mid (x + 2)(x - 2) = 0 \text{ ve } x \text{ bir doğal sayıdır}\}$
- E) $E = \{x \mid x \text{ bir çift asal sayıdır}\}$

4. Aşağıdakilerden hangileri boş küme değildir?

- I. " $3 + x = 3$ " eşitliğini sağlayan tam sayılar kümesi
- II. Paralel doğruların kesişim noktalarının kümesi
- III. 10 ile tam bölünebilen ve birler basamağı 5 olan sayıların kümesi

A) Yalnız I B) Yalnız II D) I ve III
C) II ve III E) I, II ve III

5. $V = \{a, b, \{c, d\}, \{e, f\}, h\}$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

$B = \{x \mid x = 2k + 1, x \in A \text{ ve } k \text{ bir tam sayıdır}\}$

kümeleri veriliyor.

B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

7. A kümesinin alt küme sayısı B kümesinin alt küme sayısının 8'de biridir. A kümesinin eleman sayısı B kümesinin eleman sayısından kaç eksiktir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - II

8. A ve B birbirinden farklı iki küme olsun.

$$s(A) = 6$$

$$s(B) = 7$$

ise $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

9. $A = \{x, y, \{x, z\}\}$ kümesiyle ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\{x, z\} \in A$ B) $\{x\} \subset A$ C) $\{x, y\} \subset A$
D) $\{x, z\} \subset A$ E) $\{x, \{x, z\}\} \subset A$

10. Aşağıda verilen kümelerden hangileri birbirine eşittir?

$$A = \{-2, 2\}$$

$$B = \emptyset$$

$$C = \{x \mid x - 2 < 0 \text{ ve } x \text{ bir doğal sayıdır}\}$$

$$D = \{1 \text{ den küçük iki asal sayı}\}$$

$$E = \{x \mid x \cdot (x - 1) = 0 \text{ ve } x \text{ bir doğal sayıdır}\}$$

- A) Yalnız A ile C
B) Yalnız B ile D
C) Yalnız C ile D
D) B ile D ve C ile E
E) Hiçbiri

11. $M \not\subset N$, $s(M - N) = 5$, M kümesinin alt kümelerinin sayısı 128 olduğuna göre N kümesinin eleman sayısı en az kaç olabilir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

12. $H = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 bulunur 5 bulunmaz?

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

13. Aşağıda kümelerle ilgili verilen bazı ifadeler verilmiştir. Bu ifadelerden hangileri daima doğrudur?

I. $s(A) < s(B)$ ise $A \subset B$ dir.

II. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ gösterimi doğrudur.

III. $A = \{x, y, \{x, z\}\}$ kümesinin eleman sayısı 4'tür.

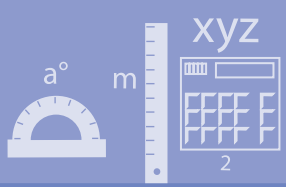
- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

14. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$B = \{(x, y) \mid x + y = 4, x \in A \text{ ve } y \in A\}$$

kümesi veriliyor. Buna göre B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

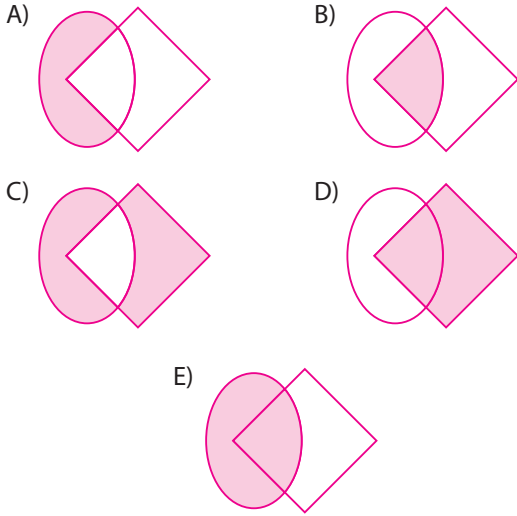


ÜNİTE DEĞERLENDİRME - III

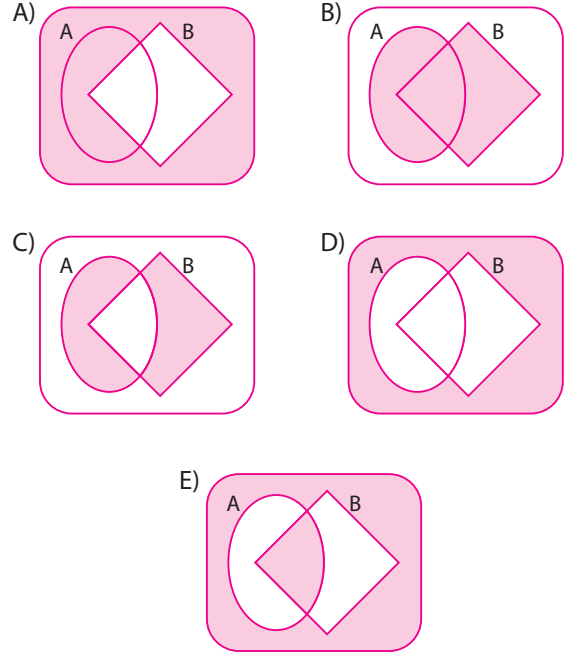
1. $A - B$ kümesinin 4 tane alt kümesi, $B - A$ kümesinin kendisinden başka 7 tane alt kümesi vardır.
 $s(A \cup B) = 8$ ise $A \cap B$ kümesinin 2 elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. A ve B herhangi iki küme olmak üzere
 $(A \cup B) - (A \cap B)$ kümesinin Venn şeması ile gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?



3. A ve B bir evrensel kümenin herhangi iki alt kümesi olmak üzere $(A \cup B) - (A \cap B)$ kümesinin tümleyeni Venn şeması ile gösteriniz.



4. P ve R kümeleri 16 elemanlı bir E evrensel kümenin alt kümeleri olmak üzere,

$$s(R - P) = 6$$

$$s(P' \cap R') = 5$$

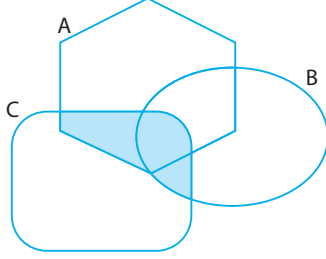
olduğuna göre, P kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - III

5.



Şekilde verilen boyalı alan aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

- A) $(A \cup B) - C$ B) $(A \cap B) - C$
 C) $C - (A \cup B)$ D) $(A \cup B) \cap C$
 E) $(A \cup C) \cap B$

6. A ve C boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere

$$s(A \times C) = 20$$

$$s(C) = 4$$

ise $s(A \times A)$ kaçtır?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

7. 10 erkek, 16 kadının bulunduğu bir grupta 18 kişi gözlüklüdür. Bu grupta, gözlüklü veya erkek olanların sayısı 22 olduğuna göre, gözlüklü erkeklerin sayısı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. Bir sınıfta sadece İngilizce bilenlerin sayısı ile Almanca veya İngilizce bilmeyenlerin sayısına eşittir. İngilizce ve Almanca bilen 4 kişi olup İngilizce bilenlerin sayısı en az bir dil bilenlerden 6 eksiktir. Sınıfta Almanca bilenlerin iki katı kadar öğrenci olduğuna göre İngilizce bilen kişi sayısı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

9. $A \subset B \subset C$ ise $A' \cap B$ aşağıdakilerden hangisine eşit değildir?

- A) $(C \cap B) - A$ B) $B - A$
 C) $(A \cup B) - (A \cap C)$ D) $(A \cap B) - B$
 E) $(A \cup B)'$

10. $[(A \cup B) - A]' \cap A$ ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A B) B C) A' D) B - A E) $A \cap B'$

11. A ve B kümeleri için

$$s(A) = 10$$

$$s(B) = 8$$

$$s(A \cap B) = 4$$

ise $s(A \cup B)$ kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

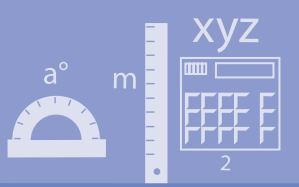
12. A ve B, evrensel kümenin iki alt kümesi olmak üzere,

$$s(A) + s(B) = 11 \text{ ve}$$

$$s(A') + s(B') = 9$$

olduğuna göre Evrensel kümenin eleman sayısı kaçtır?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 13 E) 20



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - IV

1. $A \cap B$, $A - B$ ve $B - A$ kümelerinin eleman sayıları sırasıyla 2, 3 ve 4 ile doğru orantılıdır.

$s(A \cup B) = 36$ olduğuna göre $A \cap B$ nin eleman sayısı kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

2. $(4x - 6, 2y + 5) = (2x - 4, y + 3)$ eşitliğini sağlayan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (1, 2) B) (2, 1) C) (-2, 1)
D) (1, -2) E) (-1, -2)

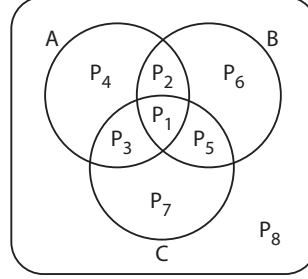
3. 20 kişilik bir grupta, 4 kişi futbol ve basketbol oynamaktadır. 15 kişi bu oyunlardan en az birini oynamaktadır. Futbol oynayanların sayısı basketbol oynayanların sayısından 3 fazladır. Bu grupta futbol oynamayan kaç kişi vardır?

- A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

4. Bir turist grubunda Çince, İngilizce, ve Fransızca dillerinden en az biri bilinmektedir. Çince bilen 15, İngilizce bilen 13, Fransızca bilen 12, Çince ve Fransızca bilen 5, Çince ve İngilizce bilen 3, her üç dili de bilen 2 kişidir. Turist grubu 30 kişi ise İngilizce ve Fransızca bilen kaç kişidir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.



Evrensel küme içerisinde A, B ve C kümelerinin Venn şeması verilmiştir. Burada P_1, P_2, \dots, P_8 bulundukları bölgeyi temsil etmektedirler.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $P_2 = A \cap B \cap C'$ B) $P_3 = A \cap B' \cap C$
C) $P_4 = A \cap B' \cap C'$ D) $P_5 = A' \cap B \cap C$
E) $P_6 = A' \cap B \cap C'$

6. "30 kişilik bir kafilede 16 kişi Türkçe, 10 kişi İngilizce bilmektedir. Her iki dili bilmeyen kaç kişi vardır?" Sorusunun çözülebilmesi için aşağıdakilerden hangisinin verilmesi yeterli değildir?

- A) Yalnız Türkçe bilenlerin sayısı
B) En az bir dil bilenlerin sayısı
C) İngilizce bilmeyenlerin sayısı
D) Yalnız İngilizce bilenlerin sayısı
E) Türkçe ve İngilizce bilenlerin sayısı

7. Bir okulun sınıflarının %60'ında akıllı tahta, %40'ında beyaz tahta vardır. Bu okulda her sınıfta akıllı tahta ya da beyaz tahtadan en az biri bulunduğu ve yalnız akıllı tahta bulunan 3 sınıf olduğuna göre, yalnız beyaz tahta bulunan kaç oda vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - IV

8. Kesişimleri boş küme olmayan X ve Y kümeleri için,
 $s(X) = 3 \cdot s(X \cap Y)$
 $s(X - Y) = 2 \cdot s(Y - X)$
 olduğuna göre, Y kümesi en az kaç elemanlıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. Bir sınıftan, beden eğitimi derslerinde hem basketbol hem futbol oynayanların sayısı 4, futbol veya basketboldan en az birini oynayanların sayısı 12 dir. Futbol oynayanların sayısı, basketbol oynayanlardan 6 fazla olduğuna göre, beden eğitimi derslerinde futbol oynayan kaç kişidir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

10. Sınıfta Almanca veya İngilizce dillerinden en az birini bilen 28 öğrenci vardır. İngilizce bilenlerin sayısı; Almanca bilenlerin sayısının 2 katı, her iki dili bilenlerin sayısının ise 3 katıdır. Buna göre, sınıfta İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

11. Verilen $A = \{a, b, c, \{a, e\}, d, \{d\}\}$ kümesine göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. $s(A) = 6$

II. $a \in A$

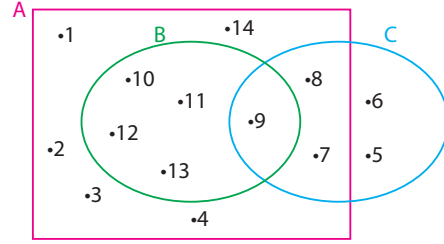
III. $\{a, e\} \in A$

IV. $\{d\} \in A$

A) I – II B) III – IV C) II – III – IV

D) I – II – III E) I – II – III – IV

12.



Venn şeması ile verilen A, B ve C kümeleri için $s(A) + s(B) + s(C)$ kaçtır?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

13. $A = \{a: 2 \leq a \leq 6 \text{ ve } a \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x, 3, y, 5, z\}$ kümeleri veriliyor.

A ve B kümeleri eşit kümeler ise $x + y + z$ kaçtır?

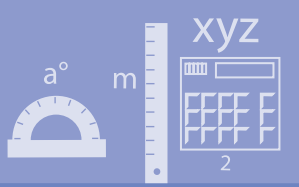
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14. A kümesinin alt kümelerinin sayısı ile B kümesinin alt kümelerinin sayısının toplamı 96 olduğuna göre A ve B kümelerinin eleman sayıları toplamı kaçtır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

15. Birbirinden farklı A ve B kümelerinin alt küme sayıları toplamı 65 ise, bu kümelerin eleman sayıları toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - V

1. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere

$A \subset K \subset B$ koşulunu sağlayan kaç tane K kümesi yazılabilir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

2. n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı $k - 1$ 'dir.

Bu kümeye 4 eleman daha eklenirse alt küme sayısı k cinsinden ne olur?

A) $16k - 16$ B) $20k + 20$ C) $24k - 24$
D) $28k + 28$ E) $32k - 32$

3. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a ve e elemanları birlikte bulunur?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2, 3 ve 4 elemanları birlikte bulunmaz?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

5. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında a ve e elemanları bulunur fakat f elemanı bulunmaz?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

6. $A = \{a, e, i, o, u\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a veya b eleman olarak bulunur?

A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

7. A, E evrensel kümesinin alt kümesi olmak üzere, aşağıdaki verilen özelliklerden hangileri doğrudur?

I. $A \cup \emptyset = A$

II. $A \cup A = A$

III. $A \cup E = A$

IV. $A \cup A' = E$

A) I – II B) III – IV C) I – II – III – IV
D) II – III E) I – II – IV

8. A, E evrensel kümesinin alt kümesi olmak üzere, aşağıdaki verilen özelliklerden hangileri doğrudur?

I. $E - A = A'$

II. $A \cap \emptyset = \emptyset$

III. $A \cap A = A$

A) I B) II C) III
D) I – II E) I – III – III



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - V

9. A ve B herhangi iki küme olmak üzere, aşağıda verilenlerden hangileri kesinlikle doğrudur?

I. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

II. $A - B = A \cap B'$

III. $(A - B) \cup B = A \cup B$

IV. $A \cap B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ dir.

A) I - IV

B) I - II - III

C) II - IV

D) I - III - IV

E) I - II

10. A ve B kümeleri için

$s(A - B) = 18$

$s(B - A) = 10$

$s(A \cup B) = 32$ ise $s(A) + s(B)$ kaçtır?

A) 36

B) 32

C) 28

D) 24

E) 20

11. A ve B kümeleri için

$s(A \cup B) = 43$

$s(A) = 28$

$s(B) = 22$ ise $s(A - B) + s(B - A)$ kaçtır?

A) 40

B) 38

C) 36

D) 34

E) 32

12. A ve B kümeleri için

$s(A) = x + 5$

$s(B) = x + y$

$s(A \cap B) = y + 1$

$s(A - B) = 1$ ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

13. A ve B kümeleri için

$s(A \cup B) + s(A \cap B) = 24$

$s(A) - s(B) = 12$ ise $s(A)$ kaçtır?

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

E) 20

14. E evrensel kümesinin iki alt kümesi A ve B olsun.

$s(A) + s(B) = 16 - 3x$

$s(A') + s(B') = 12 + 3x$ ise $s(E)$ kaçtır?

A) 14

B) 15

C) 16

D) 17

E) 18

15. A ve B boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere A kümesinin eleman sayısı 14 ve A ve B kümelerinin kesişim kümelerinin alt küme sayısı 1 ise A ve B kümelerinin birleşim kümesi en az kaç elemanlıdır?

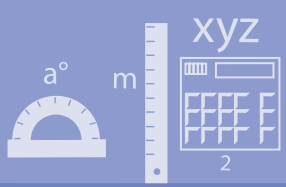
A) 11

B) 12

C) 14

D) 14

E) 15



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - VI

1. A ve B iki küme olmak üzere $A \cup B$, $A - B$, $B - A$ kümelerinin alt küme sayıları, sırasıyla, 512, 64 ve 2 ise $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. E evrensel küme A, B, $C \subset E$ olmak üzere

$$s(A) + s(B') = 18$$

$$s(B) + s(C') = 24$$

$s(A') + s(C) = 12$ ise E kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

3. A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$$s(A) = 7$$

$$s(B) = 10 \text{ ise}$$

$s(A \cap B)$ nin alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

A) 7 B) 10 C) 12 D) 14 E) 17

4. A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$$s(A) = 12$$

$$s(B) = 18 \text{ ise}$$

$s(A \cup B)$ nin alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

A) 30 B) 35 C) 39 D) 48 E) 50

5. A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$$s(B - A) = 3s(A)$$

$$s(A \cup B) = 16$$

$$s(A \cap B) = 2 \text{ ise}$$

B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

6. Herkesin İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bildiği 48 kişilik bir sınıfta sadece Almanca bilenlerin sayısı, iki dili de bilenlerin sayısının 3 katı, İngilizce bilenlerin sayısının üçte biridir.

Bu sınıfta Almanca bilen kaç kişi vardır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

7. A ve B boş olmayan iki kümedir. $A - B$ kümesinin 4, $B - A$ kümesinin 16 alt kümesi vardır.

$s(A - B') = 3$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

8. A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$$s(A - B) = 3$$

$$s(A \cap B) = 6$$

$s(B - A) = 2$ ise $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - VI

9. $A = \{x : 10 \leq x \leq 1146 \text{ ve } x = 4n\}$

$B = \{y : 11 < y < 900 \text{ ve } y = 6n\}$

olmak üzere $s(A \cap B)$ kaçtır?

- A) 62 B) 65 C) 70 D) 74 E) 78

10. A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$s(A - B) = 4$

$s(B - A) = 6$

$s(A \cup B)' = 20$

$s(E) = 40$ ise $s(A \cap B)$ kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

11. K ve N boş olmayan iki küme olsun.

$s(N') = 24$

$s(K - N) = 12$

$s((K - N)') = 36$ ise $s(K \cup N)$ kaçtır?

- A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

12. Bir okulda bütün öğrenciler matematik ve Türkçe derslerinden en az birisini almaktadır. Öğrencilerin %80'i matematik, %60'ı Türkçe'den başarısız olmuştur.

Bu okulda yalnız matematikten başarısız olanların sayısı 720 ise okulun mevcudu kaç kişidir?

- A) 1480 B) 1560 C) 1640 D) 1720 E) 1800

13. Herkesin Türkçe bildiği 40 kişilik bir sınıfta 19 kişi aynı zamanda hem Portekizce ve hem de İngilizce dillerini biliyor.

Sadece Türkçe bilen 11 kişi olduğuna göre bu iç dilden yalnızca iki dil bilen kaç kişi vardır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14. A ve B kümeleri için

$$\frac{s(A)}{s(A \cap B)} = 2 \text{ ve } \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{3}{7}$$

ise $A \cup B$ kümesi en az kaç elemanlıdır?

- A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

15. 26 kişilik bir grupta tekne turu seçenlerin sayısı, şehir turunu seçenlerin sayısının 3 katıdır. Grupta 5 kişi bu iki turu da seçmiştir. 7 kişi ise her iki turu da seçmemiştir.

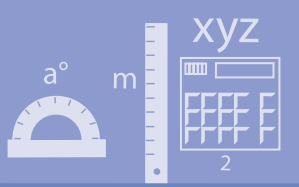
Yalnız tekne turunu seçen kaç kişi vardır?

- A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

16. 37 kişilik bir müzisyen topluluğunda herkes bağlama çalmasını bilmektedir. Bu topluluğa 20 kişi aynı zamanda ya davul ya da zurna da çalabilmektedir

Sadece bağlama çalabilen 3 kişi olduğuna göre, üç enstrümanı da çalabilen kaç kişi vardır?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - VII

1. 28 kişilik bir grupta 8 kişi futbol, 14 kişi basketbol oynamayı sevmiyor.

Grupta 8 kişi hem futbol hem de basketbol oynamayı sevdiğine göre bu iki sporu da oynamayı sevmeyen kaç kişi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Bir sınıfta en çok bir dil bilen 20, en az bir dil bilen 15 ve sadece bir dil bilen 11 kişi olduğuna göre sınıfın mevcudu kaç kişidir?

A) 46 B) 40 C) 35 D) 30 E) 24

3. Bir sınıftaki öğrencilerin gözlerinin renkleri mavi, yeşil ve eladır.

Mavi gözlü olmayanların sayısı 17, yeşil gözlülerin dışındakilerin sayısı 18 ve mavi veya yeşil gözlülerin sayısı 15 ise sınıf mevcudu kaçtır?

A) 19 B) 22 C) 25 D) 28 E) 31

4. 33 kişilik bir sınıftaki gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkeklerin sayısının 2 katına eşittir. Kızların sayısı erkeklerin sayısından 3 fazladır.

Bu sınıftaki gözlüksüz erkek sayısı 10 ise gözlüklü kız sayısı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

5. $A = \{x : x \leq 8 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$C = \{9, 11\}$$

olmak üzere $A - (B \cup C)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0,5,6,8\}$ B) $\{0,5,7,8\}$ C) $\{0,5,7,9\}$
D) $\{2,3,5,7\}$ E) $\{0,2,5,7\}$

6. $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ve $B = \{5, 6, 7, 8\}$ olmak üzere $B \subset K \subset A$ koşulunu sağlayan kaç tane K kümesi vardır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

7. A ve B herhangi iki küme olsun.

$s(A) = 18$ ve $s(B) = 12$ ise $s(A \cup B)$ nin en küçük değerinin en büyük değerine oranı kaçtır?

A) $\frac{6}{8}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{4}{6}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{1}$

8. A ve B evrensel kümenin alt kümeleri olmak üzere

$$s(A) + s(B') = 18$$

$$s(A') + s(B) = 24$$

$$s(B') = 12 \text{ ise } s(B) \text{ kaçtır?}$$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13



ÜNİTE DEĞERLENDİRME - VII

9. $K = \{k : k \in \mathbb{N} \text{ ve } 24 < k < 150\}$ kümesinin elemanlarından kaç tanesi 3 e bölünüp 5 e bölünmez?

A) 36 B) 33 C) 30 D) 27 E) 24

10. 70 kişilik bir grupta 28 kişi A kitabını, 32 kişi B kitabını, 10 kişi de A ve B kitabını seçmiştir.

Her iki kitabı da seçmeyen kaç kişi vardır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

11. A ve B kümeleri için

$$s(A \cup B) = 32$$

$$s(A) = 23$$

$$s(B) = 20 \text{ olduğuna göre}$$

$$s(A - B) + s(B - A) \text{ kaçtır?}$$

A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

12. Bir sınıftaki öğrencilerin

%50'sinin A kitabını,

%40'ının B kitabını,

%30'unun C kitabını,

%25'inin A ve B kitaplarının her ikisini ve

%15'inin A ve C kitaplarının her ikisini

okudukları gözlenmiştir. Ayrıca B kitabını okuyanlar C kitabını okumamaktadır. Buna göre sınıfta kitapların hiçbirini okumayanların yüzdesi kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

13. A ve B boş olmayan iki kümedir. $A - B$ ve $B - A$ kümelerinin 8'er alt kümeleri vardır.

$s(A - B) = 5$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 11 D) 14 E) 17

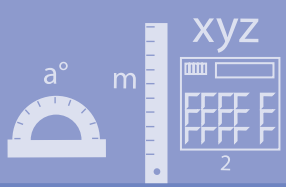
14. $(3 + a, 5) = (8, 2b - 3)$ ise $a + b$ kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

15. $(4^a, 36) = (64, 6^{b-2})$ ise $a.b$ kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

16. $(\sqrt{a+2}, 3^{b-4}) = (3, 9^{a-7})$ ise $a + b$ kaçtır?



ÜNİTE DEĞERLENDİRME

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 7

17. $\left(4^a, 1 + \frac{a}{b}\right) = (32^2, a - 5)$ ise $a + b$ kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

18. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ ise aşağıdakilerden hangisi $A \times B$ kümesinin elemanıdır?

A) (1, a) B) (b, a) C) (2, 1)
D) (a, 1) E) (2, c)

19. $A = \{a, b, c, d\}$

 $B = \{b, c, d\}$

$C = \{c, d, e\}$ ise $A \times (B \cap C)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

20. 7. $A = \{x : 1 \leq x < 4 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

 $B = \{x : 0 < x < 20 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$ ise $s(A \times B)$ kaçtır?

A) 51 B) 54 C) 57 D) 60 E) 63

21. $s[(A \times B) \cap (A \times C)] = 27$ ve $s(A) = 9$ ise $s(B \cap C)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

22. $A = \{x : -3 \leq x < 5 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : 1 \leq x \leq 4 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

23. $A = \{x : -3 \leq x \leq 5 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$

 $B = \{x : 1 \leq x \leq 4 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$

olmak üzere $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

Ünite

2

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Bölüm 2.1. Gerçek Sayılar

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

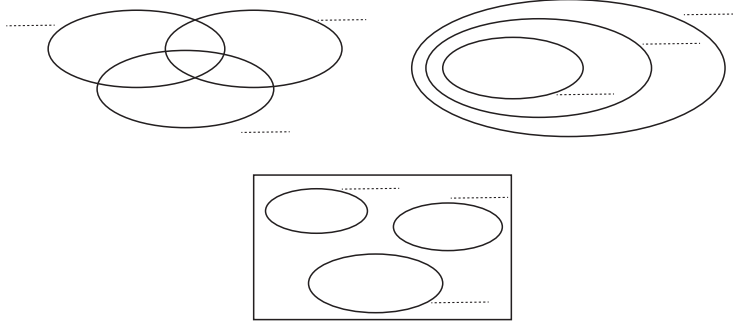
- Rasyonel sayı kavramını
- İrrasyonel sayı kavramını
- Gerçek (reel) sayılar kümesini
- Gerçek sayılar kümesinde işlemlerin özelliklerini

Neden Öğreneceğiz?

Rasyonel sayılar çevremizdeki her türlü niceliği tanımlama veya ölçme için yeterli değildir. Yaşadığımız dünyayı ve evreni daha doğru tanımlayabilmek için tam sayılar ve rasyonel sayılardan daha fazlasına ihtiyacımız vardır. Örneğin, dik kenarları 1 m uzunluğunda olan dik üçgen şeklindeki bir rampanın uzunluğunu veya yarıçapı 1 m olan bir tekerleğin bir tam dönüşte ne kadar yol aldığını rasyonel sayılarla tam olarak ölçmemiz mümkün değildir.

HAZIR MIYIZ?

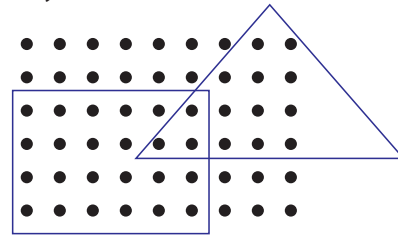
1. Doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar kümelerini Venn şeması ile göstermek için aşağıdaki çizimlerden hangisi kullanılmalıdır? Seçiminizi açıklayarak, ilgili boşlukları doldurunuz.



2. Rasyonel olmayan sayılar da var mıdır? Varsa örnek veriniz.
3. Aşağıdaki ifadeleri inceleyerek, doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız. Cevabınızı gerekçeleriyle açıklayınız.
- a. (.....) Her doğal sayı bir rasyonel sayıdır.
 - b. (.....) Her rasyonel sayı bir doğal sayıdır.
 - c. (.....) Tam sayılar kümesi doğal sayılar kümesini kapsar.
 - ç. (.....) $\frac{5 \cdot 2 - 4}{3} = 5 \cdot 2 - 4 \div 3$
 - d. (.....) $\frac{5 \cdot 2 - 4}{3} = (5 \cdot 2 - 4) \div 3$
 - e. (.....) Negatif bir sayıdan pozitif bir sayı çıkarılırsa sonuç her zaman negatif bir sayı olur.
 - f. (.....) Pozitif bir sayıdan negatif bir sayı çıkarılırsa sonuç her zaman pozitif bir sayı olur.
 - g. (.....) İki tam sayının toplamı her zaman bir tam sayıdır.
 - ğ. (.....) İki tam sayının çarpımı her zaman bir tam sayıdır.
 - h. (.....) Sıfırdan farklı iki tam sayının bölümü bir tam sayıdır.
 - ı. (.....) $-2 \cdot 4 = 4 \cdot (-2)$
 - i. (.....) $-2 + 4 = 4 + (-2)$
 - j. (.....) $-2 - 4 = 4 - (-2)$
 - k. (.....) $(-2 + 4) + 3 = -2 + (4 + 3)$
 - l. (.....) $(-2 \cdot 4) \cdot 3 = -2 \cdot (4 \cdot 3)$

HAZIR MIYIZ?

4. 7 ile 28 sayılarını zihinden kolayca nasıl çarparsınız? Bu çarpmayı yaparken doğal sayılardaki işlemlerle ilgili hangi özellikleri kullandığınızı açıklayınız.
5. Aşağıda -2, 4 ve 5 sayılarının kullanıldığı işlemler verilmiştir. İşlemlerin sonuçlarını bulunuz ve bu sonuçları karşılaştırınız.
- a. $5 - 2 \cdot 4 = ?$ b. $(5 - 2) \cdot 4 = ?$
6. Ankara'da dün hava sıcaklığı -5°C olarak raporlanmıştır. Bugün sıcaklık 7 derece daha azaldığına göre bugünün sıcaklığı kaç $^{\circ}\text{C}$ dir?
7. İçinde $\frac{5}{2}$ litre vişne suyu bulunan bir kutudan, iç hacmi $\frac{3}{16}$ litre olan bir bardak ile yaklaşık kaç bardak meyve suyu elde edilebilir?
8. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
- a. $4 + 2 \cdot 5 - 12 \div 3 + 3 = ?$ b. $10 + 4 \div (-7 + 5) \cdot 4 - 5 = ?$
- c. $1 - \frac{1}{3} \div \left(1 + \frac{1}{3}\right) = ?$ ç. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = ?$
- d. $\frac{(2,3 - 4,7) \cdot 1,2}{0,4} = ?$ e. $\frac{5}{7} \cdot \left(4 - \frac{2}{5} + 3 \cdot 2\right) = ?$
- f. $\frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{7}{4}\right)}{2} - 3 \cdot (4 \cdot 2^2 - 5 + 2) = ?$
9. Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
 $a = -1,3$ $b = -1, \overline{3}$ $c = -1\frac{1}{3}$
10. $m = 1,3\overline{5} - 1,4$ ve $n = 1,26 + 2, \overline{3}$ ifadeleri veriliyor. Buna göre, $\frac{2n}{3m}$ kesrinin değeri kaçtır?
11. Yandaki şekil üzerinde görülen farklı bölgeler için rasyonel ifadeler yazınız.
- a. Dikdörtgen içerisindeki noktaların bütün noktalara oranı
- b. Üçgen içerisindeki noktaların bütün noktalara oranı
- c. Üçgen ve dikdörtgen içersine düşen noktaların sadece üçgen içerisinde bulunan noktalara oranı



Neler Öğreneceğiz?

- Rasyonel olmayan sayıların (irrasyonel sayılar) varlığını
- İrrasyonel sayı kavramının anlamını
- \mathbb{R} ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin geometrik temsillerini
- Gerçek sayılar kümesinde işlemlerin özellikleri

Anahtar Terimler

- Doğal Sayılar
- Tam Sayılar
- Rasyonel Sayılar
- İrrasyonel (Oransız) Sayılar
- Gerçek Sayılar
- Kapalılık, Değişme, Birleşme ve Dağılma Özelliği
- Birim Eleman ve Yutan Eleman Özelliği
- Sayı Doğrusu
- Koordinat Düzlemi

Sembol ve Gösterimler

- \mathbb{N} : Doğal Sayılar
- \mathbb{Z} : Tam Sayılar
- \mathbb{Z}^+ : Pozitif Tam Sayılar
- \mathbb{Z}^- : Negatif Tam Sayılar
- \mathbb{Q} : Rasyonel Sayılar
- \mathbb{Q}' : İrrasyonel Sayılar
- \mathbb{R} : Gerçek Sayılar
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: Kartezyen Koordinat Sistemi

2.1.1. Gerçek Sayılar Kümesi

Başlarken

Uzunlukları ölçerken bir uzunluğu 1 birim olarak kabul edip diğer uzunlukların ölçülerini bu uzunluk ile karşılaştırarak belirleriz. Eğer belli bir uzunluk, 1 birim olarak kabul edilen uzunluğun 2, 3, 4 gibi tam sayı katları ise bu uzunluğu kolayca 2 br., 3 br., 4 br. olarak ifade edebiliriz. Eğer bu uzunluk 1 birimlik uzunluğun tam katı değil ise 1 birimi daha küçük parçalara bölerek ölçüsünü belirlemek istediğimiz uzunluğun bu küçük parçaların tam katı olup olmadığını araştırırız. Örneğin, ölçmek istediğimiz uzunluk 1 birimlik uzunluğun 6 eşit parçasının 7 katı ise bu uzunluğu $\frac{7}{6}$ birim olarak ifade ederiz. Genel olarak ifade edecek olursak, 1 birimlik uzunluğun b eşit parçasının a katı $\frac{a}{b}$ birim olarak ölçülmüş olur.



Ölçmek istediğiniz uzunluk kullandığınız ölçme aracındaki 1 birimin katlarına ya da parçalarına karşılık gelmiyorsa ne yaparsınız? Örneğin, bir kenarı 1 cm olan bir karenin köşegen uzunluğunu iki tam sayının oranı şeklinde yazabilir miyiz?

Bu durumu incelemeden önce farklı sayı kümelerini hatırlayalım.

Sayılar... Sayılar... Sayılar...

Doğal Sayılar Kümesi: $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesine **doğal sayılar kümesi** denir ve \mathbb{N} ile gösterilir.

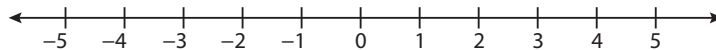
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Tam Sayılar Kümesi: Doğal sayılar kümesine 0 dan farklı doğal sayıların negatiflerinin eklenmesi ile elde edilen kümedir ve \mathbb{Z} ile gösterilir.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Negatif tam sayılar kümesi \mathbb{Z}^- ile gösterilirken pozitif tam sayılar kümesi ise \mathbb{Z}^+ sembolü ile gösterilmektedir. $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ ve $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ O halde, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ şeklinde de gösterebilir.

Tam sayılar sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



Sayı doğrusunu düşündüğünüzde tam sayılar arasında başka sayılar var mıdır?

Daha önceden de bildiğimiz gibi iki tam sayının oranı şeklinde yazılabilen,

$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-5}{2}, \frac{100}{101}$ gibi sayılar vardır.

a ve b tam sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayıları kümesi \mathbb{Q} ile gösterilir.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$$

$\frac{a}{b}$ → Pay
→ Payda

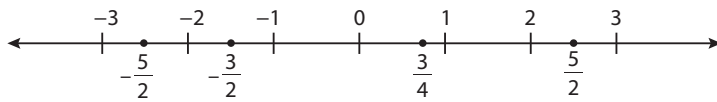
Rasyonel sayılar farklı şekillerde ifade edilebilir. Aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz ve farklı gösterimlerle ilgili gözlemlerinizi not ediniz.

$$3 \left(= \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \dots \right), \quad -\frac{5}{4} \left(= \frac{-5}{4} = \frac{5}{-4} \right),$$

$$0,6666\dots \left(= 0,\overline{6} = \frac{2}{3} = \dots \right), \quad \frac{5}{2} \left(= 2,5 = 2\frac{5}{10} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{85}{34} = \dots \right)$$

Yukarıdaki örneklerde parantez içindeki sayılar birbirine **eşittir** ve bu sayılar parantez önündeki rasyonel sayı ile temsil edilebilir. Rasyonel sayıları sayı doğrusunda gösterirken birbirine eşit sonsuz tane sayıdan sadece o sayıları temsil eden rasyonel sayı kullanılır.

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılardan birkaçını gösterelim.



Bunu biliyor muydunuz?

Tam sayıların gösterimi olan \mathbb{Z} harfi "sayma" anlamına gelen Almanca "Zahlen" kelimesinden gelmektedir.

Anahtar Bilgi

"Rasyonel" Türkçede oransal anlamına gelen bir kelimedir. Bu nedenle rasyonel sayılar 1 birim ile oranlanabilen yani, 1 birimin tam katları ya da eşit parçalarının tam katları cinsinden yazılabilen sayılar olarak da tanımlanabilir.

Bunu biliyor muydunuz?

Sayı doğrusu eşit aralıklara bölünmüş bir doğrudur. Bu eşit aralıkların ne kadarlık bir uzunluğu temsil ettiği bir kabulden ibarettir. Sayı doğrusunun somut bir temsili olarak günlük hayatımızda metre, cetvel vb. sıkça kullandığımız çeşitli uzunluk ölçme araçları gösterilebilir.

Bunu biliyor muydunuz?



Uzunluk ölçme araçları belli bir uzunluğun 1 birim kabul edilmesi esasına göre yapılandırılmışlardır. Bu birim metre, santimetre, inç, fit, yard, kulaç, adım, arşın vb. isimler almaktadır.

Matematik Tarihi



Pisagor, MÖ 570 – MÖ 495 yılları arasında yaşamış ve Pisagor teoremi ile tanındığı bu büyük matematikçinin matematiğe asıl katkısı irrasyonel sayıların varlığı ile tanışmamıza sebep olmuştur.

Örnek 1

Yukarıdaki sayı doğrusunda gösterilen $\frac{3}{4}$ ile 1 rasyonel sayıları arasında üç rasyonel sayı bulalım.

Çözüm

a ve b gibi iki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı bulmak için

1. Yöntem: Bu iki sayıyı toplayıp 2'ye bölebiliriz, dolayısıyla elde edilen

$$\frac{a+b}{2} \text{ sayısı } a \text{ ile } b \text{ arasında olur. } \frac{\frac{3}{4} + 1}{2} = \frac{7}{8} \text{ Benzer şekilde devam ederek } \frac{7}{8} \text{ ile } \frac{3}{4}$$

arasında ve $\frac{7}{8}$ ile 1 arasında yeni iki sayı daha bulabiliriz.

Bu şekilde üç sayı $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{15}{16}$ olarak bulunur. Elde edilen bu sayıları kullanarak $\frac{3}{4}$ ile

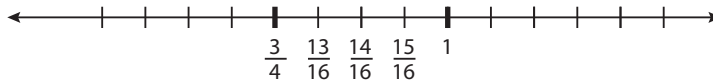
1 arasında daha fazla sayı da elde edebiliriz.

2. Yöntem: Bu iki sayıyı yeterince genişleterek istediğimiz sayıda rasyonel sayı bulabiliriz.

$$\frac{3}{4} \text{ ve } 1 = \frac{4}{4} \text{ sayılarını 4 ile genişletirsek } \frac{12}{16} \text{ ve } \frac{16}{16} \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $\frac{13}{16}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{15}{16}$ sayıları bulunur.

Bu örnekte $\frac{3}{4}$ ile 1 arasında üç rasyonel sayı elde edilse de önerilen yöntemler kullanılarak bu iki rasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunabilir.



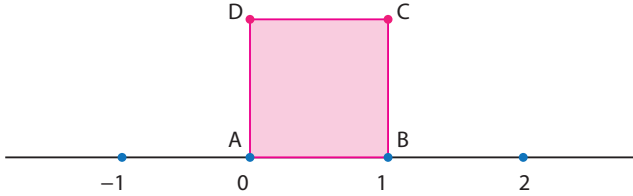
Genel olarak, verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunabilir. Bununla birlikte sayı doğrusu üzerindeki her bir nokta bir rasyonel sayı ile gösterilemez.

Konunun başında sorduğumuz "Bir kenarı 1 birim olan bir karenin köşegen uzunluğu iki tam sayının oranı şeklinde yazılabilir mi?" sorusuna geri dönelim.

Öncelikle, bir dinamik geometri yazılımı kullanarak bir kenarı sayı doğrusu üzerinde olan bir kare çizip bu karenin köşegen uzunluğunu bulmaya çalışalım.

Adım 1 ►

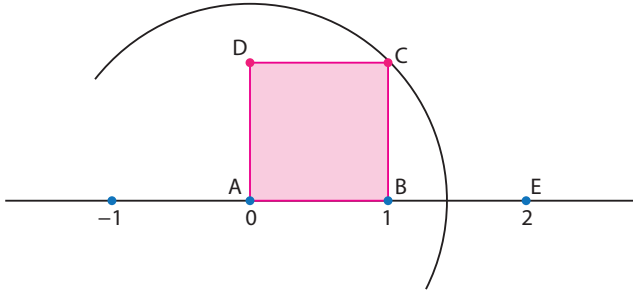
Bir sayı doğrusu çizip iki köşesi 0 ve 1 noktaları üzerinde olan bir ABCD karesi çizelim.



Bu karenin köşegen uzunluğu, Pisagor bağıntısından $|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ olarak bulunur.

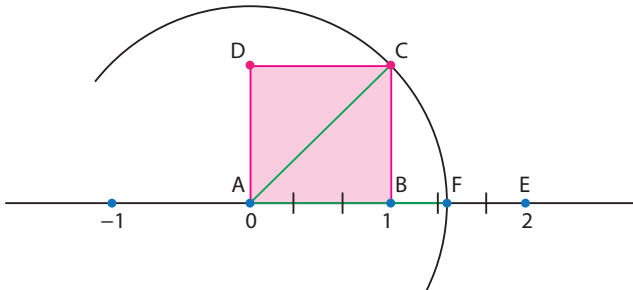
Adım 2 ►

Merkezi ABCD karesinin A köşesi ve yarıçapı $|AC|$ köşegeni olan bir çember çizelim.



Adım 3 ►

Yukarıdaki şekilde $\sqrt{2}$ birim uzunluğa sahip AC köşegeninin çemberin yarıçap uzunluğuna eşit olduğu ve sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık geldiği görülmektedir. Sayı doğrusu üzerindeki her bir birimi 3 eşit parçaya bölelim.



Şekilde de görüldüğü gibi $|AC|$ uzunluğu $|AF|$ uzunluğuna eşittir ve bu uzunluk $\frac{4}{3}$ 'den biraz büyüktür ve bir birimin 3 te 1 nin tam katı değildir. Peki, acaba sayı doğrusu üzerindeki 1 birimlik uzunluğu 4 eşit parçaya bölersek AC köşegeninin uzunluğu bir birimin 4 te 1 nin bir tam katına denk gelir mi?

Dikkat

$\sqrt{2}$ sayısı, sayı doğrusu üzerinde bir noktaya karşılık gelmekte ve bir uzunluk belirtmektedir.

Bunu biliyor muydunuz?

ISO216 standardına sahip kağıt türlerinde (A4, A3, A2, vb.) uzunluk/genişlik oranı $\sqrt{2}$ 'dir.

İnceleyelim

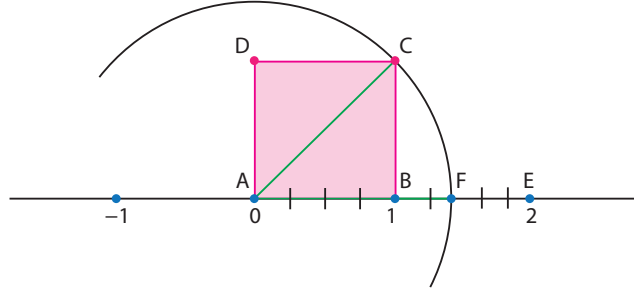
Ne kadarlık bir uzunluğun 1 metre olduğuna nasıl karar verildiğini araştırınız?

Matematik Tarihi

Pisagor'un öğrencilerinden Hippiasus'un karesi 2 olan sayının rasyonel olarak ifade edilemeyeceğini ispatlaması rasyonel olmayan sayıların varlığını kesinleştirmiştir.

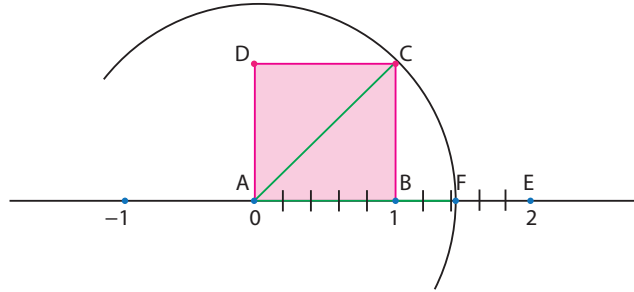
Adım 4 ►

Bu durumda karenin köşegen uzunluğunun $\frac{5}{4}$ ile $\frac{6}{4}$ arasında ve $\frac{6}{4}$ 'e daha yakın olduğu görülmektedir, ama yine de 4'te 1'inin bir tam katına karşılık gelmemektedir.



Adım 5 ►

Benzer şekilde, 1 birimlik uzunluğu 5 eşit parçaya böldüğümüzde karenin köşegen uzunluğu, $\frac{7}{5}$ 'in çok az üzerindedir ama yine de 5'te 1'nin bir tam katına karşılık gelmemektedir.



Anahtar Bilgi

Çelişki bulma yöntemi;

İspatlanmaya çalışılan fikrin tersinin doğruluğunu kabul edip bu durum ile çelişen bir sonuç bulmaya dayalıdır. Tersinin doğru olmadığı ispatlandığında asıl fikrin doğru olduğu ispatlanmış olur. Farklı ispat yöntemleri ileriki sınıflarda ele alınacaktır.

Sonuç: Bu işlem bir geometri yazılımı kullanılarak devam ettirilirse yarıçapın sayı doğrusunu kestiği noktanın 1 birim kenar uzunluğunu eşit aralıklara bölmek için kullandığımız noktalardan herhangi birinin tam üzerine karşılık gelmediği görülebilir. Genellenecek olursa a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere çemberin yarıçapı, 1 birim uzunluğun $\frac{a}{b}$ katına karşılık gelmeyecektir. Dolayısıyla bir kenarı 1 birim olan karenin köşegen uzunluğu $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz.

Bu durum $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olamayacağına ve aynı zamanda sayı doğrusu üzerinde rasyonel olmayan sayıların da olduğuna işaret etmektedir. $\sqrt{2}$ nin bir rasyonel sayı olmadığını çelişki bulma yöntemi ile matematiksel olarak ispatlayalım.

İspat:

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayalım. Buna göre a ve b aralarında asal, yani 1'den başka ortak böleni olmayan ve sıfırdan farklı iki tam sayı olmak üzere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ şeklinde yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafının karesi alınıp işlemler yapıldığında

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

bulunur.

Bu eşitliğin sol tarafı bir çift sayı olduğu için sağ tarafı da çift olmalıdır. Buna göre a^2 bir çift sayıdır ve dolayısıyla a da bir çift sayı olur. Bu durumda k bir tam sayı olmak üzere $a = 2k$ yazabiliriz. Eşitlik buna göre yeniden yazılırsa

$$2b^2 = (2k)^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

elde edilir. Buna göre, b^2 bir çift sayıdır ve dolayısıyla b de bir çift sayı olur. Burada hem a hem de b'nin çift olması gerektiğini elde ettik. Ancak iki çift sayı aralarında asal olamazlar. Bu sonuç başlangıçtaki kabulümüzle çelişir. O halde $\sqrt{2}$ sayısı, a ile b aralarında asal olacak şekilde $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz. Bu nedenle $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı değildir.

İrrasyonel Sayılar

İki tam sayının oranı $\left(\frac{a}{b}, b \neq 0\right)$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir ve \mathbb{Q}' ile gösterilir. İrrasyonel sayılar, ondalık açılımı sınırsız ve tekrarsız olan sayılardır.

Aşağıda irrasyonel sayılara bazı örnekler verilmiştir.

$$\pi = 3,1415926...$$

$$\sqrt{2} = 1,414213$$

$$\sqrt{6} = 2,449489$$

$$\sqrt{7} = 2,645751$$

Rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin birleşimine **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve \mathbb{R} ile gösterilir. Bu durumda $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ dir. Tüm sayı kümeleri ve bu kümeler arasındaki ilişkiler Venn şeması ile aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Gerçek sayılar**Anahtar Bilgi**

İki doğal sayının 1'den başka ortak böleni yoksa bu sayılara "**aralarında asal**" denir. Örneğin, 3 ile 20 aralarında asal sayılardır.

Anahtar Bilgi

Tek sayıların karesi her zaman tek, çift sayıların karesi de her zaman çifttir.

Anahtar Bilgi

İrrasyonel sayıların ondalık gösterimle ifade edilmesi mümkün değildir, çünkü bu sayıların ondalık kısımları herhangi bir tekrarlama olmaksızın sonsuza kadar devam etmektedir.

Bunu biliyor muydunuz?

Meşhur bir irrasyonel sayı: π

Bir çemberin çevresinin çapına oranının sabit bir sayı olduğunun fark edilmesi insanları bu sayının değerini hesaplamaya yönlendirmiştir. Bugün π (π) ismini verdiğimiz bu sayının tarih boyunca farklı rasyonel sayılara karşılık geldiği kabul edilmiştir. Örneğin $22/7$, $25/8$, $355/113$. Ancak bu sayıların hiçbiri π sayısının gerçek değerine eşit değildir.

18. yüzyılda Alman matematikçi J. Lambert π 'nin bir irrasyonel sayı olduğunu ispatlamıştır.

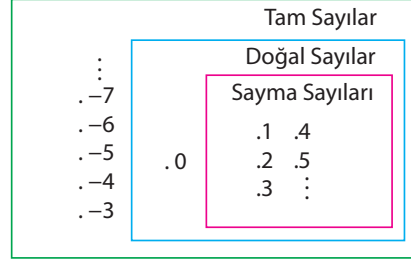


Dikkat

Yanda koordinat düzleminde görülen $(2,4)$ sıralı ikilisi $x=2$ olduğunda $y=4$ olduğunu ifade etmektedir.

Rasyonel sayılar

$\frac{1}{2}$ $2,3$ $-\frac{3}{4}$ $2\frac{3}{100}$ $-0,9$ $\sqrt{4}$

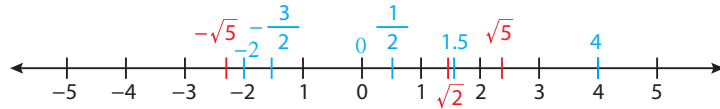


İrrasyonel sayılar

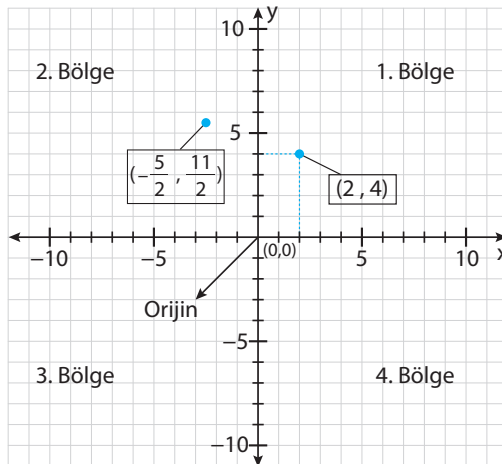
$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{15}$
 $-\sqrt{2}$ $-\sqrt{7}$
 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 $2 - \sqrt{3}$
 π

Sayı Doğrusundan Koordinat Düzlemine

Gerçek sayılar sayı doğrusunda gösterildiğinde sayı doğrusundaki her bir nokta tek bir gerçek sayıyı temsil eder ve her bir gerçek sayıya sayı doğrusunda tek bir nokta karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, sayı doğrusu gerçek sayılar kümesinin bir gösterim şeklidir.

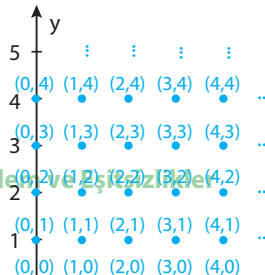


Sayı doğrusu gösterimi ile bir doğru üzerindeki herhangi bir noktanın yeri belirtilebilirken düzlem üzerindeki bir noktanın yerini ifade etmek için ise aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi birbirine dik kesiştirilen iki sayı doğrusuna ihtiyaç vardır. Koordinat düzlemini oluşturan bu sayı doğrularına koordinat eksenleri denir, bu eksenler x-ekseni ve y-ekseni olarak adlandırılır.



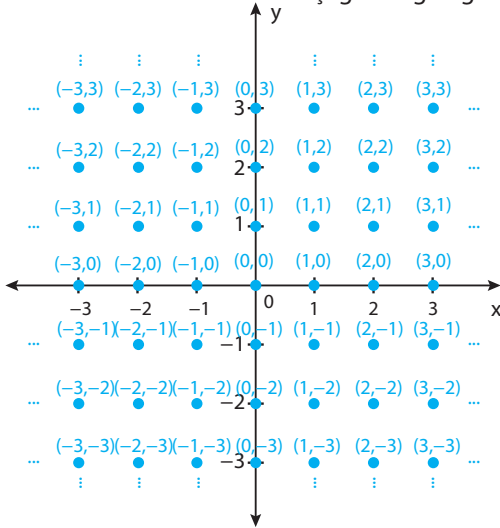
Koordinat düzlemi üzerinde alınan bir noktadan x ve y eksenlerine dikler çizildiğinde; bu diklerin x-eksenini kestiği yere noktanın apsisi; y eksenini kestiği yere ordinatı denir. (x, y) sıralı ikililerinden oluşan bu noktalar koordinat düzleminde yandaki gibi gösterilir. Koordinat düzleminde $(0, 0)$ noktasına orijin denir.

$x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x, y) şeklin-

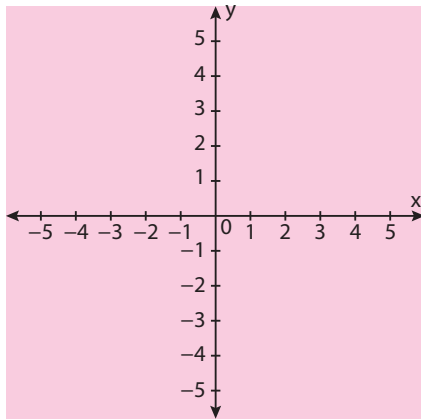


deki tüm ikililerin oluşturduğu küme, \mathbb{N} ile \mathbb{N} 'nin Kartezyen Çarpım Kümesi olarak adlandırılır ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterilir. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin elemanları koordinat düzleminde aşağıdaki gibi gösterilir.

Benzer şekilde, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sıfır, pozitif ve negatif tam sayıların Kartezyen Çarpımı olduğundan koordinat düzleminde aşağıdaki gibi gösterilir.



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, düzlemde noktalı bir yapı oluştururken, gerçek sayılar kümesi sayı doğrusunu tamamen doldurduğundan, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ile koordinat düzlemindeki tüm noktalar eksiksiz olarak temsil edilmiş olur. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ koordinat düzlemi aşağıdaki şekildedir.



İrrasyonel sayılarla ifade edilen uzunluklar kullanılarak farklı geometrik şekiller ve yapılar oluşturulabilir. Bir diğeri de Karekök Sarmalı ya da Pisagor Sarmalı adıyla bilinen şekildir. Bu atölye çalışması, sayılara karşılık gelen uzunluklar kullanılarak Karekök Sarmalı oluşturulacak ve bu uzunlukların ölçülerek bulunacaktır.

Araç ve Gereçler: Bir dinamik matematik yazılımı veya kareli kâğıt, cetvel ve kalem.

Matematik Tarihi

1870'li yıllarda Alman matematikçi Cantor gerçekte sayılarla sayı doğrusu üzerindeki noktaların tamamının eşleşeceğini göstermiştir.

Matematik Tarihi

Rene Descartes



(1596-1650)

Koordinat düzlemi fikrini geliştiren ve bugün kullandığımız şekliyle isimlendirilmesini sağlayan Fransız matematikçi Rene Descartes'tir (Dekart). Aynı zamanda Kartezyen koordinat sistemi olarak da isimlendirilir ki, burada Kartezyen kelimesi Fransızca'da "Dekart'a ait" anlamına gelmektedir.

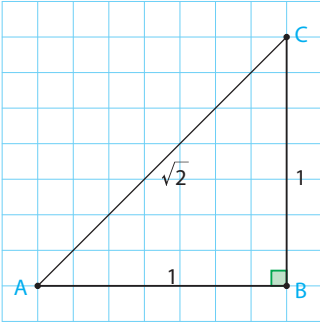
Dikkat

Gerçek sayılar kümesinin bütün sayı doğrusunu doldurduğuna dikkat ediniz. Diğer bir deyişle sayı doğrusu \mathbb{R} 'nin geometrik gösterimidir.

Benzer şekilde, Kartezyen koordinat düzlemi de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin geometrik gösterimidir.

Adım 1 ►

Dik kenarları 1 cm olan bir dik üçgen çizin. Bunun için ilk önce 1 cm uzunluğunda AB doğru parçası çizin. Daha sonra şekildeki gibi AB doğru parçasına dik 1 cm uzunluğunda CB doğru parçasını çizin ve A ile C noktalarını birleştiriniz. AC doğru parçası, ABC dik üçgeninin hipotenüsü olduğundan uzunluğu $\sqrt{2}$ cm olacaktır.



Adım 2 ►

[AC]'na dik 1 cm uzunluğunda CD doğru parçasını çizin ve A ile D noktalarını birleştirerek yandaki şekildeki gibi bir dik üçgen oluşturunuz. Bu üçgenin de hipotenüsü $\sqrt{3}$ cm olacaktır.

Adım 3 ►

[AD]'na dik 1 birimlik bir doğru parçası çizin ve A ile bu noktayı birleştiriniz. Oluşan üçgenin hipotenüsünün uzunluğu kaç cm'dir? Üçgenlerin hipotenüslerinin sarmalın kolları olduğuna dikkat ediniz.

Adım 4 ►

Yukarıdaki işlemleri elde ettiğiniz her yeni üçgen için tekrarlayarak 8 yeni üçgen çizin ve sarmalın kollarının uzunluklarını hesaplayınız.

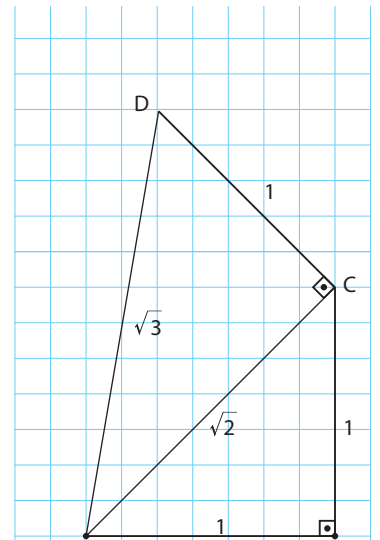
Adım 5 ►

Elde ettiğiniz sarmalın kollarının uzunluklarını cetvelinizle veya program yardımıyla ölçerek bulunuz ve 4. adımda bulduğunuz değerlerle eşleyerek bir tablo hazırlayınız.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Özellikleri

Tam sayılar ve rasyonel sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin özellikleri acaba gerçek sayılar kümesinde de geçerli midir?

Kapalılık Özelliği



Aşağıdaki örneklerde toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçlarının bir gerçek sayı olup olmadığını inceleyelim.

| Toplama işlemi | Çarpma işlemi |
|--|--|
| $-2 + 5 = 3 \in \mathbb{R}$ $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $5 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (Hesap makinesi kullanarak sonuçların ondalık kısmını inceleyiniz.) | $-2 \cdot 5 = -10 \in \mathbb{R}$ $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10 \in \mathbb{R}$ $5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ |

Herhangi iki gerçek sayının toplamı ya da çarpımı yine bir gerçek sayıdır. Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **kapalılık özelliği** vardır. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ ve $a \cdot b \in \mathbb{R}$ dir.

Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Değişme Özelliği

Aşağıdaki toplama ve çarpma işlemlerinde sayıların yerlerinin değiştirilmesinin sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyelim.

| Toplama işlemi | | Çarpma işlemi | |
|--------------------------------------|--|------------------------------------|--------------------------------------|
| $-2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ | $5\sqrt{3} + (-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ | $-2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = -30$ | $5\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) = -30$ |
| $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ | $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ | $5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$ | $5\sqrt{2} \cdot 5 = 25\sqrt{2}$ |

Herhangi iki gerçek sayının toplamında ya da çarpımında sayıların yerlerinin değiştirilmesi sonucu değiştirmez. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için, $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ 'dır. Dolayısıyla, gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **değişme özelliği** vardır.

Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Birleşme Özelliği

Aşağıdaki toplama ve çarpma işlemlerinde işlem sırası için seçilen gruplamanın sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyelim.

| Toplama işlemi | Çarpma işlemi |
|----------------|---------------|
|----------------|---------------|

Anahtar Bilgi

Gerçek sayılar kümesinde çıkarma ve bölme işlemlerinin değişme özelliği yoktur.

Örnek:

$$\underbrace{5 - 2}_{3} \neq \underbrace{2 - 5}_{-3}$$

$$\underbrace{2 : 0,2}_{10} \neq \underbrace{0,2 : 2}_{0,1}$$

İnceleyelim

Aşağıdaki durumlarda değişme özelliği var mıdır? Neden?

- Lavaboda elleri yıkamak ve havluyla elleri kurulamak.
- Sağ eldiveni giymek ve sol eldiveni giymek.
- Kapıyı açmak ve içeridekilerle selam vermek.
- Ahmet ve Mehmet kardeşler.

İnceleyelim

Gerçek sayılar kümesinde çıkarma ve bölme işlemlerinin birleşme özelliği var mıdır?

| | | | |
|---|--|--|---|
| $3,2 + \underbrace{(1,8 + 5)}_{6,8}$ $= 3,2 + 6,8$ $= 10$ | $\underbrace{(3,2 + 1,8)}_5 + 5$ $= 5 + 5$ $= 10$ | $3,2 \cdot \underbrace{(1,8 \cdot 5)}_9$ $= 3,2 \cdot 9$ $= 28,8$ | $\underbrace{(3,2 \cdot 1,8)}_{5,76} \cdot 5$ $= 5,76 \cdot 5$ $= 28,8$ |
| $3\sqrt{2} + \underbrace{(5\sqrt{2} + \sqrt{2})}_{6\sqrt{2}}$ $= 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ $= 9\sqrt{2}$ | $\underbrace{(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2})}_{8\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ $= 8\sqrt{2} + \sqrt{2}$ $= 9\sqrt{2}$ | $3\sqrt{2} \cdot \underbrace{(5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})}_{10}$ $= 3\sqrt{2} \cdot 10$ $= 30\sqrt{2}$ | $\underbrace{(3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2})}_{30} \cdot \sqrt{2}$ $= 30 \cdot \sqrt{2}$ $= 30\sqrt{2}$ |

Herhangi üç gerçık sayının toplamı ya da çarpımında işlem sırası için seçilen gruplamanın belirlenış şekli sonucu değıştirmez. Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için,

$a + (b + c) = (a + b) + c$ ve $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir. Dolayısıyla, gerçık sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **birleşme özelliği** vardır.

Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Birim (Etkisiz) Elemanları

Aşığıdaki örnekleri inceleyerek toplama ve çarpma işlemlerinde sonucu değıştirmeyen sayıların neler olduğunu gözlemleyelim.

| Toplama işlemi | | Çarpma işlemi | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\sqrt{7} + 0 = \sqrt{7}$ | $0 + \sqrt{7} = \sqrt{7}$ | $\sqrt{7} \cdot 1 = \sqrt{7}$ | $1 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}$ |
| $\pi + 0 = \pi$ | $\pi + 0 = \pi$ | $\pi \cdot 1 = \pi$ | $1 \cdot \pi = \pi$ |

Herhangi bir gerçık sayıya 0 eklemek veya herhangi bir gerçık sayı ile 1'i çarpmak sonucu değıştirmez. Her $a \in \mathbb{R}$ için, $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dir. Buna göre, **toplama işleminin birim elemanı "0"** iken **çarpma işleminin birim elemanı "1"** dir.

Toplama ve Çarpma İşlemlerine Göre Bir Sayının Tersı

Herhangi iki gerçık sayının toplamı 0 (toplama işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayı toplama işlemine göre birbirinin tersidir. Herhangi iki gerçık sayının çarpımı 1 (çarpma işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayı çarpma işlemine göre birbirinin tersidir. Aşığı-

daki örneklerde verilen gerçek sayıların toplama ve çarpma işlemlerine göre terslerini inceleyelim.

| Toplama işlemi | Çarpma işlemi |
|---|--|
| $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = (-\sqrt{7}) + \sqrt{7} = 0$ $\pi + (-\pi) = (-\pi) + \pi = 0$ olduğundan $\sqrt{7}$ ile $-\sqrt{7}$ ve π ile $(-\pi)$ toplama işlemine göre birbirlerinin tersi- dir. | $\sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7} = 1$ $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$ olduğundan $\sqrt{7}$ ile $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ve π ile $\frac{1}{\pi}$ çarpma işlemine göre birbirlerinin tersi- dir. |

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ için,

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a 'nın toplama işlemine göre tersi $-a$ 'dır.

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a 'nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ ya da a^{-1} dir.

Yutan Eleman

Herhangi bir gerçek sayı **0** ile çarpıldığında sonuç her zaman **0**'dır. $\pi \cdot 0 = 0 \cdot \pi = 0$, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ gibi. Bu yüzden, **0'a çarpma işleminin yutan elemanı** denir.

Her $a \in \mathbb{R}$ için, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan, **0 çarpma işleminin yutan elemanıdır.**

Çarpma İşleminin Toplama ve Çıkarma İşlemi Üzerine Dağılım Özelliği

Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$$

$$12 \cdot \pi - 5 \cdot \pi = (12 - 5) \cdot \pi$$

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için, $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir.

$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$ ve $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ dir.

Örnek 2

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz ve her bir basamakta gerçek sayılarda işlemlerin hangi özelliklerinin kullanıldığını belirleyiniz.

$$3(6m + 2n) + 2(3m - n) = 18m + 6n + 6m - 2n \dots\dots\dots(1)$$

$$= 18m + 6m + 6n - 2n \dots\dots\dots(2)$$

$$= (18 + 6)m + (6 - 2)n \dots\dots\dots(3)$$

$$= 24m + 4n$$

İnceleyelim

Toplama, çıkarma ve bölme işlemlerinde yutan eleman var mıdır? Örneğin, $\sqrt{2} + a = a + \sqrt{2} = a$ eşitliğini sağlayan bir a sayısı bulabilir misiniz?

Dikkat

Gerçek sayılar kümesinde 0'ın çarpmaya göre tersi yoktur.

Çözüm

(1)'de çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır.

$$3(6m + 2n) + 2(3m - n) = 18m + 6n + 6m - 2n$$

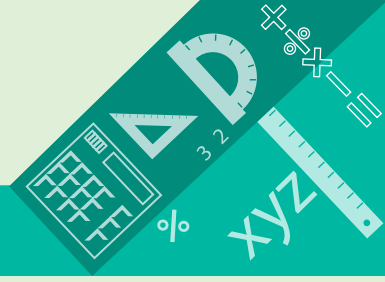
(2)'de toplama işleminin değişme özelliği kullanılmıştır.

$$18m + 6m + 6n - 2n$$

(3)'de ise çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} 18m + 6m + 6n - 2n &= (18 + 6)m + (6 - 2)n \\ &= 24m + 4n \end{aligned}$$

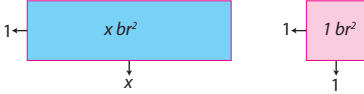
MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği birim kareler ve bir kenarı bir birim olan dikdörtgenler kullanılarak incelenecek.

Gerekli Araç ve Gereçler: Cebir karoları veya kalın karton, makas.

Materyalin Hazırlanışı: Bu atölye çalışmasında cebir karoları kullanılacaktır. Eğer cebir karoları mevcut değil ise, bir kartondan bir kenarı 1 birim olan sekiz birim kare ve kısa kenarı karenin bir kenarına eşit olan dört dikdörtgen keserek hazırlayınız. Gerekli malzemeye ulaşılamadığı durumda bu atölye çalışmasında oluşturulacak şekiller çizimler kullanılarak da yapılabilir.



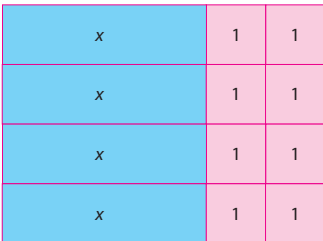
Adım 1

Somut materyallerden bir dikdörtgen ve iki kareyi kullanarak aşağıdaki şekli oluşturunuz. Oluşturulan şeklin alanını cebirsel olarak ifade ediniz.



Adım 2

Elde ettiğiniz bu şekilden alt alta 4 tane koyarak aşağıdaki şekli elde ediniz.



Adım 3

Oluşturulan bu dikdörtgen şeklin kenar uzunluklarını yazınız ve şeklin alanını kenar uzunluklarını çarparak ifade ediniz.

Adım 4

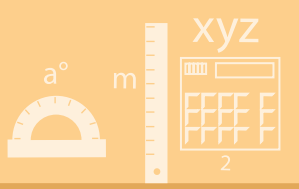
Oluşturulan şeklin alanını dikdörtgen parçaların toplam alanı ve kare parçaların toplam alanı olarak ifade ediniz.

Adım 5

3. ve 4. adımda elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

Adım 6

5. adımda gerçek sayılarda işlemlere ait hangi özellikleri kullandınız? Açıklayınız.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

1. Aşağıda verilen gerçek sayılar için uygun olan kutucuğu işaretleyiniz.

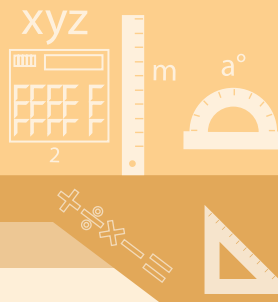
| Sayılar | Rasyonel Sayı (Q) | İrrasyonel Sayı (Q') |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\sqrt{7}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\sqrt{1,21}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $-\sqrt{\frac{108}{3}}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $2\sqrt{3} - \sqrt{7}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $3,\overline{2}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| -2π | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\sqrt{81} + \sqrt{9}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\sqrt{36}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\frac{22}{7}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $3,14$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $-1,02002000200002...$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2. $\sqrt{5}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini pergel ve gönye yardımıyla belirleyiniz.

3. Aşağıdaki gerçek sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$2,\overline{43}, \pi, \frac{5}{2}, \sqrt{5}, \frac{9}{4}, 4\frac{1}{5}, 2,43$$

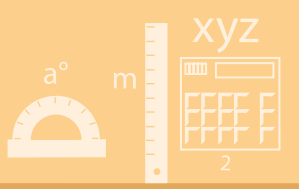
4. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ile $\sqrt{\frac{4}{5}}$ gerçek sayıları arasında iki gerçek sayı bulunuz.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

6. Aşağıda verilen boşlukları gerçekte sayılarda toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini kullanarak doldurunuz.

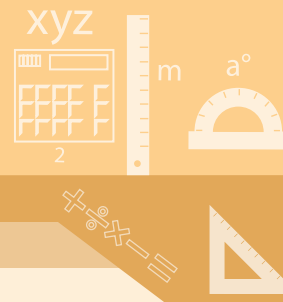
| İşlem | İşlemin Özelliği |
|---|--|
| $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ | Toplama işleminin değişme özelliği |
| $(3 + \sqrt{7}) + \sqrt{2} = 3 + (\sqrt{7} + \sqrt{2})$ | |
| $0 + \sqrt{6} = \sqrt{6} + 0 = \sqrt{6}$ | |
| $\sqrt{11} + \left(\frac{3}{4} + \dots\right) = (\sqrt{11} + \dots) + \frac{3}{4}$ | Toplama işleminin birleşme özelliği |
| $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$ | |
| $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}) \cdot \sqrt{11} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} \cdot \sqrt{11})$ | |
| $\sqrt{5} + \dots = -\sqrt{5} + \dots = 0$ | Toplama işleminin ters eleman özelliği |
| $\sqrt{2} \cdot 1 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ | |
| $\sqrt{12} \cdot 0 = 0 \cdot \sqrt{12} = 0$ | |
| $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ | |
| $(-\sqrt{7}) \cdot 0 = 0 \cdot (-\sqrt{7}) = 0$ | |
| $\sqrt{5} \dots = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \dots = 1$ | Çarpma işleminin ters eleman özelliği |
| $\sqrt{2} \cdot (3 + \sqrt{7}) = \sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$ | |
| $\sqrt{21} \cdot \left(\frac{3}{4} - \sqrt{2}\right) = \dots$ | Çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği |
| $4 \cdot \left(\frac{3}{4} + \sqrt{7}\right) = \dots$ | Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği |



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

7. Aşağıdaki ifadeleri inceleyerek, doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

- a. (...) Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesi ayrık kümelerdir.
- b. (...) Bütün irrasyonel sayılar gerçek sayıdır.
- c. (...) Rasyonel sayılar irrasyonel sayılardan daha fazladır.
- ç. (...) İki rasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı vardır.
- d. (...) İki irrasyonel sayı arasında sonlu sayıda irrasyonel sayı vardır.
- e. (...) Devirli ondalık gösterimle verilen her sayı irrasyonel sayıdır.
- f. (...) İki gerçek sayının toplamı da bir gerçek sayıdır.
- g. (...) Gerçek sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.
- ğ. (...) İrrasyonel sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.
- h. (...) İki irrasyonel sayının çarpımı bir irrasyonel sayıdır.
- ı. (...) İki irrasyonel sayının toplamı bir rasyonel sayı olamaz.
- i. (...) İki irrasyonel sayının bölümü daima irrasyoneldir.
- j. (...) Sıfırdan farklı bir rasyonel sayının çarpmaya göre tersi de bir rasyonel sayıdır.
- k. (...) Sayı doğrusu üzerindeki iki gerçek sayıdan sağda olan daha büyüktür.
- l. (...) Bir pozitif ve bir negatif gerçek sayının toplamı pozitif olamaz.
- m. (...) Bir negatif gerçek sayı bir pozitif gerçek sayıdan çıkarılırsa sonuç daima pozitiftir.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

- n.** (...) $x \in \mathbb{R}$ için $(-x) \cdot (-1)$ çarpımı pozitifdir.
- o.** (...) Bir gerçekte sayının -1 'e bölümü o sayının toplamaya göre tersidir.
- ö.** (...) $a \cdot b = 1$ ise $a = 1$ veya $b = 1$ dir.
- p.** (...) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ile koordinat düzlemindeki tüm noktalar temsil edilir.
- 8.** Herhangi üç a, b ve c gerçekte sayıları için aşağıda verilen eşitliklerin doğru (D), ya da yanlış (Y) olduğunu belirleyiniz.
- a.** (.....) $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir.
- b.** (.....) $a - (b - c) = (a - b) - c$ dir.
- c.** (.....) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.
- ç.** (.....) $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$ dir.
- d.** (.....) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ dir.

BÖLÜM ÖZETİ

Gerçek sayılar ve özellikleri

- a ve b tam sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayılar kümesi \mathbb{Q} ile gösterilir. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$
- Verilen herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır. Bu durum rasyonel sayılar kümesinin **yoğun** olduğunu anlamına gelir.
- İki tamsayının oranı şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir ve rasyonel sayıların tümleyeni anlamında \mathbb{Q}' ile gösterilir.
- Rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin birleşimine **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve \mathbb{R} ile gösterilir.
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
- Tüm gerçek sayıların doğrusal bir hat üzerine yerleştirilmesi ile kesiksiz bir doğru oluşur. Bu doğruya **sayı doğrusu** denir. Sayı doğrusu gerçek sayıların geometrik temsili olduğu gibi **kartezyen koordinat düzlemi** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'nin geometrik temsidir.
 - Gerçek sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin özellikleri:
 - Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b, a - b, a \cdot b, a \div b \in \mathbb{R}$ (Tüm işlemlerin **kapalılık özelliği** vardır.)
 - Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ (Toplama ve çarpma işlemlerini **değişme özelliği** vardır.)
 - Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ ve $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (toplama ve çarpma işlemlerinin **birleşme özelliği** vardır.)
 - Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ (Çarpma işleminin toplama ve çıkarma üzerine **dağılma özelliği** vardır.)
 - Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ve $a + 0 = 0 + a = a$ (**toplama işleminin etkisiz elemanı 0, çarpma işleminin etkisiz elemanı 1**'dir.)

Ünite

2

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Bölüm 2.2. Birinci Dereceden

Denklem ve Eşitsizlikler

Bu bölümde neler öğreneceğiz?

Gerçek sayılar kümesinde

- Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözümünü
- Eşitsizliklerin özelliklerini
- Eşitsizliklerin çözüm kümelerinin farklı gösterimlerini
- Mutlak değer kavramı, mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerin çözümünü
- Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözümünü

Neden Öğreneceğiz?

Gerçek hayatta karşılaşılan bir çok problemin denklem ya da eşitsizliklerle ifade edilmesi, bu durumların anlaşılmasını ve yorumlanmasını kolaylaştırır. Bu durumların bir kısmı, örneğin telefon şirketlerinin yaptıkları kampanyalar arasında bizim için en ekonomik olanı seçmek, alış-veriş sırasında indirim miktarını veya ödediğimiz toplam bedelin ne kadarının vergi olduğunu hesaplamak gibi her zaman karşılaşılabilecek durumlar olabileceği gibi; bir kısmı her zaman karşılaşılmasa da yaşadığımız çevreyi, dünyamızı ve evreni daha iyi anlamak için gerekli durumlar olabilir.



HAZIR MIYIZ?

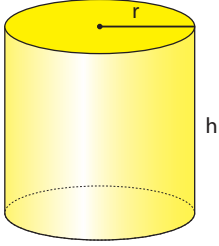
1. Aşağıdaki boşlukları uygun terimler ile doldurunuz.
 - a. Bir harf ile temsil edilen bir bilinmeyen, gerçek sayılar ile toplanması veya çarpılması ile oluşturulmuş yapılara denir.
 - b. İki cebirsel ifadenin eşitlenmesi ile oluşturulan yapılara denir.
 - c. İki cebirsel ifadenin birbirinden büyük, büyük veya eşit, küçük ve küçük veya eşit olması durumlarının temsil edildiği yapılara denir.
 - d. Sayı doğrusu üzerinde bir sayının 0 (sıfır) noktasına uzaklığını o sayının değeri denir.
2. Aşağıdaki durumlardan hangileri bir eşitsizlik yardımıyla gösterilebilir? Nasıl?
 - a. Dikdörtgenin alan formülü
 - b. Bir otoyol üstünde bulunan üst geçidin altından geçebilecek araçların için yüksekliği
 - c. Sürücü ehliyetine başvurulabilecek yaş sınırı
3. Aşağıda verilen ifadelerdeki benzer terimleri belirleyiniz ve bu terimleri toplayarak ifadeyi sadeleştiriniz.
 - a. $8 + 4x - 3$
 - b. $3n + 2 + 5n$
 - c. $0,06t + 25 - 0,01t$
 - ç. $30 - 7a + 10b + 7a$
4. -3 sayısının aşağıda verilen denklemlerin bir çözümü olup olmadığını kontrol ediniz.
 - a. $10 + x = 8$
 - b. $5 - x = 2$
 - c. $-11 = 4x + 1$
 - ç. $10 - x = 5x - 2$
5. $x = 4$ değerinin aşağıda verilen eşitsizliklerin bir çözümü olup olmadığını kontrol ediniz.
 - a. $3x + 1 \leq 15$
 - b. $5 + x > 8$
 - c. $\frac{2x}{3} + 8 \leq 11$
 - ç. $\frac{x}{2} - \frac{3}{7} < 2$

HAZIR MIYIZ?

6. Aşağıda verilen ifadeleri çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak yeniden yazınız.

- a. $2(3a + 5)$
- b. $-10(7 - n)$
- c. $(-t + 2) \cdot (-5)$

7.



“Yarıçapı r birim, yüksekliği h birim olan bir dik dairesel silindirin yüzey alanı (A), taban alanları ile yanal yüzey alanının toplamına eşittir.”

Buna göre,

- a. Verilen dik dairesel silindirin yüzey alanını veren matematiksel ifadeyi yazınız.
- b. Gerçek sayıların özelliklerini kullanarak (a) şıkkına yazdığınız ifadeye denk başka bir ifade yazınız.
- c. $r = 1$ birim ve $h = 1$ birim olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulunuz.
- d. Yüzey alanı $4\pi^2$ birimkare ve yarıçapı 1 birim olan dik dairesel silindirin yüksekliğini bulunuz.

8. Ahmet kendisine yaz tatili için fiyatı 350 TL olan bir bisiklet almayı hedeflemektedir. Bunun için Ahmet harçlığından her gün bir miktar ayırarak h hafta sonra bu bisikleti almayı planlamaktadır. Ahmet’in bisiklet için **günlük** ayırması gereken para miktarını gösteren ifadeyi yazınız.

Neler Öğreneceğiz?

- Gerçek sayılar kümesinde birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözümlerini
- Eşitsizliklerin özelliklerini
- Eşitsizliklerin çözüm kümelerini gösterme yöntemlerini

Anahtar Terimler

- Birinci dereceden denklem
- Birinci dereceden eşitsizlik
- Aralık, Kapalı Aralık, Açık Aralık

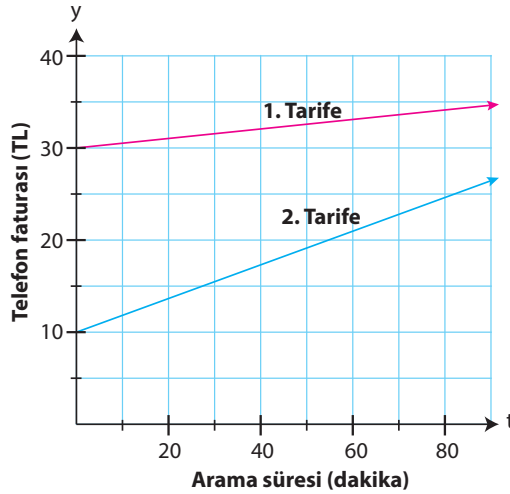
Sembol ve Gösterimler

- $=$
- $<$
- \leq
- $>$
- \geq
- $[a, b]$
- $[a, b)$
- $(a, b]$
- (a, b)

2.2.1. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

Başlarken

Bir mobil iletişim şirketi müşterilerine ücretlendirme periyodu 1 dakika olan iki farklı konuşma tarifi sunmaktadır. 1. tarife göre aylık 30 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 5 kuruş, 2. tarife göre ise aylık 10 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 18 kuruş ödenmesi gerekmektedir. Aşağıdaki grafik her iki tarife için arama süresine bağlı olarak telefon faturasının ne kadar olacağını göstermektedir.



Bu iki tarifeden hangisinin hangi durumlarda daha ekonomik olduğuna nasıl karar verirsiniz?

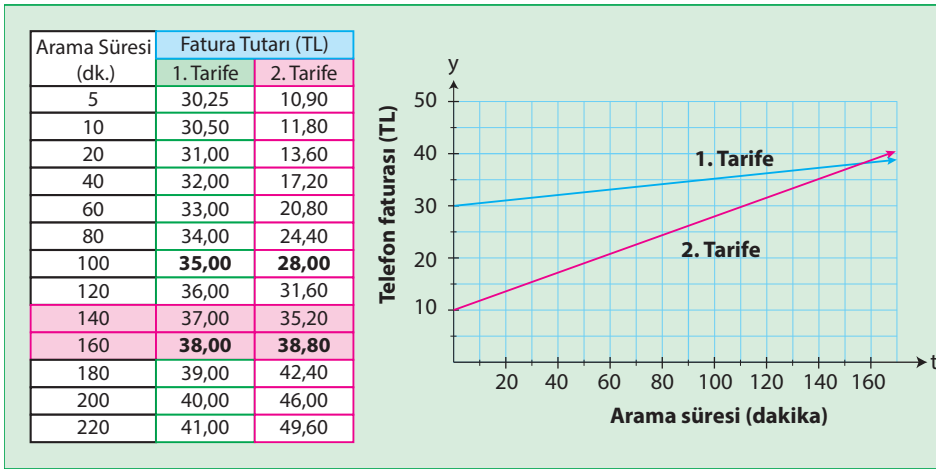
Verilen iki tarife göre ödenecek telefon faturasının arama süresine bağlı olarak değişimi incelendiğinde birçok soru ile karşılaşırız. Bu tarifeleri karşılaştırmak isteyen bir kişi aşağıdaki durumları merak edebilir:

- Ayda 100 dakika telefon görüşmesi yapılırsa her bir tarife göre ödenecek fatura tutarı ne olur?
- Ayda ortalama 160 dakika arama yapan biri için hangi tarife daha ekonomiktir?
- Aylık 48 TL telefon faturası ödeyen biri her bir tarife göre kaç dakika konuşur?
- Kaç dakikalık arama için aylık ödenecek telefon faturaları her iki tarife göre aynı olur?
- Telefon ödemesine aylık en fazla 50 TL bütçe ayıran biri 1. tarife göre en fazla kaç dakika telefon görüşmesi yapabilir?
- İkinci tarifi kullanan biri aylık en az 40 TL ve en fazla 45 TL fatura ödediğine göre, acaba bu kişinin telefon arama süresi hangi aralıktadır?

Her bir tarifenin aylık sabit ücretini ve dakika ücretini tabloda gösterelim.

| | Sabit ücret | Bir dakikalık arama ücreti |
|-----------|-------------|----------------------------|
| 1. Tarife | 30 TL | 0,05 TL |
| 2. Tarife | 10 TL | 0,18 TL |

Bu veriler kullanarak her iki tarifiedeki farklı arama süreleri için ödenecek fatura tutarları bulunabilir. Aşağıdaki tabloda bazı arama süreleri için bu tutarlar gösterilmektedir.



1. ve 2. sorular tablodan yararlanarak cevaplanabilir. Tablodan 100 dakika ve 140 dakika arama süresine karşılık gelen fatura tutarlarını bulalım ve tarifeleri karşılaştıralım. Tabloya göre,

- Aylık 100 dakika arama yapıldığında 1. tarifeye göre 35 TL, ikinci tarifeye göre ise 28 TL telefon faturası gelir.
- 160 dakika arama süresi için 38 TL olan 1. tarifenin fatura tutarı 38,80 TL olan 2. tarifenin fatura tutarından 0,80 TL daha düşük olduğu için ayda ortalama 160 dakika arama yapan biri için 1. tarife daha avantajlıdır.

Tabloya göre 140 dakikaya kadar 2. tarife daha ekonomik iken 160 dakika ve üzerinde 1. tarife daha ekonomiktir. Grafik incelendiğinde ise 150 ile 160 dakikalar arasında bir sürede fatura tutarları birbirine eşit olmaktadır. Ancak ne tablodaki veriler ne de grafik 2. tarifenin tam olarak kaç dakikaya kadar daha ekonomik veya 1. tarifenin tam olarak kaç dakikadan sonra daha ekonomik olduğunu göstermemektedir.

Hangi tarifenin hangi dakikalar için daha ekonomik olduğunun tam olarak belirlenebilmesi ve 3 – 6. sorularının cevaplanabilmesi için arama süresine bağlı olarak ödenecek fatura tutarlarını gösteren denklem ve eşitsizliklerin yazılması ve çözülmesi gerekir.

Her iki tarife için arama süresine bağlı olarak ödenecek tutarı gösteren cebirsel ilişki nasıl yazılır? Her bir tarife için tablodaki değerleri inceleyerek fatura tutarını veren ifadeyi bulmaya çalışınız.

Dikkat

Fonksiyonlar bölümünde, buradaki durumlara benzer durumların modellenmesi ile ilgili çalışmalar yapılacaktır.

Dikkat

Yandaki tabloyu elektronik tablolama programı kullanarak oluşturup, tabloyu daha sık dakika aralıklarını gösterecek şekilde düzenleyebilirsiniz. Böylece hangi tarifenin hangi durumda daha avantajlı olduğunu belirleyebilirsiniz.

Bu bölümde, denklem ve eşitsizlikler ile ifade edilebilen bu tür durumların nasıl inceleneceği işlenecektir. Öncelikle denklem ve eşitsizlik kavramlarını hatırlayalım.

Bir veya daha fazla değişken içeren birbirine eşit iki niceliğin matematiksel ifadesine **denklem** denir ve denklemlerin ifade edilmesinde “=” sembolü kullanılır. Örneğin

$$20 = 5x + 3, x^2 - 3 = 13, 5n + 45 = 3m - 36$$

ifadeleri birer denklemdir.

$$20 = 5x + 3, x^2 - 3 = 13, 5n + 45 = 3m - 36$$

ifadeleri birer denklemdir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b = 0$$

Değişken Eşitlik Sembölü

şeklinde ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

Örneğin,

$$3x - 7 = 0, 2t = \frac{13}{2}, n - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ifadeleri birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir. Denklem derecesi değişkeninin kuvvetine göre değişir. Yukarıdaki üç denklemdaki değişkenlerin (x, t, n) kuvvetlerinin 1 olduğuna dikkat ediniz.

Bir niceliğin diğer bir nicelikten büyük veya küçük olma durumunu belirten ifadeler ise **eşitsizlik** denir. Eşitsizliklerin ifade edilmesinde “<, ≤, >, ≥” sembolleri kullanılır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ şeklinde ifade edilebilen eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

$$2x - 3 \geq 5, x - 2\sqrt{2} < 0, 25 - a > 3a$$

ifadeleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklere birer örnektir.

Denklemler ve eşitsizlikler, gerçek hayat durumlarının matematiksel olarak ifade edilmesinde ve incelenmesinde kullanılır.

Aşağıdaki tabloda bazı basit durumların denklem ve eşitsizlikler ile ifade edildiği örnekleri inceleyiniz.

Dikkat

Denklemler ifade edilirken “=” sembolü kullanılırken eşitsizliklerde <, ≤, >, ≥ sembolleri kullanılır.

| Gerçek Hayat Durumu | Matematiksel İfade |
|---|---|
| Otobüsün hızı 110 km/sa e eşittir . | $v = 110$ |
| Otobüsün hızı 110 km/sa ten daha azdır . | $v < 110$ |
| Erime noktası en düşük olan metal cıva elementidir ve bu nokta 38,86 °C'ye eşittir . | $n = 38,86$ |
| Diğer metallerin erime noktaları 38,86 °C'den daha büyüktür . | $m > 38,86$ |
| Aylık telefon faturası en fazla 45 TL gelmektedir. | $f \leq 45$ |
| Bir lise öğrencisinin günlük uyku saati en az 7 saattir. | $u \geq 7$ |
| Ocak ayında en düşük hava sıcaklığı -15 °C, en yüksek hava sıcaklığı 5 °C olmuştur. | $s_{\min} = -15, s_{\max} = 5$ $-15 \leq s \leq 5$ |
| Ocak ayı hava sıcaklığı -15 °C ile 5 °C arasındadır . | $-15 \leq s \leq 5$ |

Bir denklemde/eşitsizlikte değişkenin bazı değerleri eşitliği/eşitsizliği sağlayabilirken bazıları sağlamayabilir. Denklemi/eşitsizliği sağlayan sayıların kümesine o denklemin/eşitsizliğin **çözüm kümesi** denir.

Örnek 1

3, 4 ve $\frac{9}{2}$ sayılarının $2x - 3 = 5$ denklemini ve $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığını inceleyelim.

Çözüm

| $2x - 3 = 5$ | | | $2x - 3 \geq 5$ | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| $x = 3$ | $x = 4$ | $x = \frac{9}{2}$ | $x = 3$ | $x = 4$ | $x = \frac{9}{2}$ |
| $2 \cdot 3 - 3 \stackrel{?}{=} 5$ | $2 \cdot 4 - 3 \stackrel{?}{=} 5$ | $2 \cdot \frac{9}{2} - 3 \stackrel{?}{=} 5$ | $2 \cdot 3 - 3 \stackrel{?}{\geq} 5$ | $2 \cdot 4 - 3 \stackrel{?}{\geq} 5$ | $2 \cdot \frac{9}{2} - 3 \stackrel{?}{\geq} 5$ |
| $3 \neq 5$ | $5 = 5$ | $6 \neq 5$ | $3 \not\geq 5$ | $5 \geq 5$ | $6 \geq 5$ |
| Sağlamıyor | Sağlıyor | Sağlamıyor | Sağlamıyor | Sağlıyor | Sağlıyor |

4 sayısı, $2x - 3 = 5$ denklemini sağladığı için denklemin bir çözümü iken 3 ve $\frac{9}{2}$ sayıları bu denklemin bir çözümü değildir. $2x - 3 = 5$ denkleminin çözüm kümesi $\{4\}$ şeklinde ifade edilir. $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliği 3 için sağlanmazken 4 ve $\frac{9}{2}$ için sağlanmaktadır. Buna göre 4 ve $\frac{9}{2}$ bu eşitsizliğin birer çözümüdür.

Matematik Tarihi



Harezmi
(780 – 850)

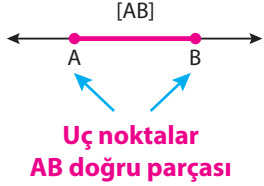
Matematiğin cebir alanına ismini veren Ebu Abdullah Muhammed bin Musa "El'Kitab'ül-Muhtasar fi Hisab'il Cebri ve'l-Mukabele" isimli kitabında denklem çözümlerini günümüzde kullanılan matematiksel sembollerini kullanmadan sözel ifadelerle anlatmıştır. Örneğin, günümüzde $2x - 5 = 3$ şeklinde yazdığımız bir denklemi Harezmi "iki şeyin beş dirhem eksiği üç dirhem olmaktadır" ifadeleriyle anlatmaktadır. Burada bilinmeyenine yerine (x) "şey" kelimesinin kullanıldığını, sabit sayılar yerine ise o zamanların bir ölçü birimi olan "dirhem" kelimesinin kullanıldığını görüyoruz.

İnceleyelim

$2x - 3 = 5$ denkleminin 4'den başka bir çözümü olabilir mi?

Anahtar Bilgi

Kapalı aralık bir doğru parçasıdır.



$2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğini sağlayan başka tam sayı veya gerçekte sayı değeri bulabilir misiniz?

Aslında, 4 ve 4'den büyük tüm gerçekte sayılar bu eşitsizliğin bir çözümüdür.

Örneğin, $5\frac{1}{2}$, 6, $\sqrt{50}$, 4,2. Dörtten büyük tüm gerçekte sayıları tek tek listelemek mümkün olmadığından eşitsizliğin çözüm kümesini ifade etmek için farklı gösterimlerden faydalanmak gerekir.

Gerçekte Sayılar Kümesinde Eşitsizliklerin Farklı Gösterimleri: Sayı Doğrusu Gösterimi, Küme Gösterimi, Aralık Gösterimi

Gerçekte sayılar kümesinde eşitsizliklerin çözüm kümeleri; sayı doğrusu (grafik) gösterimi, küme gösterimi ve aralık gösterimi kullanılarak ifade edilir. $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin sayı doğrusu ve küme gösterimlerine göre nasıl ifade edildiğini inceleyelim.

1) Sayı Doğrusu (Grafik) Gösterimi

4'e eşit ve 4'ten büyük tüm gerçekte sayılar $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğini sağladığı için, bu eşitsizlik sayı doğrusunda 4'ten başlanarak 4'ün sağ tarafı sayı doğrusu üzerinde taranarak gösterilir. 4 sayısı çözüm kümesine dâhil olduğu için bu nokta da sayı doğrusunda işaretlenir.



2) Küme Gösterimi

$2x - 3 \geq 5$ eşitsizliği kümelerde ortak özellik yöntemi kullanılarak,

$A = \{x : x \geq 4, x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde gösterilir ve "A kümesi x gerçekte sayılarından

oluşmaktadır öyle ki, x, 4'e eşittir veya 4'ten büyüktür" şeklinde okunur.

$2x - 3 \geq 5$ eşitsizliği gerçekte sayılar kümesinde bu iki gösterim dışında **aralık gösterimi** ile de ifade edilebilir. Öncelikle gerçekte sayılar kümesinde aralık kavramını ve aralıkların nasıl gösterildiğini inceleyelim.

3) Aralık Gösterimi

Sayı doğrusunda farklı iki noktanın aralarındaki tüm gerçekte sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** denir ve aralıklar verilen kümenin uç noktalarının kümeye dahil olup olmasına bağlı olarak adlandırılır.

$$a, b, x \in \mathbb{R}$$

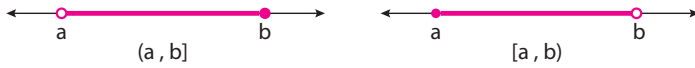
Uç noktaların aralığa dahil olduğu kümeler ($a \leq x \leq b$) **kapalı aralık** olarak adlandırılır ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.



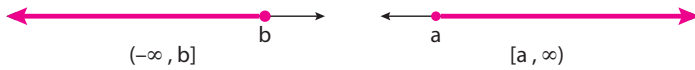
Uç noktaların aralığa dahil olmadığı kümeler ($a < x < b$) **açık aralık** olarak adlandırılır ve (a, b) şeklinde gösterilir.



Uç noktalardan birinin aralığa dahil olmadığı kümeler ($a < x \leq b$ veya $a \leq x < b$) ise **yarı açık aralık** olarak adlandırılır ve aralığın sol veya sağdan açık olmasına bağlı olarak $(a, b]$ veya $[a, b)$ şeklinde gösterilir.



Aralığın sınırlandırılmadığı durumlarda ise uç nokta sonsuz işareti (∞) ile ifade edilir ve sınırlandırılmayan taraf açık olarak kabul edilir.



Yukarıdaki örnekte $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğinin sayı doğrusundaki gösterimi incelendiğinde sol taraftaki uç nokta olan 4 sayısı çözüm kümesine dahil olduğundan aralık sol taraftan kapalıdır. Diğer uç nokta ise sınırlandırılmadığından dolayı açıktır.

Dolayısıyla, $2x - 3 \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[4, \infty)$ ile gösterilir.

Örnek 2

Aşağıdaki eşitsizlikleri farklı gösterimlerle ifade edelim.

- $h \in \mathbb{R}, -3 \leq h \leq 5$
- $h \in \mathbb{R}, -3 < h \leq 5$
- $h \in \mathbb{R}, -3 \leq h < 5$
- $h \in \mathbb{R}, -3 < h < 5$

Dikkat

Sayı doğrusunun gerçek sayıların bir gösterim şekli olduğunu hatırlayalım.

Anahtar Bilgi

Bir aralıktaki uç noktalardan biri kapalı, diğeri sonsuz ise bu aralık ışın olarak adlandırılır.



Anahtar Bilgi

$(-\infty, \infty)$ aralığı ile gerçek sayılar kümesi ifade edilir.

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

Çözüm

- a. $-3 \leq h \leq 5$ eşitsizliği “-3 ile 5 dahil olmak üzere bu iki sayı arasındaki tüm gerçek sayılar” şeklinde ifade edilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesini göstermek için sayı doğrusu üzerinde -3 ile 5 aralığı taranır. -3 ve 5 sayıları da çözüme dahil olduğu için bu noktalar da işaretlenir.



$-3 \leq h \leq 5$ eşitsizliği küme gösterimi ile $A = \{h : -3 \leq h \leq 5, h \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir ve aralık olarak da $[-3, 5]$ **kapalı aralığı** şeklinde gösterilir.

- b. $-3 < h \leq 5$ eşitsizliği “-3’ten büyük ve 5’e eşit veya 5’ten küçük tüm gerçek sayılar” şeklinde ifade edilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesini göstermek için sayı doğrusu üzerinde -3 ile 5 aralığı taranır -3 sayısı eşitsizliği sağlamadığı için çözüme dahil değildir. Bu nokta sayı doğrusunda işaretlenmez. 5 sayısı ise işaretlenir.



$-3 < h \leq 5$ eşitsizliği küme gösterimi ile $B = \{h : -3 < h \leq 5, h \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir ve aralık olarak da $(-3, 5]$ **yarı açık aralığı** şeklinde gösterilir.

- c. $-3 \leq h < 5$ eşitsizliği “-3’e eşit veya -3’ten büyük ve 5’ten küçük tüm gerçek sayılar” şeklinde ifade edilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi sayı doğrusu üzerinde -3 ile 5 aralığı, -3 noktası dahil edilip taranarak gösterilir. 5 sayısı çözüme dahil olmadığı için bu nokta sayı doğrusunda işaretlenmez.



$-3 \leq h < 5$ eşitsizliği küme gösterimi ile $C = \{h : -3 \leq h < 5, h \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir ve $[-3, 5)$ **yarı açık aralığı** şeklinde gösterilir.

- ç. $-3 < h < 5$ eşitsizliği “-3 ile 5 arasındaki tüm gerçek sayılar” şeklinde ifade edilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi sayı doğrusu üzerinde -3 ile 5 aralığı taranarak gösterilir. Uç noktalar çözüme dahil olmadığı için sayı doğrusunda işaretlenmez.



$-3 < h < 5$ eşitsizliği küme gösterimi ile $D = \{h : -3 < h < 5, h \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir ve $(-3, 5)$ **açık aralığı** şeklinde gösterilir.

Örnekte incelenen eşitsizliklerin küme ve aralık gösterimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

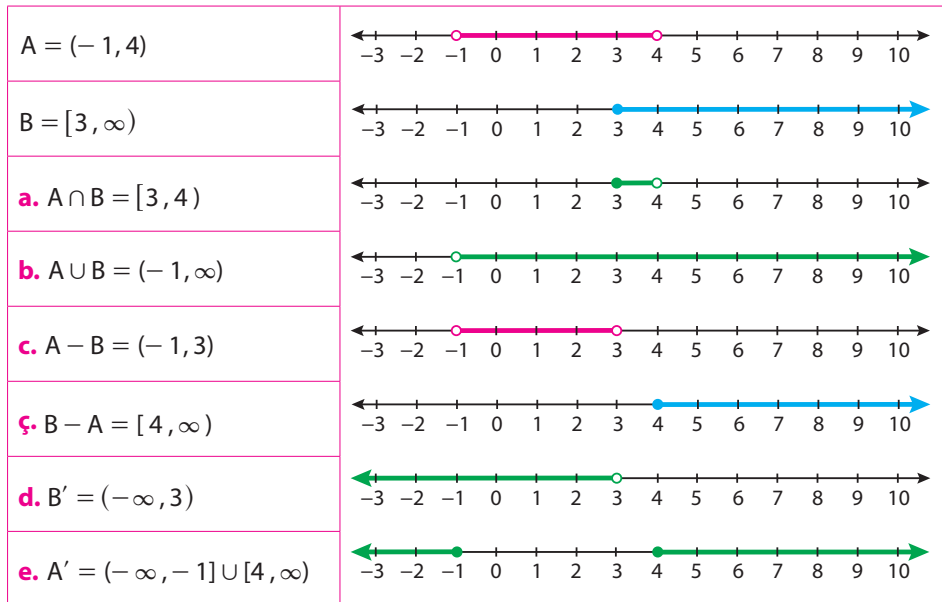
| Eşitsizlik | Küme Gösterimi | Aralık Gösterimi | Aralık Adı |
|--------------------|--|------------------|------------------|
| $-3 \leq h \leq 5$ | $A = \{h : -3 \leq h \leq 5, h \in \mathbb{R}\}$ | $[-3, 5]$ | Kapalı Aralık |
| $-3 < h \leq 5$ | $B = \{h : -3 < h \leq 5, h \in \mathbb{R}\}$ | $(-3, 5]$ | Yarı Açık Aralık |
| $-3 \leq h < 5$ | $C = \{h : -3 \leq h < 5, h \in \mathbb{R}\}$ | $[-3, 5)$ | Yarı Açık Aralık |
| $-3 < h < 5$ | $D = \{h : -3 < h < 5, h \in \mathbb{R}\}$ | $(-3, 5)$ | Açık Aralık |

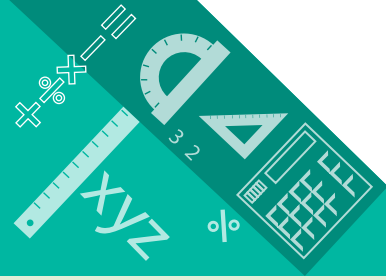
Örnek 3

$A = (-1, 4)$ ve $B = [3, \infty)$ aralıklarını kullanarak aşağıdaki kümeleri sayı doğrusu üzerinde gösterelim ve aralık olarak ifade edelim.

- a. $A \cap B$ b. $A \cup B$ c. $A - B$
 ç. $B - A$ d. B' e. A'

Çözüm





MATEMATİK ATÖLYESİ

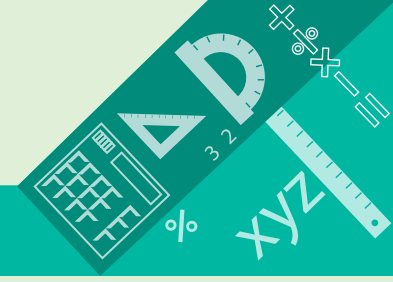
Bu atölye çalışmasında gerç k sayılar kümesinde verilen bir e itsizli in farklı gösterimler kullanılarak nasıl ifade edildiği incelenecektir.

Aşağıdaki tabloda 30 ile 50 sayıları arasındaki veya bu sayılar dışındaki gerç k sayıları ifade eden farklı gösterimler verilmiştir. Tabloda verilen bilgileri inceleyerek eksik bölümleri doldurunuz.

| Eşitsizlik İfadesi $x \in \mathbb{R}$ | Küme Gösterimi | Sayı Doğrusu (Grafik) Gösterimi | Aralık Adı ve Gösterimi | Sözel ifade |
|--|--|---------------------------------|-----------------------------------|---|
| $30 < x < 50$ | $E = \{x : 30 < x < 50, x \in \mathbb{R}\}$ | | $(30, 50)$ Açık Aralık | 30 ile 50 arasındaki bütün gerç k sayılar |
| | | | $[30, 50]$ Yarı kapalı aralık | |
| $30 \leq x \leq 50$ | | | | |
| | | | | |
| | | | | 30'dan küçük bütün gerç k sayılar |
| | $K = \{x : x \leq 30 \text{ veya } x > 40, x \in \mathbb{R}\}$ | | $(-\infty, 30] \cup (40, \infty)$ | |

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve E itsizliklerin  zellikleri

MATEMATİK ATÖLYESİ



Gerçek sayılar kümesinde birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözebilmek için denklem ve eşitsizliklerle ilgili özellikler kullanılır. Denklemlerin çözümünde eşitliğin her iki tarafına aynı gerçek sayının eklenmesinin veya çıkarılmasının ve eşitliğin her iki tarafını aynı gerçek sayı ile çarpmanın veya bölmenin eşitliği bozmadığını biliyoruz. Aynı durum eşitsizlikler için de geçerli midir? Bu durumu aşağıdaki atölye çalışması ile inceleyelim.

Sayı doğrusu üzerinde gösterilen A ve B noktalarının konumlarını belirleyerek her bir soru için tablodaki boşlukları doldurunuz. Her bir işlem sonucunda A ve B noktalarının yeni konumlarını sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

| | A noktasının 0 noktasına uzaklığı | Eşitsizlik Durumu | B noktasının 0 noktasına uzaklığı |
|---|-----------------------------------|-------------------|-----------------------------------|
| Mevcut Konum | 1 | $<$ | 6 |
| A ve B noktaları pozitif yönde 2 birim ötelenirse | $1 + 2$ | | $6 + 2$ |
| | | | |
| A ve B noktaları negatif yönde 4 birim ötelenirse | | | |
| | | | |
| A ve B noktalarının 0 noktasına olan uzaklıkları 2 katına çıkarılırsa | | | |
| | | | |
| A ve B noktalarının 0 noktasına olan uzaklığı -3 ile çarpılırsa | | | |
| | | | |
| A ve B noktalarının 0 noktasına olan uzaklığı 4 ile bölünürse | | | |
| | | | |
| A ve B noktalarının 0 noktasına olan uzaklığı -4 ile bölünürse | | | |
| | | | |

Sonuç: Yukarıdaki tabloya göre bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı gerçek sayıyı eklemenin veya çıkarmanın ve eşitsizliği aynı gerçek sayı ile çarpmanın veya bölmenin eşitsizliği nasıl etkilediğini belirtiniz.

Anahtar Bilgi

Bir eşitlikte, eşitliğin her iki tarafına aynı gerçekte sayı eklenirse veya çıkarılırsa eşitlik değişmez. Örnek,

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a + 2 = b + 2 \\ a - 5 = b - 5 \end{cases}$$

Dikkat

“Eşitsizliğin/denklem her iki tarafı” ifadesinden eşitsizliğin veya denklemin sol ve sağ olmak üzere iki tarafının olduğu anlaşılmaktadır. Eşittir işareti veya eşitsizlik işaretleri iki tarafı birbirinden ayırır.

$$\begin{array}{ccc} 25 - a & > & 3a + 7 \\ \text{Sol} & \xrightarrow{\quad} & \text{Sağ} \end{array}$$

Atölye çalışmasında bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı (gerçek) sayı eklendiğinde veya çıkarıldığında eşitsizliğin değişmediğini gözlemledik. Bu durum, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için, $a + c < b + c$ ve $a - c < b - c$ dir.

Örnek 4

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulalım.

a. $x + 2 = -3$ **b.** $-3 = x - 2$
 $x + 2 \geq -3$ $-3 \geq x - 2$

Çözüm

Denklem ve eşitsizlikleri çözmek için denklem ve eşitsizliklerin sol tarafında yapılan işlemin aynısı sağ tarafında da yapılır.

a.

$$\begin{aligned} x + 2 &= -3 \\ x + 2 - 2 &= -3 - 2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

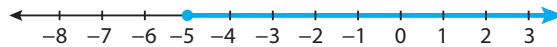
$$\begin{aligned} x + 2 &\geq -3 \\ x + 2 - 2 &\geq -3 - 2 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

Her iki taraftan 2 çıkaralım.
İşlemi yaparak sonucu bulalım.

$x + 2 = -3$ denkleminin çözüm kümesi $\{-5\}$ dir.

$x + 2 \geq -3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sayı doğrusunda ve aralık olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$\text{ÇK} = [-5, \infty)$



b.

$$\begin{aligned} -3 &= x - 2 \\ -3 + 2 &= x - 2 + 2 \\ -1 &= x \end{aligned}$$

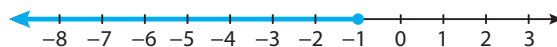
$$\begin{aligned} -3 &\geq x - 2 \\ -3 + 2 &\geq x - 2 + 2 \\ -1 &\geq x \end{aligned}$$

Her iki tarafa 2 ekleyelim.
İşlemi yaparak sonucu bulalım.

$-3 = x - 2$ denkleminin çözüm kümesi $\{-1\}$ dir.

$-3 \geq x - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sayı doğrusunda ve aralık olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$\text{ÇK} = (-\infty, -1]$



Atölye çalışmasında gözlemlediğimiz diğer bir durum, bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif gerçel sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik değişmez. Fakat, eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik yön değişir. Bu durumlar, matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için, $a < b$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c < 0$ için, $a < b$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir.

Örnek 5

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin gerçel sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulalım.

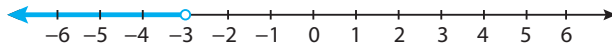
a. $4x = 12$ b. $-\frac{4}{5}x = -12$
 $4x < -12$ $-\frac{4}{5}x < -12$

Çözüm

a.

| | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| $4x = 12$ | $4x < -12$ | Her iki tarafı 4'e bölerek sadeleştiririm. Eşitsizliğin yönünün değişmediğine dikkat edelim. İşlemi yaparak sonucu bulalım. |
| $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$ | $\frac{4x}{4} < \frac{-12}{4}$ | |
| $x = 3$ | $x < -3$ | |
| | | |

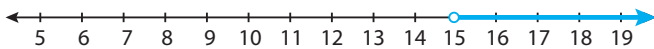
$4x = 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\{3\}$ dür. $4x < -12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-\infty, -3)$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



b.

| | | |
|---|---|---|
| $-\frac{4}{5}x = -12$ | $-\frac{4}{5}x < -12$ | Her iki tarafı $(-\frac{5}{4})$ ile çarpalım ve eşitsizliğin yönünü değiştirelim. İşlemi yaparak sonucu bulalım. |
| $(-\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{4}{5}x) = -12 \cdot (-\frac{5}{4})$ | $(-\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{4}{5}x) > -12 \cdot (-\frac{5}{4})$ | |
| $x = 15$ | $x > 15$ | |
| | | |

$-\frac{4}{5}x = -12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\{15\}$ dir. $-\frac{4}{5}x < -12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(15, \infty)$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



Bir denklemde veya eşitsizlikte değişkenler ve sayılar eşitsizliğin her iki tarafında da bulunabilir. Bu gibi durumlarda eşitsizliğin çözümünde yukarıda verilen özellikler birlikte kullanılır.

İnceleyelim

Bir eşitlikte eşitliğin her iki tarafı sıfırdan farklı aynı gerçel sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde eşitliğin bozulmadığını hatırlayınız.

Örnek,

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2 = b \cdot 2 \\ \frac{a}{5} = \frac{b}{5} \end{cases}$$

Dikkat

Bir eşitsizlikte her iki taraf **negatif** bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik yön değişir.

Örnek 6

Konunun başlangıcında verilen telefon fatura tutarı ile ilgili probleme geri dönelim. Problemdeki son dört soruyu cevaplayabilmek için kullanılacak denklem ve eşitsizlikleri yazalım.

1. Aylık 48 TL telefon faturası ödeyen biri her bir tarifeye göre kaç dakika konuşur?
2. Kaç dakikalık arama için aylık ödenecek telefon faturaları her iki tarifeye göre aynı olur?
3. Telefon ödemesine aylık en fazla 50 TL bütçe ayıran biri 1. tarifeye göre en fazla kaç dakika arama yapabilir?
4. İkinci tarifeyi kullanan biri aylık en az 40 TL ve en fazla 45 TL fatura ödediğine göre acaba bu kişinin arama süresi hangi aralıktadır?

Çözüm

Problem durumunda verilen 1. tarifenin ücretlendirmesi aylık 30 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 5 kuruş, 2. tarifenin ücretlendirmesi ise aylık 10 TL sabit ücret ve her bir dakika konuşma için 18 kuruş idi. Buna göre, arama süresine (t) bağlı olarak aylık fatura tutarı aşağıdaki şekilde modellenenir:

$$1. \text{ tarife için aylık fatura tutarı} = 30 + 0,05t$$

$$2. \text{ tarife için aylık fatura tutarı} = 10 + 0,18t$$

Bu ifadeleri kullanarak yukarıdaki soruları cevaplama için kullanılacak denklem ve eşitsizlikleri yazıp çözümlerini yapabiliriz.

1. Aylık fatura tutarı 48 TL olduğundan, her bir tarife için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\text{Birinci tarife için, } 30 + 0,05t = 48$$

$$\text{İkinci tarife için, } 10 + 0,18t = 48$$

1. Tarife

$$30 + 0,05t = 48$$

$$30 + 0,05t - 30 = 48 - 30$$

$$0,05t + 30 - 30 = 18$$

$$0,05t = 18$$

$$\frac{0,05t}{0,05} = \frac{18}{0,05} \Rightarrow t = 360$$

Eşitliğin her iki tarafından 30 çıkaralım.

Gerçek sayılarda toplama işleminin değişme özelliğini kullanalım.

Eşitliğin her iki tarafını 0,05 e bölelim.

Dolayısıyla, 1. tarifeye göre 48 TL telefon faturası ödeyen biri 360 dakika arama yapmıştır.

2. Tarife

$$10 + 0,18t = 48$$

$$10 + 0,18t - 10 = 48 - 10$$

$$0,18t + 10 - 10 = 38$$

$$0,18t = 38$$

$$\frac{0,18t}{0,18} = \frac{38}{0,18} \Rightarrow t = 211, \bar{1}$$

Her iki taraftan 10 çıkaralım.

Gerçek sayılarda toplama işleminin değişme özelliğini kullanalım.

Her iki tarafı 0,18 e bölelim.

Dolayısıyla, 2. tarifeye göre 48 TL telefon faturası ödeyen biri $211, \bar{1}$ dakika veya yaklaşık olarak 211 dakika ve 7 saniye arama yapmıştır.

2. Fatura tutarlarının birbirine eşit olduğu durum

$30 + 0,05t = 10 + 0,18t$ denklemi ile ifade edilir. Bu denklemi çözelim.

$$30 + 0,05t = 10 + 0,18t$$

$$30 + 0,05t - 0,05t = 10 + 0,08t - 0,05t$$

Her iki taraftan $0,05t$ çıkaralım.

$$30 = 10 + 0,13t$$

Benzer terimleri çıkaralım.

$$30 - 10 = 10 + 0,13t - 10$$

Her iki taraftan 10 çıkaralım.

$$20 = 0,13t$$

Her iki tarafı $0,13$ e bölelim.

$$\frac{20}{0,13} = \frac{0,13t}{0,13}$$

$$153,85 \approx t$$

Dolayısıyla; 153,85 dakika veya 153 dakika 51 saniye arama süresinde her iki tarifeye göre aylık telefon faturaları eşit olur.

3. Birinci tarifeye göre fatura tutarının 50 TL ve 50 TL'den az olması gerekeceğinden bu durum $30 + 0,05t \leq 50$ eşitsizliği ile belirtilir.

$$30 + 0,05t \leq 50$$

$$30 + 0,05t - 30 \leq 50 - 30$$

Her iki taraftan 30 çıkaralım.

$$0,05t + 30 - 30 \leq 20$$

Gerçek sayılarda toplama işleminin

$$0,05t \leq 20$$

değişme özelliğini kullanalım.

$$\frac{0,05t}{0,05} \leq \frac{20}{0,05}$$

Her iki tarafı $0,05$ 'e bölelim.

$$t \leq 400$$

Buna göre, aylık en fazla 50 TL telefon görüşme ücreti ödeyebilecek biri birinci tarifeye göre en fazla 400 dakika arama yapabilir.

4. 2. tarifeye göre aylık fatura tutarı 40 TL ile 45 TL arasında veya bunlara eşit olduğuna göre bu durum $40 \leq 10 + 0,18t \leq 45$ eşitsizliği ile belirtilir.

$$40 \leq 10 + 0,18t \leq 45$$

$$40 - 10 \leq 10 + 0,18t - 10 \leq 45 - 10$$

Her bir taraftan 10 çıkaralım.

$$30 \leq 0,18t \leq 35$$

İşlemleri yaparak sonucu bulalım.

$$\frac{30}{0,18} \leq \frac{0,18t}{0,18} \leq \frac{35}{0,18}$$

Her bir tarafı $0,18$ 'e bölelim.

$$166, \bar{6} \leq t \leq 194, \bar{4}$$

Buna göre, aylık 40 TL ile 45 TL arası fatura ödeyen biri, yaklaşık olarak 166 dakika 40 saniye ile 194 dakika 27 saniye arası telefon görüşmesi yapmaktadır.

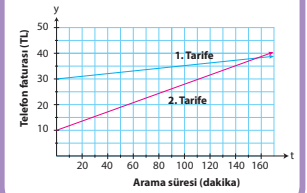
Dikkat

$$0, \bar{1} = \frac{1}{9} \text{ dakika}$$

$$= 6, \bar{6} \text{ sn' dir.}$$

Dikkat

$30 + 0,05t = 10 + 0,18t$ eşitliği ile iki tarifeyi belirten doğruların kesişim noktasının bulunduğu dikkat ediniz. Bu kesişim noktasının apsisi denklemin çözümüdür.



Anahtar Bilgi

Cebirsel ifadelerde aynı dereceye sahip ve aynı değişkeni içeren terimlere **benzer terimler** denir. Örneğin:

$$2x + 5a^2 - \frac{3}{2}x + 2ax - a^2 + \sqrt{2}$$

cebirsel ifadesinde $2x$ ile

$$\frac{3x}{2} \text{ veya } -a^2 \text{ ile } 5a^2$$

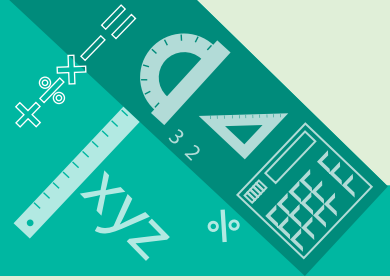
benzer terimlerdir.

Dikkat

$40 \leq 10 + 0,18t \leq 45$ eşitsizliği, $40 \leq 10 + 0,18t$ ve

$$10 + 0,18t \leq 45$$

şeklinde iki ayrı eşitsizliğe ayrılarak da çözülebilir, tek bir bütün olarak da çözülebilir.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünde iki farklı çözüm şekli incelenecek ve bu çözüm şekillerinin arkasındaki düşünme yapısı anlaşılacaktır.

Telefon tarifeleri probleminde 1. tarife için 60 TL ödeyen birinin telefon görüşme süresini bulmak isteyen Zeynep ve Murat $30 + 0,05t = 60$ denklemini kullanarak 600 cevabını bulmuşlardır. Zeynep ve Murat'ın soruyu çözerken izledikleri yol ve düşünme şekillerini inceleyiniz ve çözümlerinde herhangi bir yanlış olup olmadığını belirleyiniz. Zeynep ile Murat'ın bulduğu sonucun doğru olduğunu nasıl anlarsınız?

Öyle bir t sayısı bulmalıyım ki $30 + 0,05t = 60$ denkleminde sol taraf ile sağ taraf dengede olsun.

Denklemleri çözerken eşitliğin her iki tarafında aynı işlemleri yaparsam denge bozulmaz ve ben de t 'yi bulmuş olurum.

$$\begin{aligned} 30 + 0,05t &= 60 \\ 30 + 0,05t - 30 &= 60 - 30 \\ 0,05t &= 30 \\ \frac{0,05t}{0,05} &= \frac{30}{0,05} \\ t &= 600 \end{aligned}$$



Denkleme göre 60 elde etmek için t 'yi 0,05 ile çarpıp 30 eklemeliyim. O zaman ters işlem yaparak t 'yi bulabilirim.

Önce 60'dan 30 çıkarayım sonra da çıkan sonucu **0,05'e** böleyim. O zaman,



- Zeynep eşitliğin her iki tarafından 30 çıkarmak yerine neden her iki tarafa 30 eklemedi? Zeynep, 30 değil de başka bir sayı çıkarsa idi, örneğin 20, çözümü kolaylaştırmış olur muydu?
- Zeynep eşitliğin her iki tarafını neden 0,05'e böldü?
- Murat çözümünde hangi ters işlemleri yapmıştır?
- Murat neden önce 30 çıkarıp sonra 0,05'e böldü?
- Zeynep ile Murat'ın çözüm yöntemlerini karşılaştırınız. İki çözüm yöntemi de her zaman işe yarar mı? İşe yaramadığı veya denklemin çözümünü zorlaştırdığı durumlar var mı?

Örnek 7

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin tam sayılar ve gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulalım.

a. $\frac{5}{4}x + 6 = 30$

b. $5x + 4 = 2(x + 2) + 3x$

c. $\frac{x-3}{2} - \frac{2x-1}{3} = 3$

ç. $5x + 6 < 30$

d. $-\frac{x}{3} - 2 \leq -5$

e. $6x - 4 \leq 2(x + 8)$

f. $-4 < \frac{2x+1}{3} \leq 3$

Çözüm

a.

$$30 = \frac{5}{4}x + 6$$

$$30 - 6 = \frac{5}{4}x + 6 - 6 \quad \text{Her iki taraftan 6 çıkaralım.}$$

$$24 = \frac{5}{4}x$$

$$\frac{4}{5} \cdot 24 = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}x \quad \text{Her iki tarafı } \frac{4}{5} \text{ ile çarpalım.}$$

$$19,2 = x \quad \text{İşlemi yaparak sonucu bulalım.}$$

$30 = \frac{5}{4}x + 6$ denkleminin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesi

$\text{ÇK} = \{19,2\}$ dir ve $19,2 \notin \mathbb{Z}$ olduğundan tam sayılar kümesinde $\text{ÇK} = \emptyset$ olur.

b.

$$5x + 4 = 2(x + 2) + 3x$$

$$5x + 4 = 2(x + 2) + 3x$$

$$5x + 4 = 2x + 4 + 3x$$

$$5x + 4 = 5x + 4$$

$$5x + 4 - 5x = 5x + 4 - 5x \quad \text{Her iki taraftan } 5x \text{ çıkaralım.}$$

$$4 = 4$$

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanalım.

Benzer terimleri toplayalım.

$4 = 4$ her zaman doğru olan bir eşitlik olduğundan

$5x + 4 = 2(x + 2) + 3x$ denklemi x 'in tüm değerleri için sağlanır. Dolayısıyla

gerçekte sayılarda çözüm kümesi \mathbb{R} , tam sayılarda çözüm kümesi \mathbb{Z} dir.

Anahtar Bilgi

Eşitliğin her iki tarafındaki paydalar aynı olduğunda denklem payların eşitliği şekline dönüştürülebilir.

Örnek:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{5} \text{ eşitliği}$$

$a = b$ şeklinde yazılabilir.

Dikkat

$-2(2x - 1)$ çarpımında -2 ile -1 'in çarpımının $+2$ olduğuna dikkat ediniz.
 $(-2) \cdot (-1) = +2$

İnceleyelim

Sağlama Yapma:
Çözümün doğru olup olmadığı başlangıçtaki denklemde x yerine -25 yazılarak kontrol edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{-25-3}{2} - \frac{2 \cdot (-25)-1}{3} & \stackrel{?}{=} 3 \\ -\frac{28}{2} - \frac{-50-1}{3} & \stackrel{?}{=} 3 \\ -14 - (-17) & \stackrel{?}{=} 3 \\ 3 & = 3 \end{aligned}$$

c.

$$\frac{x-3}{2} - \frac{2x-1}{3} = 3$$

$$\frac{x-3}{\underset{(3)}{2}} - \frac{2x-1}{\underset{(2)}{3}} = \frac{3}{\underset{(6)}{1}}$$

$$3(x-3) - 2(2x-1) = 6 \cdot 3$$

$$3x - 9 - 4x + 2 = 18$$

$$-x - 7 = 18$$

$$-x - 7 + 7 = 18 + 7$$

$$-x = 25$$

$$x = -25$$

Tüm ifadelerin paydalarını eşitleyelim.

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanalım.

Benzer terimleri toplayalım.

$$3x - 4x = -x \text{ ve } -9 + 2 = -7$$

İki tarafa 7 ekleyelim.

İki tarafı -1 ile çarpalım

İşlemi yaparak sonucu bulalım.

$\frac{x-3}{2} - \frac{2x-1}{3} = 3$ denkleminin gerçekteki sayılar ve tam sayılar kümesinde çözüm kümesi $\{-25\}$ dir.

ç.

$$5x + 6 < 30$$

$$5x + 6 - 6 < 30 - 6$$

$$5x < 24$$

$$\frac{5x}{5} < \frac{24}{5}$$

$$x < 4,8$$

Her iki taraftan 6 çıkaralım.

Her iki tarafı 5'e bölelim.

İşlemi yaparak sonucu bulalım.

Buna göre, $5x + 6 < 30$ eşitsizliğinin gerçekteki sayılar kümesinde

$\mathbb{C}K = \{x : x < 4,8, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 4,8)$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



$5x + 6 < 30$ eşitsizliğinin tam sayılar kümesinde $\mathbb{C}K = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.

d.

$$-\frac{x}{3} - 2 \leq -5$$

$$-\frac{x}{3} - 2 + 2 \leq -3 + 2$$

$$-\frac{x}{3} \leq -1$$

$$\frac{x}{-3} \leq -1$$

$$(-3) \cdot \frac{x}{-3} \geq (-3) \cdot (-1)$$

$$x \geq 3$$

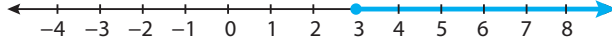
Her iki tarafa 2 ekleyelim.

Her iki tarafı (-3) ile çarpalım ve eşitsizliğin yönünü değiştirelim.

İşlemi yaparak sonucu bulalım.

$-\frac{x}{2} - 2 \leq -5$ eşitsizliğinin çözümü gerçekte sayılar kümesinde

$\text{ÇK} = \{x : x \geq 3, x \in \mathbb{R}\} = [3, \infty)$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



Tam sayılar kümesinde $\text{ÇK} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ olur.

e.

$$6x - 4 \leq 2(x + 8) \quad \text{Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılıma özelliğini kullanalım.}$$

$$6x - 4 \leq 2x + 16$$

$$6x - 4 - 2x \leq 2x + 16 - 2x \quad \text{Her iki taraftan } 2x \text{ çıkaralım.}$$

$$4x - 4 \leq 16$$

$$4x - 4 + 4 \leq 16 + 4 \quad \text{Benzer terimleri çıkaralım. Her iki tarafa 4 ekleyelim.}$$

$$4x \leq 20$$

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{20}{4} \quad \text{Her iki tarafı 4'e bölelim.}$$

$$x \leq 5$$

Gerçek sayılar kümesinde $\text{ÇK} = \{x : x \leq 5, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 5]$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



Tam sayılar kümesinde $\text{ÇK} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olur.

f.

$$-4 < \frac{2x+1}{3} \leq 3$$

$$3 \cdot (-4) < 3 \cdot \frac{2x+1}{3} \leq 3 \cdot 3 \quad \text{Eşitsizliğin her tarafını 3 ile çarpalım. Ortadaki ifadede 3'lerin sadeleştiğine dikkat ediniz.}$$

$$-12 < 2x + 1 \leq 9$$

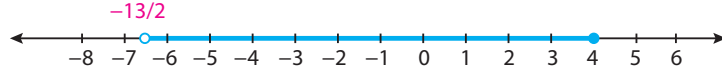
$$-12 - 1 < 2x + 1 - 1 \leq 9 - 1 \quad \text{Eşitsizliğin her tarafından 1 çıkaralım.}$$

$$\frac{-13}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2}$$

$$-\frac{13}{2} < x \leq 4 \quad \text{Eşitsizliğin her tarafını 2'ye bölelim.}$$

Gerçek sayılar kümesinde $\text{ÇK} = \left\{x : \frac{13}{2} < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\right\} = \left(-\frac{13}{2}, 4\right]$ olur.

ve sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



Tam sayılar kümesinde $\mathbb{Z}K = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.

Yukarıdaki örneklerde tek bir eşitsizliğin çözüm kümesi incelendi. Bazen iki farklı eşitsizliğin çözüm kümesinin birlikte inceleneceği durumlar da olabilir. Bunlara **birleşik eşitsizlikler** adı verilir. İki farklı eşitsizliğin çözüm kümesi “ve” bağlacı ile bağlanırsa çözüm kümelerinin kesişimi, “veya” bağlacı ile bağlanırsa çözüm kümelerinin birleşimi ifade edilmektedir.

Örnek 8

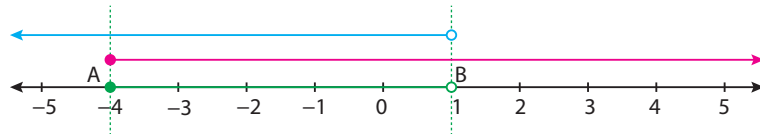
$3x - 8 \leq 6x + 4 < 2x + 8$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3x - 8 \leq 6x + 4 < 2x + 8$ eşitsizliğinde x 'i veren aralığı bulabilmek için bu eşitsizlik iki bölümde incelenir. Bu iki eşitsizlik aynı anda sağlanması gerektiğinden “ve” bağlacı kullanılır.

$$\begin{array}{lcl}
 & \begin{array}{c} \text{↙} \quad \text{↘} \end{array} & \\
 & 3x - 8 \leq 6x + 4 < 2x + 8 & \\
 \begin{array}{l} 3x - 8 \leq 6x + 4 \\ 3x - 8 + (-4) \leq 6x + 4 + (-4) \\ 3x - 12 \leq 6x \\ 3x - 12 + (-3x) \leq 6x + (-3x) \\ -12 \leq 3x \\ -4 \leq x \end{array} & \text{ve} & \begin{array}{l} 6x + 4 < 2x + 8 \\ 6x + 4 - 4 < 2x + 8 \\ 6x < 2x + 4 \\ 6x - 2x < 2x + 4 - 2x \\ 4x < 4 \\ x < 1 \end{array}
 \end{array}$$

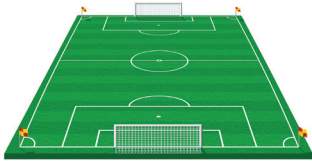
İki çözümün kesişimi sorulan eşitsizliğin çözüm kümesini vereceğinden $-4 \leq x < 1$ olarak bulunur ve $\mathbb{Z}K = \{x : -4 \leq x < 1, x \in \mathbb{R}\} = [-4, 1)$ olarak ifade edilir. Sayı doğrusunda yeşil ile taranan kısım bu eşitsizliğin çözüm kümesini gösterir.



Eşitsizlikler ile İlgili Diğer Bazı Özellikler

- Her $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ için, $a < b$ ve $x < y$ ise $a + x < b + y$ olur. Örneğin,
 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ve $2\sqrt{2} < 2\sqrt{3}$ olduğu için, $\underbrace{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}_{3\sqrt{2}} < \underbrace{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}_{3\sqrt{3}}$ dir.
- a ve b aynı işaretli gerçel sayılar olmak üzere $a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir. Örneğin,
 $2 < 5$ olduğu için, $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ veya
 $-2\pi < -\pi$ olduğu için, $\frac{1}{-2\pi} > \frac{1}{-\pi}$
- Her $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$ için, $a < b$ ve $x < y$ ise $a \cdot x < b \cdot y$ olur.
 Örneğin, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ olduğundan
 $\underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}_{\sqrt{6}} < \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}_{\sqrt{15}}$

Örnek 9



Uluslararası futbol maçlarının oynanabileceği standartlara uygun bir futbol sahasının uzunluğu 100 m ile 110 m, genişliği ise 64 m ile 75 m arasında değişebilmektedir (sınır değerler dahil).

Buna göre, bu standartlara uygun bir futbol sahasının alanı en az ve en fazla kaç m^2 olur?

Çözüm

Futbol sahasının uzunluğu (a) : $100 \leq a \leq 110$

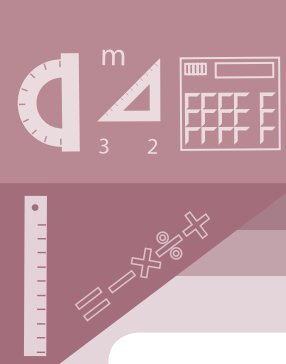
Futbol sahasının genişliği (b) : $64 \leq b \leq 75$

Futbol sahasının alanı $a \cdot b$ ile bulunabileceğinden eşitsizliklerin özellikleri kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$64 \cdot 100 \leq a \cdot b \leq 110 \cdot 75$$

$$6400 \leq a \cdot b \leq 8250$$

Böylece standartlara uygun bir futbol sahası alanının en az $6400 m^2$ en fazla ise $8250 m^2$ olabileceği bulunur.



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1. Aşağıdaki ifadeleri inceleyerek, doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız. Cevabınızı gerekçeleriyle açıklayınız.
 - a. (.....) Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı gerçekte sayı ile toplanır ya da çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.
 - b. (.....) Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir gerçekte sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.
 - c. (.....) Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir gerçekte sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.
 - d. (.....) $-5x = x$ denkleminin çözümü yoktur.
 - e. (.....) $2x + 3 = 2x + 3$ denkleminin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesi \mathbb{R} 'dir.
 - f. (.....) $\frac{x}{2x-5} = \frac{5}{2x-5}$ denklemi ile $x = 5$ denkleminin çözüm kümeleri aynıdır.
 - g. (.....) Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin çözüm kümesi tek bir sayı, tüm sayılar veya boş küme olabilir.

2. Aşağıdaki tabloda eşitsizlikler ve farklı gösterimleri verilmiştir. Tabloda eksik olan bölümleri doldurunuz.

| Eşitsizlik İfadesi | Küme ve Aralık Gösterimi | Sözel İfade | Sayı Doğrusu Gösterimi |
|--------------------|-----------------------------|--|------------------------|
| $3 \leq x$ | | | |
| $-5 \leq x < 4$ | | | |
| | | | |
| | | -5 dâhil -5 ile 4 arasındaki bütün gerçekte sayılar | |
| | | | |
| | $(-\infty, -1) \cup [2, 7)$ | | |
| | | -2'den küçük veya 4'ten büyük bütün gerçekte sayılar | |

KENDİMİZİ SINAYALIM

3. $2x - 2 = 10$ ve $2x - a = 7$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise a 'yı bulunuz.
4. $\frac{x-a}{4} - \frac{2x-1}{3} = -\frac{5}{2}$ denkleminin çözüm kümesi $\{5\}$ olduğuna göre, a kaçtır?
5. Çözüm kümesi tüm gerçek sayılar olan bir denklem yazınız.
6. Aşağıda Levent ve Serhat'ın birer eşitsizlik için yaptıkları çözümler verilmiştir. Bu çözümlerdeki hataları bulunuz ve düzeltiniz.

Levent'in Çözümü

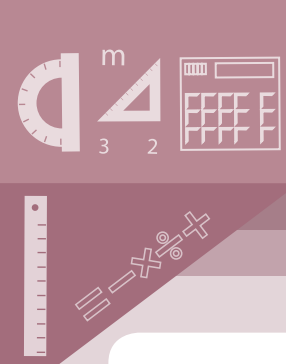
$$\begin{array}{r} -5x < 30 \\ \frac{-5x}{-5} < \frac{30}{-5} \\ x < -6 \end{array}$$

Serhat'ın Çözümü

$$\begin{array}{r} 3(2x+5) \geq 11 \\ 6x+5 \geq 11 \\ 6x+5-5 \leq 11-5 \\ 6x \leq 6 \\ x \leq 1 \end{array}$$

7. $-3(2x-1) > \frac{x}{3} - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi bulunurken yapılan işlemler aşağıda adım adım verilmiştir. Aşağıda verilen bu işlemlerin karşısındaki boşluklara uygun açıklamalar yazınız.

| Çözüm Basamakları | Açıklamalar |
|------------------------------|--|
| $-3(2x-1) > \frac{x}{3} - 2$ | |
| $-6x+3 > \frac{x}{3} - 2$ | |
| $\frac{-19x}{3} + 3 > -2$ | |
| $\frac{-19x}{3} > -5$ | |
| $-19x > -15$ | |
| $x < \frac{15}{19}$ | $\text{ÇK} = \left(-\infty, \frac{15}{19}\right)$ dir. |



KENDİMİZİ SINAYALIM

Aıştırma

1. Aşağıda verilen eşitsizliklerin, gerçık sayılarda çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

| | |
|---|--|
| a. $x \geq \sqrt{2}$ | |
| b. $x > \pi$ | |
| c. $x < 2\pi$ | |
| ç. $x \leq -4$ | |
| d. $-3 < x \leq -\sqrt{5}$ | |
| e. $A = \{x : -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, x \in \mathbb{R}\}$ | |
| f. $B = \{x : x < -\sqrt{10} \text{ veya } x > 1, x \in \mathbb{R}\}$ | |

2. Aşağıda aralık gösterimi ile verilen kümelerin kesişim veya birleşimlerini bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

- a. $(-2, 5) \cap [1, 7)$ b. $(-2, 5) \cap [1, 7)$ c. $(1, \infty) \cup (-\infty, 3]$
 ç. $(1, \infty) \cap (-\infty, 3]$ d. $[-5, 1) \cap [2, 7)$ e. $[-5, 1) \cup [2, 7)$

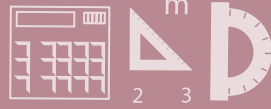
3. $A = [-4, 3)$ ve $B = [-2, 6]$ aralıkları veriliyor. Buna göre; $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ kümelerini gösteren aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

4. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini doğal sayılar, tam sayılar ve gerçık sayılar kümelerinde bulunuz.

- a. $2x - 4 = 16$ b. $3(x - 4) = 8$ c. $3(3x - 5) + 4 - 2x = 23$
 ç. $8(x - 2) - 7(x - 4) = 3x - 11$ d. $\frac{9x - 6}{3} = 30$ e. $\frac{x - 6}{2} + \frac{2x - 8}{3} = 3$
 f. $\frac{x - 3}{5} - \frac{2x - 1}{2} = -2$ g. $\frac{2x + 3}{5} + \frac{x - 3}{4} = \frac{5x + 1}{3}$

5. $3x - 7 = \frac{9}{4}$ ise $3x - 2 = ?$

6. $3y + 1 = \frac{7}{5}$ ise $3y - 4 = ?$



KENDİMİZİ SINAYALIM



7. Aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini doğal sayılar, tam sayılar ve gerçekte sayılar kümelerinde bulunuz ve sayı doğrusunda gösteriniz.

- a. $2x - 7 > 5$ b. $\frac{7}{3} \leq x + 1$ c. $5 + x > 3x + 2$
- ç. $5x - 2 < -3x + 14$ d. $6(x - 2) > 5x - 8$ e. $-2(1 - 3x) \leq -4(1 - 2x)$
- f. $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} < 3$ g. $\frac{3x + 1}{4} - \frac{2x + 7}{2} \geq 2$

8. Aşağıdaki birleşik eşitsizliklerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $-12 < 6x + 4 < 10$
- b. $x - 2 < 2x + 1 \leq -x + 5$
- c. $8 - 2x > 10$ veya $7x \geq 4x + 12$

Uygulama ve Problem Çözme

1. Ayşe'nin matematik dersinde ilk üç yazılı sınavında 100 puan üzerinden aldığı notlar yandaki tabloda görülmektedir. Bir dersten 5 alınabilmesi için dört sınavın aritmetik ortalamasının en az 85 olması gerekmektedir. Ayşe'nin matematik dersinden 5 alabilmesi için dördüncü sınavdan en az kaç puan alması gerekir. Durumu gösteren matematiksel ifadeyi yazarak çözümü yapınız.

| Sınavlar | Alınan Not |
|----------|------------|
| 1. Sınav | 77 |
| 2. Sınav | 87 |
| 3. Sınav | 89 |
| 4. Sınav | ?? |

2. Bulunduğunuz okulun karşısında bir satranç kursu açmayı planlıyorsunuz. Kursun açılması için gerekli olan başlangıç giderleri 6 800 TL'dir. Ayrıca kurs ile ilgili yerel bir televizyonda haftalığı 150 TL'den 3 hafta boyunca bir tanıtım reklamı yayınlatmak istiyorsunuz. Kurs ücretini aylık 80 TL olarak planladınız. Buna göre, ilk ayda kurs giderlerinizi karşılayıp, kâra geçmeniz için en az kaç öğrenci kaydı almanız gerekir? Bu durumu gösteren eşitsizliği yazınız ve en az kaç öğrencinin kursa kayıt yaptırması gerektiğini bulmak için bu eşitsizliği çözünüz.



Neler Öğreneceğiz?

- Mutlak değer içeren denklem ve eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel çözümünü
- Mutlak değer içeren denklem ve eşitsizliklerin temel özelliklerini

Anahtar Terimler

- Denklem
- Eşitsizlik
- Mutlak değer
- Aralık
- Çözüm kümesi

Sembol ve Gösterimler

- $| |$
- $=$
- $<$
- \leq
- $>$
- \geq
- $[a, b]$
- $[a, b)$
- (a, b)

2.2.2. Mutlak Değer İçeren Denklem ve Eşitsizlikler

Başlarken

Meteoroloji uzmanları, ülkemizde yaz ayları sıcaklık ortalamasının 35°C olduğunu belirtmektedirler. Bununla birlikte bu sıcaklıktan 10°C civarında sapmalar olabildiğini de vurgulamaktadırlar.

Bu bilgiye göre ülkemizde yaz aylarında en fazla ve en az sıcaklıkları veren tek bir denklem yazabiliriz.

$$|x - 35| = 10$$

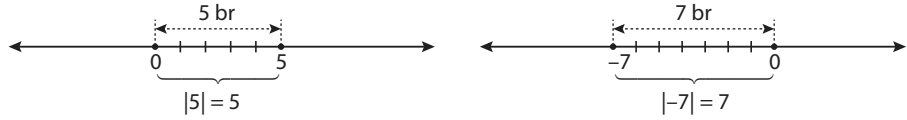
Ülkemizde yaz aylarında sıcaklık aralığını ifade edecek bir eşitsizlik de

$$|x - 35| < 10 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$



Bu bölümde mutlak değer içeren denklem ve eşitsizlikleri çözmeyi öğreneceğiz.

Bir x sayısının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayının sıfır noktasına olan uzaklığıdır ve $|x|$ şeklinde gösterilir.



Örnek 1

Aşağıdaki tabloda verilen boşluklara mutlak değerli ifadelerin eşitlerini yazınız.

| | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $ 3 = 3$ | $ -8 = 8$ | $ 0 = 0$ |
| $ -7 = \dots$ | $ 15 = \dots$ | $ 3,9 = \dots$ |
| $ \frac{2}{3} = \dots$ | $ \frac{5}{9} = \dots$ | $ 2 - \sqrt{3} = \dots$ |
| $ \sqrt{5} = \dots$ | $ \sqrt{3} = \dots$ | $ 3 - \sqrt{10} = \dots$ |

Bir sayının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayının sıfır noktasına olan "uzaklığı" belirttiği için her zaman pozitifdir. Bu durum cebirsel olarak şöyle ifade edilebilir.

$$x \in \mathbb{R} \text{ için } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Örnek 2

$x > 4$ için, $|x - 3|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$x > 4$$

$$x - 3 > 4 - 3$$

eşitsizliğinde her iki taraftan 3 çıkarılırsa

$$x - 3 > 1$$

O halde $|x - 3| = x - 3$ olur.

Örnek 3

$x > 7$ için, $|x - 3| + |6 - x|$ toplamını bulalım.

Çözüm

$x > 7$ için $(x - 3)$ ve $(6 - x)$ ifadelerinin sıfırdan büyük olup olmadığını inceleyelim.

$$x > 7 \quad \text{ve} \quad x > 7$$

$$x - 3 > 7 - 3 \quad -x < -7$$

$$x - 3 > 4 \quad 6 - x < 6 - 7$$

$$6 - x < -1$$

Yukarıdaki işlemlerden $(x - 3)$ ün pozitif, $(6 - x)$ in negatif olduğu görülebilir. O halde $|x - 3| = x - 3$ ve $|6 - x| = x - 6$ olur.

Buna göre, $|x - 3| + |6 - x| = x - 3 + (x - 6) = 2x - 9$ olur.

Örnek 4

$-2 < x < 5$ için, $|x + 2| - 3|x - 5| - 4x - 7$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\left. \begin{array}{l} -2 < x < 5 \\ -2 + 2 < x + 2 < 5 + 2 \\ 0 < x + 2 < 7 \end{array} \right\} \underbrace{|x + 2|}_{>0} = x + 2$$

Benzer şekilde;

$$\left. \begin{array}{l} -2 < x < 5 \\ -2 - 5 < x - 5 < 5 - 5 \\ -7 < x - 5 < 0 \end{array} \right\} \underbrace{|x - 5|}_{>0} = -(x - 5) = -x + 5$$

$$\text{O halde } |x + 2| - 3|x - 5| - 4x - 7 = (x + 2) - 3(-x + 5) - 4x - 7$$

$$= x + 2 + 3x - 15 - 4x - 7 = -20 \text{ bulunur.}$$

Dikkat

$x > 7$ eşitsizliğin her iki tarafı -1 ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir ve bu eşitsizlik $-x < -7$ şeklinde yazılır.

İki Sayının Farkının Mutlak Değeri

İstanbul tramvay hattında Aksaray'dan Beyazıt'a giden trenin aldığı mesafe ile Beyazıt'tan Aksaray'a giden trenin aldığı mesafenin aynı olduğu veriliyor.



Bu tramvay hattını sayı doğrusu üzerinde düşünelim.



A'dan B'ye giden trenin aldığı mesafe B'nin koordinatından A'nın koordinatı çıkarılarak bulunur. Benzer şekilde B'den A'ya giden trenin aldığı mesafe de A'nın koordinatından B'nin koordinatı çıkarılarak bulunur. Bu iki değerden birisi negatiftir. Ancak bunların uzaklık olarak karşılıkları aynı olduğu için $|A - B| = |B - A|$ olarak yazılır.

Sayı doğrusu üzerinde A(x) ve B(y) gibi iki noktanın arasındaki uzaklık $|x - y|$ ile gösterilir.

Anahtar Bilgi

$$|x| = |-x|$$

$$|x - y| = |y - x|$$

Anahtar Bilgi

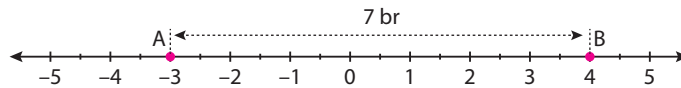
$|x| = |x - 0| = a$
olduğundan, x değerleri 0 sayısına uzaklığı a birim olan noktalardır.

Örnek 5

$|4 - (-3)|$ mutlak değerini hesaplayalım

Çözüm

$|4 - (-3)| = 7$ bulunur. Bu değer sayı doğrusu üzerinde A(-3) ile B(4) noktaları arasındaki uzaklık olduğu anlaşılır.

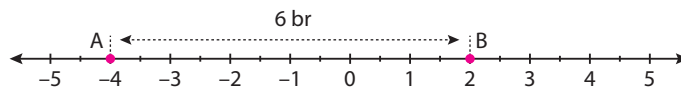


Örnek 6

$|-4 - 2|$ mutlak değerini hesaplayalım.

Çözüm

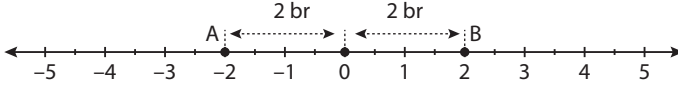
$|-4 - 2| = 6$ bulunur. Bu işlem $|-4 - (+2)|$ şeklinde düzenlenirse, A(-4) ile B(2) noktaları arasındaki uzaklığı ifade ettiği anlaşılır.



$|x| = c$ ve $|ax + b| = c$ Şeklindeki Denklemlerin Çözümü

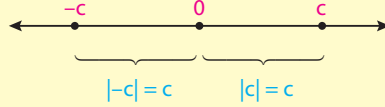
$|x| = 2$ denklemini ele alalım. Bu denklemi sağlayan değerler, 0 noktasına uzaklığı 2 birim olan noktaları ifade etmektedir. Bu sayılar ise -2 ve 2 'dir. Buna göre çözüm kümesi $\{-2, 2\}$ şeklinde yazılır.

Sayı doğrusu üzerinde $A(-2)$ ve $B(2)$ noktalarının 0 noktasına 2'şer birim uzaklıkta olduğu görülmektedir.



Genel olarak,

$c \geq 0$ olmak üzere, $|x| = c$ şeklindeki denklemler sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birim olan noktalar olarak yorumlanabilir. Çözüm $x = c$ veya $x = -c$ şeklinde ifade edilir. Çözümün sayı doğrusu üzerinde gösterimi ise aşağıdaki gibidir.



Benzer şekilde $|ax + b| = c$ ise $ax + b = c$ veya $ax + b = -c$ olur.

Giriş kısmında geçen, ülkemizdeki sıcaklık değerleri ile ilgili denkleminin çözüm kümesini artık bulabiliriz.

$$\begin{array}{l}
 |x - 35| = 10 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 x - 35 = 10 \quad x - 35 = -10 \\
 x = 45 \quad \quad x = 25 \\
 \text{ÇK} = \{25, 45\}
 \end{array}$$

Buna göre ülkemizde yaz aylarında karşılaşılan en küçük sıcaklığın 25 derece, en yüksek sıcaklığın 45 derece olduğu söylenebilir.

Dikkat

Mutlak değer içerisindeki bir ifade pozitif ise mutlak değer dışına işaret değiştirmeden, negatif ise önüne eksi alarak çıkar.

$x > 0$ ise $|x| = x$

$x < 0$ ise $|x| = -x$

Örnek 7

$|2x - 4| = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Mutlak değer içindeki ifade pozitif veya negatif olma durumuna göre çözüm bulunur.

$$\begin{array}{l} |2x - 4| = 6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2x - 4 = 6 \quad 2x - 4 = -6 \\ 2x = 10 \quad 2x = -2 \\ x = 5 \quad x = -1 \end{array}$$

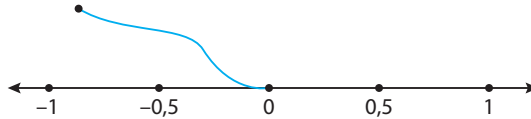
Buna göre, $\text{ÇK} = \{-1, 5\}$ olur.

$|x| \leq c$ ve $|ax + b| \leq c$ şeklindeki Eşitsizliklerin Çözümü

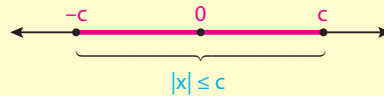
$|x| \leq 1$ eşitsizliğini düşünelim. Bu eşitsizlik ile 0 noktasına uzaklığı 1 birim veya 1 birimden küçük olan sayılar ifade edilmektedir.

-1 ile 1 arasında kalan tüm sayıların 0 noktasına olan uzaklıkları 1 birimden küçüktür. 1 ve -1 sayılarının 0 noktasına olan uzaklıkları da 1 birim olduğundan çözüm kümesi $[-1, 1]$ kapalı aralığı olur. Bu durumu aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

Uzunluğu 1 birim olan ipin, bir ucunu sayı doğrusu üzerindeki 0 noktasına raptiye ile sabitleyelim. Bu ipin diğer ucu sayı doğrusu üzerinde -1 ile 1 dâhil olmak üzere ikisi arasında kalan tüm noktalara ulaşabilir.



$c \geq 0$ olmak üzere $|x| \leq c$ şeklindeki eşitsizlikler sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına uzaklığı c birim veya c birimden küçük olan noktalar olarak yorumlanabilir. Çözüm, $-c \leq x \leq c$ veya $[-c, c]$ kapalı aralığı şeklinde ifade edilir. Çözümün sayı doğrusu üzerinde gösterimi ise aşağıdaki gibidir.



Benzer şekilde $|ax + b| \leq c$ ise $-c \leq ax + b \leq c$ olarak yazılır.

Örnek 8

Giriş bölümünde ülkemizdeki sıcaklık değerleri ile ilgili $|x - 35| < 10$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|x - 35| < 10 \Rightarrow -10 < x - 35 < 10$$

$$\Rightarrow 25 < x < 45 \quad \text{Her tarafa 35 eklenir.}$$

Buna göre, $|x - 35| < 10$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(25, 45)$ açık aralıktır ve sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



$c \geq 0$ olmak üzere, $|x - b| \leq c$ şeklindeki eşitsizlikler sayı doğrusu üzerinde b noktasına uzaklığı c birim veya c birimden küçük olan noktalar olarak yorumlanabilir.

Örnek 9

$|x - 1| \leq 5$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|x - 1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 6$$

Buna göre, $|x - 1| \leq 5$ eşitsizliğini çözüm kümesi $[-4, 6]$ olur ve sayı doğrusunda

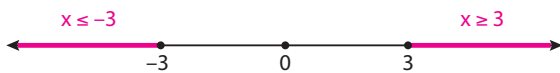


şeklinde gösterilir.

 $|x| \geq c$ ve $|ax + b| \geq c$ Şeklindeki Eşitsizliklerin Çözümü

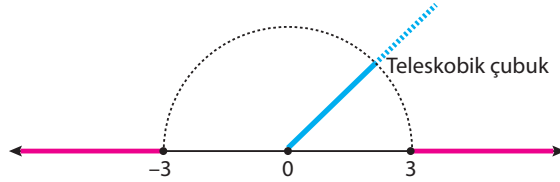
$|x| \geq 3$ eşitsizliğini ele alalım. Bu eşitsizlik sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklıkları 3 birim ve 3 birimden büyük olan noktalar olarak yorumlanabilir.

Bu eşitsizlik sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



3'ün sağ tarafında veya -3 ün sol tarafında kalan sayılar (kırmızı ile gösterilen bölümler) bu durumu sağlamaktadır. Öyleyse eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ şeklinde gösterilir.

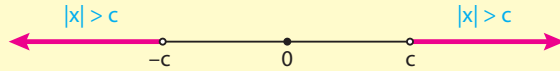
İp örneğine benzer bir yaklaşımla, bir ucu 0 noktasına sabitlenen ve en kısa hali 3 birim olan teleskobik olarak uzayıp kısalabilen sınırsız uzunlukta bir anten hayal edelim. Bu antenin ucu -3 ile 3 arası haricindeki tüm noktalara ulaşabilir.



Genel olarak,

$c \geq 0$ olmak üzere, $|x| > c$ şeklindeki eşitsizlikler sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birimden büyük olan noktalar olarak yorumlanabilir.

Çözüm kümesi $x < -c$ veya $x > c$ şeklinde ya da $(-\infty, -c) \cup (c, \infty)$ aralık gösterimi ile ifade edilebilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi ise aşağıdaki gibidir.



Örnek10

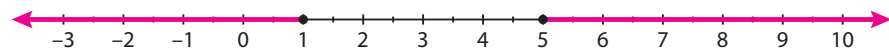
$|2x - 6| \geq 4$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Mutlak değer içindeki ifade pozitif veya negatif olabilir. Dolayısıyla eşitsizlik aşağıdaki iki gibi iki ayrı durumda incelenir.

$$\begin{aligned}
 &|2x - 6| \geq 4 \\
 &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 &2x - 6 \geq 4 \quad \text{veya} \quad 2x - 6 \leq -4 \\
 &2x \geq 10 \qquad \qquad 2x \leq 2 \\
 &x \geq 5 \qquad \qquad x \leq 1
 \end{aligned}$$

Buna göre, $\text{ÇK} = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$ olur ve sayı doğrusunda aşağıdaki şekilde gösterilir.



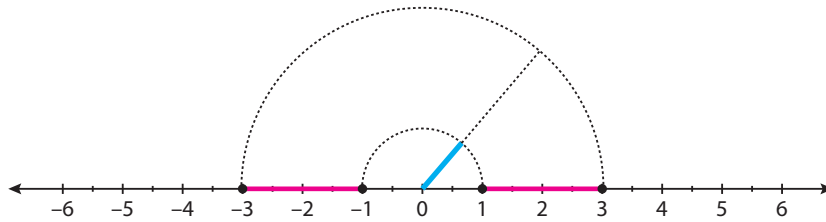
$a \leq |x| \leq b$ Şeklindeki Eşitsizliklerin Çözümü**Örnek 11**

$1 \leq |x| \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan gerçekte sayıları bulalım.

Çözüm

Bu eşitsizlik ile sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı 1 ile 3 birim arasında olan (sınırlar dâhil) noktalar ifade edilmektedir. Bu durumu sağlayan sayılar, -3 ile -1 arasındaki (sınırlar dâhil) sayılar ile 1 ile 3 arasındaki (sınırlar dâhil) sayılardır. Çözüm kümesi $[-3, -1] \cup [1, 3]$ şeklinde yazılabilir.

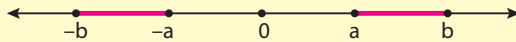
Bir ucu 0 noktasına sabitlenen ve en kısa hali 1 birim, sonuna kadar açık hali 3 birim olan teleskopik bir anteni düşünelim. Bu antenin ucu -3 ile -1 arasındaki ve 1 ile 3 arasındaki noktalara ulaşabilir.



Genel olarak,

$0 < a < b$ olmak üzere, $a \leq |x| \leq b$ şeklindeki eşitsizlikler sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı a birim ile b birim arasında olan noktalar olarak yorumlanabilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi

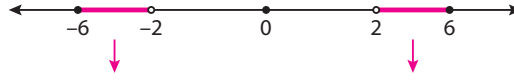
$-b \leq x \leq -a$ veya $a \leq x \leq b$ şeklinde ya da $[-b, -a] \cup [a, b]$ şeklinde gösterilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.

**Örnek 12**

$2 < |x - 3| \leq 6$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$2 < |x - 3| \leq 6$ eşitsizliği; $x - 3$ cebirsel ifadesine karşılık gelen noktaya uzaklıkları 2 birimden büyük, 6 birimden küçük veya eşit noktaların kümesini ifade etmektedir. Bu eşitsizlik sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki şekilde gösterilir.



$$-6 \leq x - 3 < -2$$

$$2 < x - 3 \leq 6$$

$$-3 \leq x < 1$$

$$5 < x \leq 9$$

$$\text{ÇK}_1 = [-3, 1)$$

$$\text{ÇK}_2 = (5, 9]$$

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi ÇK_1 ile ÇK_2 nin birleşim kümesidir.

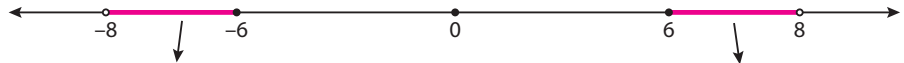
O halde $\text{ÇK} = [-3, 1) \cup (5, 9]$ olur.

Örnek 13

$6 \leq |2x - 4| < 8$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Bir önceki örnekteki gibi düşünüldüğünde, iki farklı aralıkta çözüm bulunmalıdır.



$$-8 < 2x - 4 \leq -6$$

$$6 \leq 2x - 4 < 8$$

$$-4 < 2x \leq -2$$

$$10 \leq 2x < 12$$

$$-2 < x \leq -1$$

$$5 \leq x < 6$$

$$\text{ÇK}_1 = (-2, 1]$$

$$\text{ÇK}_2 = [5, 6)$$

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi ÇK_1 ile ÇK_2 nin birleşim kümesidir.

Dolayısıyla $\text{ÇK} = \text{ÇK}_1 \cup \text{ÇK}_2 = [5, 6) \cup (-2, -1]$ olur.

Örnek 14

Aşağıda verilen denklem ve eşitsizliklerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulalım.

a. $|x| = -2$

b. $|x| < -5$

c. $|x| > -3$

ç. $-1 < |x| < 4$

Çözüm

- a. $|x| = -2$ denkleminde hiçbir sayının mutlak değeri negatif olamayacağı için çözüm kümesi boş kümedir.
- b. $|x| < -5$ eşitsizliğinde hiçbir sayının mutlak değeri negatif bir sayıdan küçük olmayacağı için çözüm kümesi boş kümedir.
- c. $|x| > -3$ eşitsizliğinde her sayının mutlak değeri -3 'ten büyük olduğu için çözüm kümesi tüm gerçek sayılar kümesidir.
- ç. $-1 < |x| < 4$ eşitsizliği $-1 < |x|$ ve $|x| < 4$ eşitsizliklerinin birleşimidir. $-1 < |x|$ eşitsizliği tüm gerçek sayılar için sağlandığından sadece $|x| < 4$ eşitsizliğini çözmek yeterlidir. Dolayısı ile çözüm kümesi $(-4, 4)$ aralığıdır.

Mutlak Değerin Özellikleri

Aşağıdaki tabloda verilen işlemleri inceleyelim.

| | |
|--|--------------------------------------|
| • $ 3 \cdot 5 = 15 = 15$ | • $ 3 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$ |
| • $ (-3) \cdot 5 = -15 = 15$ | • $ -3 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$ |
| • $ (-3) \cdot (-5) = 15 = 15$ | • $ -3 \cdot -5 = 3 \cdot 5 = 15$ |
| • $\left \frac{3}{5}\right = \frac{3}{5}$ | • $\frac{ 3 }{ 5 } = \frac{3}{5}$ |
| • $\left \frac{-3}{-5}\right = \frac{3}{5}$ | • $\frac{ -3 }{ -5 } = \frac{3}{5}$ |

Bu örneklerden anlaşılabilecek özellikleri inceleyelim.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, iki sayının çarpımının (veya bölümünün) mutlak değeri, aynı sayıların mutlak değerlerinin çarpımına (veya bölümüne) eşittir.

- a. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- b. $y \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ dır.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

- a. $|2x - 4| = |2(x - 2)| = |2| \cdot |x - 2| = 2|x - 2|$
- b. $|9 - 3x| = |-3(x - 3)| = |-3| \cdot |x - 3| = 3|x - 3|$
- c. $|x^2 - 4x + 4| = |(x - 2) \cdot (x - 2)| = |x - 2| \cdot |x - 2| = |x - 2|^2$
- ç. $|x^2 + 6x + 9| = |(x + 3) \cdot (x + 3)| = |(x + 3)^2| = |x + 3|^2$ yazılabilir.

Örnek 15

$x < 2$ ve $x \neq -2$ için $\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right|$ ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm

$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right|$ ifadesini $\left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \right|$ şeklinde yazabiliriz.

O halde; $\left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \right| = \frac{|x + 2| \cdot |x - 2|}{|x + 2|} = |x - 2|$ olur.

$x < 2$ olarak verildiğinden $|x - 2| = 2 - x$ olarak buluruz.

Aşağıda verilen örnekleri inceleyelim.

- $|3 + 5| = |8| = 8$
- $|(-3) + 5| = |2| = 2$
- $|3 + (-5)| = |-2| = 2$
- $|(-3) + (-5)| = |-8| = 8$
- $|3| + |5| = 3 + 5 = 8$
- $| -3| + |5| = 3 + 5 = 8$
- $|3| + | -5| = 3 + 5 = 8$
- $| -3| + | -5| = 3 + 5 = 8$

Örnekler incelendiğinde, sayıların aynı işaretli olması durumunda toplamın aynı; farklı işaretli olması durumunda ise ayrı ayrı mutlak değerler toplamının daha büyük olduğu görülebilir. Bu durum şöyle ifade edilir:

İki gerçekte sayının toplamının mutlak değeri, sayıların mutlak değerlerinin toplamından küçük veya eşittir.

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ için } |x + y| \leq |x| + |y|$$

Örnek 16

x, y sıfırdan farklı gerçekte sayılar olmak üzere, $\frac{|x + y|}{|x| + |y|}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

$|x + y| \leq |x| + |y|$ olduğunu biliyoruz. $|x| + |y| > 0$ olduğundan her iki tarafı $|x| + |y|$ ile bölebiliriz. Bu durumda;

$\frac{|x + y|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} \Rightarrow \frac{|x + y|}{|x| + |y|} \leq 1$ olur. O halde $\frac{|x + y|}{|x| + |y|}$ ifadesinin en büyük değeri 1 olur.

Örnek17

x, y gerçekte sayıları için $3x - 2y \neq 0$ olmak üzere, $\frac{3|x| + 2|y|}{|3x - 2y|}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm

$$|3x - 2y| \leq |3x| + |-2y| \Rightarrow |3x - 2y| \leq 3|x| + 2|y|$$

$$\Rightarrow \frac{|3x - 2y|}{|3x - 2y|} \leq \frac{3|x| + 2|y|}{|3x - 2y|}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3|x| + 2|y|}{|3x - 2y|}$$

O halde ifadenin en küçük değeri 1 olur. Bu değer x ve y nin zıt işaretli olduğu durumlarda elde edilir. Örneğin, $x = 1$ ve $y = -2$ değerlerini alalım.

$$\frac{3|1| + 2|-2|}{|3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)|} = 1 \text{ olur. (Nedenini düşününüz.)}$$

Örnek18

$|x| + |-3x| = 24$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|x| + |-3x| = 24 \Rightarrow |x| + 3|x| = 24$$

$$\Rightarrow 4|x| = 24$$

$$\Rightarrow |x| = 6$$

$\text{ÇK} = \{-6, 6\}$ bulunur.

Örnek19

$|3x - 6| + |5x - 10| = 24$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|3x - 6| + |5x - 10| = 24 \Rightarrow 3|x - 2| + 5|x - 2| = 24$$

$$\Rightarrow 8|x - 2| = 24$$

$$\Rightarrow |x - 2| = 3$$

$$x - 2 = 3 \text{ veya } x - 2 = -3$$

$$x = 5 \text{ veya } x = -1$$

$\text{ÇK} = \{-1, 5\}$ bulunur.

Anahtar Bilgi



$$|x| = |-x|$$

Örnek20

$||x - 3| - 5| = 2$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$|x - 3| - 5 = 2$ veya $|x - 3| - 5 = -2$ dir.

$$|x - 3| = 7 \text{ veya } |x - 3| = 3$$

$$x - 3 = 7 \text{ veya } x - 3 = -7 \text{ veya } x - 3 = 3 \text{ veya } x - 3 = -3$$

$$x = 10 \text{ veya } x = -4 \text{ veya } x = 6 \text{ veya } x = 0$$

O halde $\text{ÇK} = \{-4, 0, 6, 10\}$ olur. Denklemi sağlayan değerlerinin toplamı 12 olarak bulunur.

Örnek21

$|x - 2| = |x - 3|$ denklemini çözelim.

Çözüm

$|x - 2| = |x - 3|$ denkleminde iki mutlak değer içeren durum olduğu için bu ifadeleri mutlak değer dışında yazabileceğimiz farklı durumları incelemeliyiz.

$x - 2$ ifadesi $x = 2$ için 0 değerini alırken $x - 3$ ifadesi de $x = 3$ için 0 değerini almaktadır. $x = 2$ ve $x = 3$ değerleri bu ifadelerin işaret değiştirdiği yerlerdir.

O halde $x \leq 2$, $2 < x < 3$ ve $x \geq 3$ olmak üzere 3 farklı durumu inceleyeceğiz.

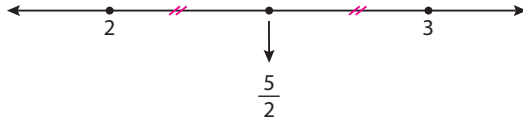
1. Yöntem

| $x \leq 2$ | $2 < x < 3$ | $x \geq 3$ |
|-------------------------|--|-------------------------|
| $2 - x = 3 - x$ | $x - 2 = 3 - x$ | $x - 2 = x - 3$ |
| $2 = 3$ | $2x = 5$ | $-2 = -3$ |
| $\text{ÇK} = \emptyset$ | $x = \frac{5}{2}$ | $\text{ÇK} = \emptyset$ |
| | $\text{ÇK} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ | |

Sonuç olarak $x = \frac{5}{2}$ denklemin tek çözümüdür.

2. Yöntem

Soruda ifade edilen durum, sayı doğrusu üzerinde 2 ve 3 noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar olarak düşünülürse, bu iki sayının tam orta noktası, yani $\frac{5}{2}$ çözüm olur.

**Örnek 22**

$|x^2 + x - 6| = |x + 3|$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm

$$|x + 3| |x - 2| = |x + 3|$$

$$|x + 3| |x - 2| - |x + 3| = 0$$

$$|x + 3| (|x - 2| - 1) = 0$$

$$|x - 2| = 1 \text{ veya } |x + 3| = 0$$

$$x - 2 = 1 \text{ veya } x - 2 = -1 \text{ veya } x = -3$$

$$x = 3; x = 1; x = -3$$

$$\text{ÇK} = \{-3, 3, 1\} \text{ bulunur.}$$

Örnek 23

$-2 \leq x \leq 22$ eşitsizliğini, $|x - c| \leq a$ gibi bir mutlak değerli eşitsizlik biçiminde yazalım.

Çözüm**1. Yöntem**

$$-2 \leq x \leq 22 \text{ ve } |x - c| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x - c \leq a$$

$$\Leftrightarrow -a + c \leq x \leq a + c$$

Bu durumda

$$-a + c = -2$$

$$+ \quad a + c = 22$$

$$2c = 20 \Rightarrow c = 10 \text{ bulunur. } 10 + a = 22 \Rightarrow a = 12 \text{ olur.}$$

O halde; $-2 \leq x \leq 22$ eşitsizliği $|x - 10| \leq 12$ şeklinde gösterilir.

2. Yöntem

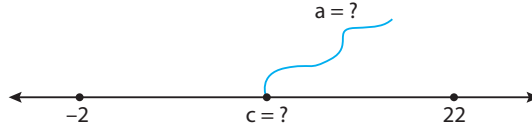
$|x - c| \leq a$ ifadesini sayı doğrusu üzerindeki c noktasına bağlanılan a birim uzunluğundaki ipin her iki tarafa uzatılması şeklinde düşünelim.

Dikkat

Sayı doğrusu üzerindeki koordinatları $A(a)$ ve $B(b)$ olan iki noktanın orta noktasının koordinatları $C\left(\frac{a+b}{2}\right)$ dir.

**İnceleyelim**

Yandaki çözümde, $|x + 3| |x - 2| = |x + 3|$ eşitliğinde $|x + 3|$ ün neden sadeleştirilmediğini düşününüz.



-2 ile 22 arasındaki toplam uzunluk 24 birim olduğuna göre $a = \frac{24}{2} = 12$ ve orta nok-

ta olan c noktasının koordinatı da $\frac{-2 + 22}{2} = 10$ olarak bulunur.

Buna göre $-2 \leq x \leq 22$ eşitsizliği $|x - 10| \leq 12$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 24

$\left| \frac{3 - 4x}{-5} \right| \leq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \left| \frac{3 - 4x}{-5} \right| \leq 6 &\Rightarrow \frac{|3 - 4x|}{|-5|} \leq 6 \Rightarrow |3 - 4x| \leq 30 && |-5| = 5 \\ &\Rightarrow -30 \leq 3 - 4x \leq 30 \\ &\Rightarrow -33 \leq -4x \leq 27 && \text{Her tarafa } (-3) \text{ eklenir.} \\ &\Rightarrow \frac{-33}{-4} \leq \frac{-4x}{-4} \leq \frac{27}{-4} && \text{Her taraf } -4 \text{ ile bölünür.} \\ &\Rightarrow \frac{33}{4} \geq x \geq \frac{-27}{-4} && \text{Eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat ediniz.} \\ &\Rightarrow \text{ÇK} = \left[-\frac{27}{4}, \frac{33}{4} \right] \text{ şeklinde yazılabilir.} \end{aligned}$$

Örnek 25

$5|3 - 2x| + 8 > 13$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulup sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

$$\begin{aligned} 5|3 - 2x| + 8 > 13 &\Rightarrow 5|2x - 3| > 5 \\ &\Rightarrow |2x - 3| > 1 \\ &\Rightarrow 2x - 3 > 1 \text{ veya } 2x - 3 < -1 \\ &\Rightarrow 2x > 4 \text{ veya } 2x < 2 \\ &\Rightarrow x > 2 \text{ veya } x < 1 \end{aligned}$$

O halde, çözüm kümesi $\text{ÇK} = \{x \mid x > 2 \text{ veya } x < 1, x \in \mathbb{R}\}$



Örnek 26

$|2x - 6| - 4 + 3x \geq 0$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x - 6| - 4 + 3x \geq 0 \Rightarrow |2x - 6| \geq -3x + 4$ olur. İki durumda incelenebilir.

1. Durum $x \geq 3$ için;

$$|2x - 6| = 2x - 6 \text{ dır. O halde, } 2x - 6 \geq -3x + 4 \Rightarrow 5x \geq 10 \\ \Rightarrow x \geq 2$$

Bu durumun başlangıç şartı $x \geq 3$ olduğu için $x \geq 3$ ve $x \geq 2$ nin kesişim aralığı olan $x \geq 3$ veya $[3, \infty)$ çözüm olur.

2. Durum $x < 3$ için;

$$|2x - 6| = 6 - 2x \text{ dir. O halde, } 6 - 2x \geq -3x + 4 \Rightarrow x \geq -2$$

Bu durumun da başlangıç şartı $x < 3$ olduğu için $x < 3$ ve $x \geq -2$ nin kesişim aralığı olan $-2 \leq x < 3$ veya $[-2, 3)$ çözüm olur.

İki durum için bulduğumuz çözüm kümelerinin birleşimini alarak sorumuzun çözüm kümesini bulmuş oluruz.

$\mathbb{K} = [-2, 3) \cup [3, \infty) = [-2, \infty)$ olarak buluruz.

Örnek 27

pH bir çözeltinin asitlik derecesini gösteren bir ölçü birimidir. Sağlıklı bir insanın mide-sindeki asitlik derecesinin 0,5 pH sapmayla 2,5 pH olduğu bilinmektedir.

Buna göre sağlıklı bir midenin pH aralığını gösterelim.

Çözüm

x bir midenin pH derecesi olsun. Sağlıklı bir midenin pH değeri ile belirlediğimiz mide-nin pH değerleri arasındaki fark 0,5 pH ya da daha küçük olmalıdır. Bunu mutlak değerli bir eşitsizlik olarak şu şekilde gösterebiliriz.

$$|x - 2,5| \leq 0,5 \Rightarrow 0,5 \leq x - 2,5 \leq 0,5 \\ \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Bu durumda sağlıklı bir midenin pH değeri 2 ile 3 arasındadır.

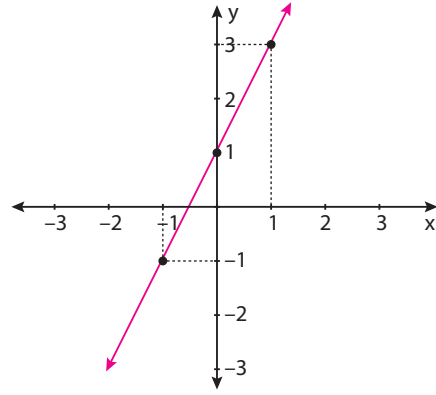
Mutlak Değer İçeren Denklem ve Eşitsizliklerin Grafikselleştirilmesi

$|ax + b| = k$ denklemi ile $|ax + b| < k$ ve $|ax + b| > k$ eşitsizliklerin çözümlerinin cebirsel yaklaşım ile nasıl çözüleceğini öğrendik. Bu kısımda $y = |ax + b|$ şeklindeki mutlak değerli ifadelerin grafikler kullanarak nasıl çözüleceğini inceleyelim.

Bunun için $y = |ax + b|$ denkleminin grafiğini çizmeyi bilmemiz gereklidir. Öncelikle birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin nasıl çözüleceğini hatırlayalım.

$y = mx + n$ şeklindeki bir denklemin grafiğini çizmek için x 'e değerler vererek y değerleri elde edilir. Elde edilen noktalardan en az iki tanesi koordinat düzleminde işaretlenir ve doğru bu iki noktadan geçecek şekilde çizilir. Örneğin $y = 2x + 1$ doğrusu için x 'e verdiğimiz değerlere karşılık elde ettiğimiz y değerleri aşağıdaki tabloda gösterilmektedir. Elde edilen (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzleminde göstererek bu noktalardan geçen doğrunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

| x | y | (x, y) |
|----|----|----------|
| -1 | -1 | (-1, -1) |
| 0 | 1 | (0, 1) |
| 1 | 3 | (1, 3) |
| 2 | 5 | (2, 5) |



Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemin ($y = mx + n$) grafiğini çizmek için doğru üzerinde en az iki noktaya ihtiyaç vardır. Aşağıdaki basamaklar takip edilerek grafikler çizilebilir.

1. $x = 0$ için y değeri bulunur. $(0, n)$
2. $y = 0$ için x değeri bulunur. $(-\frac{n}{m}, 0)$
3. Elde edilen $(0, n)$ ve $(-\frac{n}{m}, 0)$ sıralı ikilileri koordinat düzleminde işaretlenerek grafik çizilir.
4. $x = 0$ için $y = 0$ oluyorsa x e sıfırdan farklı bir değer verilip y elde edilerek grafik çizilir.

Örnek28

$y = |6 - 2x|$ denkleminin grafiğini çizelim.

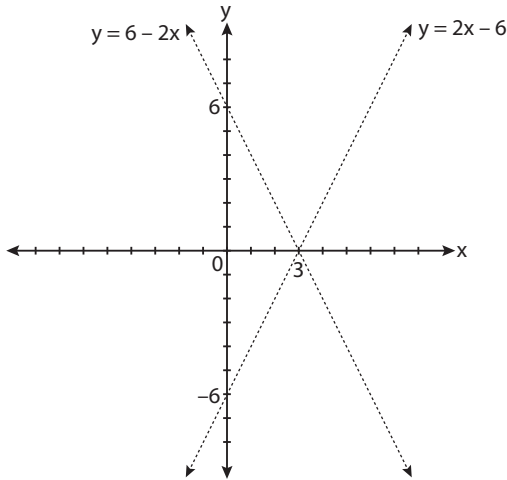
Çözüm**1. Yöntem**

Öncelikle mutlak değer içindeki cebirsel ifadenin 0 değerini aldığı x değerini bulalım.

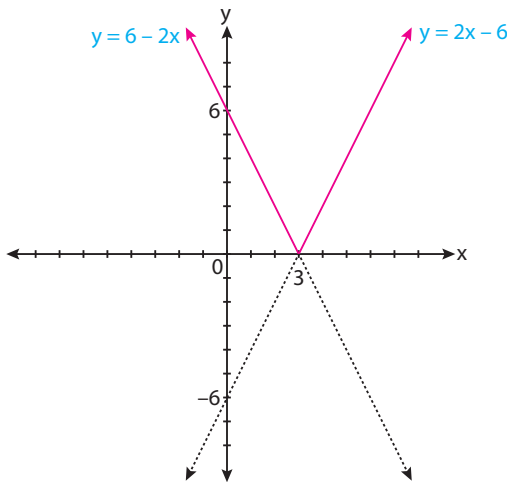
$$6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$6 - 2x$ ifadesinin $x = 3$ için 0 değerini aldığını bulduktan sonra x yerine 3'ten küçük ve büyük birer sayı yazarak $x < 3$ için pozitif, $x > 3$ için de negatif olduğu anlaşılabilir.

Buna göre $x > 3 \Rightarrow |6 - 2x| = 6 - 2x$ ve $x < 3 \Rightarrow |6 - 2x| = 2x - 6$ olur.

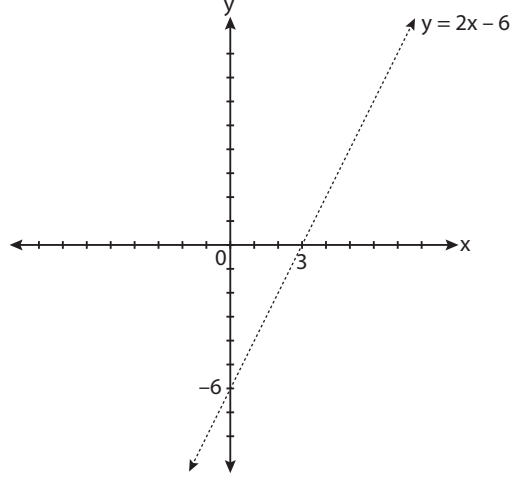


$y = 6 - 2x$ ve $y = 2x - 6$ doğrularını koordinat düzleminde kesikli olarak çizelim.

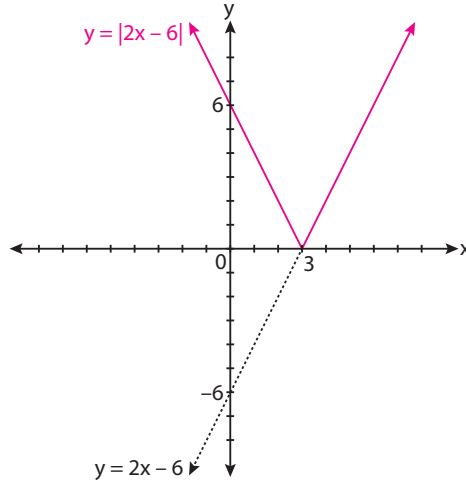


Daha sonra da x in 3 den küçük olduğu yerlerde $y = 6 - 2x$ doğrusunu, x in 3 den büyük olduğu yerlerde $y = 2x - 6$ doğrusunu almak yeterli olacaktır.

2. Yöntem



Mutlak değerin içindeki $2x - 6$ ifadesinin grafiği $y = 2x - 6$ olarak çizilir.



$y = |2x - 6|$ elde edilirken $y = 2x - 6$ doğrusunun x - ekseninin altında kalan (negatif) kısımları mutlak değer dışına işaret değiştirip pozitif olarak çıkacağı için x - eksenine göre simetriği alınır.

$y = |ax + b|$ denkleminin grafiği çizilirken, $y = ax + b$ doğrusunun grafiği çizilip, grafiğin x -ekseninin altında kalan kısmın x - eksenine göre simetriği alınır.

Örnek29

$|x + 5| = 2x - 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x + 5| = 2x - 3$ denkleminin çözüm kümesini 2 farklı yolla inceleyelim.

1. Yöntem

$|x| = a$ için $x = a$ ve $x = -a$ durumları şeklinde düşünerek $|x + 5| = 2x - 3$ denklemi aşağıdaki gibi iki ayrı durumda incelenir.

$$x + 5 = 2x - 3 \quad \text{ve} \quad x + 5 = -2x + 3$$

$$8 = x \quad \text{ve} \quad 3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

bulunur. Bu durumda iki ayrı çözüm var gibi görünmektedir. Bu aşamada bulduğunuz çözümler denklemlerde yerine koyup kontrol edelim.

$$x = 8 \text{ için}$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ için}$$

$$|8 + 5| \stackrel{?}{=} 2 \cdot 8 - 3$$

$$\left| -\frac{2}{3} + 5 \right| \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - 3$$

$$13 \stackrel{?}{=} 16 - 3$$

$$\left| -\frac{13}{3} \right| \stackrel{?}{=} -\frac{4}{3} - 3$$

$$13 = 13$$

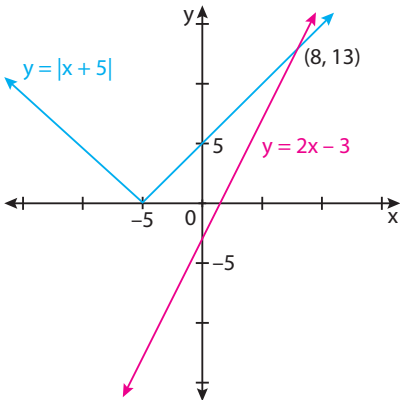
$$\frac{13}{3} \neq -\frac{13}{3}$$

$x = -\frac{2}{3}$ değeri denklemi sağlamadığı için $x = 8$ denklemin tek çözümüdür.

2. Yöntem (Grafik Yaklaşımı)

$|x + 5| = 2x - 3$ denkleminin çözüm kümesi,

$y = |x + 5|$ ve $y = 2x - 3$ grafiklerinin kesişim noktalarının apsiseridir.



Çözümün $y = x + 5$ doğrusu ile $y = 2x - 3$ doğrusunun kesişim noktasının apsisi olan 8 olduğu görülmektedir.

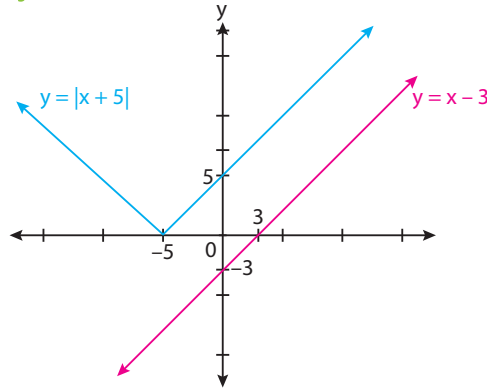
Dikkat

Mutlak değer içeren denklemler çözülürken, çözüm olarak bulunan değerler her zaman denklemin çözüm kümesinde olmayabilir. Bulduğunuz değerler denkleminde yerine yazılarak kontrol edilmelidir.

Örnek30

$|x + 5| = x - 3$ denkleminin çözüm kümesini $y = |x + 5|$ ve $y = x - 3$ denklemlerinin grafiklerini çizerek bulalım.

Çözüm



$x > -5$ için, $|x + 5| = x + 5$ ve $y = x + 5$ doğrusunun eğimi $y = x - 3$ doğrusunun eğimine eşit olduğundan doğrular kesişmeyecektir. Bu nedenle çözüm kümesi boş kümedir. Cebirsel çözüm yaparak da bu sonuç elde edilebilir.

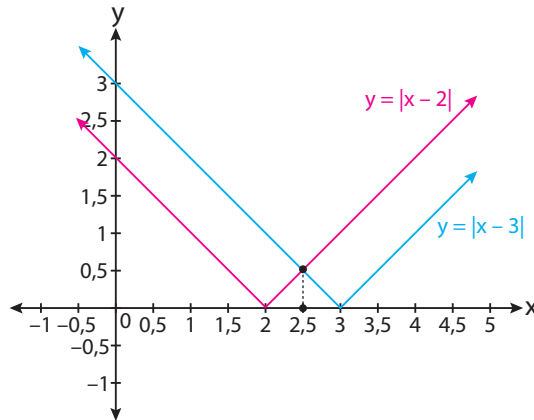
Örnek31

$|x - 2| < |x - 3|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

1. Yöntem (Grafik yaklaşımı)

Çözümü öncelikle $y = |x - 2|$ ve $y = |x - 3|$ grafiklerini karşılaştırarak inceleyelim.



Her iki grafiğin kesişim noktası

$$3 - x = x - 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

Grafik incelendiğinde $x < \frac{5}{2}$ için

$y = |x - 3|$ ün grafiği $y = |x - 2|$ nin grafiğinin üstünde yer alır.

Diğer bir ifadeyle $x < \frac{5}{2}$ için

$$|x - 2| < |x - 3| \text{ olur.}$$

Buna göre $\text{ÇK} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ dir.

2. Yöntem

Bir önceki örnekte yaptığımız gibi mutlak değerli ifadeleri mutlak değer dışında yazdığımız her bir durum için elde edilen çözümleri bulmalı ve bu çözüm kümelerinin birleşimini çözüm kümesi olarak ifade etmeliyiz.

| | | | |
|----------------------------|---|-------------------------|---|
| ← | 2 | 3 | → |
| ↓ | ↓ | ↓ | |
| $x \leq 2$ | $2 < x < 3$ | $x \geq 3$ | |
| $ x - 2 < x - 3 $ | $ x - 2 < x - 3 $ | $ x - 2 < x - 3 $ | |
| $2 - x < 3 - x$ | $x - 2 < 3 - x$ | $x - 2 < x - 3$ | |
| $2 < 3$ | $x < \frac{5}{2}$ | $-2 < -3$ | |
| $\text{ÇK} = (-\infty, 2]$ | $\text{ÇK} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ | $\text{ÇK} = \emptyset$ | |

Sonuç olarak, $|x - 2| < |x - 3|$ eşitsizliğinin çözüm kümesi elde edilen üç çözüm kümesinin birleşimidir. Buna göre, $\text{ÇK} = (-\infty, 2] \cup \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \emptyset = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ olur.

Örnek32

$|x - 2| + |x + 4| = 5$ denklemini sağlayan tüm x değerlerini bulalım.

Çözüm

1. Yöntem

3 farklı durumda incelenmesi gerekir.

$$x < -4 \text{ ise } -(x - 2) - (x + 4) = 5 \Rightarrow -x + 2 - x - 4 = 5 \\ \Rightarrow -2x = 7$$

$$x = -\frac{7}{2} \text{ fakat } -\frac{7}{2} > -4 \text{ olduğu için şartları sağlamaz.}$$

$-4 \leq x < 2$ ise $-x + 2 + x + 4 = 5 \Rightarrow 6 = 5$ doğru bir eşitlik olmadığı için çözüm kümesi boş kümedir.

$$x \geq 2 \text{ ise } x - 2 + x + 4 = 5 \Rightarrow 2x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ fakat } \frac{3}{2} < 2 \text{ olduğu için şartları sağlamaz.}$$

Bu durumda sorumuzun cevabı boş kümedir.

Dikkat

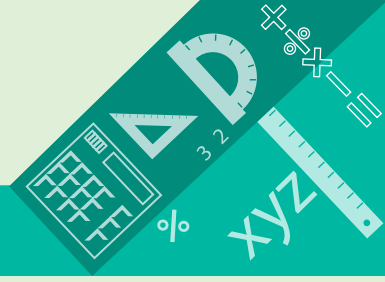
Cebirsel çözüm üzerinde çalışırken tüm aralık durumlarını göz önüne almalıyız.

2. Yöntem

Soruyu sayı doğrusu üzerindeki -4 ve 2 noktalarına uzaklıkları toplamı 5 birim olan noktalar olarak düşünüp sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



-4 ile 2 arasındaki herhangi bir sayının bu iki noktaya olan uzaklıkları toplamı 6 birimdir. Bu noktalar dışındaki her sayının noktalara olan uzaklıkları toplamının 6 birimden büyük olduğu görülebilir. O halde istenen şartı sağlayan bir x gerçekte sayı yoktur. Çözüm kümesi boş kümedir.



Bu atölye çalışmasında $|x - a| + |x - b| = k$ şeklinde yazılabilen denklemlerin çözümü incelenecektir.

Araç-Gereçler: ip, raptiye, karton

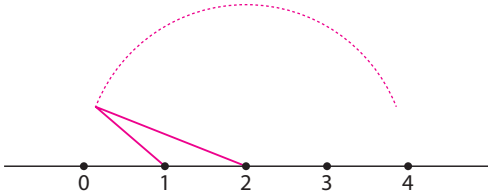
$|x - a| + |x - b| = k$ şeklindeki denklemin çözüm kümesi sayı doğrusu üzerindeki bir a noktası ile yine sayı doğrusu üzerindeki bir b noktasına uzaklıklarının toplamı k olan x değerleridir. Örneğin $a = 2$, $b = 1$ ve $k = 3$ olsun. Buna göre $|x - 2| + |x - 1| = 3$ denklemi elde edilir.

Adım 1

Bir kartonun üzerine sayı doğrusu çizin ve 3 birim uzunluğundaki bir ipin bir ucunu $x = 2$, diğer ucunu da $x = 1$ noktalarının bulunduğu yere raptiye yardımı ile sabitleyiniz.

Adım 2

Bu ip gergin bir şekilde aşağıdaki gibi tutulup uç kısmının sayı doğrusunu kestiği noktalar işaretlendiğinde sayı doğrusu üzerinde $x = 2$ ve $x = 1$ noktalarına uzaklıkları toplamı 3 olan noktalar bulunmuş olur. Bu noktalar denklemin çözüm kümesini oluşturur. Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi $\{0, 3\}$ tür.



İp sayı doğrusu dışındaki yerlere ulaşmaktadır. Ama bu denklemde sayı doğrusu üzerindeki noktalar istendiğinden sayı doğrusu dışındaki yerleri ihmal ediniz.

Sıra sizde

Adım 3

İşaretlediğiniz noktaları denklemde yerine yazınız. Bu noktalar için ne söyleyebilirsiniz?

Adım 4

Yukarıdaki adımları takip ederek

1. $|x - 4| + |x - 1| = 6$
2. $|x - 4| + |x + 1| = 6$
3. $|x - 4| + |x - 1| = 3$
4. $|x - 4| + |x - 1| = 2$

denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

Adım 5

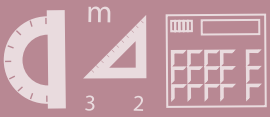
3. soruda nasıl bir çizim yapabildiniz. Raptiyeleri sabitlediğiniz noktalar arasındaki uzaklık ile kullandığınız ipin uzunluğu arasında nasıl bir ilişki var?

Adım 6

Adım: 4. sorudaki nasıl bir durumla karşılaştınız. Bu durumu yorumlayınız.

Sonuç

$|x - a| + |x - b| = k$ şeklindeki denklemlerin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesinin a , b ve k arasındaki ilişkilere göre nasıl değiştiğini belirtiniz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

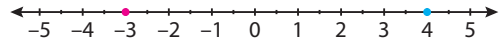
Kavram Yoklama ve Muhakeme

- Aşağıdaki ifadelerde doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.
 - (...) $|x - 3| = -2$ denkleminin çözüm kümesi boş kümedir.
 - (...) $|x + 4| < -2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi boş kümedir.
 - (...) $|2x - 5| > -2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi boş kümedir.
 - (...) Herhangi a ve b gerçekte sayıları için $|a - b|$ ifadesi sayı doğrusu üzerinde a ile b arasındaki uzaklığı belirtir.
- $|x| = -x$ ifadesi hangi durumlarda doğrudur. Açıklayınız.
- $|x - y| = |y - x|$ dir. Neden?
- $|x + y| = |x| + |y|$ eşitliği x ve y nin her değeri için doğru mudur?
Değilse, hangi şartlar altında doğru olacağını yazınız.
- $|x - 7| + |x + 14|$ ifadesinin;
 - Alabileceği en küçük değeri bulup geometrik yorumunu yapınız.
 - Hangi aralıklarda bu ifadenin değeri artmaya başlar?

6. $|x - 4| \leq 0$ eşitsizliğini sadece 4 sayısı sağlamaktadır. Nedenini açıklayınız.

7. $|4x + 5| < -2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi boş kümedir. Nedenini açıklayınız.

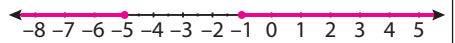
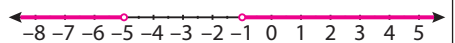
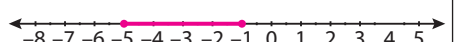
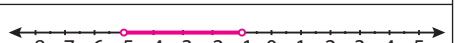
8. $|-3x + 2| > -6$ eşitsizliğinin çözüm kümesi bütün gerçekte sayılardır. Nedenini açıklayınız.

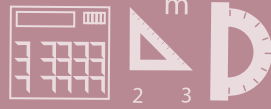
9. 

$|2x - 1| = 7$ denklemini sağlayan sayılar yukarıda sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.

Buna göre, $|2x - 1| > 7$ ve $|2x - 1| < 7$ eşitsizliklerinin çözüm kümelerini cebirsel bir çözüm yapmadan yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde yorumlayınız.

10. Aşağıda verilen eşitsizlikler ile grafikleri eşleştiriniz.

| | |
|------------------|--|
| $ x + 3 \leq 2$ |  |
| $ x + 3 < 2$ |  |
| $ x + 3 \geq 2$ |  |
| $ x + 3 > 2$ |  |



KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $|8|$

b. $|-9|$

c. $|2 - \sqrt{3}|$

ç. $|3 - 2\sqrt{2}|$

d. $|\sqrt{5} - 3|$

2. $x < 5$ olmak üzere, $|x - 5|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $-3 < x < 7$ olmak üzere, $|x + 3| + |x - 7|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. $x < 0$ olmak üzere, $|3x - |2x||$ ifadesinin eşitini bulunuz.

5. $a < 0 < b$ olmak üzere, $|a - b| - |a| + |b|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

6. $x < y < 0 < z$ olmak üzere, aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $|x - y| + |y - z|$

b. $|z - x| + |y| + |z|$

c. $|2z - y| + |x - y| + |-2z|$

7. $|3x - 75|$ ifadesini en küçük yapan x değerini bulunuz.

8. $|x - 3| + |y + 5| + |z - 2y| = 0$ olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

9. Aşağıda verilen mutlak değerli denklemlerin çözüm kümelerini gerçekte sayılar kümesinde bulunuz.

a. $|x - 7| = 10$

b. $|2x - 8| = 12$

c. $|3x - 11| = -3$

ç. $||x| - 3| = 2$

10. $||x - 7| - 3| = 6$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamını bulunuz.

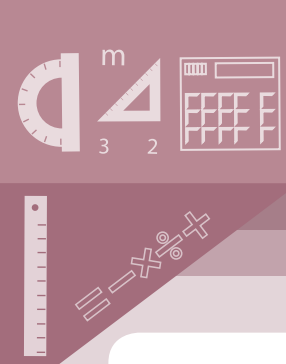
11. Aşağıda verilen mutlak değerli denklemlerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3x| + |-2x| + |5x| + |-x| = 22$

b. $|3x - 6| + |-2x + 4| + |8 - 4x| = 27$

c. $|x - 3| = |x + 4|$

ç. $|2x - 6| = x + 5$



KENDİMİZİ SINAYALIM

12. Aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizliklerin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x - 3| < 8$
- b. $|2x - 4| \leq 8$
- c. $|3 - 5x| < 4$
- ç. $6 + 2|4 - 3x| \leq 12$
- d. $|3x - 12| \leq 0$

13. Aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizliklerin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x - 3| > 8$
- b. $|3x - 3| > 9$
- c. $\frac{3}{|x - 6|} \leq \frac{6}{5}$
- ç. $|-3x + 8| > -4$

14. $6 \leq |2x - 8| < 12$ eşitsizliğini sağlayan x in tam sayı değerlerini bulunuz.

15. $|14 - |x|| < 16$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

16. $\frac{9}{|3x - 6|} \geq \frac{6}{15}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

17. $|3x + 4| < 2x - 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

18. $|x - 7| < |x - 5|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

19. x ve y sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere;
 $\frac{|7x + 7y|}{|x| + |y|}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

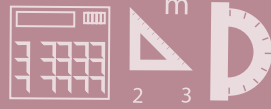
20. $|x| < 3$ olmak üzere, $2x + 3y = -10$ eşitliğini sağlayan y nin kaç farklı tam sayı değeri vardır?

21. Aşağıdaki ifadelerin olası değerleri nelerdir?

- a. $\frac{|x - 3|}{x - 3}$
- b. $\frac{|x|}{-x}$
- c. $\frac{|3x - 5|}{|5 - 3x|}$

22. Ahmet, Murat'ın yaşının tahminen 28 olduğunu söylüyor. Murat da Ahmet'e 2 yıl hata ile doğru bir tahmin yaptığını söylüyor. Murat'ın gerçek yaşı m olsun.

Buna göre Murat'ın gerçek yaşının bulunduğu aralığı hem eşitsizlik hem de mutlak değer ile gösteriniz.

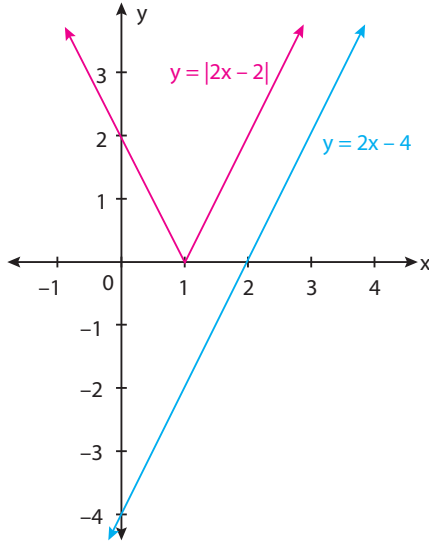


KENDİMİZİ SINAYALIM

- 23.** Uzmanlar, sağlıklı bir insanın nabız değerinin dakikada ortalama 80 olduğunu ve 20 birimlik sapmanın da normal olduğunu ifade etmektedirler.

Buna göre, sağlıklı bir insanın nabzını mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

- 24.** $y = |2x - 2|$ ve $y = 2x - 4$ denklemlerinin grafikleri aşağıdaki gibi çiziliyor.

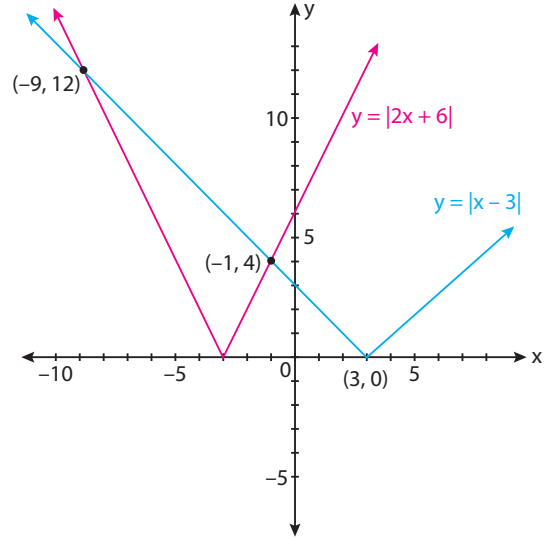


Bu grafikler ile gösterilebilen

- a.** çözüm kümesi boş küme olan
b. çözüm kümesi tüm gerçekteki sayılar olan
birer denklem ve eşitsizlik yazınız.

- 25.** $|x + 5| < x - 3$ ve $|x + 5| > x - 3$ eşitsizliklerinin çözüm kümesini bulunuz.

26.



Yukarıda grafikleri verilen $y = |2x + 6|$ ve $y = |x - 3|$ doğrularıyla elde edilen aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a.** $|2x + 6| = |x - 3|$
b. $|x - 3| \leq |2x + 6|$
c. $|x - 3| > |2x + 6|$

- 27.** $\frac{1}{|x - 2| + |x - 5| + |x - 9|}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

- 28.** $|x^2 - 16| = |x + 4|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

- 29.** x ve y sıfırdan farklı gerçekteki sayılar olmak üzere;
 $\frac{|3x| + |-3y|}{|2x + 2y|}$ kesrinin alabileceği en küçük değeri kaçtır?

- 30.** $\left| \frac{4}{3x - 6} \right| \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

Neler Öğreneceğiz?

- Denklem sistemlerini
- Denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerini

Anahtar Terimler

- Denklem
- Denklem Sistemleri

Sembol ve Gösterimler

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = m \end{cases}$$

2.2.3. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

Başlarken

“Ahmet’in kumbarasında 25 kuruşluk ve 50 kuruşluk olmak üzere toplam 50 adet madeni para bulunmaktadır. Ahmet’in kumbarasında toplam 20 TL olduğuna göre 25 ve 50 kuruşluk madeni paralardan kaçar tane vardır?” şeklindeki problemlerle birçok kez karşılaşırız. Bu ve benzeri problemlerin çözümü için denklem sistemlerinden yararlanılır. Bu problem cebirsel olarak, 25 kuruşların sayısı x , 50 kuruşların sayısı y olmak üzere aşağıdaki iki denklemin birlikte çözülmesini gerektirir.

$$x + y = 50$$

$$25x + 50y = 2000$$



Bu iki denklem aynı x ve y değişkenleri arasındaki iki farklı ilişkiyi göstermektedir.

Birinci denklemi sağlayan $(1, 49), (3, 47), (15, 35), (20, 30), (25, 25), (45, 5)$ gibi farklı sıralı ikililer vardır. Benzer şekilde ikinci denklemi sağlayan sıralı ikililerden, $(2, 39), (4, 38), (10, 35), (20, 30), (30, 25)$ örnek olarak verilebilir.

Bu şekilde, birinci dereceden aynı değişkenlerden oluşan birden fazla denklem grubuna, **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Yukarıdaki gibi bir denklem sisteminin çözüm kümesi, bu iki denklemi aynı anda sağlayan (x, y) sıralı ikililerin, varsa, bulunması şeklinde olur.

a, b ve k sabit gerçekte sayılar a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax + by = k$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

Değişkenleri birinci dereceden ve aynı olan birden fazla denklem grubuna ise **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Denklem sisteminin çözümünde aynı anda iki denklem çözüldüğü için, çözüm olarak bulunan (x, y) sıralı ikilisi her iki denklemi de sağlamalıdır.

Örnek 1

(0,4) ve (3,2) sıralı ikilisinin aşağıdaki denklemlerin her ikisi için de bir çözüm olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Çözüm

(0,4) sıralı ikilisindeki $x = 0$ ve $y = 4$ değerlerini her iki denklemde de yerine koyarak kontrol edelim.

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y = 12 & x - y = 1 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 & 0 - 4 = -4 \end{array}$$

(0,4) sıralı ikilisi $2x + 3y = 12$ denklemini sağlayıp $x - y = 1$ denklemini sağlamadığı için bu denklem sistemi için bir çözüm değildir.

(3,2) sıralı ikilisindeki $x = 3$ ve $y = 2$ değerlerini her iki denklemde de yerine koyarak kontrol edelim.

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y = 12 & x - y = 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 & 3 - 2 = 1 \end{array}$$

(3,2) sıralı ikilisi her iki denklemi sağladığı için bu denklem sisteminin çözümüdür.

$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ gibi bir denklem sisteminin çözüm kümesini sıralı ikilileri tek tek yerine

koyarak belirlemek her zaman mümkün değildir. Denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için **Yerine koyma, Yok etme, Grafik çizme** gibi matematiksel yöntemler kullanılır. Bu yöntemlerin denklem sistemlerinin çözümünde nasıl kullanılacağını inceleyelim.

Yerine Koyma Yöntemi

$\begin{cases} y - 2x = 5 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$ denklem sistemini düşünelim. Bu denklem sisteminde bulunan

$y - 2x = 5$ denklemini, y bilinmeyeni yalnız bırakılarak $y = 5 + 2x$ olarak yazılabilir. Eşit iki matematiksel ifade birbirinin yerine kullanılabileceği için ikinci denklemde y yerine $5 + 2x$ yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

Dikkat

Denklem sistemleri için bulduğunuz çözüm kümesini işlem hatası ihtimaline karşı her iki denklemde de yerine koyarak kontrol ediniz.

$$x + 2y = 15$$

2. denklem

$$x + 2\left(\frac{5 + 2x}{y}\right) = 15$$

y yerine $5 + 2x$ yazalım.

$$x + 10 + 4x = 15$$

$$5x + 10 = 15$$

Görüldüğü gibi ikinci denklemde $5 + 2x$ yerine yazılarak $5x + 10 = 15$ denklemi elde edildi. Bu yöntem kullanılarak bilinmeyen sayısı 1'e indirilmiş oldu. Elde edilen bu denklem çözülürse,

$$5x + 10 = 15$$

$$5x + 10 - 10 = 15 - 10 \quad \text{Her iki taraftan 10 çıkaralım.}$$

$$5x = 5$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{5}{5}$$

Her iki taraf 5'e bölelim.

$$x = 1$$

bulunur.

Bu işlem sonucunda sadece $x = 1$ sonucuna ulaştık. Fakat y değerini halen bilmiyoruz. $y = 5 + 2x$ denkleminde x yerine 1 yazarak y bulunur.

$$y = 5 + 2x$$

x = 1 olduğunu biliniyor.

$$y = 5 + 2 \cdot 1$$

x yerine 1 yazalım.

$$y = 5 + 2$$

$$y = 7 \text{ dir.}$$

O halde, (1, 7) sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür. (1, 7) sıralı ikilisini her iki denklemde de yerine koyarak çözümü kontrol edelim.

$$y - 2x = 5$$

$$x + 2y = 15$$

$$7 - 2 \cdot 1 = 5$$

$$1 + 2 \cdot 7 = 15$$

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ gibi bir denklem sisteminin yerine koyma yöntemi ile çözümünde; birinci ya da ikinci denklemde x ya da y değişkeni yalnız bırakılarak, elde edilen ifade diğer denklemde yerine yazılır.

Örnek 2

Aşağıdaki denklem sistemini yerine koyma yöntemini kullanarak çözelim.

$$\begin{cases} 3x - y = 15 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Çözüm

Adım 1 ▶

Denklemlerden bir tanesini bilinmeyenlerden birini yalnız bırakacak şekilde düzenleyelim.

$$x + 2y = 12 \quad \text{2. denklem}$$

$$x = 12 - 2y \quad \text{Her iki taraftan } 2y \text{ çıkaralım.}$$

Adım 2 ▶

x yerine $12 - 2y$ ifadesini birinci denklemde yerine koyalım.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 15 && \text{1. denklem} \\ 3\left(\frac{12-2y}{x}\right) - y &= 15 && x \text{ yerine } 12 - 2y \text{ yazalım.} \\ 36 - 6y - y &= 15 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Adım 3 ▶

x değerini bulmak için, birinci adımda elde edilen $x = 12 - 2y$ denkleminde y yerine 3 yazalım.

$$\begin{aligned} x &= 12 - 2y && y = 3 \text{ olduğunu biliniyor.} \\ x &= 12 - 2 \cdot 3 && y \text{ yerine } 3 \text{ yazalım.} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Çözüm olarak (6, 3) sıralı ikilisini elde ettik. $x = 6$ ve $y = 3$ değerlerini her iki denklemde de yerine yazarsak;

$$3 \cdot 6 - 3 = 15$$

$$6 + 2 \cdot 3 = 12$$

Her iki denklemin de sağlandığı görülmektedir.

Anahtar Bilgi

$a = b$ ve $c = d$ şeklinde verilen iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$\begin{array}{r} a = b \\ + c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$$

şeklinde yazılabilir.

Yok Etme Yöntemi

Denklem sistemlerini çözmede kullanılan bir diğer yöntem yok etme yöntemidir. Yok etme yönteminde, denklemlerin belli bir sayı ile çarpma ve taraf tarafa toplama işlemleri yapılır.

$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases}$ denklem sistemini inceleyelim. Bu denklem sisteminde bulunan denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$$3x + 4y = 14$$

$$5x - 4y = 10$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

Taraf tarafa toplanarak y'yi yok edelim.

Her iki tarafı 8'e bölelim.

Elde edilen x değeri herhangi bir denklemde yerine yazılarak y bulunur.

$$5x - 4y = 10$$

$x = 3$ yazalım.

$$5 \cdot 3 - 4y = 10$$

$$y = \frac{5}{4}$$

Dolayısıyla $\left(3, \frac{5}{4}\right)$ sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür. x ve y değerlerini her iki denklemde yerine koyarak kontrol ediniz!

Yok etme yönteminde her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Fakat verilen denklem sisteminde taraf tarafa toplama işlemi ile bilinmeyenlerden birisi yok olmuyorsa, çarpma işlemi ile bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir.

Örnek 3

Aşağıdaki denklem sistemini yok etme yöntemini kullanarak çözelim.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 4 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Çözüm

Adım 1

Denklemleri çözmek için x veya y değişkenlerinden birinin katsayısının eşit ve zıt işaretli yapılması gerekir. Yukarıda verilen denklem sisteminde x'in katsayılarını eşit ve zıt işaretli yapmak için $\frac{1}{2}x - y = 4$ denklemini -2 ile çarpalım.

$$\frac{1}{2}x - y = 4$$

$$-2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - y \right) = -2 \cdot 4 \quad \text{Her iki taraf } -2 \text{ ile çarpalım.}$$

$$-x + 2y = -8$$

Adım 2 ►

$$-x + 2y = -8$$

$$x + 3y = 12$$

$$5y = 4$$

$$y = \frac{4}{5}$$

Taraf tarafa toplayıp ve x'i yok edelim.

Adım 3 ►

$y = \frac{4}{5}$ olarak bulunan çözüm denklemlerden herhangi birinde yerine konularak x değeri bulunur.

$$\frac{1}{2}x - y = 4$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5} = 4 \quad y \text{ yerine } \frac{4}{5} \text{ yazalım.}$$

$$x = \frac{48}{5}$$

Sonuç olarak bu denklem sisteminin çözümü $\left(\frac{48}{5}, \frac{4}{5} \right)$ sıralı ikilisidir. Her iki denklemde yerine koyarak kontrol ediniz!

Denklem Sistemlerinin Çözümünün Grafik Yorumu

$y = mx + n$ şeklindeki bir ifadenin koordinat düzleminde eğimi m, y eksenini kestiği nokta n, x eksenini kestiği noktanın ise $-\frac{n}{m}$ olan bir doğru belirttiğini biliyoruz.

$\left. \begin{array}{l} y - 2x = -1 \\ y + x = 5 \end{array} \right\}$ denklem sisteminde bulunan her iki denklemi $y = mx + n$ şeklinde yazalım ve daha sonra bu iki doğrunun grafiğini aynı koordinat düzleminde çizelim.

1. denklem

$$y - 2x = -1$$

$$y = 2x - 1$$

2. denklem

$$y + x = 5$$

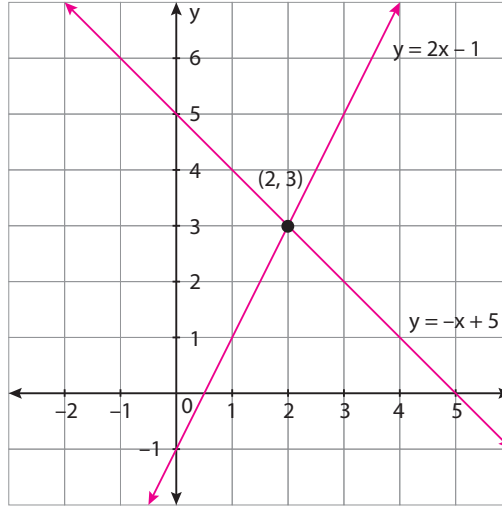
$$y = -x + 5$$

Dikkat

Grafik çiziminde kolaylık olması için x yerine 0 yazıp y değeri ve y yerine 0 yazıp x değeri bulunur.

Anahtar Bilgi

$y = mx + n$ ve $ax + by = c$ denklemlerin grafikleri koordinat düzleminde bir doğru belirtir.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere, iki denklemi aynı anda sağlayan çözüm tektir ve doğruların kesiştiği nokta olan (2, 3) noktasıdır.

Bu ortak çözüm cebirsel olarak yerine koyma yöntemiyle aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$y = 2x - 1 \quad \text{1. Denklem}$$

$$y = -x + 5 \quad \text{2. Denklem}$$

$$2x - 1 = -x + 5 \quad \text{2. denklemde } y \text{ yerine } 2x - 1 \text{ yazalım.}$$

$$x = 2$$

y 'nin değerini bulmak için $y = -x + 5$ denkleminde x yerine 2 yazalım.

$$y = -x + 5$$

$$y = -2 + 5 \quad \text{x yerine 2 yazalım.}$$

$$y = 3$$

O halde, çözüm kümesi (2, 3) elde edilir.

Örnek 4

Aşağıdaki denklem sistemini grafiklerini çizerek çözelim.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$$

Çözüm

Adım 1

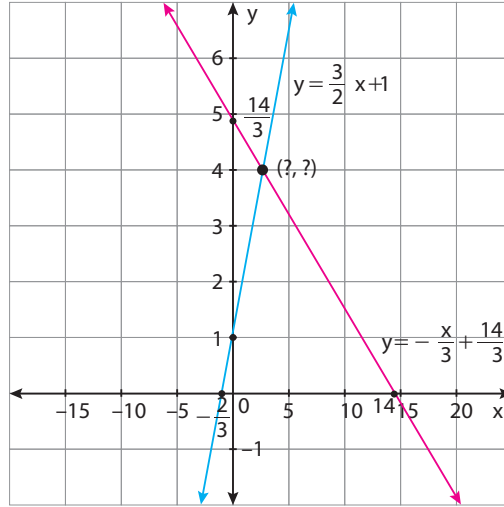
Her iki denklemi de $y = mx + n$ şeklinde yazarak doğruların grafiklerini çizelim.

$$3x - 2y = -2 \quad (1. \text{ denklem})$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

$$x + 3y = 14 \quad (2. \text{ denklem})$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{14}{3}$$



Grafik üzerinde, doğruların kesişim noktası denklem sisteminin çözümünü göstermektedir. Şimdi bu çözümü tam olarak bulalım.

Adım 2 ▶

Grafik üzerinde görülen kesişim noktasının x bileşeni yerine koyma yöntemi ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3}{2}x + 1 && 1. \text{ Denklem} \\
 y &= -\frac{x}{3} + \frac{14}{3} && 2. \text{ Denklem} \\
 \frac{3}{2}x + 1 &= -\frac{x}{3} + \frac{14}{3} && 2. \text{ denklemde } y \text{ yerine } \frac{3}{2}x + 1 \text{ yazalım.} \\
 \frac{11x}{6} &= \frac{11}{3} \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Elde edilen $x = 2$ değeri herhangi bir denklemde yerine konularak y değeri de bulunur.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3}{2}x + 1 \\
 y &= \frac{3}{2} \cdot 2 + 1 && x \text{ yerine } 2 \text{ yazalım.} \\
 y &= 4
 \end{aligned}$$

Grafik üzerinde görülen kesişim noktası $(2, 4)$ sıralı ikilisidir.

Denklem sisteminde bulunan denklemleri belirten doğruların çakışması veya paralel olması durumunda çözüm kümesinin nasıl olacağını aşağıdaki örnekler üzerinde inceleyelim.

Örnek 5

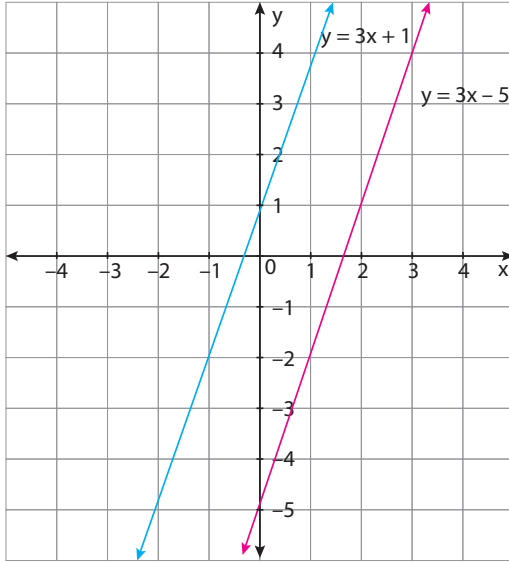
$$\left. \begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= 3x + 1 \end{aligned} \right\} \text{ denklem sisteminin çözümünü inceleyelim.}$$

Çözüm

Yerine koyma yöntemi ile çözelim.

$$\begin{aligned}
 y &= 3x - 5 && 1. \text{ Denklem} \\
 y &= 3x + 1 && 2. \text{ Denklem} \\
 3x - 5 &= 3x + 1 && 2. \text{ denklemde } y \text{ yerine } 3x - 5 \text{ yazalım.} \\
 -5 &= 1
 \end{aligned}$$

Bu eşitlik doğru değildir. Bu sonuç her iki denklemi sağlayan bir (x, y) sıralı ikilisinin bulunamayacağı anlamına gelir. Bu denklemleri belirten doğruları koordinat düzleminde gösterelim.



Grafikte görüldüğü üzere, doğrular paraleldir ve kesişim noktaları yoktur.

Örnek 6

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 15 \end{cases} \text{ denklem sisteminin çözümünü inceleyelim.}$$

Çözüm

Yok etme yöntemi ile çözelim.

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 15 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 15 \end{array}} \right\} & \\ -3 \cdot (x - 2y) = -3 \cdot 5 & & \text{1. denklem } -3 \text{ ile çarpalım.} \\ \begin{array}{l} -3x + 6y = -15 \\ 3x - 6y = 15 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} -3x + 6y = -15 \\ 3x - 6y = 15 \end{array}} \right\} & \text{Yeni oluşan denklem sisteminde} \\ + & & \text{taraf tarafa toplama işlemi yapalım.} \\ \hline 0 + 0 = 0 & & \end{array}$$

Yok etme yöntemi ile $0 = 0$ sonucu elde edildi.

Bu her iki denklemin aynı olduğu ve dolayısıyla denklemlerden birisini sağlayan bütün sıralı ikililerin diğer denklemi de sağladığı anlamına gelir.

Anahtar Bilgi

Bir denklem sisteminde;

- Doğrular kesişiyor ise çözüm kümesi (x, y) sıralı ikilisi şeklinde tek bir noktadan oluşur.
- Doğrular paralel ise çözüm kümesi boş kümedir.
- Doğrular çakışık ise sistemdeki her iki denklem de aynıdır. Dolayısıyla denklemlerden birini sağlayan bütün sıralı ikililer çözüm kümesidir ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Dikkat

Bu bölümdeki sorularda aksi belirtilmedikçe x ve y değişken olarak kabul edilecektir.

$y = mx + n$ şekline dönüştürüldüğünde, her iki denklem de $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ olmaktadır. Bu da her ikisinin de grafiğinin aynı olacağı anlamına gelir.

O halde, çakışık iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde bütün x gerçek sayıları için bir y değeri bulunur. Bu nedenle çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Örnek 7

$\begin{cases} ax + 16y - b = 0 \\ 4x + 8y + 3 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin bütün x gerçek sayıları için çözümü olduğuna göre, a ve b'yi bulalım.

Çözüm

Denklem sistemi bütün x gerçek sayıları için sağlandığına göre bu doğrular çakışıktır. Buna göre, $ax + 16y - b = 0$ denklemi ile $4x + 8y + 3 = 0$ denklemi aynı olmalıdır veya biri diğerrinin bir k gerçek sayısı ile çarpılmış hali olmalıdır.

$$k \cdot (4x + 8y + 3) = ax + 16y - b$$

$$4kx + 8ky + 3k = ax + 16y - b$$

Bu durumda

$$\frac{a}{4} = \frac{16}{8} = \frac{-b}{3} = k$$

olmalıdır. Buradan, $a = 8$ ve $b = -6$ bulunur.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \text{ denklem sisteminde;}$$

$$1. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi boş kümedir.}$$

$$2. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ ise doğrular çakışıktır. Çözüm kümesi ise sonsuz elemanlıdır ve doğrulardan birini sağlayan bütün sıralı ikililerdir.}$$

Örnek 8

Giriş kısmında verilen sorunun çözümünü inceleyelim. Ahmet'in kumbarasında 25 kuruşluk ve 50 kuruşluk olmak üzere toplam 50 adet madeni para bulunmaktadır. Bu paraların toplamı 20 TL olduğuna göre 25 ve 50 kuruşluk madeni paralardan kaç tane olduğunu bulalım.

Çözüm

x adet 25 kuruşluk ve y adet 50 kuruşluk olsun. Paraların sayısını ve toplam değerini denklem olarak yazalım.

$$x + y = 50$$

$$25x + 50y = 2000$$

Bu denklem sistemi yok etme yöntemi ile çözülürse,

$$\begin{array}{lcl} \left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 25x + 50y = 2000 \end{array} \right\} & \text{Denklem sistemi} & \\ -25(x + y) = -25 \cdot 50 & \text{Katsayılar eşit ve zıt işaretli yapmak için birinci denklem} & \\ -25x - 25y = -1250 & -25 \text{ ile çarpalım.} & \\ \left. \begin{array}{l} -25x - 25y = -1250 \\ 25x + 50y = 2000 \end{array} \right\} & \text{Yeni denklem sistemi} & \\ \hline 25y = 750 & \text{Taraf tarafa toplayalım.} & \\ y = 30 & & \end{array}$$

$x + y = 50$ denkleminde y yerine 30 yazılarak, $x = 20$ bulunur.

O halde 25 kuruşluk madeni paralardan 20 tane 50 kuruşluk madeni paralardan 30 tane vardır.

Örnek 9

Bir oyuncak firması model araba üretmektedir. Üretilen arabaların tanesinin 20 TL'den satılması planlanmaktadır. Model araba üretiminin başlangıçtaki altyapı maliyeti 600 TL olup ürün başına birim maliyet ise 5 TL dir. Buna göre,

- Maliyet (M) ve gelir (G) denklemlerini yazalım.
- Firmanın zarar etmemesi için en az kaç model araç satması gerektiğini bulalım.
- Kâr denklemini ve 60 araç satıldığında ne kadar kâr elde edileceğini bulalım.
- Firmanın 900 TL kâr elde edebilmesi için kaç araç satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

- a. x , üretilen ve satılan model araba miktarı olsun.

Arabaların tanesi 20 TL olduğu için elde edilen gelir denklemi;

$$G = 20x \text{ olur.}$$

Maliyet (M) denklemi, araba üretimi için gereken başlangıç maliyetine ek olarak üretilen her bir araba için yapılan maliyeti göstermektedir. Bu durumda maliyet denklemi;

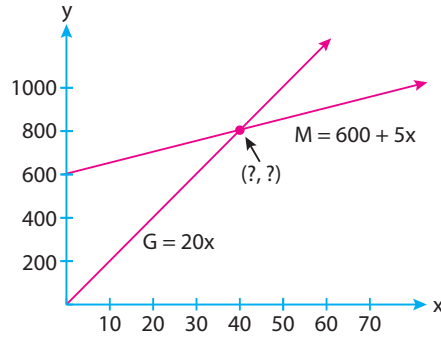
$$M = 600 + 5x \text{ olur.}$$

- b. Firmanın zarar etmemesi maliyetin gelire eşit olmasına bağlıdır.

Gelir ve maliyet denklemleri denklem sistemi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{cases} y = 20x \\ y = 5x + 600 \end{cases}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesi grafik çizme yöntemi kullanılarak bulunulabilir. Bunun her iki denklemin grafiğini çizelim.



Her iki doğrunun kesişim noktalarını belirlemek için cebirsel çözümü yapalım.

$$y = 20x \quad \text{1. Denklem}$$

$$y = 5x + 600 \quad \text{2. Denklem}$$

$$20x = 5x + 600 \quad \text{2. denklemde } y \text{ yerine } 20x \text{ yazalım.}$$

$$x = 40$$

40 araç üretildiğinde maliyet ve gelir eşit olmaktadır.

- c. Kâr denklemi gelir denkleminden maliyet denklemi çıkarılarak elde edilir. Bu durumda;

$$K = G - M$$

$$K = 20x - (600 + 5x)$$

$$K = 15x - 600$$

60 araç satıldığında elde edilecek olan kârı bulabilmek için x yerine 60 yazılır.

$$K = 15 \cdot 60 - 600 = 300 \text{ TL}$$

- ç. Firmanın 900 TL gelir elde edebilmesi için satması gereken araba sayısını bulmak için kâr denklemi kullanılabilir. K değeri 900 olarak alınırsa,

$$900 = 15x - 600$$

$$1500 = 15x$$

$$\frac{1500}{15} = \frac{15x}{15}$$

$$100 = x$$

bulunur. O halde, 900 TL kâr elde edilebilmesi için 100 araba satılmalıdır.

Örnek 10

AY araç kiralama firması, belirli bir otomobil modelini günlük 40 TL sabit ücret ve her bir kilometre için 0,5 TL olmak üzere kiralamaktadır. YILDIZ firması ise aynı araç için günlük 25 TL ve her bir kilometre için 0,75 TL kiralama tarifi uygulamaktadır. Buna göre, bu araç için

- AY firmasından bir gün için kiralamanın maliyet denklemi ile YILDIZ firmasından kiralamanın maliyet denklemlerini bulalım.
- AY firması ile YILDIZ firmasının bir günlük kiralama maliyetlerinin kaç kilometrede eşit olacağını bulalım.

Çözüm

- Günlük gidilecek yol x km olmak üzere aracı AY ve YILDIZ firmalarından kiralamanın günlük maliyetlerini gösteren denklemler aşağıdaki gibi yazılır. M_A AY firmasına ait günlük maliyeti, M_Y Yıldız firmasına ait günlük maliyeti göstermek üzere;

$$M_A = 40 + 0,5 \cdot x$$

$$M_Y = 25 + 0,75 \cdot x \text{ şeklinde yazılır.}$$

- **b.** AY firması ile YILDIZ firmasının bir günlük araç kiralama maliyetlerinin kaç kilometre yol gidilirse eşit olacağını tahmin etmek için önce bazı kilometre değerlerini kullanarak bir tablo oluşturalım.

| Gidilen yol (km) (x) | Maliyet | |
|-------------------------|------------------------------------|--|
| | AY firmasının günlük maliyeti (TL) | YILDIZ firmasının günlük maliyeti (TL) |
| | $(M_A = 40 + 0,5 \cdot x)$ | $(M_Y = 25 + 0,75 \cdot x)$ |
| 0 | 40 | 25 |
| 10 | 45 | 32,5 |
| 14 | 47 | 35,5 |
| 24 | 52 | 43 |
| 32 | 56 | 49 |
| 40 | 60 | 55 |
| 48 | 64 | 61 |
| 54 | 67 | 65,5 |
| 58 | 69 | 68,5 |
| 70 | 75 | 77,5 |

Tabloda görüldüğü gibi 58 km ile 70 km arasında bir bulunan bir değer için bu iki firmanın maliyetleri eşit olacaktır.

Şimdi bu değeri cebirsel bir yöntemle de bulmaya çalışalım. Bu durumda her iki maliyet denklemini bir denklem sistemi olarak yazıp ortak çözüm yapmamız gerekmektedir.

$$\left. \begin{array}{l} y = 40 + \frac{1}{2}x \\ y = 25 + \frac{75}{100}x \end{array} \right\}$$

Bu denklem sistemini **yerine koyma** yöntemi ile çözelim ve çözümü grafik üzerinde inceleyelim.

Birinci denklemdeki $40 + \frac{1}{2}x$ ifadesi ikinci denklemdeki y yerine yazılırsa,

$$y = 40 + \frac{1}{2}x$$

1. Denklem

$$y = 25 + \frac{75}{100}x$$

2. Denklem

$$40 + \frac{1}{2}x = 25 + \frac{75}{100}x$$

2. denklemde y yerine $40 + \frac{1}{2}x$ yazalım.

$$x = 60$$

Denklemlerden herhangi birinde x yerine 60 yazarak y değeri bulunabilir.

$$y = 40 + \frac{1}{2}x$$

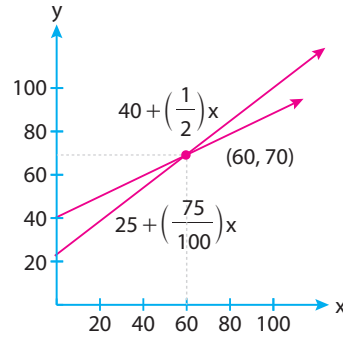
1. Denklem

$$y = 40 + \frac{1}{2} \cdot 60$$

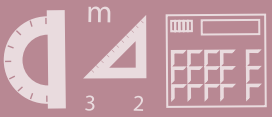
x yerine 60 yazalım.

$$y = 70$$

Sonuç olarak, denklem sisteminin çözümünün (60, 70) sıralı ikilisi olduğunu bulmuş olduk. Grafik üzerinde de (60, 70) noktasının doğruların kesişim noktası olduğu görülmektedir.



Sonuç olarak günlük 60 km yol gidildiğinde AY ve YILDIZ firmasına ödenecek olan tutar eşit ve 70 TL'dir.

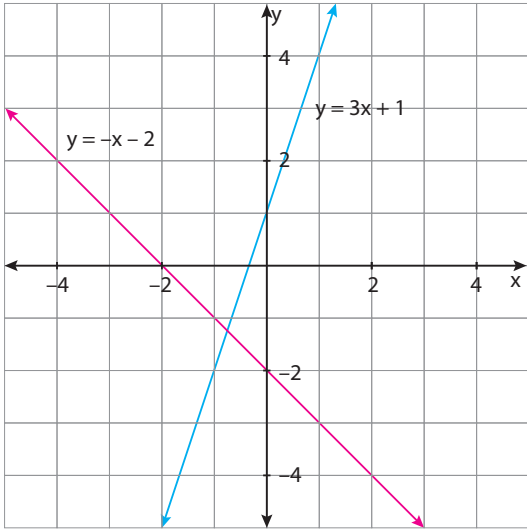


KENDİMİZİ SINAYALIM

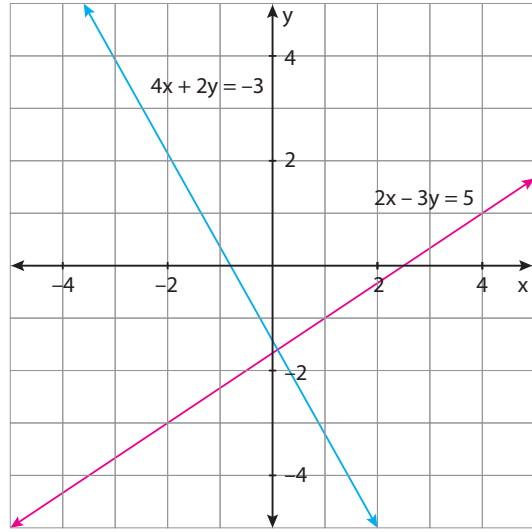
Kavram Yoklama ve Muhakeme

- Aşağıda verilen sıralı ikililerde boş olan yerleri $2x + y = 12$ denklemini sağlayacak şekilde doldurunuz.
a. $(0, \dots)$ b. $(\dots, 6)$ c. $(-2, \dots)$
- Aşağıda verilen grafikler bazı denklem sistemlerini göstermektedir. Grafik üzerinde denklem sistemine ait (varsa) çözüm kümesini tahmin etmeye çalışınız. Daha sonra grafik üzerinde gösterilen her bir denklem sistemini yazarak sembolik olarak çözünüz.

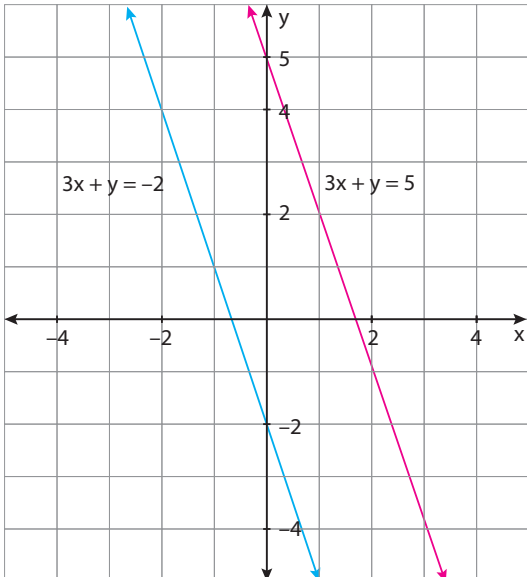
a.



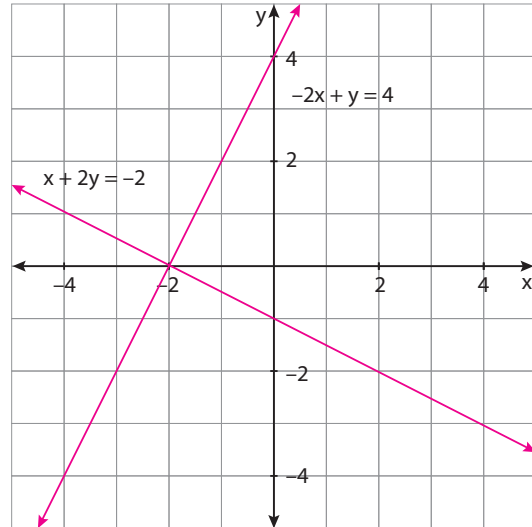
b.

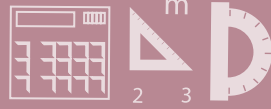


c.



ç.





KENDİMİZİ SINAYALIM



3. Aşağıda verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafiklerini çiziniz.

a. $x + 2y - 14 = 0$

b. $3x - 2y = 18$

c. $3x + 6y - 24 = 0$

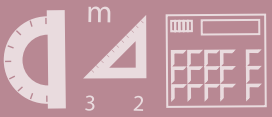
ç. $4x - 5y = 20$

d. $3x - 7y = -8$

4.
$$\begin{cases} (a + 1)x + 2y - b + 3 = 0 \\ 7x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$
 denklem sisteminde bütün x gerçekte sayıları için bir y değeri bulunabiliyorsa, $a + b$ nedir?

5.
$$\begin{cases} kx + 2y = 5 \\ 2x - 3y = t \end{cases}$$
 denklem sisteminin çözümü $(-1, 3)$ sıralı ikilisi ise k ve t kaç olmalıdır?

6.
$$\begin{cases} (a + 1)x + 4y + 14 = 0 \\ (2a - 3)x + 7y - 13 = 0 \end{cases}$$
 denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olması için a 'nın alabileceği değeri bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a.
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 6 - 4y = 2x \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x = y - 2 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

ç.
$$\begin{cases} 2x - 2y = -10 \\ 4x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{5} = 1 \\ \frac{x+2}{-2} + \frac{y-6}{3} = -1 \end{cases}$$

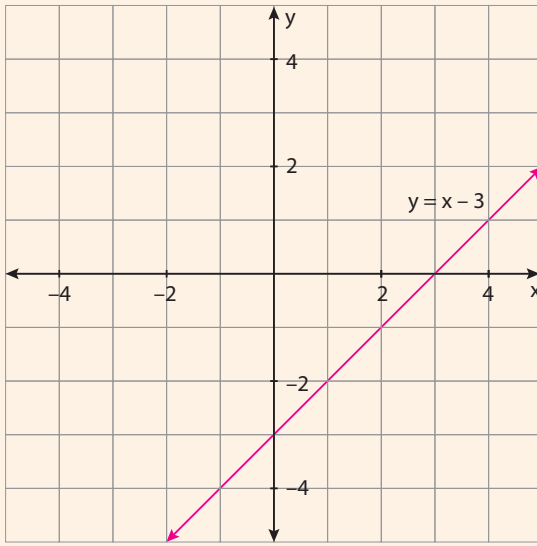
Uygulama ve Problem Çözme

1. Bir kitapta birbirini takip eden iki sayfanın numaralarının toplamı 225 olduğuna göre, bu iki sayfanın sayfa numaralarını iki bilinmeyenli bir denklem sistemi kullanarak bulunuz.
2. Toplamları 37 olan iki sayıdan biri diğerinin 4 katının üç eksiğidir. Bu sayıları denklem sistemi oluşturarak bulunuz.
3. Vizyona giren yeni bir sinema filminin gösterimini yapan bir sinema, bir seansta yetişkin ve öğrenci biletlerinden toplam 200 adet satarak 1210 TL gelir elde etmiştir. Öğrenci biletleri satış fiyatı 5 TL, yetişkin bilet satış fiyatı ise 8 TL'dir. Her bir biletten ne kadar satıldığını bulunuz.

2.2.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlik ve Eşitsizlik Sistemleri

Başlarken

Bir önceki bölümden $ax + by = c$ türünden eşitliklerin birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem olduğunu ve çözüm kümesini oluşturan bütün (x, y) sıralı ikililerinin analitik düzlemde bir doğru ile gösterildiğini biliyoruz. Örneğin, $y = x - 3$ denklemi analitik düzlemde aşağıdaki gibi gösterilir ve $(3, 0)$, $(0, -3)$ bu denklemin çözüm kümesini sağlayan sıralı ikililerden bazılarıdır.



Bu konuda $y = x - 3$ denkleminde "=" sembolünün yerini $>$, $>$, \geq , \leq sembollerinden birinin aldığı $y > x - 3$ gibi, birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler incelenecek. Örneğin, $x + 2y \geq 5$ eşitsizliğini sağlayabilecek x ve y değerlerini düşünelim. x yerine 1, y yerine 3 yazdığımızda $1 + 2 \cdot 3 \geq 5$ sonucunu elde ederiz ve $7 \geq 5$ ifadesi doğru olduğu için $(1, 3)$ sıralı ikilisi $x + 2y \geq 5$ eşitsizliği için bir çözümdür. Bu şekilde x ve y 'ye farklı değerler vererek bu eşitsizliği sağlayan sonsuz sayıda (x, y) sıralı ikilisi bulabiliriz.

Bu bölümde birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümelerini ve matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceğini inceleyeceğiz.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlik

a , b ve k sabit gerçekte sayılar ve a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax + by \leq k$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir. (\leq sembolünün yerini $>$, $<$, veya \geq sembolleri alabilir.)

Bir eşitsizliği sağlayan (x, y) sıralı ikilisine o **eşitsizliğin bir çözümü** denir. Eşitsizliği sağlayan bütün sıralı ikililere ise **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir ve grafik üzerinde taralı bölge olarak gösterilir.

Neler Öğreneceğiz?

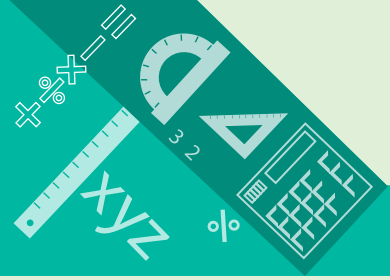
- Eşitsizlik sistemleri
- Eşitsizlik sistemlerinin çözüm yöntemleri

Anahtar Terimler

- Eşitsizlik
- Eşitsizlik Sistemleri

Sembol ve Gösterimler

$$\begin{cases} ax + by \leq k \\ cx + dy \geq m \end{cases}$$

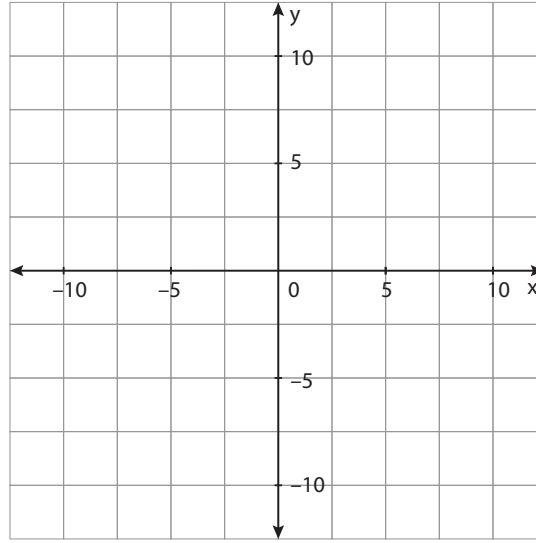


MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında iki bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesi ve matematiksel gösterimi incelenecektir.

Adım 1

$y > 2x - 1$ eşitsizliğini inceleyelim. Önce ">" sembolünün yerine "=" sembolünü koyarak elde ettiğimiz $y = 2x - 1$ denkleminin grafiğini koordinat düzleminde çizelim.



Adım 2

Aşağıdaki sıralı ikililerden her birini $y > 2x - 1$ ifadesinde yerine koyarak eşitsizliği sağlayan ve sağlamayanları belirleyip, sağlayanları renklendirerek koordinat düzleminde işaretleyelim.

$(-2, 1), (4, 1), (0, 0), (-3, 2), (9, 3), (1, 1), (3, 5), (-2, -1), (-2, -6)$

Adım 3

$y = 2x - 1$ denkleminin grafiği düzlemi iki bölgeye ayırmaktadır. Buna göre 3. adımda işaretlediğimiz noktalarının düzlemin hangi bölgesine düştüğünü belirleyelim. (Doğrunun üstünde olan nokta var mı?)

Adım 4

$y = 2x - 1$ grafiği ile ikiye bölünmüş koordinat düzleminde işaretlenmiş sıralı ikililerin eşitsizliği sağlayıp sağlamadığı bulunduğu bölgeye göre nasıl değişmektedir? Tartışınız.

Adım 5

$y > 2x - 1$ eşitsizliğini sağlayan sıralı ikililer hangi bölgeye düşmektedir ve bu bölgeden eşitsizliği sağlayan başka sıralı ikili örnekleri bulabilir misiniz?

Sonuç: $y > 2x - 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi için bir genelleme yapabilir misiniz?

Bir Eşitsizliğin Çözüm Kümesinin Koordinat Düzleminde Yorumu

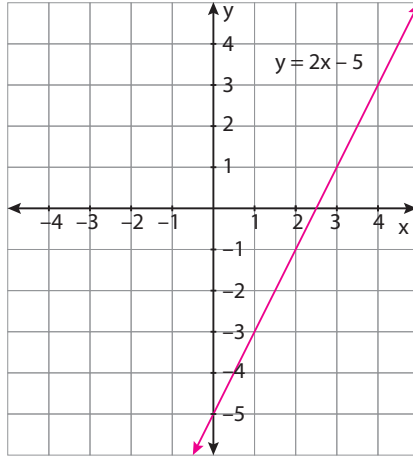
Örnek 1

$y < 2x - 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim.

Çözüm

Adım 1 ►

Öncelikle $y = 2x - 5$ denkleminin grafiğini çizelim.



Adım 2 ►

Çizdiğimiz grafik ile iki bölgeye ayrılan koordinat düzleminde hangi bölgenin çözüm kümesi olduğuna karar verelim. Bunun için herhangi bir nokta alıp eşitsizlikte yerine yazalım. Örneğin, $(0, 0)$ noktası $y < 2x - 5$ eşitsizliğinde yerine yazıldığında

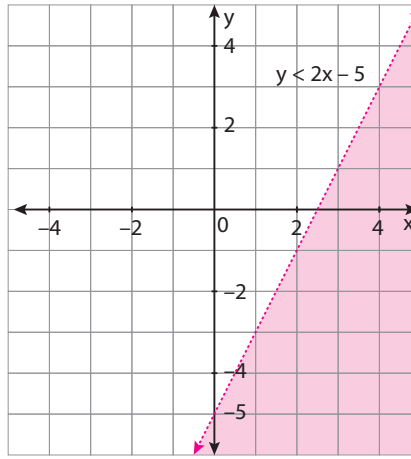
$$y < 2x - 5 \text{ ise } 0 < 2 \cdot 0 - 5$$

$$0 < -5$$

sonucu elde edilir.

Adım 3

Bu sonuç yanlış olduğu için $(0, 0)$ sıralı ikilisi $y < 2x - 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde değildir. Bu nedenle $(0, 0)$ noktasının bulunduğu bölge yerine $y = 2x - 5$ doğrusunun ayırdığı diğer bölge çözüm kümesini oluşturur ve bu bölge koordinat düzleminde taranarak gösterilir.



Dikkat

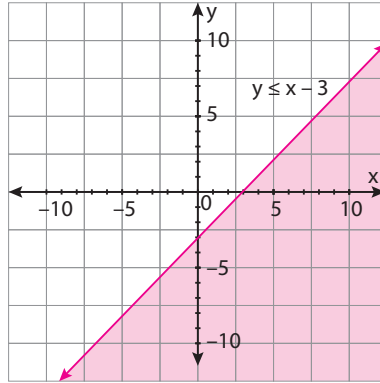
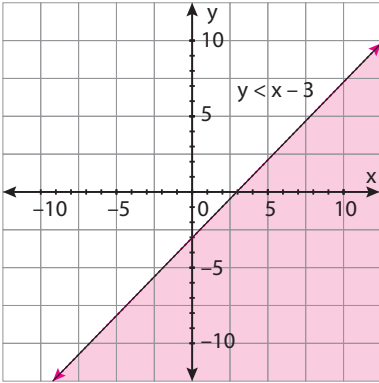
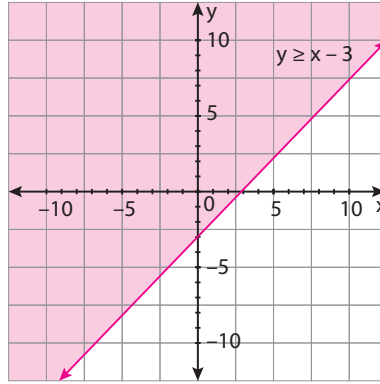
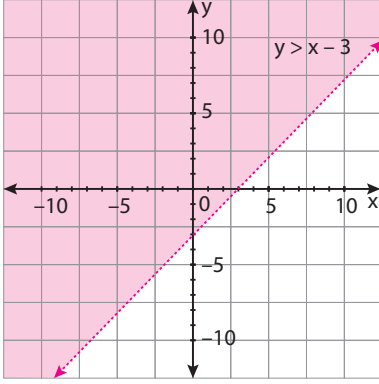
İki bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümeleri koordinat düzleminde belirlenen bölgenin taranmasıyla gösterilir.

Grafikte görülen taralı bölge eşitsizliğin çözüm kümesi olup, buradan alınan herhangi bir nokta $y < 2x - 5$ eşitsizliğini sağlamaktadır. $y = 2x - 5$ denklemini sağlayan noktalar (doğrunun kendisi) eşitsizliği sağlamadığı için kesik çizgi ile gösterilmektedir.

Eşitsizliklerin Grafiklerini Çizerken;

- 1. Eşitsizlik sembolünü "=" sembolüne çevirerek bir denklem elde ediniz. Bu denklemin grafiğini çiziniz. $<$, $>$ sembolleri için kesikli çizgi, \leq , \geq sembolleri için grafiği düz çizgi olarak çiziniz.
- 2. Denklem grafiğinin iki bölgeye ayırdığı koordinat düzleminin herhangi bir tarafından bir nokta alınıp eşitsizlikte yerine koyarak sağlayıp sağlamadığını kontrol ediniz.
- 3. Test ettiğiniz nokta eşitsizliği sağlıyorsa noktanın bulunduğu bölgeyi, sağlamıyorsa diğer bölgeyi tarayınız.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliğin çözüm kümesi için dört farklı durum ortaya çıkar. $y = x - 3$ denkleminde bulunan "=" sembolü, eşitsizlik sembollerinden herhangi biri ile değiştirildiğinde ortaya çıkan dört farklı eşitsizlik durumu aşağıda gösterilmiştir.



y 'nin katsayısı pozitif olmak üzere, y 'nin eşitsizlik sembolünün büyük tarafında bulunduğu durumlarda doğrunun üst bölgesi, diğer durumlarda doğrunun alt bölgesi çözüm kümesi olarak alınır.

Eşitsizlik Sistemleri

Denklem sistemlerinde olduğu gibi, değişkenleri aynı olan birden fazla eşitsizliğe **eşitsizlik sistemi** denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan (x, y) sıralı ikililerinin, ortak bir çözüm olması için sistemde bulunan her eşitsizliği sağlamalıdır.

İnceleyelim

Her bir durumun doğruluğunu test noktası kullanarak kontrol ediniz.

Örnek 2

$(2, -1)$ sıralı ikilisinin $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y > 4 \end{cases}$ eşitsizlik sistemi için bir çözüm olup olmadığını kontrol edelim.

Çözüm

$(2, -1)$ sıralı ikilisini eşitsizlik sisteminde yerine koyalım

$$x + y \leq 5 \quad 2 + (-1) \leq 5 \quad \text{Doğru}$$

$$2x - y > 4 \quad 2 \cdot 2 - (-1) > 4 \quad \text{Doğru}$$

$(2, -1)$ sıralı ikilisi her iki eşitsizliği de sağladığı için bu eşitsizlik sisteminin bir çözümüdür. Fakat bu sıralı ikili eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin elemanlarından sadece bir tanesidir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir eşitsizliğin düzlemde bir bölge belirttiğini biliyoruz. Burada birden fazla taralı bölge olduğu için eşitsizliklerin ortak bölgesini belirlememiz gerekir. Bir eşitsizlik sisteminde bulunan eşitsizliklerin grafikleri çizildiğinde, oluşabilecek farklı durumları göz önünde bulundurarak çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim.

Durum 1: Doğrular Kesişiyor İse

Örnek 3

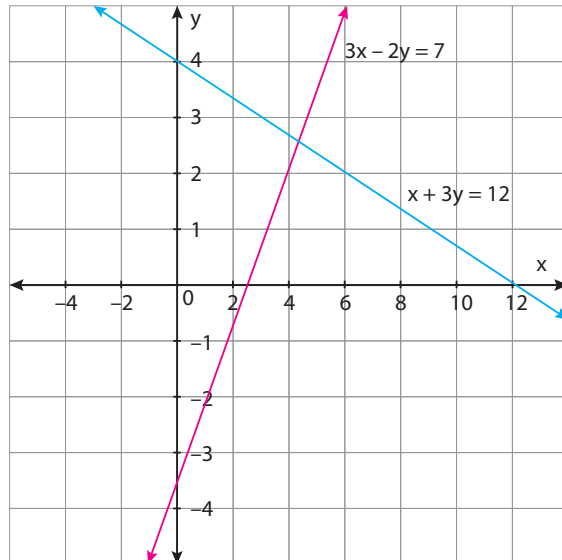
Aşağıdaki eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat düzleminde gösterelim.

$$\begin{cases} 3x - 2y > 7 \\ x + 3y \leq 12 \end{cases}$$

Çözüm

Adım 1

Önce $3x - 2y = 7$ ve $x + 3y = 12$ denklemlerinin grafiklerini çizelim.



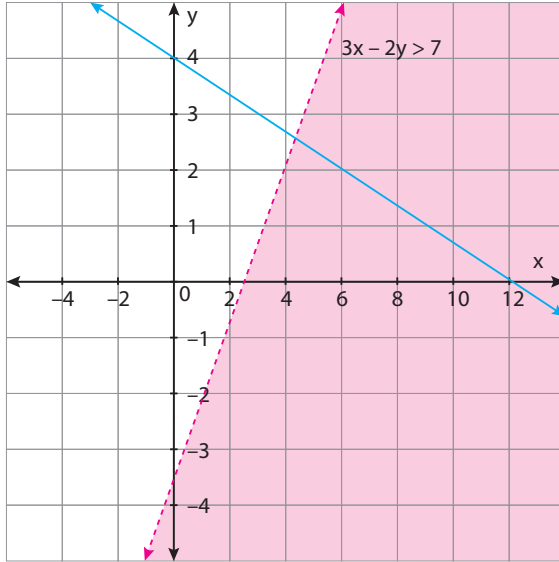
Adım 2 ►

Şimdi çizdiğimiz grafikler de hangi bölgeyi tarayacağımıza karar verelim. Önce $3x - 2y > 7$ eşitsizliği için tarayacağımız bölgeye karar verelim. $(0,0)$ noktasını $3x - 2y > 7$ eşitsizliğinde yerine koyalım.

$$3x - 2y > 7 \quad \text{ } 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 > 7$$

$$0 > 7 \text{ Yanlış}$$

Öylese, $3x - 2y > 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesi için $(0,0)$ sıralı ikilisinin bulunmadığı bölgeyi taramalıyız.

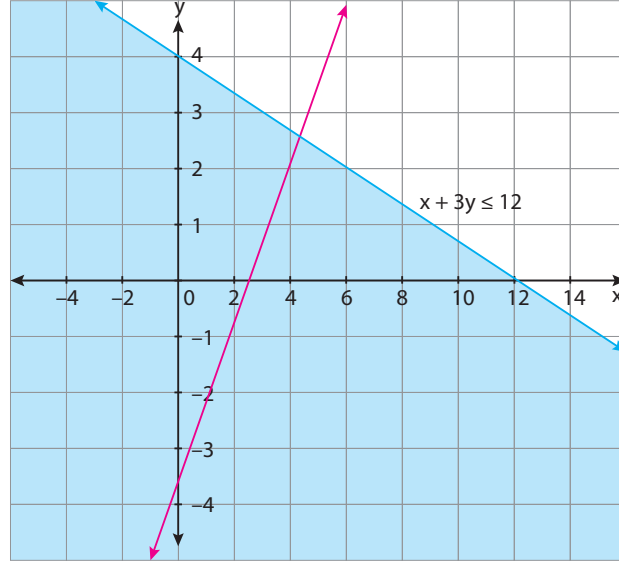


Şimdi $x + 3y \leq 12$ eşitsizliği için tarayacağımız bölgeye karar verelim. $(0,0)$ noktasını deneyelim.

$$x + 3y \leq 12 \Rightarrow 0 + 3 \cdot 0 \leq 12$$

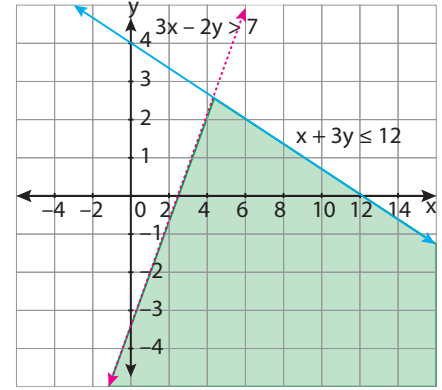
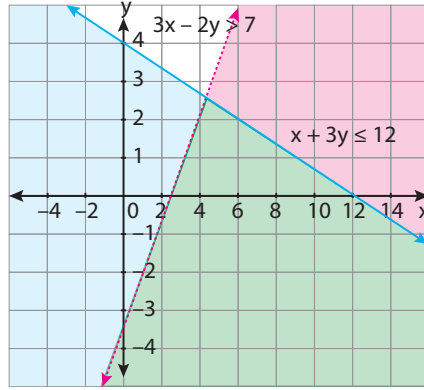
$$0 \leq 12 \text{ Doğru}$$

Öylese, $x + 3y \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi için $(0,0)$ sıralı ikilisinin bulunduğu bölgeyi taramalıyız.



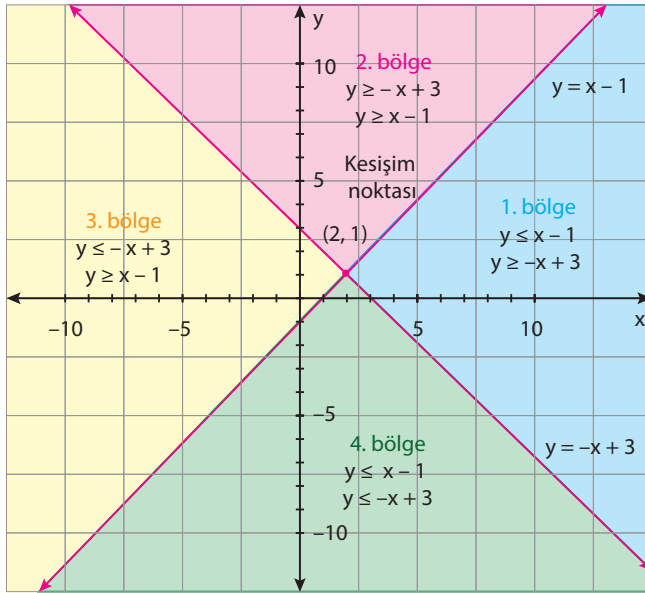
Adım 3 ►

Her iki grafikte taranan ortak bölgeyi belirleyelim. Önce her iki eşitsizliğin çözüm kümesi için taranan bölgeleri aynı koordinat düzleminde gösterelim. Daha sonra yeni bir koordinat düzleminde ortak çözüm olan bölgeyi gösterelim.



Yukarıda ikinci grafikte görüldüğü üzere koordinat düzleminde oluşan taralı bölge $\begin{cases} 3x - 2y > 7 \\ x + 3y \leq 12 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini göstermektedir.

$y = -x + 3$ ve $y = x - 1$ doğrularının grafiklerini koordinat düzleminde gösterelim. Bu doğrular kesiştiği için düzlemi dört bölgeye ayırır. Bu dört bölgeni her biri bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi olarak düşünüldüğünde aşağıdaki eşitsizlik sistemleri elde edilir.



O halde kesişen iki doğrunun belirttiği eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi için, doğrular çizilerek oluşan dört bölgeden hangisinin çözüm kümesi olduğuna karar verilir.

Durum 2: Doğrular Paralel İse

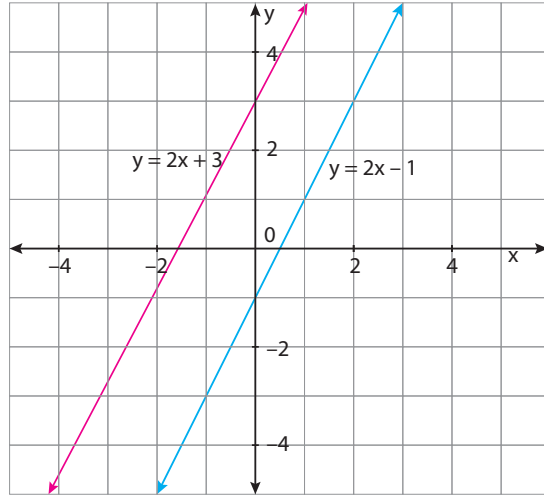
Bir eşitsizlik sisteminde, doğruların birbirine paralel olduğu durumları inceleyelim.

Örnek 4

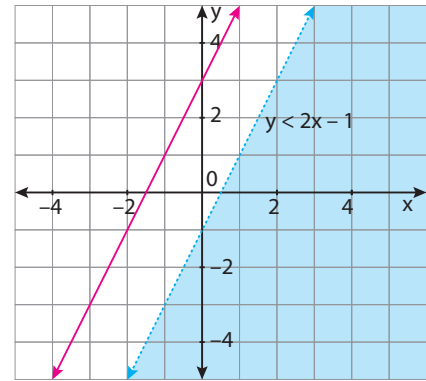
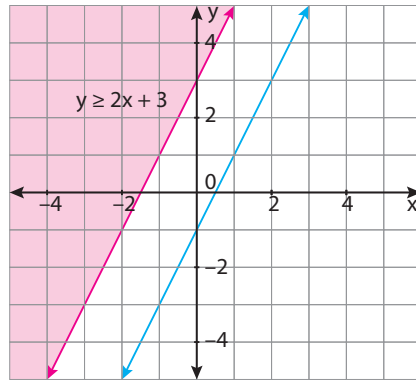
$\begin{cases} y \geq 2x + 3 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Öncelikle bu eşitsizlik sisteminde bulunan her iki eşitsizliğin doğru grafiklerini çizelim.

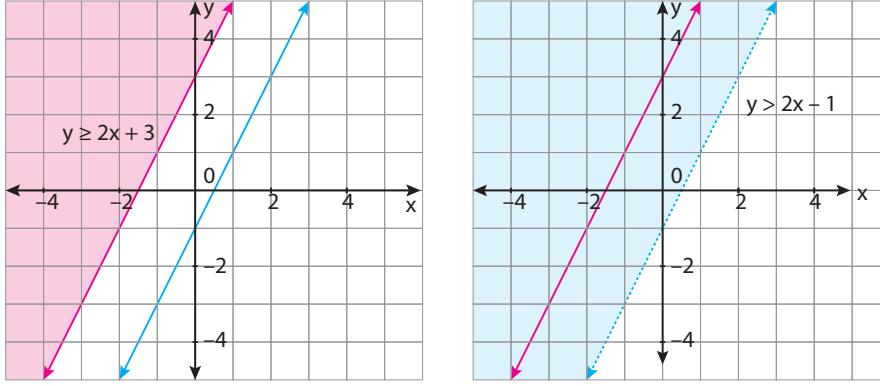


Şimdi $y \geq 2x + 3$ ve $y < 2x - 1$ eşitsizliklerin çözüm kümesini koordinat düzleminde ayrı ayrı gösterelim.

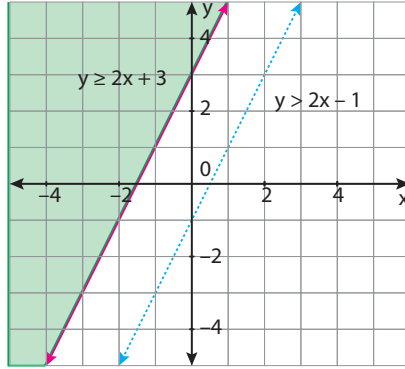


Bu iki çözüm aynı düzlemde gösterildiğinde ortak bir bölge belirtemeyecektir. O halde eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

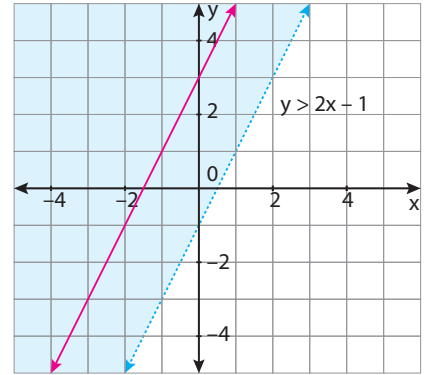
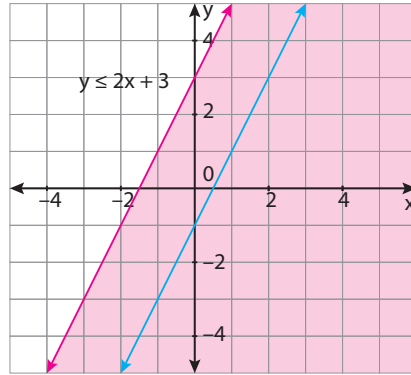
Fakat birbirine paralel olan doğrulardan oluşan eşitsizlik sistemlerinde çözüm kümesi her zaman boş küme olmayabilir. Eşitsizlik sistemindeki sembollerin yön değiştirilmesi ile 4 farklı eşitsizlik durumu elde edilebilir. Önceki örnekteki eşitsizlik sisteminde bulunan ikinci eşitsizliğin yönünü değiştirerek tekrar inceleyelim. Bu durumda $\begin{cases} y \geq 2x + 3 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$ olur. Benzer şekilde bu eşitsizlik sistemi de koordinat düzleminde aşağıdaki gibi gösterilir.



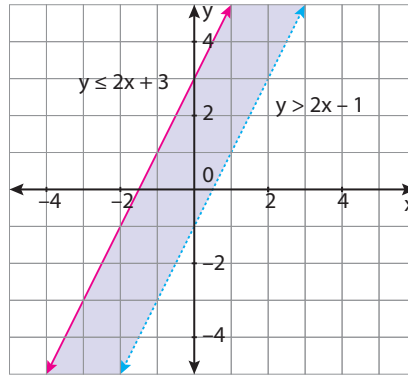
Grafikte görüldüğü üzere bu eşitsizlik sisteminde $y > 2x - 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $y \geq 2x + 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini kapsamaktadır. Bu nedenle taranan ortak bölge $y \geq 2x + 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ile aynı olup aşağıda gösterilmiştir.



Benzer şekilde $\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim. Önce eşitsizlik sisteminde bulunan her iki eşitsizliğin çözüm kümelerini aşağıdaki koordinat düzlemlerinde gösterelim.



Her iki grafik incelendiğinde, $y \leq 2x + 3$ eşitsizliği için taranan bölge ile $y > 2x - 1$ eşitsizliği için taranan bölge, iki doğru arasındaki bölgede çakışmaktadır. Yani, çözüm kümesi koordinat düzleminde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

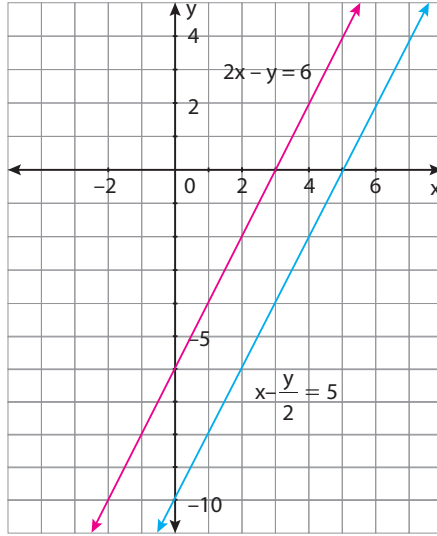


Örnek 5

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}y < 5 \\ 2x - y \geq 6 \end{array} \right\} \text{eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini inceleyelim.}$$

Çözüm**Adım 1**

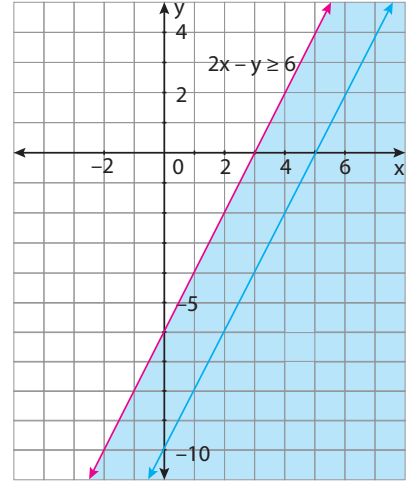
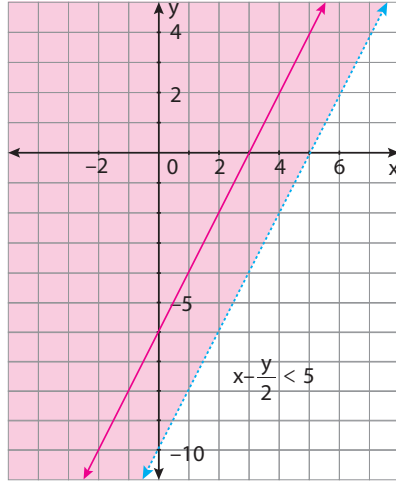
Önce $x - \frac{1}{2}y = 5$ ve $2x - y = 6$ denklemlerinin grafiklerini çizelim.



Doğruların birbirine paralel olduğu görülmektedir.

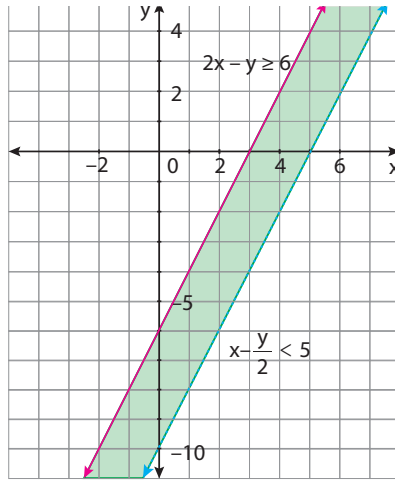
Adım 2

Sistemde bulunan iki eşitsizliğin çözüm kümelerini aşağıda koordinat düzlemlerinde gösterelim.



Adım 3 ►

Taralı bölgelerin kesiştiği bölgeyi belirleyelim.



Koordinat düzleminde görüldüğü gibi verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi paralel iki doğru arasında kalan bölgedir.

Örnek 6

Bir beyaz eşya fabrikası standart model ve lüks model olmak üzere iki tür çamaşır makinesi üretmektedir. Standart modelin üretimi için 10 saatlik bir iş gücü gerekirken, lüks modelin üretimi için ise 15 saatlik bir iş gücü gerekmektedir. Fabrikada haftalık işgücü toplam 330 saat ile sınırlı olup, üretim kapasitesi ise 32 üründür. Bu sınırlılıklar dahilinde, her iki modelden kaç adet üretilebileceğini belirleyelim.

Çözüm

Öncelikle değişkenleri belirleyelim.

Standart çamaşır makinesi modeli sayısı x ,

Lüks çamaşır makinesi modeli sayısı y olsun.

Bir adet standart modelin üretimi için 10 saat gerekmektedir.. O halde, x adet üretim için, $10x$ saat gerekir.

Bir adet lüks modelin üretimi için 15 saat gerekmektedir. O halde, y adet üretim için, $15y$ saat gerekir.

Haftalık işgücü 330 saat ile sınırlı olduğu için bu eşitsizlik olarak, $10x + 15y \leq 330$ olarak ifade edilebilir.

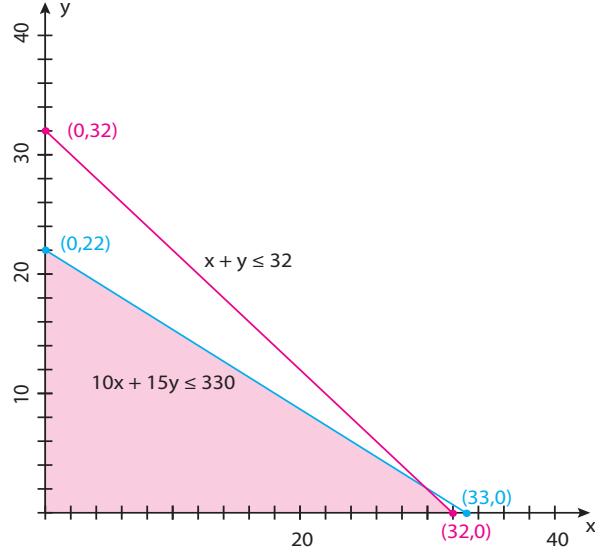
Haftalık üretim kapasitesi 32 olduğu için, $x + y \leq 32$ olarak ifade edilebilir.

Her bir modelden negatif sayıda üretim söz konusu olamayacağı için, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olur.

Dolayısı ile $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik sistemi elde edilir.

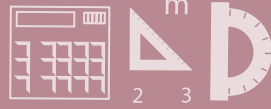
$$\left. \begin{array}{l} 10x + 15y \leq 330 \\ x + y \leq 32 \end{array} \right\}$$

Bu eşitsizlik sistemini koordinat düzleminde gösterelim.



Eşitsizlik sisteminin çözümü taralı bölgedeki koordinatları tam sayı olan noktalardır.

Koordinat düzleminde görülen taralı bölge her iki modelden kaçar adet üretim yapılabileceğinin sınırlarını göstermektedir. Grafiği yorumlamak gerekirse, üretimin tamamı standart model yapılırsa toplam 32 adet, tamamı lüks modelden yapılırsa toplam 22 adet çamaşır makinesi elde edilir.



KENDİMİZİ SINAYALIM



Alıştırmalar

1. Aşağıdaki sıralı ikililerin $3x - 4 \leq 2y$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde olup olmadığını bulunuz.

a. (3,3)

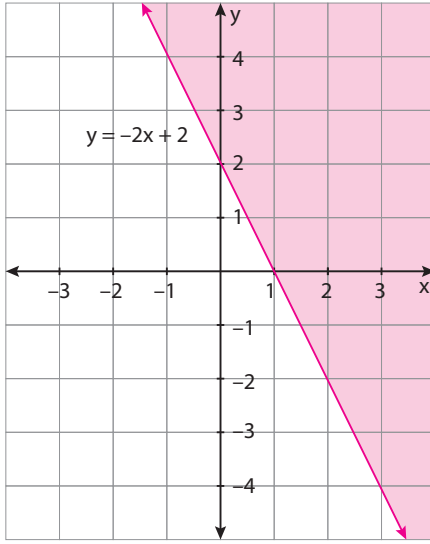
b. (-1,0)

c. (4,4)

ç. (-3,-6)

d. (1,-1)

2. Çözümü aşağıdaki grafik üzerinde gösterilen taralı bölge olan eşitsizliği yazınız.



3. Aşağıda verilen eşitsizlikleri koordinat düzleminde gösteriniz.

a. $2x - 3y \geq 12$

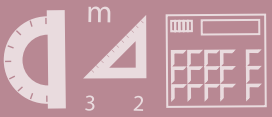
b. $3x - 7y \geq 21$

c. $x - 2y < -4$

ç. $4x - 3y > 15$

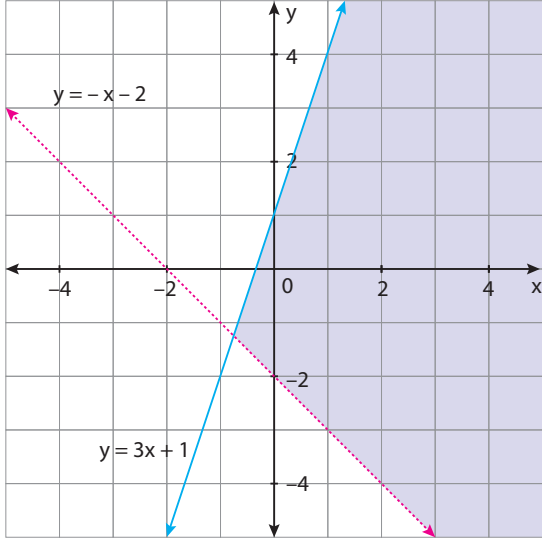
d. $6x < -3y + 7$

e. $7y - 2x + 1 > 0$

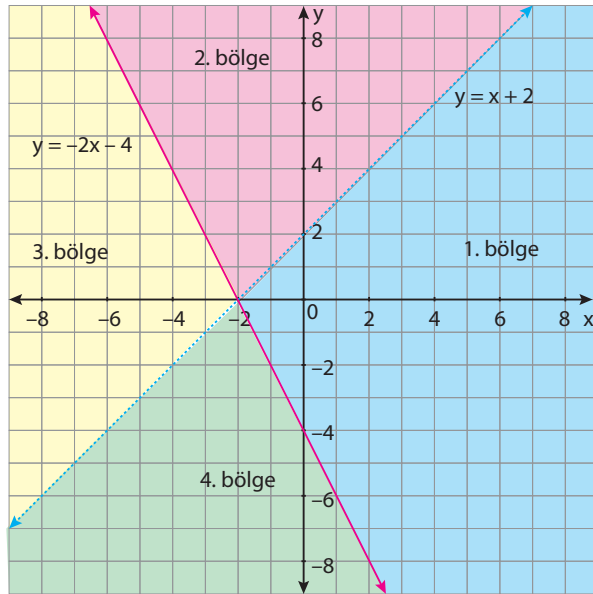


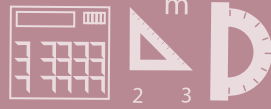
KENDİMİZİ SINAYALIM

4. Aşağıdaki grafik üzerinde taralı bölge hangi eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini yazınız.



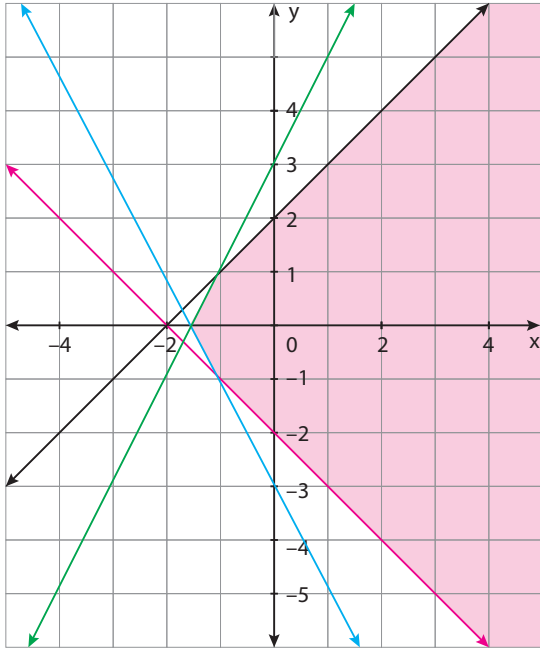
5. $\begin{cases} y \leq -2x - 4 \\ y > x + 2 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi için grafikteki hangi bölge(ler) taranmalıdır?





KENDİMİZİ SINAYALIM

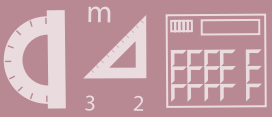
6. Aşağıda dört eşitsizlikten oluşan bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi koordinat düzleminde gösterilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi bu eşitsizliklerden biri değildir?



- a. $y \geq -2x - 3$
- b. $y \leq 2x + 3$
- c. $y \leq 2x - 3$
- ç. $y \leq x + 2$
- d. $y \geq -x - 2$

7. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini koordinat düzleminde gösteriniz.

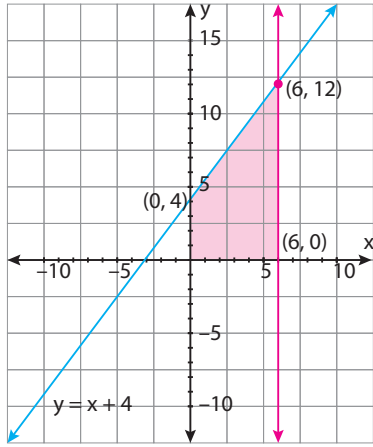
a. $\begin{cases} y < 3x - 4 \\ x + 2y \geq 9 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y > 1 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 3y \geq 9 \\ 2x - y > -1 \end{cases}$ ç. $\begin{cases} 2x - 3y \leq 9 \\ -2x + y < 3 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x - 3y \geq 9 \\ x + y < 21 \end{cases}$ e. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y \geq 4 \\ 2y - \frac{1}{3}x < -10 \end{cases}$



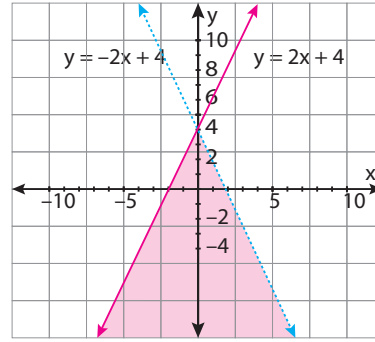
KENDİMİZİ SINAYALIM

8. Çözüm kümeleri aşağıdaki grafiklerdeki taralı bölgeler ile gösterilen eşitsizlik sistemlerini yazınız.

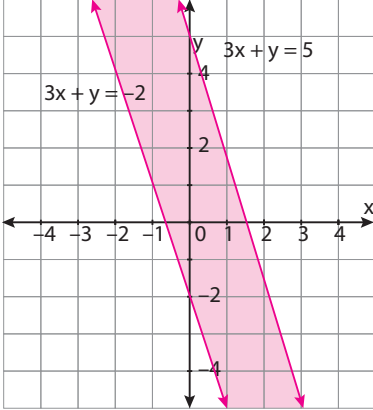
a.



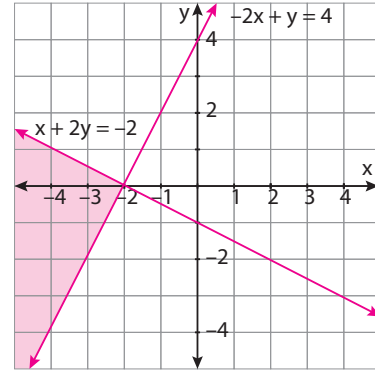
b.

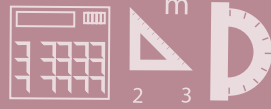


c.



ç.





KENDİMİZİ SINAYALIM



9. Bir dikdörtgenin uzun kenarı kısa kenarının 3 katından 2 fazladır. Dikdörtgenin çevresi 54 cm olduğuna göre, bu dikdörtgenin uzun ve kısa kenarlarını bulunuz.

10. "Bir sayının iki eksiğinin üçte biri aynı sayının üç katının beş eksiğinden küçük değildir." sözün ifadesinin cebirsel olarak gösterimini yazınız.

a. $\frac{1}{3}(x - 2) > 3x - 5$ b. $\frac{1}{3}(x - 2) < 3x - 5$ c. $\frac{1}{3}(x - 2) \leq 3x - 5$ d. $\frac{1}{3}(x - 2) \geq 3x - 5$

BÖLÜM ÖZETİ

Denklem ve Eşitsizlikler

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

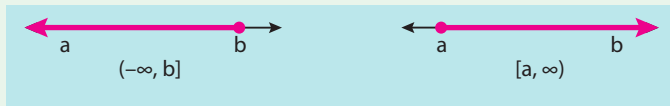
- Bir veya daha fazla değişken içeren birbirine eşit iki niceliğin matematiksel ifadesine **denklem** denir.
- Örneğin, $20 = 5x + 3$, $x^2 - 3 = 13$ ve $5n + 45 = 3m - 36$ ifadeleri birer denklemdir.
- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$ şeklinde ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.
- Bir niceliğin diğer bir nicelikten büyük veya küçük olma durumunu belirten ifadelere ise **eşitsizlik** denir.
- Denklemler ifade edilirken eşitlik sembolü ($=$), eşitsizlikler ifade edilirken eşitsizlik sembolleri ($<$, \leq , $>$, \geq) kullanılır.
- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$, olmak üzere, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$ şeklinde ifade edilebilen eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Gerçek Sayılar Kümesinde Eşitsizliklerin Farklı Gösterimleri

Sayı doğrusunda farklı iki noktanın aralarındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** denir ve aralıklar verilen kümenin uç noktalarının kümeye dahil olup olmamasına bağlı olarak adlandırılır.

| Aralık Adı | Eşitsizlik | Aralık Gösterimi | Sayı doğrusu gösterimi |
|------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------|
| kapalı aralık | $a \leq x \leq b$ | $[a, b]$ | |
| açık aralık | $a < x < b$ | (a, b) | |
| yarı açık aralık | $a < x \leq b$ veya $a \leq x < b$ | $(a, b]$ veya $[a, b)$ | |

Aralığın sınırlandırılmadığı durumlarda uç nokta sonsuz işareti (∞) ile ifade edilir ve sınırlandırılmayan taraf açık olarak kabul edilir.



$(-\infty, \infty)$ aralığı ile gerçek sayılar kümesi ifade edilir. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözümü

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı (gerçek) sayı eklendiğinde veya çıkarıldığında eşitsizlik **değişmez**.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için, $a + c < b + c$ ve $a - c < b - c$ dir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı **pozitif** gerçek sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik **değişmez**. Fakat eşitsizliğin her iki tarafı **negatif** bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik **yön değiştirir**.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için $a < b$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c < 0$ için $a < b$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir.

İki farklı eşitsizliğin birlikte incelendiği durumlara **birleşik eşitsizlikler** adı verilir. İki farklı eşitsizliğin çözüm kümesi "**ve**" bağlacı ile bağlanırsa çözüm kümelerinin **keşimi**, "**veya**" bağlacı ile bağlanırsa çözüm kümelerinin **birleşimi** alınır.

Mutlak Değer

Bir x sayısının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayının sıfır noktasına olan uzaklığıdır ve $|x|$ şeklinde gösterilir.

$$x \in \mathbb{R} \text{ için } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sayı doğrusu üzerinde $A(x)$ ve $B(y)$ gibi **iki noktanın arasındaki uzaklık** $|x - y|$ ile gösterilir.

$$|x| = |-x|$$

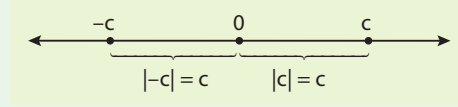
$$|x - y| = |y - x|$$

Mutlak Değer İçeren Denklem ve Eşitsizlikler

$c \geq 0$ olmak üzere, $|x| = c$ şeklindeki denklemlerin çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birim olan noktaların kümesidir.

$$|x| = c \Rightarrow x = c \text{ veya } x = -c$$

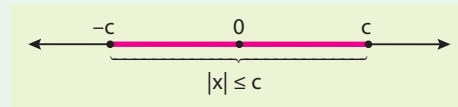
$$|ax + b| = c \Rightarrow ax + b = c \text{ veya } ax + b = -c$$



$c \geq 0$ olmak üzere $|x| \leq c$ şeklindeki eşitsizliklerin çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birim ve c birimden küçük olan noktaların kümesidir.

$$|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c$$

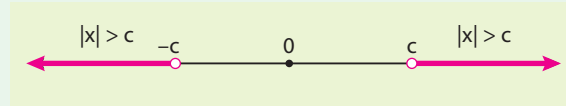
$$|ax + b| \leq c \Rightarrow -c \leq ax + b \leq c$$



$c \geq 0$ olmak üzere $|x| \geq c$ şeklindeki eşitsizliklerin çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birim ve c birimden büyük olan noktaların kümesidir.

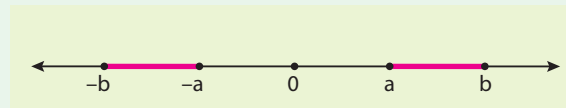
$$|x| \geq c \Rightarrow x \leq -c \text{ veya } x \geq c$$

$$|ax + b| \geq c \Rightarrow ax + b \leq -c \text{ veya } ax + b \geq c$$



$0 < a < b$ olmak üzere, $a \leq |x| \leq b$ şeklindeki eşitsizliklerin çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı a birim ile b birim arasında olan noktaların kümesidir.

$$a \leq |x| \leq b \Rightarrow -b \leq x \leq -a \text{ veya } a \leq x \leq b$$



Mutlak Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$y \neq 0 \text{ olmak üzere } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri

a , b ve k sabit gerçekte sayılar a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax + by = k$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

Birinci dereceden aynı değişkenlerden oluşan birden fazla denklem grubuna, **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Bu şekildeki bir denklem sisteminin çözüm kümesi, bu iki denklemi aynı anda sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin kümesidir.

Yerine Koyma Yöntemi

$ax + by = c$ } gibi bir denklemin sisteminin yerine koyma yöntemi ile çözümünde; birinci ya da ikinci denklemde x ya da y değişkeni yalnız bırakılarak, elde edilen ifade diğer denklemde yerine yazılır.

Yok Etme Yöntemi

Yok etme yönteminde her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Fakat verilen denklem sisteminde taraf tarafa toplama işlemi ile bilinmeyenlerden birisi yok olmuyorsa, çarpma işlemi ile bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir.

Grafik Yöntemi

Bir denklem sisteminde;

Doğrular kesişiyor ise çözüm kümesi (x, y) sıralı ikilisi şeklinde tek bir noktadan oluşur.

Doğrular paralel ise çözüm kümesi boş kümedir.

Doğrular çakışık ise sistemdeki her iki denklem de aynıdır. Dolayısıyla denklemlerden birini sağlayan bütün sıralı ikililer çözüm kümesidir ve sonsuz elemanlıdır.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlik

a , b ve k sabit gerçekte sayılar a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax + by \leq k$ şeklinde yazılan ifadeler **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir. (\leq yerine $<$, $>$, \geq sembolleri de kullanılabilir.)

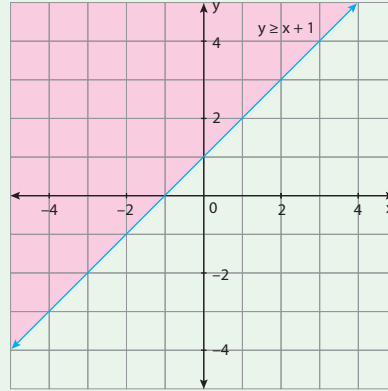
Bir eşitsizliği sağlayan (x, y) sıralı ikilisine o eşitsizliğin bir **çözümü** denir. Eşitsizliği sağlayan bütün sıralı ikililere ise **çözüm kümesi** denir ve grafik üzerinde taralı bölge olarak gösterilir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Grafikleri

Eşitsizlik sembolü " $=$ " sembolüne çevrilerek bir denklem elde edilir. Bu denklemin grafiği çizilir.

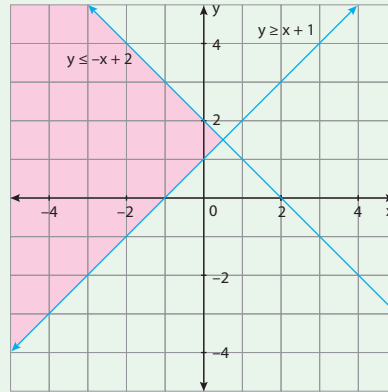
Denklem grafiğinin iki bölgeye ayırdığı koordinat düzleminin herhangi bir tarafından bir nokta alıp, eşitsizlikte yerine koyarak sağlayıp sağlamadığını kontrol edilir.

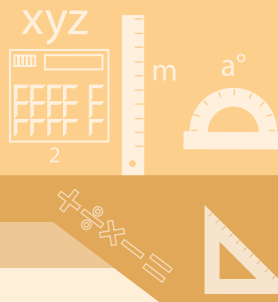
Test edilen nokta eşitsizliği sağlıyorsa noktanın bulunduğu bölge, sağlamıyorsa diğer bölge taranır. Taranan bölge çözüm kümesidir.



Eşitsizlik Sistemleri

Denklem sistemlerinde olduğu gibi, değişkenleri aynı olan birden fazla eşitsizliğe **eşitsizlik sistemi** denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan (x, y) sıralı ikililerinin, ortak bir çözüm olması için sistemde bulunan her eşitsizliği sağlamalıdır.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

1. $A = [-4, 3)$ ve $B = [-2, \infty)$ aralıkları veriliyor. Buna göre; $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ kümelerini gösteren aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

2. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a. $\frac{2x-3}{6} + \frac{x+2}{4} = 4$

b. $4x - 5 = -2(3 - 2x) + 1$

c. $\frac{2-x}{3} + \frac{x+1}{2} = 1$

ç. $\frac{3}{2}(4x+2) - 2(3x+6) = 8$

d. $\frac{2(x+5)}{3} = 3x+1$

3. Aşağıda verilen eşitsizlikler için belirtilen sayının çözüm olup olmadığını belirleyiniz.

a. $3x - 7 < 12$; $x = -3$

b. $-4 \leq 2x - 6 < 5$; $x = 4$

4. Aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $x \leq 5$

b. $-1 < x \leq 3$

c. $\frac{1}{2} > x$

ç. $\frac{1}{2} > x \geq -\frac{5}{2}$

d. $3x - 5 \geq 5x + 2$

5. $|a - 2b - 4| + |3a + b + 12| = 0$ denklemini sağlayan a ve b değerleri için $a + b$ toplamını bulunuz.

6. Aşağıdaki bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözünüz ve çözüm kümesini aralık gösterimi veya sayı doğrusu kullanarak belirtiniz.

a. $-2x + 3 < x$

b. $-3x + 6 \geq 2x - 7$

c. $-\frac{x}{3} + 7 < 2(x - 4)$

ç. $3(x - 1) - 4 \leq \frac{1}{2}(2x + 5) - 9$

d. $3x + 1 \leq 5(x - 1) < 3(x + 7)$

7. Aşağıda verilen sıralı ikililerde boş olan yerleri $5x + 3y = 30$ denklemini sağlayacak şekilde doldurunuz.

a. $(0, \dots)$

b. $(\dots, 5)$

c. $(-2, \dots)$

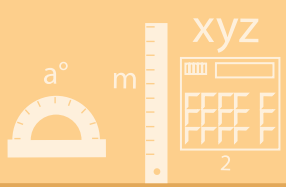
8. Aşağıdaki denklem sistemlerini; yok etme, yerine koyma veya grafik çizme yöntemlerinden birini kullanarak çözünüz.

a. $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 6 - 4y = -2x \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x = y - 2 \\ y = 3 - x \end{cases}$

ç. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 11 \\ x + \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

9. $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $6 < x < 9$ ve $3 < y < 6$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin aralıklarını belirleyiniz.

- a. $x + 4$
- b. $3x + 4y$
- c. $x \cdot y$

10. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

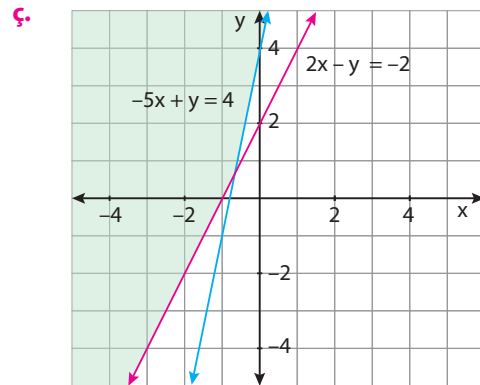
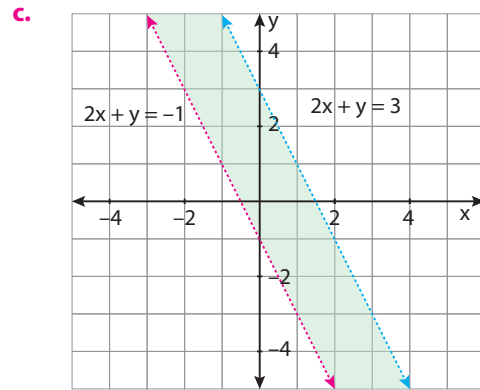
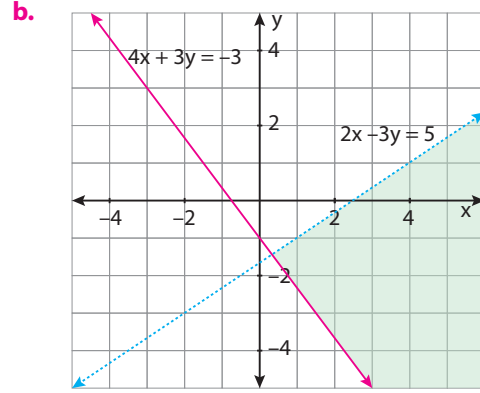
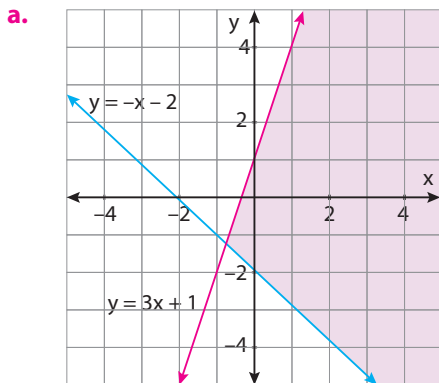
a. $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ x - 3y < 4 \end{cases}$

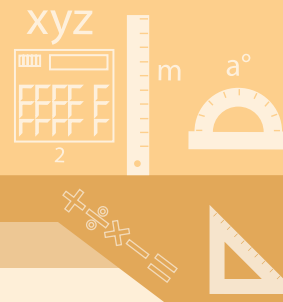
b. $\begin{cases} 3x - 2y \leq -5 \\ 2x + 6y > 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - y - 5 > 0 \\ -y + 3x - 7 < -3 \end{cases}$

ç. $\begin{cases} 6x - 3y \geq 9 \\ 2x + 5y < 0 \end{cases}$

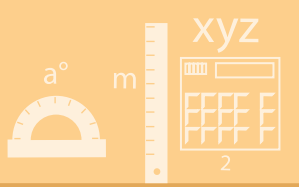
11. Çözüm kümeleri aşağıdaki grafiklerde taralı bölgeler ile gösterilen eşitsizlik sistemlerini yazınız.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

- 12.** Bir telefon şirketi uluslararası görüşmelerde ilk dakika için 0,99 TL ve sonraki her dakika için 0,49 TL almaktadır. Uluslararası görüşme için ayda en fazla 17,50 TL ödeyen birinin uluslararası görüşme süresini gösteren eşitsizliği yazınız.
- 13.** Dikdörtgen şeklindeki bir arazinin genişliği 14 metredir. Bu arazinin çevresinin en az 100 metre ve en fazla 120 metre olduğu biliniyorsa, arazinin uzunluğu hangi aralıktadır?
- 14.** 10 kuruş ve 25 kuruşluk toplam 30 tane madeni paranın bulunduğu bir torbadaki paraların toplam değeri 5,55 TL dir. Bu torbada kaç tane 10 kuruşluk ve kaç tane 25 kuruşluk madeni para olduğunu bulunuz.
- 15.** Dikdörtgen şeklindeki bir havuzun kenar uzunlukları farkı 4 metredir. Bu havuzun çevresi 112 m olduğuna göre, havuzun boyutlarını denklem sisteminden yararlanarak bulunuz.
- 16.** IQ: Zeka seviyesi, G: Gerçek yaşı, Z: Zeka yaşı olmak üzere bir kişinin zeka seviyesi şu formülle hesaplanmaktadır. $IQ = \frac{Z}{G} \cdot 100$
15 yaşındaki bir grup çocuk için $110 \leq IQ < 150$ olduğuna göre, bu gruptaki çocukların zeka yaşlarının hangi aralıkta olduğunu bulunuz.
- 17.** Bir motosiklet fabrikasında aynı modelin standart ve lüks tipleri üretilmektedir. Standart tipte olanın üretimi için 12 saatlik işgücü, lüks tiptekinin üretimi için ise 18 saatlik işgücü gerekmektedir. Bu fabrikanın haftalık araç üretim kapasitesi en fazla 25 araçtır. Fabrikanın haftalık işgücünün 360 saate tamamlandığı bilindiğine göre, her iki tipteki motosikletten kaç adet üretilebileceğini belirleyiniz.
- 18.** Sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına uzaklığı 5 birim olan noktaları temsil eden denklemi yazınız.
- 19.** Sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına uzaklığı 5 birimden küçük olan noktaları temsil eden eşitsizliği yazınız.
- 20.** Sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına uzaklığı, 5 noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaları temsil eden eşitsizliği yazınız.
- 21.** $|x - 3| + |x + 2| = 6$ denkleminin gerçek sayılarda çözüm kümesini bulunuz.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

22. $ax + 16y - b + 7 = 0$ ve $4x + ay + 3 = 0$ denklem sisteminin çözüm kümesinde her x gerçekte sayı için bir y değeri bulunduğuna göre $a + b$ nin alabileceği değerler nelerdir?

23. $-4 < a < 2$ olduğuna göre a^2 hangi gerçekte sayılar arasında olur? Açıklayınız.

24. Aşağıda verilen mutlak değeri denklemlerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x - 4| = 7$
- b. $|x - 4| = -7$
- c. $||x| - 5| = 8$
- ç. $|x - 1| = |x + 9|$
- d. $|2x - 5| = x + 7$
- e. $||x - 4| - 5| = 7$
- f. $|x - 6| + |6 - x| = 14$

25. Aşağıda verilen mutlak değeri eşitsizliklerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x - 2| < 3$
- b. $|3 - 5x| < 4$
- c. $9 - 3|12 - 6x| > 12$
- ç. $\frac{5}{6} \geq \frac{|x - 6|}{3}$

26. $|x - a| < 3$ eşitsizliğinin tam sayılarda çözüm kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğuna göre a sayısı hangi aralıkta değeri alabilir?

27. x ve y sıfırdan farklı gerçekte sayılar olmak üzere;
 $\frac{|8x + 8y|}{|x| + |y|}$ kesrinin alabileceği en büyük değeri kaçtır? Cevabınızı açıklayınız.

Ünite

2

ÜSTLÜ İFADELER

Bölüm 2.3. Üstlü ifade ve Denklemler

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- Üstlü ifadelerde çarpma, bölme ve kuvvet almayı
- Üstlü ifadeler içeren denklemlerin çözümünü
- Özel bir üstlü ifade türü olarak köklü ifadeleri
- Üstlü ifadelerin bazı uygulamalarını

Neden Öğreneceğiz?

Dünyanın güneşe olan uzaklığı, yıldızlar ve gezegenlerin birbirlerine olan uzaklıkları, Samanyolu galaksisindeki yıldız sayısı, bir hidrojen atomunun yarıçapı, pH değeri ve sesin şiddetini belirleyen desibel değerleri gibi çok büyük veya çok küçük sayıları ifade etmek ve bunlar üzerinde işlemler yapmak için üstlü ifadeleri kullanırız. Bazen üstlü ifade içeren denklemlerle karşılaşırız. Örneğin, zamana bağlı olarak bir bakteri popülasyonunun günde iki katına çıktığını keşfeden bir bilim adamı için kaç saat sonra 256 milyon olduğunu bulmak üstlü ifade içeren bir denklemi çözmeyi gerektirir. Bu durumlarda sayıların üstlü biçimde gösterimi ve bu gösterimlerin kullanılması işlemlerde kolaylık sağlamaktadır.

HAZIR MIYIZ?

1. Aşağıdaki ifadeleri üstlü ifade şeklinde yazınız.

- a. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
- b. $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
- c. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
- ç. $(2a) \cdot (2a) \cdot (2a) \cdot (2a) \cdot (2a)$

2. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırarak üstlü ifadelerin çarpımı olarak yazınız.

- a. $36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$
- b. 80
- c. 98
- ç. 128
- d. 490

3. Bir soyağacında siz şimdiki zamanı temsil ediyorsunuz. Bir nesil önce anne ve babanız olmak üzere iki ebeveyniniz bulunuyor. 2 nesil önce anne ve babanızın da ikişer ebeveyni yani büyük anne ve büyük babalarınız bulunuyor. Bu şekilde 5 nesil önceki atalarınızın sayısını en kısa şekilde nasıl ifade edersiniz?

4. Aşağıda verilen sayıları 10'un farklı kuvvetlerini kullanarak yazınız.

- a. $234 = 23,4 \times 10^1 = 2,34 \times 10^2$
 $= \dots \times 10^3$
 $= \dots \times 10^4$
- b. $3,674 = \dots \times 10^{-1}$
 $= \dots \times 10^{-2}$
 $= \dots \times 10^{-3}$

5. $x = 4$ için aşağıdaki cebirsel ifadelerin değerini bulunuz.

- a. $2x^2$
- b. $(2x)^2$
- c. $4^{-1}x$
- ç. $(4x)^{-1}$

6. Aşağıda verilen köklü ifadeleri kök dışına çıkarınız.

- a. $\sqrt{16}$
- b. $\sqrt{0,09}$
- c. $-\sqrt{121}$
- ç. $\sqrt{\frac{16}{81}}$

7. $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{49}$ sayılarını hesap makinesi kullanmadan küçükten büyüğe nasıl sıralanacağını açıklayınız.

8. Aşağıdaki köklü ifadeleri sadeleştiriniz.

- a. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$
- b. $\sqrt{32}$
- c. $\sqrt{0,75}$
- ç. $\sqrt{6,4}$
- d. $\sqrt{4 \cdot 10^{-3}}$

9. Aşağıda verilen sayılardan hangileri $\sqrt{12}$ ile çarpıldığında bir tam sayı elde edilir.

- a. 2
- b. $\sqrt{2}$
- c. $\sqrt{3}$
- ç. $\sqrt{6}$
- d. $\sqrt{12}$

2.3.1 Üstlü İfade ve Denklemler

Başlarken

Alfa Erboğa (Alpha Centauri) güneşe en yakın yıldız sistemidir. Bu yıldız sisteminin dünyaya olan uzaklığı yaklaşık 4,3 ışık yılı olarak belirlenmiştir. Işık yılı, ışığın boşlukta bir yılda aldığı mesafeyi veren bir ölçüm birimi olup, ışık hızı ise yaklaşık olarak saniyede 300 000 km'dir. Buna göre, Dünya ile Alfa Erboğa yıldız sistemi arasındaki uzaklık kaç km'dir?



Bir biyolog, laboratuvar ortamında bakterilerin çoğalmasını incelemektedir. Biyolog, ilk ölçümde bakteri popülasyonunu 72 olarak bulmuş ve bu popülasyonunun her bir saatte 2 katına çıktığını tespit etmiştir. Buna göre, biyolog bakteri popülasyonunun kaç saat sonra 150 000'e ulaşacağını nasıl tespit edebilir?

Bu tür durumların incelenmesinde üstlü ifadeler içeren denklemlerden faydalanılır. Bu bölümde üstlü ifadeler ve özellikleri incelenerek üstlü ifade içeren denklemlerin çözümleri yapılacaktır. Öncelikle üstlü ifadelerin özelliklerini inceleyelim.

Bir Gerçek Sayının Tam Sayı Kuvvetleri

Aynı gerçek sayının birden çok çarpımını kolay bir şekilde göstermek için üstlü ifadeler kullanılır. Örneğin $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ ve $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ şeklinde yazılır. Burada 2 **taban**, 5 ise **üst (kuvvet)** olarak adlandırılır.

$$2^5$$

Taban Üst

Bir gerçek sayının pozitif tam sayı üstü o sayının kendisi ile kaç defa çarpıldığını gösterir.

Örnek 1

$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ ve $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ gerçek sayılarını üstlü ifade şeklinde yazalım.

Çözüm

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{5 \text{ tane}} = 8^5 \quad \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{4 \text{ tane}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Neler Öğreneceğiz?

- Bir gerçek sayının tam sayı kuvvetini
- Üstlü ifadelerin özelliklerini
- Üstlü ifadelerle işlemleri
- Üstlü ifade içeren denklemlerin çözümü ve çeşitli gösterimlerle yorumlanmasını

Sembol ve Gösterimler

- x^n
- $A \cdot 10^n$

Anahtar Terimler

- Üstlü ifade
- Taban
- Üst

Matematik Tarihi

Rene Descartes yaptığı birçok çalışmanın yanında üstlü sayı gösterimini (a^n) ilk kullanan kişi olarak da bilinir.

x bir gerçekte sayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için x^n ifadesine üstlü ifade denir. Burada x sayısına taban, n sayısına da üst veya kuvvet denir. x^n ifadesi " **x in n . kuvveti**" diye okunur.

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} = x^n$$

Örnek 2

-4 , $-\frac{2}{3}$ ve $-\frac{1}{2}$ negatif sayılarının bazı çift ve tek kuvvetlerini hesaplayalım ve sonuçların işaretlerini inceleyelim.

Çözüm

- a. $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$
- b. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$
- c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$
- ç. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
- d. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$
- e. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$

Bu örnekteki sonuçların işaretleri incelendiğinde, negatif bir gerçekte sayının **çift sayı** kuvvetlerinin sonucunun **pozitif işaretli**, **tek sayı** kuvvetlerinin sonucunun **negatif işaretli** olduğu görülür.

Örnek 3

-2^4 , -3^4 , $(-2)^4$, $(-3)^4$ ifadelerinin sonuçlarını bulup işaretlerini inceleyelim.

Çözüm

| Üstlü ifade | Sonuç |
|-------------|--|
| -2^4 | $-(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$ |
| -3^4 | $-(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ |
| $(-2)^4$ | $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ |
| $(-3)^4$ | $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ |

Elde edilen sonuçlara göre -2^4 ile -3^4 ün sonuçları negatif iken $(-2)^4$ ile $(-3)^4$ ün sonuçları pozitiftir.

Üstlü İfadelerde Çarpma İşlemi

$2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)$ olarak yazılabilir. Çarpmanın birleşme özelliği kullanılarak bu ifade düzenlenirse $2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$ elde edilir. Aşağıdaki benzer örnekleri inceleyelim.

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{2 \text{ tane}} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

b. $(-a)^3 \cdot (-a) = \underbrace{(-a)(-a)(-a)}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{(-a)}_{1 \text{ tane}} = (-a)^4 = a^4$

c. $3x^2 \cdot 4x^4 = (3 \cdot x \cdot x) \cdot (4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = 3 \cdot 4 \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{6 \text{ tane}} = 12x^6$

ç. $x^4 \cdot x^5$ çarpımını aşağıda şema üzerinde de gösterelim.

$$x^4 \cdot x^5 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{4 \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{5 \text{ tane}} = x^9$$

$x^4 \cdot x^5 \xrightarrow{\text{şema}} x^{4+5} \xrightarrow{\text{şema}} x^9$

Tabanları aynı olan üstlü ifadelerin çarpımı pozitif tam sayılar için aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Tabanları aynı iki üstlü ifade çarpıldığında üstler toplanır.

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m+n \text{ tane}} = x^{m+n}$$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ dir.

Bu ispat pozitif üstler için yapıldığı halde, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ eşitliği üstün negatif olduğu durumlar için de geçerlidir.

Örnek 4

$3^{12} \cdot 3^2$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm

$$3^{12} \cdot 3^2 = 3^{12+2} = 3^{14}$$

Dikkat

n bir çift doğal sayı ve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $-x^n \neq (-x)^n$ olur.

Yandaki örnekte -3^4 ve $(-3)^4$ üstlü ifadelerinin aynı olmadığına dikkat ediniz.

Dikkat

Kuvvetin parantezin içeri-
sinde olması ile parantezin
dışında olması sonucu değiş-
tirebilir. Örneğin, $x \neq 0$, $x \neq 1$
ve $x \neq -1$ için,

$$(2x)^2 = 2x \cdot 2x = 4x^2$$

$$(2x^2) = (2 \cdot x \cdot x) = 2x^2$$

$$(2x)^2 \neq (2x^2)$$

Anahtar Bilgi

Bilimsel Gösterim:

Sıfırdan farklı bir sayının

$1 \leq |A| < 10$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak
üzere $A \cdot 10^n$ şeklinde yazıl-
masına **bilimsel gösterim**
denir.

Örnek,

$$0,0002 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ve}$$

$$3\,500\,000 = 3,5 \cdot 10^5$$

Bunu biliyor muydunuz?

1 ışık yılı, ışığın boşlukta bir
yılı aldığı mesafeyi ifade
etmek için kullanılan bir
uzaklık birimidir.

Anahtar Bilgi

\approx sembolünün anlamı

"yaklaşık olarak eşit" tir.

Örnek 5

Aşağıdaki ifadelerin $12x^9$ a eşit olup olmadığını belirleyelim.

a. $(4x^6) \cdot (3x^3)$

b. $(12x^3) \cdot x^6$

Çözüm

a. $(4x^6) \cdot (3x^3) = 4 \cdot 3 \cdot x^6 \cdot x^3$

$$= 12 \cdot x^{6+3}$$

$$= 12 \cdot x^9$$

b. $(12x^3) \cdot x^6 = 12 \cdot x^3 \cdot x^6$

$$= 12 \cdot x^{3+6}$$

$$= 12x^9$$

Örnek 6

Bölüm girişinde sunulan bilgiye göre Alfa Erboğa yıldız sisteminin dünyaya olan uzak-
lığı 4,3 ışık yılıdır. Üstlü sayılarla ilgili yukarıdaki bilgileri kullanarak Alfa Erboğa (Centa-
uri) yıldız sistemi ile dünya arasındaki uzaklığı hesaplayalım.

Çözüm

Önce bir ışık yılının kaç kilometre uzunluğa karşılık geldiğini hesaplayalım.

Işık hızı yaklaşık olarak $300\,000 = 3 \cdot 10^5$ km/sn dir.

Bir yıl $= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31536 \cdot 10^3$ sn dir.

1 ışık yılı = Işık hızı x 1 yıl (saniye cinsinden)

$$= (3 \cdot 10^5) \cdot (31536 \cdot 10^3)$$

$$= 3 \cdot 31536 \cdot 10^5 \cdot 10^3$$

$$= 94608 \cdot 10^{5+3}$$

$$= 94608 \cdot 10^8$$

$$= 9,46 \cdot 10^{12}$$

1 ışık yılı yaklaşık olarak $9,46 \cdot 10^{12}$ km'dir.

Alfa Erboğa yıldız sisteminin dünyaya olan uzaklığı 4,3 ışık yılı oluğuna göre, bu uzaklık
bilimsel gösterimle ifade edilirse;

$$(4,3) \cdot (9,46) \cdot 10^{12} = (40,678) \cdot 10^{12}$$

$$\approx 4,06 \times 10^{13} \text{ km olur.}$$

Örnek 7

Yetişkin bir insanın normal olarak bir nefes alışverişinde ortalama 500 ml havayı kullandığı ve dakikada ortalama 12 nefes aldığı bilinmektedir. Buna göre yetişkin bir insanın normal şartlarda $2 \cdot 10^4$ saatte kullandığı hava miktarının ml cinsinden ne kadar olduğunu bulalım.

Çözüm

Bir yetişkin insanın dakikada kullandığı hava miktarı

$$12 \cdot (5 \cdot 10^2) = 60 \cdot 10^2 = 6 \cdot 10^3 \text{ ml dir.}$$

Bu sayı 60 ile çarpılırsa bir saatteki kullanılan hava miktarı bulunur.

$$60 \cdot 6 \cdot 10^3 = 360 \cdot 10^3 = 36 \cdot 10^4 \text{ ml}$$

Elde edilen sonuç $2 \cdot 10^4$ ile çarpılırsa istenilen cevaba ulaşılır. Dolayısıyla,

$$(36 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^4) = 36 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 72 \cdot 10^8 \text{ ml}$$

Bir Gerçek Sayının Negatif Kuvvetleri

Sıfırdan farklı bir gerçek sayının -1 . kuvveti, o sayının çarpmaya göre tersi olur. Yani $4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ olduğu için 4 'ün -1 . kuvveti $4^{-1} = \frac{1}{4}$ tür. Yine aynı şekilde,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{1} = 5 \text{ olur.}$$

Bu durumda, bir gerçek sayının negatif tam sayı kuvvetleri, tabanının çarpma işlemine göre tersi alındıktan sonra pozitif kuvvetinin alınması (tekrarlı çarpma işleminin)

yapılması olarak yorumlanabilir. Örneğin 5^{-3} üstlü ifadesi, $5^{-3} = (5^{-1})^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ şeklinde

düzenlenebilir. Ve sonuç olarak $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$

b. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{5}{1}\right)^1 = 5^2$

c. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^4 = \left(\frac{b}{a}\right)^4$

Anahtar Bilgi

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Örnek 8

3^{-2} , $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$ ve 6^{-3} ifadelerinin üstlerini pozitif olarak yazıp sonuçları bulalım.

Çözüm

$$a. \quad 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$b. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{1}\right)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$c. \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

$$ç. \quad 6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

Örnek 9

$5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Çarpım durumunda olan bu iki farklı üstlü ifadenin tabanları aynı olmadığı için çarpma işlemi ile ilgili kural doğrudan uygulanamaz. Fakat negatif kuvvet özelliğinden yararlanarak $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ ifadesinin yerine $\left(\frac{5}{1}\right)^4 = 5^4$ yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} &= 5^3 \cdot 5^4 \\ &= 5^{3+4} \\ &= 5^7 \end{aligned}$$

Üstlü İfadelerde Bölme İşlemi

Tabanları aynı iki üstlü ifade çarpılırken üstlerinin toplandığını biliyoruz. Tabanları aynı olan iki üstlü ifadenin bölme işlemi iki farklı şekilde yapabiliriz. Bu yöntemleri $\frac{3^9}{3^5}$ bölme işlemi üzerinde gösterelim.

1. Yöntem: Pay ve paydadaki üstlü sayılar açık şekilde yazılırsa;

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde;

$$\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{9-5} = 3^4$$

sonucu elde edilir.

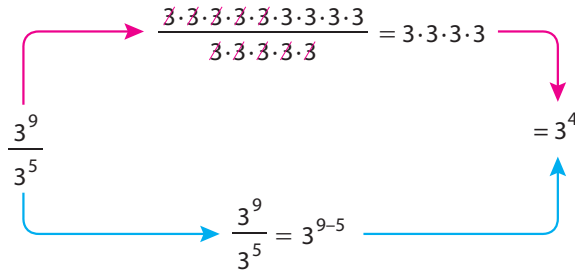
2. Yöntem: $\frac{3^9}{3^5}$ üstlü ifadesi $\frac{3^9}{3^5} = 3^9 \cdot \frac{1}{3^5}$ şeklinde yazılıp negatif üst özelliği

kullanılarak $3^9 \cdot 3^{-5}$ şeklinde yazılabilir. Buradan;

$$3^9 \cdot 3^{-5} = 3^{9+(-5)}$$

$$= 3^4 \text{ elde edilir.}$$

$\frac{3^9}{3^5}$ bölme işlemini bir şema üzerinde gösterelim.



Tabanları aynı olan iki üstlü ifadenin bölümünde, paydaki ifadenin üstünden paydadaki ifadenin üstü çıkarılır ve çıkan değer ortak tabana üst olarak yazılır. Bu durum aşağıdaki gibi gösterilir.

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{m-n \text{ tane}} = x^{m-n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n} = x^{m-n}$$

Yukarıdaki ispat üstlerin pozitif tam sayı olduğu durumlar için yapıldığı halde

$\frac{x^m}{x^n} = x^{\frac{m}{n}}$ eşitliği üstlerin negatif olduğu durumlar için de geçerlidir.

Örnek 10

$a \neq 0$ olmak üzere, $\frac{15a^4}{3a^6}$ bölme işlemini yapalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{15a^4}{3a^6} &= \frac{15 \cdot a^4}{3 \cdot a^6} = \frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{5}{a^2} \\ &= 5a^{-2} \\ \frac{15a^4}{3a^6} &= \frac{15}{3} \cdot \frac{a^4}{a^6} = 5 \cdot a^{4-6} = 5 \cdot a^{-2} = 5a^{-2} \end{aligned}$$

Örnek 11

$\frac{3^{10}}{3^{-8}}$ bölme işlemini yapalım.

Çözüm

$$\frac{3^{10}}{3^{-8}} = 3^{10-(-8)} = 3^{18}$$

Tabanları aynı olduğu için üstlerinin farkı alınır.

Örnek 12

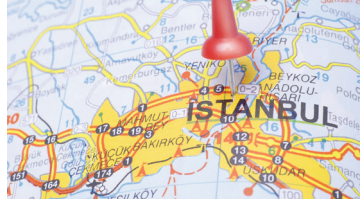
$x \neq 0$ için, $\frac{(3x^2)(5x^3)}{-2x^4}$ ifadesini sadeleştirelim.

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{(3x^2)(5x^3)}{-2x^4} &= \frac{3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3}{-2x^4} = \frac{3 \cdot 5}{-2} \cdot \frac{x^5}{x^4} \\ &= \frac{3 \cdot 5}{-2} \cdot x^{5-4} \\ &= -\frac{15}{2} x^1 \\ &= -\frac{15}{2} x \end{aligned}$$

Örnek 13

Nüfus yoğunluğu kilometrekare başına düşen insan sayısıdır. İstanbul'un yüzölçümü 5313 km^2 , nüfusu ise $13\,850\,000$ olduğuna göre, İstanbul'un nüfus yoğunluğunu bulalım.



Çözüm

İstanbul'un nüfusu: $13\,850\,000 = 1,385 \cdot 10^7$ dir.

İstanbul'un yüzölçümü: $5313 = 5,313 \cdot 10^3$ dür.

Nüfus yoğunluğu, nüfusun yüzölçüme bölünmesiyle bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Nüfus yoğunluğu} &= \frac{1,385 \cdot 10^7}{5,313 \cdot 10^3} = \frac{1,385}{5,313} \cdot 10^{7-3} \\ &\cong 0,26 \cdot 10^4 \cong 2600 \text{ kişi/km}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, İstanbul'da 1 km^2 ye yaklaşık olarak 2600 insan düşmektedir.

Örnek 14

Bir firmanın muhasebe hesaplarını tutmakta kullandığı bilgisayarın işlemci hızı $1,6 \text{ MHz}$ dir. Bilgisayarın artık değiştirilme zamanı geldiğini düşünen yetkililer işlemci hızı $3,2 \text{ GHz}$ olan yeni bir bilgisayar almışlardır. Yeni alınan bilgisayarın hızı önceki bilgisayarın hızının kaç katıdır?



Çözüm

Yeni bilgisayarın işlemci hızı: $3,2 \text{ GHz} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

Eski bilgisayarın işlemci hızı: $1,6 \text{ MHz} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

Yeni bilgisayarın işlemci hızını eski bilgisayarın işlemci hızına bölelim.

$$\frac{3,2 \cdot 10^9 \text{ Hz}}{1,6 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 2 \cdot 10^3 = 2000$$

Dolayısıyla, yeni bilgisayarın işlemcisi hızı diğerinin 2000 katıdır.

Üstleri Aynı Olan İki İfadenin Çarpımı ve Bölümü

Şimdi aynı kuvvete sahip üstlü ifadelerin çarpımını inceleyelim. $3^4 \cdot 5^4$ değerini bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Öncelikle açık halde yazalım.

$$3^4 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Bu ifade çarpma işleminin değişme özelliği kullanılarak ikiye ayrılmış olarak gruplandırıldığında,

Bunu biliyor muydunuz?

Hertz, saniye başına düşen devir sayısını ifade eden ölçü birimidir. Bir bilgisayarın RAM ve İşlemci gibi parçalarının hızları genellikle MHz ve GHz ile ifade edilir. Örneğin 1 MHz , $(1, 4, 8, 16, 32)$ ya da 64 bit olabilir bir verinin saniyede bir milyon defa işlenmesi anlamına gelir. İşte bu iki bileşen (bit sayısı ve işlem hızı) bir işlemcinin hızını belirler. 1970'li yıllarda yapılan bilgisayarların işlemci hızları genellikle 1 MHz civarındaydı (Atari, Commodore vs). Bugün ise bu hızın 6 GHz lere kadar ulaştığını görüyoruz.

| Kat | Adı | Sembol |
|-----------|-----------|--------|
| 10^0 | Hertz | Hz |
| 10^3 | Kilohertz | kHz |
| 10^6 | Megahertz | MHz |
| 10^9 | Gigahertz | GHz |
| 10^{12} | Terahertz | THz |

Bunu biliyor muydunuz?

10^{100}

Googol terimi, 10^{100} anlamına gelir. Bir googol, 1'in yanına 100 tane sıfırın gelmesiyle oluşur. Bir rakamın ardından gelen 1 googol sıfır ile yazılan sayıya ise googolplex adı verilir.

Bu sayı, $10^{\text{googol}} = 10^{(10^{100})}$ ile ifade edilir ve evrende yaklaşık sayıda olan elektronların sayısından fazladır.

Web arama motoru Google ismini buradan almıştır.

Google firmasının müdürü ve ortaklarından olan Sergey Brin, bir matematikçidir ve Google ismini bu arama motorunun çok geniş olduğunu tanımlamak için seçmiştir.

$(3 \cdot 5) (3 \cdot 5) (3 \cdot 5) (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^4 = 15^4$ elde edilir.

Örnek 15

Aşağıdaki üstlü ifade çarpımlarını tek bir üstlü ifade olarak yazalım.

a. $(-3)^3 \cdot (4)^3$ b. $\left(\frac{2}{x}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4$

Çözüm

a. $(-3)^3 \cdot (4)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
 $= (-3 \cdot 4) \cdot (-3 \cdot 4) \cdot (-3 \cdot 4)$
 $= (-3 \cdot 4) \cdot (-3 \cdot 4) \cdot (-3 \cdot 4)$
 $= (-3 \cdot 4)^3$
 $= (-12)^3$

b. $\left(\frac{2}{x}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$
 $= \underbrace{\left(\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}\right)}_{4 \text{ tane}}$
 $= \left(\frac{2}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{y}\right)^4 = \left(\frac{2}{y}\right)^4$

Üstleri aynı olan iki ifade çarpıldığında, tabanları çarpılır ve her iki ifadenin üstü çarpımın ortak üstü olarak yazılır. Bu durum pozitif tam sayı kuvvetleri için aşağıdaki gibi gösterilir.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$x^m \cdot y^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{m \text{ tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot \dots \cdot (x \cdot y)}_{m \text{ tane}} = (x \cdot y)^m$$

$$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m \text{ dir.}$$

Yukarıdaki ispat üstlerin pozitif tam sayı olduğu durumlar için yapıldığı halde $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$ eşitliği üstlerin negatif olduğu durumlar için de geçerlidir.

Örnek 16

$\left(-\frac{a}{b}\right)^3 \cdot (2b)^3$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\left(-\frac{a}{b}\right)^3 (2b)^3 = \left(-\frac{a}{b} \cdot 2b\right)^3 = \left(-\frac{a}{\cancel{b}} \cdot 2\cancel{b}\right)^3 = (-2a)^3$

Örnek 17

Aşağıdaki ifadelerde soru işareti yerine gelecek sayıları bulalım.

- a. $3^7 = 3^5 \cdot 3^?$
 b. $3^7 = 3^6 \cdot 3^?$
 c. $3^7 = 3^7 \cdot 3^?$

Çözüm

- a. $3^7 = 3^{5+2} = 3^5 \cdot 3^2$
 b. $3^7 = 3^{6+1} = 3^6 \cdot 3^1$
 c. $3^7 = 3^{7+0} = 3^7 \cdot 3^0$

Örnek 18

$5^6 \cdot 2^7$ çarpımının sonucunu üstlü bir ifade ile gösterelim.

Çözüm

Tabanları farklı iki üstlü ifadeyi çarpabilmek için sayıların üstleri küçük olan üste eşitlenerek çarpma işlemi yapılır. 2^7 ve 5^6 sayılarından üstü küçük olan 5^6 dir. Dolayısıyla 2^7 sayısının üstü de 6 olarak yazılırsa çarpma işlemi yapılabilir.

$$5^6 \cdot 2^7 = 5^6 \cdot 2^{6+1} = 5^6 \cdot 2^6 \cdot 2^1 = (5 \cdot 2)^6 \cdot 2 = 2 \cdot 10^6$$

Örnek 19

$\frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{3^5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Öncelikle pay kısmında bulunan $3^4 + 3^4 + 3^4$ üstlü ifadelerinin toplamını bulalım.

$$\begin{aligned} \underbrace{3^4 + 3^4 + 3^4}_{3 \text{ tane}} &= 3 \cdot 3^4 && \text{Tekrarlı toplama işlemi çarpma işlemi ile ifade edilebilir.} \\ &= 3^1 \cdot 3^4 && 3 = 3^1 \text{ olarak yazılır.} \\ &= 3^{1+4} && \text{Tabanları aynı olan üstlü ifadelerin üstleri toplanır.} \\ &= 3^5 \end{aligned}$$

$3^4 + 3^4 + 3^4 = 3^5$ olduğundan soruda pay kısmına 3^5 yazılarak işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{3^4 + 3^4 + 3^4}{3^5} &= \frac{3^5}{3^5} \\ &= 3^{5-5} = 3^0 = 1 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Dikkat

$$3^n + 3^n + 3^n + 3^n = 4 \cdot 3^n$$

$n \neq 1$ için,

$$3^n + 3^n + 3^n + 3^n \neq 3^{4n}$$

$$3^n + 3^n + 3^n + 3^n \neq (4 \cdot 3)^n$$

Anahtar Bilgi

Sıfırdan farklı bir gerçekte sayının sıfırıncı kuvveti 1 dir.

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$\frac{x^n}{x^n} = \frac{\cancel{x^n}}{\cancel{x^n}} = 1$$

$n \neq 0$ olmak üzere, $0^n = 0$ olur.

0^0 belirsizdir.

Üstlü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapılabilmesi için üstleri ve tabanları aynı olan terimler elde edilir. Üstleri ve tabanları aynı olan terimler ortak paranteze alınarak katsayılar toplanır veya çıkarılır.

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c) x^n \text{ dir.}$$

Örnek 20

$\frac{7^5 + 7^6 + 7^7}{7^8 + 7^7 + 7^6}$ ifadesini sadeleştiririm.

Çözüm

$$\frac{7^5 + 7^6 + 7^7}{7^8 + 7^7 + 7^6}$$

Sayıların üstleri en küçük üstlü sayının üstüne eşit olacak şekilde yazalım.

$$= \frac{7^5 + 7^{5+1} + 7^{5+2}}{7^{6+2} + 7^{6+1} + 7^6}$$

Pay kısmındaki sayılar 7^5 , payda kısmındakiler ise 7^6 bir çarpan olacak şekilde düzenleyelim.

$$= \frac{7^5 \cdot 1 + 7^5 \cdot 7^1 + 7^5 \cdot 7^2}{7^6 \cdot 7^2 + 7^6 \cdot 7^1 + 7^6 \cdot 1}$$

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ özelliğini kullanarak sayılar düzenleyelim.

$$= \frac{7^5 (1 + 7^1 + 7^2)}{7^6 (7^2 + 7^1 + 1)}$$

Pay 7^5 ortak parantezine, payda ise 7^6 ortak parantezine alarak sadeleştiririm.

$$= \frac{7^5}{7^6}$$

Üstlü sayılarda bölme işlemi yapalım.

$$= 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

7 nin çarpmaya göre tersini yazalım.

Örnek 21

$2,3 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^7$ işlemini yapalım.

Çözüm

$2,3 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^7$ ifadesinde toplama işleminin yapılabilmesi için önce tabanları aynı olan üstlü ifadelerin üstlerinin eşitlenmesi gerekir.

$$\begin{aligned} 2,3 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^7 &= 2,3 \cdot 10^2 \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^7 \\ &= 230 \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^7 \\ &= (230 + 4) \cdot 10^7 \\ &= 234 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Üstleri eşit iki üstlü ifadenin çarpımı tek bir üstlü ifade şeklinde yazılabilmektedir. Benzer durum üstleri eşit iki üstlü ifadenin bölümünde de geçerli midir? Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 22

$\frac{2^5}{3^5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Öncelikle pay ve paydayı ayrı ayrı yazalım. $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

Bu ifadede 2 ve 3'lerin sayısı aynı olduğu için rasyonel ifadelerin çarpımından da faydalanarak; $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ olarak yazılabilir. Bu durumun pozitif tam sayı üstleri için genel hali aşağıda gösterilmiştir.

Üstleri aynı iki üstlü ifadenin bölme işleminde tabanlar bölüm olarak alınıp, üst olarak ortak üst yazılır. $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\frac{x^m}{y^m} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\overbrace{y \cdot y \cdot y \cdot \dots \cdot y}^{m \text{ tane}}} = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}_{m \text{ tane}} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \text{ olduğundan}$$

$$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \text{ şeklinde yazılır.}$$

Yukarıdaki ispat üstlerin pozitif tam sayı olduğu durumlar için yapıldığı halde

$\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$ eşitliği üstlerin negatif olduğu durumlar için de geçerlidir.

Örnek 23

$\frac{6^9}{3^9}$ ve $\frac{-8^7}{2^7}$ ifadelerini düzenleyelim.

Çözüm

Her iki ifade de üstler aynıdır. Dolayısıyla birinci üstlü ifade $\frac{6^9}{3^9} = \left(\frac{6}{3}\right)^9 = 2^9$,
ikincisi ise $\frac{-8^7}{2^7} = -\left(\frac{8}{2}\right)^7 = -4^7$ olarak yazılır.

Üstlü Bir İfadenin Kuvveti

Örnek 24

$(2^3)^4$ üstlü ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$(2^3)^4$ ifadesi üstlü sayı tanımından 4 tane 2^3 ün çarpımına eşittir. Buna göre,

$$\begin{aligned}(2^3)^4 &= \underbrace{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}_{4 \text{ tane}} \\ &= 2^{3+3+3+3} \\ &= 2^{3 \cdot 4} \\ &= 2^{12}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu parantezin içerisindeki üst ile dışındaki üstün çarpımıdır. Aşağıdaki benzer örnekleri inceleyelim.

$$\text{a. } \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot 3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\text{b. } x \neq 0 \text{ için, } \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}}_{2 \text{ tane}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{(-3)+(-3)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{(-3) \cdot 2} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{x}\right)^6$$

Bir üstlü ifadenin kuvveti alındığında üstler çarpılır. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot x^m \cdot \dots \cdot x^m}_{n \text{ tane}} = x^{\overbrace{m+m+m+\dots+m}^{n \text{ tane}}} = x^{m \cdot n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \text{ şeklinde yazılır.}$$

Yukarıdaki ispat üstlerin pozitif tam sayı olduğu durumlar için verilmiş olmasına rağmen, $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ eşitliği üstlerin negatif tam sayı olduğu durumlar için de geçerlidir.

Örnek 25

27^6 üstlü ifadesini 3'ün kuvveti olarak yazalım.

Çözüm

$$27^6 = (3^3)^6 = 3^{3 \cdot 6} = 3^{18}$$

Örnek 26

$(7^5 \cdot 7^2)^{-2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$(7^5 \cdot 7^2)^{-2} = (7^{5+2})^{-2} = 7^{7 \cdot (-2)} = 7^{-14} = \frac{1}{7^{14}}$$

Örnek 27

$(a^2 \cdot b^{-3})^4$ ifadesini düzenleyelim.

Çözüm

$$\begin{aligned} (a^2 \cdot b^{-3})^4 &= \underbrace{(a^2 \cdot b^{-3}) \cdot (a^2 \cdot b^{-3}) \cdot (a^2 \cdot b^{-3}) \cdot (a^2 \cdot b^{-3})}_{4 \text{ tane}} \\ &= \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{4 \text{ tane}} \cdot \underbrace{b^{-3} \cdot b^{-3} \cdot b^{-3} \cdot b^{-3}}_{4 \text{ tane}} \quad \text{veya} \\ &= a^{2+2+2+2} \cdot b^{-3-3-3-3} \\ &= a^{2 \cdot 4} \cdot b^{-3 \cdot 4} = a^8 \cdot b^{-12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 \cdot b^{-3})^4 &= (a^2)^4 \cdot (b^{-3})^4 \\ &= a^{2 \cdot 4} \cdot b^{-3 \cdot 4} \\ &= a^8 \cdot b^{-12} \end{aligned}$$

Dikkat

$a \neq 0, b \neq 0$ ve $m, n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
 $(a^n \cdot b^m)^k = a^{n \cdot k} \cdot b^{m \cdot k}$ dir.

Anahtar Bilgi

a , sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere; $a \cdot 10^k$ sayısı $k + 1$ basamaklıdır.

Örnek 28

$A = 7 \cdot 8^3 \cdot 5^{12}$ ifadesinin kaç basamaklı olduğunu üstlü ifadelerin özelliklerini kullanarak bulalım.

Çözüm

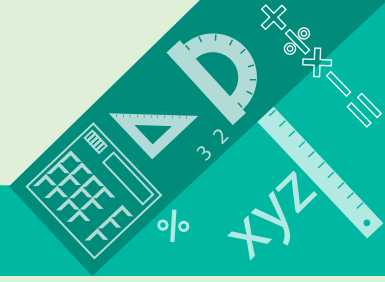
$A = 7 \cdot 8^3 \cdot 5^{12}$ sayısını düzenleyerek $a \cdot 10^k$ şekline dönüştürelim. Böylece A sayısının sonundaki sıfır sayısı bulunabilir.

$$\begin{aligned} A &= 7 \cdot 8^3 \cdot 5^{12} = 7 \cdot (2^3)^3 \cdot 5^{12} \\ &= 7 \cdot 2^9 \cdot 5^9 \cdot 5^3 \\ &= 7 \cdot 5^3 \cdot (2 \cdot 5)^9 \\ &= 7 \cdot 5^3 \cdot 10^9 \\ &= 875 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, 875 sayısının sağında 9 tane sıfır olduğu anlamına gelir.

Dolayısıyla, $A = 7 \cdot 8^3 \cdot 5^{12}$ ifadesi 12 basamaklıdır.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında, bakteri popülasyonu ile ilgili bölüm girişinde verilen durum üstlü denklem ile modellenerek ifade edilecektir. Giriş bölümünde biyoloğun bakteri popülasyonunu ilk ölçümde 72 olarak belirlediğini biliyoruz. Bu atölye çalışmasında başlangıçtan itibaren bakteri popülasyonunun zamana bağlı nasıl değiştiğini ve kaç saat sonra 72'ye ulaştığı incelenecektir.



1. Bölüm

Adım 1 ►

Bakteri popülasyonun her bir saatte 2 katına çıktığı bilindiğine göre her bir saat sonunda ölçülen bakteri sayısını bularak aşağıdaki tablonun 2. sütununu ilk 10 saat için doldurunuz.

| Geçen Süre (saat) | Bakteri Popülasyonu | Bakteri Popülasyonunun Bir Önceki Saatteki Bakteri Popülasyonuna Oranı |
|-------------------|---------------------|--|
| 0 | 1 | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| ⋮ | | |

Adım 2 ►

Her bir saat sonunda ölçülen bakteri popülasyonunun bir önceki saatteki bakteri popülasyonuna oranını bularak yukarıdaki tablonun 3. sütunu doldurunuz. Bu oranların ne ifade ettiğini açıklayınız.

Adım 3 ►

Toplam bakteri sayısının zamana (t) bağlı olarak değişimini gösteren denklemi yazınız.

Adım 4 ►

Ölçülen bakteri sayısının en az 20 000 olması için kaç saat süre geçmelidir.

2. Bölüm

Adım 1 ►

İlk ölçülen bakteri popülasyonunu 72 olduğunu ve bakterilerin her bir saatte yine 2 katına çıktığını kabul edelim. Bu bilgilere göre yukarıdaki tablonun bir benzerini doldurunuz.

Adım 2 ►

2. saat sonundaki bakteri popülasyonunu başlangıçtaki (0. saatteki) bakteri popülasyonunu kullanarak nasıl bulursunuz. Bu hesaplamayı yaparken 1. adımda bulduğunuz oranı nasıl kullandınız.

Adım 3 ►

3. saat sonundaki bakteri popülasyonunu başlangıçtaki bakteri popülasyonunu kullanarak nasıl bulursunuz. Bakteri popülasyonunu bulmak için kullandığınız ifadeyi üstlü ifade kullanarak yazınız.

Adım 4 ►

6. saat sonundaki bakteri popülasyonunu üstlü ifade kullanarak yazınız ve sonucu hesaplayınız.

Adım 5 ►

Hesap makinesi yardımıyla bakteri popülasyonun kaç saat sonra 150 000 i geçeceğini bulunuz.

Üstlü Denklemler

Bir bakteri popülasyonunun hesaplandığı atölye çalışmasında geçen durum veya bu duruma benzer belli bir oranda artan veya azalan durumlar üstlü denklemler ile gösterilebilir. Örneğin, atölye çalışmasında sorulan bakteri popülasyonu aşağıdaki denklem ile modellenenebilir.

$$y = 72 \cdot (2)^t$$

Başlangıç değeri Geçen süre (s)
Sabit çarpan (artış çarpanı)

Değişkenin üst olarak yer aldığı bu tür denklemlere **üstlü denklemler** denir ve genel olarak

$$y = a \cdot b^x \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Örnek29

Bir yapay göletteki haftalık balık sayısı, t hafta sayısını göstermek üzere $y = 5 \cdot 3^t$ ile modelleniyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

- **a.** Gölette başlangıçta kaç balık vardır?
- **b.** Modeldeki 3 sayısı neyi göstermektedir?
- **c.** 2. ve 3. haftanın sonunda göletteki balık sayısı ne olur?
- **ç.** Göletteki balık sayısı kaç hafta sonra 1215 olur?

Çözüm

- **a.** $y = 5 \cdot 3^t$ ifadesinde 5 sayısının başlangıç değerini gösterdiğini atölye çalışmasında öğrendik. Dolayısıyla gölette başlangıçta 5 balık vardır. Aşağıdaki tabloda birkaç hafta için göletteki balık sayısını bulalım. Başlangıç durumunun 0 ile gösterildiğine dikkat ediniz.

| • Hafta (t) | • Balık Sayısı ($5 \cdot 3^t$) |
|-------------|----------------------------------|
| • 0 | • $5 \cdot 3^0 = 5 \cdot 1 = 5$ |
| • 1 | • $5 \cdot 3^1 = 15$ |
| • 2 | • $5 \cdot 3^2 = 45$ |
| • 3 | • $5 \cdot 3^3 = 135$ |
| • 4 | • $5 \cdot 3^4 = 405$ |
| • 5 | • $5 \cdot 3^5 = 1215$ |

- **b.** Modeldeki 3 sayısı göletteki balık sayısının artış çarpanını göstermektedir. Yani, balıklar her hafta 3 katına çıkmaktadır.
- **c.** Tabloya göre, 2. haftanın sonunda göletteki balık sayısı $5 \cdot 3^2 = 45$ olur iken 3. haftasının sonunda göletteki balık sayısı $5 \cdot 3^3 = 135$ olur.
- **ç.** Göletteki balık sayısının 1215 olması için kaç haftanın geçeceği $5 \cdot 3^t = 1215$ denklemi çözülerek bulunur.

$$\begin{aligned}
 & \cdot \quad 5 \cdot 3^t = 1215 \\
 & \cdot \quad \frac{5 \cdot 3^t}{5} = \frac{1215}{5} \quad \text{Eşitliğin her iki tarafını 5'e bölelim.} \\
 & \cdot \quad 3^t = 243 \\
 & \cdot \quad 3^t = 3^5 \\
 & \cdot \quad 3^{\textcircled{1}} = 3^{\textcircled{5}} \Rightarrow t = 5 \quad 243 = 81 \cdot 3 = 27 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5
 \end{aligned}$$

Bir üstlü denklemde eşitliğin her iki tarafındaki tabanlar eşit ise üstler de eşittir.
 $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere,

$$a^m = a^n \text{ ise } m = n \text{ dir.}$$

Örnek30

$3^{x-2} = 81$ denklemini çözelim ve çözümü grafik üzerinde yorumlayalım.

Çözüm

$$3^{x-2} = 81$$

$$3^{x-2} = 3^4 \quad \text{Tabanları eşitlemek için 81 sayısı 3'ün kuvveti olarak yazılır.}$$

$$3^{x-2} = 3^4 \quad \text{Eşitliğin her iki tarafında tabanlar eşit olduğundan üstler eşit olur.}$$

$$x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

Eşitliğin her iki tarafındaki ifade ayrı ayrı denklem olarak yazılırsa;

$$y = 3^{x-2} \text{ ve } y = 16$$

şeklinde iki denklem elde edilir. Bu denklemlerin grafikleri bir grafik çizim yazılım veya grafik hesap makinesi kullanarak çizildiğinde aşağıdaki grafik elde edilir.

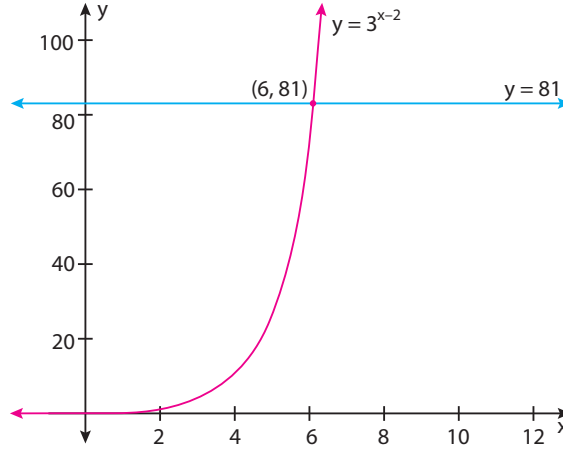
İnceleyelim

$1^m = 1^n$ ise m ve n için ne söyleyebilirsiniz?

$(-1)^m = (-1)^n$ ise m ve n için ne söyleyebilirsiniz?

Dikkat

x – eksenine paralel olarak çizilen herhangi doğru $y = 3^{x-2}$ denkleminin grafiğini keseceği için $3^{x-2} = a$ denkleminde a değerleri sadece 3'ün kuvvetleri olan sayılar olmak zorunda değildir. Herhangi bir pozitif gerçek sayı değeri için bir tane çözüm olacağına dikkat ediniz.



İki denklemin grafiklerinin kesişim noktası olan $x = 6$ değeri $3^{x-2} = 81$ eşitsizliğinin çözümüdür.

Örnek31

$27^{2x-2} = 243^x$ denklemini çözelim.

Çözüm

$27^{2x-2} = 243^x$ Eşitliğin her iki tarafındaki üstlü ifadelerin tabanları eşitlenir.

$(3^3)^{2x-2} = (3^5)^x$ $27 = 3^3$ ve $243 = 3^5$ olduğunu biliyoruz.

$3^{3 \cdot (2x-2)} = 3^{5x}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ özelliği kullanılır.

$3^{6x-6} = 3^{5x}$ Eşitliğin her iki tarafında tabanlar eşit olduğundan üstler eşit olur.

$$6x - 6 = 5x$$

$$x = 6$$

Örnek32

$5^x + 5^x + 5^x + 5^x = 500$ olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 \underbrace{5^x + 5^x + 5^x + 5^x}_{4 \text{ tane}} &= 500 \\
 4 \cdot 5^x &= 500 \\
 \frac{4 \cdot 5^x}{4} &= \frac{500}{4} \\
 5^x &= 125 \\
 5^x &= 5^3 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

Örnek33

Betül Hanım bu ay 1 000 TL olan kredi kartı borcunu ödeyememiştir. Banka kredi kartı borçlarının hiç ödenmemesi durumunda aylık %8 gecikme faizi uygulamaktadır. Bu kart ile başka alışveriş yapmayan Betül Hanım 3 ay boyunca bu borcunu ödeyemediğine göre, 3. ayın sonunda Betül Hanım'ın toplam borcunun kaç TL olduğunu bulalım. Ayrıca herhangi bir aydaki toplam borcu gösteren denklemi yazalım.

Çözüm

Başlangıç borcu: 1000 TL

Borcun aylık artma oranı (faiz) : $\%8 = \frac{8}{100} = 0,08$

Süre : 3 ay

| | Adım adım çözüm | Üstlü İfade | Yeni Borç (y) |
|-----------------|---|---------------------------|---------------|
| Başlangıç borcu | 1 000 TL | | 1 000 TL |
| 1. ay sonunda | $1000 + 1000 \cdot 0,08 = 1000 \cdot (1 + 0,08)$ | $1000 \cdot (1 + 0,08)^1$ | 1 080 TL |
| 2. ay sonunda | $1000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,08)$ | $1000 \cdot (1 + 0,08)^2$ | 1 166,40 TL |
| 3. ay sonunda | $1000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,08)$ | $1000 \cdot (1 + 0,08)^3$ | 1 259,712 TL |

Anahtar Bilgi

Sabit yüzde ile azalma durumlarının modellenmesinde $y = A \cdot (1 - r)^n$ denklemi kullanılır.

Bu şekilde devam edilirse herhangi bir ay sonundaki borç $1000 \cdot (1 + 0,08)^t$ ifadesi ile gösterilir. Atölye çalışmasında olduğu gibi sabit yüzde ile büyüme içeren bu gibi durumlar üstlü denklemler ile ifade edilir. Bu sorudaki duruma benzer durumlar aşağıdaki denklem ile modellenir.

$$y = A \cdot (1 + r)^t$$

Başlangıç değeri A (Sabit çarpan (artış çarpanı))
Geçen süre t
Artış oranı r

Örnek34

Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) verilerine göre Türkiye Cumhuriyeti'nin nüfusu 2012 yılı sonu itibarıyla yaklaşık 75 milyon olarak belirlenmiştir. Türkiye'nin nüfusu yıllık yaklaşık olarak % 2 oranında artış gösterdiğine göre, 10 yıl sonraki nüfus yaklaşık olarak kaç milyon olacaktır?

Çözüm

Nüfusun başlangıç değeri: $A = 75\,000\,000 = 7,5 \cdot 10^7$

Yıllık artış yüzdesi: $r = 0,02$

Süre: $t = 10$

Dolayısıyla, yukarıdaki model kullanılarak 10. yılın sonundaki nüfus,

$$y = (7,5 \cdot 10^7) \cdot (1 + 0,02)^{10}$$

üstlü denklemi ile ifade edilebilir. Bu ifadenin yaklaşık değeri ise hesap makinesi yardımıyla 91 500 000 olarak bulunur.

Örnek35

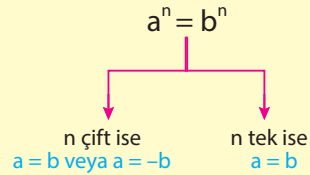
$x^2 = 16$ ve $y^3 = 27$ denklemlerini sağlayan x ve y gerçekteki sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$x^2 = 16$ ise $x^2 = 4^2$ veya $x^2 = (-4)^2$ olur. Buradan $x = 4$ veya $x = -4$ elde edilir. O halde çözüm kümesi $\text{ÇK} = \{-4, 4\}$ olur.

$y^3 = 27 = 3^3$ olduğundan $y = 3$ olur. $\text{ÇK} = \{3\}$ olur.

Genel olarak $a, b \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere,



Örnek36

$(x - 1)^3 = 27$ denkleminin gerçekte sayılar kümesindeki çözümünü bulalım.

Çözüm

$(x - 1)^3 = 27$ 27 sayısını üstlü sayı olarak ifade edelim.

$(x - 1)^3 = 3^3$ Eşitliğin iki tarafındaki üstler tek sayı ve birbirine eşit olduğundan tabanlar eşit olur.

$$x - 1 = 3$$

$x = 4$ Çözüm kümesi $\{4\}$ olur.

Örnek37

$\left(\frac{y}{2} + 1\right)^6 = 64$ denkleminin gerçekte sayılar kümesinde çözümünü bulalım.

Çözüm

64 sayısını 2'nin kuvveti olarak yazalım.

$$\left(\frac{y}{2} + 1\right)^6 = 64$$

$$\left(\frac{y}{2} + 1\right) = 2^6$$

Eşitliğin her iki tarafındaki üstler birbirini eşit ve çift sayı olduğundan tabanlar ya birbirine eşit ya da birbirinin zıt işaretlisidir.

$$\frac{y}{2} + 1 = 2 \quad \frac{y}{2} + 1 = -2$$

$$\frac{y}{2} = 1 \quad \frac{y}{2} = -3$$

$$y = 2 \quad y = -6$$

Çözüm kümesi $\{-6, 2\}$ olur.

Anahtar Bilgi

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $(-1)^{2n} = 1$
 $(-1)^{2n+1} = -1$

Anahtar Bilgi

$a^n = 1$ ise
 i. $a = 1$ veya
 ii. $a = -1$ ve n bir çift sayı
 iii. $a = 0$ ve $n \neq 0$ dir.

Örnek 38

$(6x - 4)^{24} = (3x + 5)^{24}$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$$(6x - 4)^{24} = (3x + 5)^{24}$$

$$6x - 4 = 3x + 5 \quad \text{ve} \quad 6x - 4 = -(3x + 5)$$

$$6x - 3x = 5 + 4 \quad 6x - 4 = -3x - 5$$

$$3x = 9 \quad 6x + 3x = -5 + 4$$

$$x = 3 \quad 9x = -1$$

$$x = -\frac{1}{9}$$

Eşitliğin iki tarafındaki üstler birbirine eşit ve çift sayı olduğundan tabanlar ya birbirine eşit ya da birbirinin zıt işaretlisidir.

x değerlerinin toplamı

$$-\frac{1}{9} + 3 = \frac{-1 + 27}{27} = \frac{26}{9} \text{ olur.}$$

Örnek 39

$(2x - 9)^{8x-16} = 1$ denklemini sağlayan x değerlerini bulalım.

Çözüm

$(ax + b)^{cx+d} = 1$ şeklindeki denklemlerin çözümü üç farklı durum da incelenir.

1. Durum: Tabanın 1 olması

$$2x - 9 = 1$$

$$2x = 1 + 9$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

2. Durum: Tabanın -1 ve üstün çift olması

| Taban | Üst ($x = 4$ için $8x - 16$ ifadesi bir çift sayı mı?) |
|--------------------------------------|--|
| $2x - 9 = -1$ $2x = 8$ $x = 4$ | $8x - 16$ $8 \cdot 4 - 16 = 16$ x yerine 4 yazılır. Sonuç çift sayıdır. |

16 çift olduğundan $x = 4$ çözüm olarak kabul edilir.

3. Durum: Üstün sıfır olması ve tabanın sıfırdan farklı bir gerçek sayı olması

| Üst | Taban ($x = 2$ için $2x - 9$ ifadesi sıfırdan farklı mı değil mi?) |
|--------------------------|---|
| $8x - 16 = 0$ $x = 2$ | $2x - 9$ $2 \cdot 2 - 9 = -5$ x yerine 2 yazılır. Sonuç 0'dan farklıdır. |

2 sayısı tabanı sıfır yapmadığı için $x = 2$ çözüm olarak kabul edilir.

Sonuç olarak $(2x - 9)^{8x-16} = 1$ denklemini sağlayan x değerleri $\{2, 4, 5\}$ olur.

Örnek 40

$3^x = p$ ve $2^x = r$ olduğuna göre, üstlü ifadelerin özelliklerini kullanarak 72^x ifadesini p ve r cinsinden yazalım.

Çözüm

72^x ifadesini 3^x ve 2^x ifadelerini kullanarak yeniden düzenleyelim. Önce 72'yi içerisinde 2 ve 3 bulunan çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{aligned}
 72^x &= (2^3 \cdot 3^2)^x && 72 \text{ yerine } 2^3 \cdot 3^2 \text{ yazılır. } (72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2) \\
 &= (2^3)^x \cdot (3^2)^x && (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ özelliğini kullanalım.} \\
 &= (2^x)^3 \cdot (3^x)^2 && (a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n \text{ özelliğini kullanalım.} \\
 &= r^3 \cdot p^2 && 2^x \text{ yerine } r \text{ ve } 3^x \text{ yerine } p \text{ yazılır.}
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $72^x = r^3 \cdot p^2$ bulunur.

Örnek 41

$8^y = 9$ ve $3^x = 32$ ise $x \cdot y$ nin değerini bulalım.

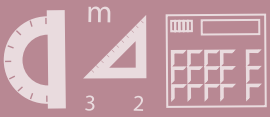
Çözüm

Mevcut bilgilerle x ve y değerlerinin ayrı ayrı bulunması mümkün değildir. Üstlü ifadelerde x ile y değişkenlerini çarpım halinde yazabilmek için y içeren üstlü ifadenin x kuvvetini almak gerekir. 8^y nin x kuvveti alınırsa $(8^y)^x = 8^{x \cdot y}$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
 8^y &= 9 \\
 (8^y)^x &= 9^x && 8^{x \cdot y} \text{ yi elde etmek için } 8^y \text{ nin } x \text{ kuvvetini alalım.} \\
 8^{xy} &= 9^x \\
 (3^x)^2 &= 32^2 && 9^x \text{ elde etmek için } 3^x \text{ in } 2 \text{ kuvveti alınır. } (3^x)^2 = (3^2)^x = 9^x \text{ dir.} \\
 9^x &= 32^2
 \end{aligned}$$

$9^x = 8^{xy}$ ve $9^x = 32^2$ olduğundan $8^{xy} = 32^2$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
 8^{xy} &= 32^2 \Rightarrow (2^3)^{xy} = (2^5)^2 \\
 &\Rightarrow 2^{3xy} = 2^{10} \\
 &\Rightarrow 3xy = 10 \\
 &\Rightarrow xy = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavram Yoklama ve Muhakeme

- Aşağıdaki ifadelerde doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.
 - (.....) Pozitif sayıların tüm kuvvetleri pozitiftir.
 - (.....) Negatif sayıların tüm kuvvetleri negatiftir.
 - (.....) Üstlü sayılarda çarpma işlemi yapabilmek için tabanların kesinlikle aynı olması gerekir.
 - (.....) Sıfırdan farklı bütün sayıların sıfırinci kuvveti 1 dir.
 - (.....) 10^8 sayısı sekiz basamaklı bir sayıdır.
 - (.....) $(0,003)^{-2} \cdot (-2) < 0$
 - (.....) $(-3^4) = 81$
- $a^5 \cdot a^3$ ile $(a^5)^3$ ifadeleri birbirine eşit midir? Açıklayınız.
- $2^4 \cdot 3^3 = 2 \cdot a^3$ ise a nın değerini bulunuz.
- $4^5 \cdot 3^5$ çarpımını kuvveti 1'den farklı bir tam sayı olan bir üstlü ifade şeklinde yazabilir misiniz?
- Emir 2^5 in $2 \cdot 5$ e eşit olduğunu söylüyor. Emir'e 2^5 i nasıl yorumlaması gerektiğini yazarak açıklayınız ve iki ifadenin aynı sonucu vermeyeceğini gösteriniz.
- Eymen 2^{-5} in -2^5 e eşit olduğunu söylüyor. Eymen'e 2^{-5} i nasıl yorumlaması gerektiğini yazarak açıklayınız ve iki ifadenin aynı sonucu vermeyeceğini gösteriniz.

7. Üstlü sayıların özelliklerini kullanarak aşağıdaki boşlukları doldurunuz ve yaptığınız işlemleri açıklayınız.

$$(5a^2)^3 = 5a^2 \cdot \dots \cdot \dots$$

$$= \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots$$

$$= \dots$$

8. Aşağıda Levent ve Serhat'ın üstlü ifadeler ile ilgili yaptığı işlemler verilmiştir. Bu işlemlerdeki hataları bulunuz ve düzeltiniz.

Levent'in Çözümü

$$\begin{aligned} 2^6 \cdot 2^3 &= 2^{6 \cdot 3} \\ &= 2^{18} \end{aligned}$$

Serhat'ın Çözümü

$$\begin{aligned} 2^6 + 2^3 &= 2^{6+3} \\ &= 2^9 \end{aligned}$$

9. Aşağıdaki ifadeleri üstleri pozitif olacak şekilde düzenleyiniz.

a. $\frac{1}{4^{-1}}$

b. $\frac{1}{x^{-3}}$

c. $\frac{1}{4x^{-2}y^{-3}}$

ç. $\frac{3}{16}x^{-4}$

10. Aşağıdaki ifadelerde her zaman doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

- a. (.....) $2 \cdot a^5 + a^5 = (2 + 1)a^5$
- b. (.....) $4^x + 4^x + 4^x + 4^x = 4^{x+1}$
- c. (.....) $2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 16^{4x}$
- ç. (.....) $3^x + 3^x + 3^x = 3^{3x}$
- d. (.....) $x^3 + x^7 = x^{10}$
- e. (.....) $2x^3 + x = 3x^4$

KENDİMİZİ SINAYALIM

11. $5^x + 5^x + 5^x + 5^x = 500$ denklemi ile modellenebilecek bir problem yazınız.

•

12. $y = 650 (1 + 0,04)^t$ üstlü ifadesi ile modellenebilecek bir problem yazınız.

•

13. $(3 - x)^{x+1} = 1$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.

•

14. $3^x = 6$ olduğuna göre, $9^x + 3^{x+1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

•

15. $27^x = 8$ ve $128^y = 81$ olduğuna göre, $x \cdot y$ değerini bulunuz.

16. $3^x = 12$ olduğuna göre, x gerçel sayısının hangi tam sayılar arasında bulunduğunu belirleyiniz.

Alıştırmalar

1. aşağıda verilen üstlü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ b. $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

c. $(-3)^{-4}$ ç. $(-3)^{-4}$

d. -3^4 e. $(-5)^{-2}$

f. $(-1)^{2013}$ g. $(-3)^0$

•

2. Aşağıda verilen üstlü ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $5^7 \cdot 5^3$ b. $x^4 \cdot x^4$

c. $x^{-4} \cdot x^5 \cdot x^2$ ç. $(-2)^5 \cdot (-2)^4$

d. $(2x^5) \cdot (3x^4)$ e. $5x^7 \cdot 3x^2$

f. $3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4$

3. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a. $(5^3)^2$ b. $(-2^5)^4$

c. $(-3^4)^5$ ç. $(x^5)^7$

d. $(2^4 \cdot 3^3)^2$ e. $(3 \cdot a^2 \cdot b^3)^2$

4. Aşağıdaki ifadeleri düzenleyerek en sade şekilde yazınız.

a. $\frac{3^5}{3^9}$ b. $\frac{x^5}{x^4}$

c. $\frac{(a^5)^4}{(a^2)^5}$ ç. $\left(\frac{3x^2}{4^{-1}}\right)^{-3}$

d. $\frac{(2a^3)^4 \cdot a^5}{4a^2 \cdot a^{-6}}$ e. $2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

f. $(4x^2y^{-1})^3 \cdot y^4$

5. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 3^5$ b. $5^7 \cdot 2^7$ c. $\frac{(5^4)^3}{25}$

•

6. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bilimsel gösterimle ifade ediniz.

a. $\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^6}$ b. $\frac{4,8 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^6}$

c. $(2 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (2500000)$

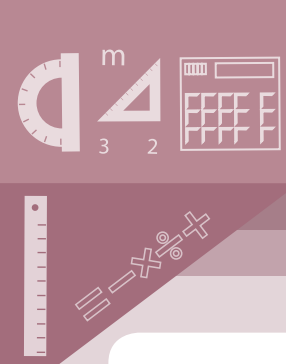
•

7. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a. $3^3 - (-2)^4 + (-1)^5$

b. $\frac{(-1)^{2012} + (-7)^0 - (-1)^{2013}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

c. $(6^{-1} + 3^0)^{-2} \cdot 147$



KENDİMİZİ SINAYALIM

8. $\frac{4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4}{4^5}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

9. $\frac{3^{45} - 3^{44}}{3^{43} + 3^{42}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10. $\frac{2^{10} - 2^{12}}{2^{11} + 2^9}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

11. $32^{13} \cdot 125^{22} \cdot 10^{25}$ sayısı kaç basamaklıdır?

12. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x gerçekteki sayılarını bulunuz.

a. $(3x + 4)^{2013} = 13^{2013}$

b. $(3x - 4)^{2013} = (2x + 1)^{2013}$

c. $5^x = 125$

ç. $2 \cdot 3^x = 54$

d. $3^{x-5} = 81$

e. $2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 128$

f. $\frac{5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x}{3^x + 3^x + 3^x} = \frac{625}{81}$

g. $32^{18} + 32^{18} + 32^{18} + 32^{18} = 8^x$

ğ. $(x - 1)^3 = 27$

h. $9^{3x} \cdot 27^{x-1} = 81^{2x-1} \cdot 3^{2-3x}$

ı. $3^{x-4} = 3^{2x-12}$

i. $8^{x+4} = 32^{x-10}$

13. $0,27^{x-3} = 1$ olduğuna göre, $(x - 3)^{0,27}$ değeri kaçtır?

14. $a = 2^{(4^3)}$ ve $b = (2^4)^3$ olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

Uygulama ve Problem Çözme

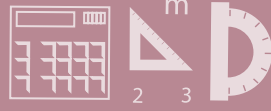
1. Toz akarı (mayt) olarak bilinen canlılar siyah bir zemin üzerinde bir mercek yardımıyla görülebilir. Tipik bir ev toz akarının boyu yaklaşık olarak 420 mikrometredir (μm). $1000 \mu\text{m} = 1 \text{ mm}$ olduğuna göre bir toz akarının boyu mm cinsinden kaç olur?

2. Limon suyu, domates suyunun 10^2 katı daha asitlidir. Domates suyu da, yumurtanın akından 10^3 kat daha asitlidir. O halde; limon suyu, yumurta akından kaç kat daha fazla asitlidir.

3. Türkiye'nin yüzölçümü yaklaşık $78,4 \cdot 10^4$ kilometrekare, nüfusu ise $75 \cdot 10^6$ dir. Rusya'nın yüzölçümü ise yaklaşık $17,1 \cdot 10^7$ kilometrekare olup, nüfusu $14,1 \cdot 10^7$ dir. Buna göre, Türkiye'nin ve Rusya'nın nüfus yoğunluklarını (birim km^2 de bulunan insan sayısı) üstlü ifadelerin özelliklerini kullanarak hesaplayınız ve karşılaştırınız.

4. Zeynep'in ailesinin son 4 yıldır Türk Kızılay'ına yaptığı yıllık nakit bağış miktarı, $160 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^t$ ifadesi ile yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir. Buna göre, t yılı göstermek üzere aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

| t (Yıl) | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|---|---|---|---|
| Bağış Miktarı (TL) | | | | |



KENDİMİZİ SINAYALIM

5. Ahmet Bey 2000 TL maaş almaktadır ve maaşı yıllık %10 oranında artmaktadır. Buna göre Ahmet Bey kaç yıl sonra 2800 TL den fazla maaş almaya başlar? (Hesap makinesi kullanılabilir.)

•
•
•

6. Meryem Hanım 100 000 TL ye Ankara'dan bir daire almıştır. Emlak uzmanı evin bulunduğu bölgede dairelerin yıllık %10 değer kazandığını ifade ettiğine göre, Meryem Hanım'ın dairesinin 5 yıl sonra ulaşacağı değeri üstlü bir denklem ile ifade ediniz ve hesap makinesi yardımıyla bu değeri bulunuz. (Hesap makinesi kullanılabilir.)

7. Onur 5000 TL ye 5 yaşında bir motosiklet almıştır. Bu motosikletlerin yılda %5 değer kaybettiği bilinmektedir. Buna göre,

- a. Motosikletin ilk satış fiyatı yaklaşık kaç TL dir?
(Hesap makinesi kullanılabilir.)
- b. Onur'un motosikletinin değeri 2 yıl önce ne idi? Üstlü denklemi yazarak sonucu bulunuz.

•
•
•
•
•
•
•

8. Yeni aldığınız dizüstü bilgisayarın pilinin kullanım süresine bağlı olarak ömrü (saat cinsinden) $y = 6 \cdot (1 - 0,05)^t$ üstlü ifadesi ile modellenmektedir. Burada t pilin kaç ay kullanıldığını göstermektedir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a. Bu modele göre zaman geçtikçe pilin ömrü artmakta mıdır, azalmakta mıdır?
- b. Pil ömrünün artış veya azalış oranı nedir?
- c. Bilgisayar ilk alındığında pilin ömrü kaç saattir?
- ç. 10 ay sonra pilin ömrü ne olur?

•
•

9. Manisa ilinin 2000 yılından bu yıla kadarki yıllık nüfusu $P = 260\,000 \cdot (1 + 0,012)^t$ denklemi ile modellenmektedir. (Hesap makinesi kullanılabilir.)

- a. Denklemdaki her bir sayının ve değişkenin gerçek hayatta ne anlama geldiğini açıklayınız.
- b. Bu şehirdeki nüfusun yıllara göre artıp azalma durumu ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?
- c. Bu şehirde 2002 yılındaki nüfusun kaç olduğunu bulunuz.
- ç. t değerinin hangi aralığı, bu yıla kadarki bilgileri verir.
- d. Denklemi kullanarak bu yıldaki nüfusun kaç olduğunu bulunuz.

•
•

10. Bir önceki soruda elde ettiğiniz denklem sonraki yıllarda Manisa ilinin nüfusunun tahmininde kullanılacağını kabul edersek, 2023 yılında nüfusun kaç olacağını bir elektronik tablolama programı veya hesap makinesi yardımıyla bulunuz.

Neler Öğreneceğiz?

- Köklü ifadeler
- Köklü ifadelerin üstlü ifade şeklinde gösterimi
- Köklü ifadelere ait özellikler

Anahtar Terimler

- Karekök
- Küp kök
- n. Dereceden kök
- Derece
- Rasyonel üst

Sembol ve Gösterimler

- $\sqrt{\quad}$
- $\sqrt[n]{x^m}$
- $x^{\frac{m}{n}}$

Bunu biliyor muydunuz?

Fransız fizikçi Nicolas Chuquet, 1475 yılında, yazdığı cebir kitabında rasyonel üs kullanmıştır. Kitapta R^26 ile $6^{\frac{1}{2}}$, R^315 ile de $15^{\frac{1}{3}}$ ifade edilmiştir. Kök işareti ilk defa 1525 yılında Christoff Rudolff'un kitabında gösterilmiş ve "coss" diye adlandırılmıştır. Daha sonraları bu işaret değiştirilerek günümüzde kullanılan karekök ve küpkök halini almıştır.



2.3.2. Köklü İfadeler

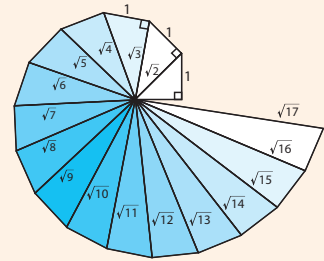
Başlarken

Bölüm girişinde incelenen bakteri popülasyonu sorusunda başlangıçta 72 olan bakteri popülasyonunun bir ve iki saat sonundaki ulaşacağı miktar $72 \cdot (2)^1$ ve $72 \cdot (2)^2$ ile gösterilmişti. Peki, bakteri popülasyonunun yarım saat veya 1,5 saat sonra ulaşacağı miktarlar nasıl ifade edilir? Bu durumlarda bakteri popülasyonu sırasıyla $72 \cdot (2)^{\frac{1}{3}}$ ve $72 \cdot (2)^{\frac{3}{2}}$ ile ifade edilir. Burada $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{2}$ gibi rasyonel sayı kuvvetler ile karşılaşmaktayız.

Pozitif bir gerçek sayının $\frac{1}{2}$ kuvveti özel olarak **karekök** terimi ile adlandırılır ve $\sqrt{\quad}$ sembolü ile

gösterilir. Buna göre, $72 \cdot (2)^{\frac{1}{2}}$ ifadesi $72 \cdot \sqrt{2}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\sqrt{2}$ sayısı, 2'nin karekökü, ya da karekök 2 olarak okunur.

Köklü ifadeler, özellikle geometride birçok durumun incelenip anlaşılmasında kullanılır. Örneğin, gerçek sayılar bölümünde öğrendiğimiz gibi bir kenarı 1 br olan karenin köşegeni $\sqrt{2}$ br şeklinde gösterilmekteydi. Benzer şekilde, alanı 2 br² olan bir karenin bir kenarı da $\sqrt{2}$ br ile gösterilir.



Bu bölümde köklü ifadeler, üstlü ifadeler ile ilişkilendirilerek incelenecek ve köklü ifade içeren denklemlerin çözümleri yapılacaktır. Öncelikle farklı derecelerden kökleri inceleyelim.

Örnek 1

- Karesi 36 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Karesi -36 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Üçüncü kuvveti 125 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Üçüncü kuvveti -125 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Dördüncü kuvveti 16 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Dördüncü kuvveti -16 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Beşinci kuvveti 32 olan gerçek sayılar nelerdir?
- Beşinci kuvveti -32 olan gerçek sayılar nelerdir?

Çözüm

- a. İstenen sayı x ile gösterilecek olursa $x^2 = 36$ denklemi çözülerek bu soru cevaplanabilir.

$$\begin{array}{ccc} & x^2 = 36 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x^2 = 6^2 & & x^2 = (-6)^2 \\ x = 6 & & x = -6 \end{array}$$

Buna göre, $x^2 = 36$ denklemini sağlayan $x = 6$ ve $x = -6$ sayılarına 36'nın karekökleri denir. Köklerden pozitif olanına **pozitif karekök** denir ve $\sqrt{36} = 6$ ile gösterilir. 36'nın negatif karekökü ise $-\sqrt{36} = -6$ ile gösterilir.

- b. Karesi -36 olan bir gerçekte sayı bulmak için $x^2 = -36$ denkleminin çözümünü inceleyelim. Bir gerçekte sayının çift kuvveti her zaman pozitif olduğundan karesi -36 olan bir gerçekte sayı bulunamaz. Bu nedenle bu denklemin bir gerçekte sayı kökü yoktur. Diğer bir ifadeyle $\sqrt{-36} \notin \mathbb{R}$.

- c. Üçüncü kuvveti 125 olan gerçekte sayıları bulmak için $x^3 = 125$ denklemini çözelim.

$$\begin{array}{l} x^3 = 125 \\ x^3 = 5^3 \\ x = 5 \end{array}$$

Üçüncü dereceden kuvveti 125 olan bir gerçekte sayı vardır ve 5'e eşittir. 5 sayısına 125'in küpkökü denir ve $\sqrt[3]{125} = 5$ ile gösterilir. Burada $(-5)^3 \neq 125$ olduğuna dikkat ediniz.

- ç. Yukarıdaki çözüme benzer olarak $x^3 = -125$ denklemini çözelim.

$$\begin{array}{l} x^3 = -125 \\ x^3 = (-5)^3 \\ x = -5 \end{array}$$

Üçüncü dereceden kuvveti -125 olan gerçekte sayı -5 dir. Dolayısıyla, -125 in 3. dereceden kökü -5 dir ve $\sqrt[3]{-125} = -5$ şeklinde yazılır.

- d. $x^4 = 16$ denklemini çözelim.

$$\begin{array}{ccc} & x^4 = 16 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x^4 = 2^4 & & x^4 = (-2)^4 \\ x = 2 & & x = -2 \end{array}$$

16'nın biri pozitif diğeri negatif olmak üzere 4. dereceden iki gerçekte sayı kökü vardır ve bunlar $\sqrt[4]{16} = 2$ ve $-\sqrt[4]{16} = -2$ ile gösterilir. Burada, $x^4 = 16$ denkleminin iki kökü olmasına rağmen $\sqrt[4]{16} = 2$ dir.

Dikkat

$\sqrt{\quad}$ sembolü bir sayının pozitif karekökünü ifade etmek için kullanılır. Bu nedenle, $a \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{a} \geq 0$ dir. Yandaki örnekte 36 sayısının karekökleri 6 ve -6 sayıları olmasına rağmen, $\sqrt{36} = 6$ dir.

Anahtar Bilgi

2. dereceden kök için kullanılan "karekök" isimlendirmesi gibi, 3. dereceden kök için de "küpkök" isimlendirmesi kullanılır. Diğer kök dereceleri için benzer bir özel isimlendirme kullanılmaz.

e. b seçeneğinde gibi bir gerçık sayının çift kuvveti her zaman pozitif olduğundan $x^4 = -16$ eşitliğini sağlayan bir gerçık sayı bulunamaz. Dolayısıyla, $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$.

f. $x^5 = 32$

$$x^5 = 2^5$$

$$x = 2$$

Beşinci dereceden kuvveti 32 olan bir gerçık sayı vardır ve 2 dir. Dolayısıyla 32 nin 5. dereceden kökü 2 dir ve $\sqrt[5]{32} = 2$ şeklinde yazılır.

g. $x^5 = -32$

$$x^5 = (-2)^5$$

$$x = -2$$

Beşinci dereceden kuvveti -32 olan gerçık sayı -2 dir. Dolayısıyla -32 nin 5. dereceden kökü -2 dir ve $\sqrt[5]{-32} = -2$ şeklinde yazılır.

Yukarıdaki örneklerin çözümlerini özetleyelim ve bazı sonuçlar çıkaralım.

| Denklem | Çözüm | Sözel İfade | Köklü İfade |
|--------------|---|---|-----------------------|
| $x^2 = 36$ | $x = \sqrt{36} = 6$ ve $x = -\sqrt{36} = -6$ | Karesi 36 olan sayılar 6 ve -6 dir. | $\sqrt{36} = 6$ |
| $x^2 = -36$ | $x = \sqrt{-36} \notin \mathbb{R}$ | -36 nın gerçık sayı olan karekökü yoktur. | - |
| $x^3 = 125$ | $x = \sqrt[3]{125} = 5$ | 125 in küpköğü 5 tir. | $\sqrt[3]{125} = 5$ |
| $x^3 = -125$ | $x = \sqrt[3]{-125} = -5$ | -125 in 3. dereceden kökü -5 tir. | $\sqrt[3]{-125} = -5$ |
| $x^4 = 16$ | $x = \sqrt[4]{16} = 2$ ve $x = -\sqrt[4]{16} = -2$ | 4. kuvveti 16 olan sayılar 2 ve -2 dir. | $\sqrt[4]{16} = 2$ |
| $x^4 = -16$ | $x = \sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$ | -16 nın 4. dereceden gerçık sayı kökü yoktur. | - |
| $x^5 = 32$ | $x = \sqrt[5]{32} = 2$ | 32 nin 5. dereceden kökü 2 dir. | $\sqrt[5]{32} = 2$ |
| $x^5 = -32$ | $x = \sqrt[5]{-32} = -2$ | -32 nin 5. dereceden kökü -2 dir. | $\sqrt[5]{-32} = -2$ |

Genel olarak, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, herhangi bir a gerçekte sayı için $x^n = a$ denklemini sağlayan x gerçekte sayılarına **a sayısının n . dereceden gerçekte sayı kökleri** denir.

Yukarıdaki örnekler incelendiğinde a 'nın n . dereceden kökleri için, yani $x^n = a$ denklemini için şu sonuçlara varılır:

1. Durum ($a > 0$):

- a. n bir çift sayı ise; a 'nın zıt işaretli iki gerçekte sayı kökü vardır. Köklerden pozitif olana **a nın pozitif kökü** denir ve $\sqrt[n]{a}$ ile gösterilir, negatif olana ise a nın negatif kökü denir $-\sqrt[n]{a}$ ile gösterilir. Bununla birlikte n in çift oluşu durumunda $\sqrt[n]{a}$ sembolü bu köklerden sadece pozitif olanı belirtir. Dolayısıyla, $\sqrt[n]{a} \geq 0$ dir.
- b. n bir tek sayı ise; a 'nın sadece bir gerçekte sayı kökü vardır ve $\sqrt[n]{a}$ ile gösterilir.

2. Durum ($a < 0$):

- a. n bir çift sayı ise; a nın gerçekte sayı kökü yoktur.
- b. n bir tek sayı ise; a nın sadece bir gerçekte sayı kökü vardır ve $\sqrt[n]{a}$ ile gösterilir.

3. Durum ($a = 0$):

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[n]{0} = 0$ olur.

Örnek 1 de görüldüğü gibi n çift olduğunda ifadelerin iki kökü olabilmektedir. Bu köklerden pozitif olanı kök olarak belirleyebilmek için mutlak değer kullanılır. Buna göre,

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ için,

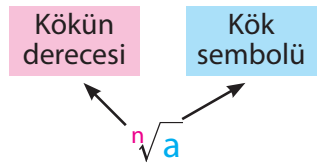
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

Örnek 2

$\sqrt{7^2} + \sqrt{(-6)^2} - \sqrt{(-8)^2}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} \sqrt{7^2} + \sqrt{(-6)^2} - \sqrt{(-8)^2} &= |7| + |-6| - |-8| \\ &= 7 + 6 - 8 \\ &= 5 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$



Anahtar Bilgi

$n \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 2$ için $x^n = a$ denkleminde $a = 0$ için denklemin kökü 0 dir.
 $\sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = \dots = \sqrt[n]{0} = 0$

Örnek 3

Aşağıdaki köklü ifadelerin eşitlerini bulalım.

- a. $\sqrt[4]{(-2)^4}$
- b. $\sqrt[3]{-27}$
- c. $a < 0$ için $\sqrt[6]{a^6}$
- ç. $a < 0$ için $\sqrt[5]{(-a)^5}$
- d. $a < 3$ için $\sqrt{(a-3)^2}$

Çözüm

- a. $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$
- b. $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$
- c. $a < 0$ için $\sqrt[6]{a^6} = |a| = -a$
- ç. $a < 0$ için $\sqrt[5]{(-a)^5} = -a$
- d. $a < 3$ için $\sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = -(a-3) = 3-a$

Örnek 4

$x < 0 < y$ olmak üzere;

$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt[3]{y^3}$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x < 0 < y$ olmak üzere, soruda verilenleri tek tek ele alalım.

$x < 0$ için, $|x| = -x$ olduğundan $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ olur.

$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$ dir.

$x < y$ olduğundan $x - y < 0$ dir. Dolayısıyla $|x - y| = -(x - y) = -x + y$ olur.

$\sqrt[3]{y^3} = y$ dir.

Buna göre,

$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt[3]{y^3} = -x + (-x + y) + y = 2y - 2x$ olur.

Anahtar Bilgi

Aşağıdaki özdeşlikleri hatırlayalım.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Köklü İfade İle Üstlü İfade Gösterimleri Arasındaki İlişki

Örnek 5

9 sayısının hangi kuvvetinin 3'e eşit olduğunu bulalım.

Çözüm

Bu sorunun cevabı $9^x = 3$ denklemi çözülerek bulunur.

$$9^x = 3 \Rightarrow (3^2)^x = 3^1$$

$$\Rightarrow 3^{2x} = 3^1$$

$$\Rightarrow 2x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$9^{\frac{1}{2}} = 3$ olarak yazılabilir.

$\sqrt{9} = 3$ olduğunu biliyoruz. Bu iki eşitlik birleştirilerek,

$$9^{\frac{1}{2}} = 3 = \sqrt{9}$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 6

125 sayısının hangi kuvvetinin 5'e eşit olduğunu bulalım.

Çözüm

Yukarıdaki soruda olduğu gibi $125^x = 5$ denklemini çözelim.

$$\left. \begin{array}{l} 125^x = 5 \\ (5^3)^x = 5^1 \\ 5^{3x} = 5^1 \\ 3x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$\sqrt[3]{125} = 5$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$125^{\frac{1}{3}} = 5 = \sqrt[3]{125}$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} \text{ olur.}$$

Dikkat

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3$$

a pozitif bir gerçekte sayı olmak üzere $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ dır. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere n . dereceden köklü ifadeler genel olarak $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 7

$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $16^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$ ifadelerini köklü ifade olarak yazalım ve en sade şekilde gösterelim.

Çözüm

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$$

Örnek 8

$a^{\frac{m}{n}}$ şeklindeki üstlü ifadeler köklü ifade olarak nasıl yazılır? Bu durumu $2^{\frac{4}{5}}$ ve $3^{\frac{2}{3}}$ örnekleri ile inceleyelim.

Çözüm

$$2^{\frac{4}{5}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{5}} = (2^4)^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{2^4})$$

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{3^2})$$

şeklinde yazılabilir. Burada sayının üstünün paydasının kökün derecesi olarak yazıldığına dikkat ediniz. Bu durum genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$a \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z} \text{ ve } n \geq 2 \text{ için}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Köklü İfadelerin Özellikleri

Anahtar Bilgi

$b, c \in \mathbb{Q}$ için
 $(a^b)^c = a^{b \cdot c} = (a^c)^b$

Dikkat

Köklü ifadede kökün derecesi üstlü ifade gösteriminde üstün paydasına karşılık gelmektedir.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Köklü ifadelerde çarpma işlemini, üslü ifadelerdeki $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ özelliğini kullanarak inceleyelim.

Örnek 9

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ ve $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ çarpımlarını bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6} \text{ olur.}$$

Bu durum genel olarak;

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ şeklinde ifade edilir.

Bu sonucun doğruluğu aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Buna göre; dereceleri aynı olan iki köklü ifadenin çarpımı, kökün derecesi değiştirilmeden köklerin içindeki ifadeler aynı kök içinde çarpılarak bulunur.

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için,

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \text{ dir.}$$

Örnek 10

- $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$,
- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{(-x)^3}$

çarpımlarını bulalım.

Çözüm

a. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10 \cdot 5} = \sqrt{50}$

b. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

c. $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{(-x)^3} = \sqrt[5]{x^2 \cdot (-x)^3} = \sqrt[5]{(-x)^2 \cdot (-2)^3} = \sqrt[5]{(-x)^5} = -x$ $x^2 = (-x)^2$

Köklü ifadelerde bölme işlemini, üstlü ifadelerdeki $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ özelliğini kullanarak inceleyelim.

Örnek 11

$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ ve $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$ bölme işlemlerini yapalım.

Çözüm

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} \text{ ve } \frac{14^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{14}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2} \text{ ve}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{ olur.}$$

Bu durum genel olarak;

$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ şeklinde ifade edilir.

Buna göre; dereceleri aynı olan iki köklü ifadenin bölümü, kökün derecesi değiştirilmeden köklerin içindeki ifadelerin aynı kök içinde bölünmesiyle bulunur.

$a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Örnek 12

$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} \cdot \sqrt[3]{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Verilen köklü ifadelerin dereceleri eşit olduğundan ifadeler aynı kök içine yazılarak işlemler yapılır. Buna göre;

$$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{90}{10}} \cdot 3 = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \text{ sonucu elde edilir.}$$

Örnek 14

$\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 8}}{\sqrt[5]{27 \cdot 9}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2}{3}$$

Örnek 15

$5^{\frac{3}{2}} = 5^3$ ifadesini tek bir sayının karekökü olarak ifade edelim.

Çözüm

$5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2} \cdot 3} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{5})^3$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde aynı ifade

$5^{\frac{3}{2}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^3}$ olarak da yazılabilir. O halde $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3}$ olur.

Aynı özellik daha önce öğrendiğimiz köklü ifadelerin çarpımı ile ilgili özellik kullanılarak da aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{5^3} \text{ dir.}$$

$a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere bu durum genel olarak,

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ tane}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tane}}} = \sqrt[n]{a^n}$$

veya

$$(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} \text{ şeklinde gösterilir. O halde,}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} \text{ dir.}$$

Örnek 16

Aşağıdaki köklü ifadeleri düzenleyelim.

- a. $(\sqrt[5]{2})^3$
- b. $(\sqrt[9]{5})^4$
- c. $(\sqrt[n]{a})^m$

Çözüm

Kareköklü ifadeler için verilen $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$ özelliğinin farklı dereceden köklü ifadeler için de geçerli olup olmadığını aşağıdaki örnekler ile inceleyelim.

- a. $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^3}$
- b. $(\sqrt[9]{5})^4 = \sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[9]{5} \cdot \sqrt[9]{5} = \sqrt[9]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[9]{5^4}$
- c. $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tane}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ tane}}} = \sqrt[n]{a^m}$

Örneklerde görüldüğü gibi $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$ eşitliği farklı dereceden köklü ifadeler için de geçerlidir. Buna göre,

$a \in \mathbb{R}^+$; $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 2$ için,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ dir.}$$

Aynı dereceden iki köklü ifadenin nasıl çarpılıp bölünebildiğini biliyoruz. Dereceleri farklı iki köklü ifade nasıl çarpılabilir veya bölünebilir? Bu durumu aşağıdaki örnekte inceleyelim.

Örnek 17

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ çarpımının nasıl yapılabileceğini gösterelim.

Çözüm

$\sqrt{2}$ ile $\sqrt[3]{5}$ sayılarının çarpılabilmesi için köklü ifadelerin dereceleri olan 2 ve 3 ü eşitlemek gerekir. Bunun için sayılar aşağıdaki gibi üstlü şekilde yazılır ve üstlerin paydaları (köklerin dereceleri) genişletilerek eşitlenir.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{Köklü ifadeleri üstlü ifade şeklinde yazalım.}$$

$$= 2^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} \quad = 5^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} \quad \text{Üstlü ifadelerin üstlerinin paydalarını eşitleyelim.}$$

$$= 2^{\frac{3}{6}} \quad = 5^{\frac{2}{6}} \quad \text{Üstlü ifadeleri köklü ifade olarak yazalım.}$$

$$= \sqrt[6]{2^3} \quad = \sqrt[6]{5^2}$$

Böylece, $\sqrt{2}$ ve $\sqrt[3]{5}$ ifadelerinde köklerin dereceleri eşitlenmiş olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} &= \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} \\ &= \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} \\ &= \sqrt[6]{200} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bir köklü ifadenin derecesi ve kökün içindeki ifadenin üstü aynı pozitif tamsayıyla çarpıldığında veya bölündüğünde köklü ifadenin sonucu değişmez. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilir.

$a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}; n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için

$$\sqrt[n]{a^m} = n \cdot \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \text{ ve } \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}} \text{ dir.}$$

Örnek 18

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[7]{4}$ çarpımını bulalım.

Çözüm

3 ve 7 olan köklerin derecelerini 21 de eşitleyip köklü ifadeleri çarpalım.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[7]{4} = \sqrt[3 \cdot 7]{2^7} \cdot \sqrt[7 \cdot 3]{(2^2)^3} = \sqrt[21]{2^7} \cdot \sqrt[21]{2^6} = \sqrt[21]{2^7 \cdot 2^6} = \sqrt[21]{2^{13}}$$

Dikkat

Kök dışındaki bir ifade kök içerisine alınırken ifadenin üstü kökün derecesi ile çarpılır.

$a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ için $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ şeklinde belirtilir.

Örnek 19

Köklü ifadelerin özelliklerini kullanarak aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazalım.

a. $\sqrt{48}$

b. $\sqrt{\frac{32}{50}}$

c. $\sqrt[3]{54}$

ç. $\sqrt[5]{96}$

d. $\sqrt[5]{a^6 \cdot b^{13} \cdot c^{15}}$

Çözüm

a. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b. $\sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{2^4}{5^2}} = \frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$

c. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

ç. $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$

d. $\sqrt[5]{a^6 \cdot b^{13} \cdot c^{15}} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a \cdot (b^2)^5 \cdot b^3 \cdot (c^3)^5} = a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot \sqrt[5]{a \cdot b^3}$

Örnekler incelendiğinde $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$\sqrt[n]{a^m \cdot b} = (a^m \cdot b)^{\frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ yazılabilir. Buna göre,

n. dereceden köklü ifadeler için $a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ olur. Bu durum, kareköklü ifadeler için özel olarak $a, b \in \mathbb{R}^+$

olmak üzere $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ şeklinde belirtilir.

Örnek 20

Aşağıdaki ifadelerde n ve m kaçtır?

a. $2 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^n}$

b. $a^2 \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^m}$

Çözüm

a. $2 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^5}$ olduğundan n yerine 5 gelmelidir.

b. $a^2 \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^{2 \cdot 5} \cdot a} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot a} = \sqrt[5]{a^{11}}$ olduğundan m yerine 11 gelmelidir.

Örnek 21

$a = 5\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{20}$, $c = \frac{7}{3}\sqrt{18}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$$a = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$b = \sqrt{2^2 \cdot 20} = \sqrt{80}$$

$$c = \sqrt{\frac{49}{9} \cdot 18} = \sqrt{98}$$

Köklerin dereceleri eşit olduğundan kök içindeki sayı büyüdükçe köklü ifadenin değeri de artar. Buna göre, $\sqrt{75} < \sqrt{80} < \sqrt{98}$ olduğundan $a < b < c$ dir.

Örnek 22

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ köklü sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot 6 \sqrt{2^{1 \cdot 6}} &= 12\sqrt{2^6} = 12\sqrt{64} \\ 3 \cdot 4 \sqrt{3^{1 \cdot 4}} &= 12\sqrt{3^4} = 12\sqrt{81} \\ 4 \cdot 3 \sqrt{5^{1 \cdot 3}} &= 12\sqrt{5^3} = 12\sqrt{125} \end{aligned} \right\} 12\sqrt{125} > 12\sqrt{81} > 12\sqrt{64}$$

O halde bu sayılar $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ şeklinde sıralanmalıdır.

Örnek 23

$\sqrt[3]{4\sqrt{2}}$ ve $\sqrt[3]{a^5}$ ifadelerini sadeleştirerek tek kök içinde ifade edelim.

Çözüm

$$\sqrt[3]{4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$$

$$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt{a^{\frac{5}{3}}} = \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$$

İç içe kökler sadeleştirilirken en içteki kökten başlanarak köklü ifadeler üstlü

ifade şeklinde yazılır. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Sonuç olarak $a, b \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m \cdot n}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Örnek 24

Aşağıda verilen köklü ifadeleri tek kök içinde yazalım.

a. $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}$ b. $\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}$ c. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{32}}$ ç. $\sqrt[3]{\sqrt[8]{4\sqrt{8}}}$

Çözüm

a. $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{6}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

b. $\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[7]{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{3 \cdot 7}} = 5^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{5}$

c. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[6]{32^{\frac{1}{5}}} = 32^{\frac{1}{5 \cdot 6}} = 32^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{32}$

ç. $\sqrt[3]{\sqrt[8]{4\sqrt{8}}} = \sqrt[3]{4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{4^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{7}{4}}} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

Köklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

Üstlü ifadelerde toplama veya çıkarma yapılırken tabanları ve üstleri aynı olan üstlü ifadelerin katsayılarının toplandığını biliyoruz. Benzer şekilde köklü ifadeler toplanırken veya çıkarılırken kök dereceleri eşit ve kök içleri aynı olan ifadelerin katsayıları toplanır.

Örnek 25

$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ işlemini yaparak köklü ifadelerde toplama işlemini inceleyelim.

Çözüm

Köklü ifadelerin içleri aynı ve dereceleri eşit olduğu için köklerin önündeki sayılar toplanarak sonuç bulunur.

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3 + 4)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

Dikkat

Üstlü ifadelerde toplama ve çıkarma yapılabilme şartı üstlü ifadelerin tabanlarının ve üstlerinin aynı olması idi.

$$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$$

$$x \cdot a^n - y \cdot a^n = (x - y) \cdot a^n$$

$a \in \mathbb{R}^+$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x + y)\sqrt{a}$$

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{a} = (x - y)\sqrt{a}$$

Örnek 26

$\sqrt{72} + \sqrt{8}$ işlemini sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}\sqrt{72} + \sqrt{8} &= \sqrt{36 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} \\ &= 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} && \text{Köklerinin içi aynı olacak şekilde düzenleyelim.} \\ &= (6 + 2)\sqrt{2} = 8\sqrt{2} && \text{Köklü ifadelerin önündeki sayıları toplayalım.}\end{aligned}$$

Örnek 27

$3\sqrt{75} - 6\sqrt{12}$ işlemini sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}3\sqrt{75} - 6\sqrt{12} &= 3\sqrt{25 \cdot 3} - 6\sqrt{4 \cdot 3} \\ &= 3 \cdot 5\sqrt{3} - 6 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} && \text{sonucu elde edilir.}\end{aligned}$$

Örnek 28

$\sqrt{24} - \sqrt{72} + \sqrt{54} + \sqrt{8}$ işlemini sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}\sqrt{2^2 \cdot 6} - \sqrt{6^2 \cdot 2} + \sqrt{3^2 \cdot 6} + \sqrt{2^2 \cdot 2} &= 2\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{6} - 4\sqrt{2} && \text{sonucu elde edilir.}\end{aligned}$$

Dikkat

$b \neq 0$ için

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

Örneğin,

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$

$$3+4=7$$

$$5$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{16} \neq \sqrt{25-16}$$

$$5-4=1$$

$$3$$

Kareköklü ifadelere benzer olarak, $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, n . dereceden köklü ifadeler için

$$x \sqrt[n]{a} + y \sqrt[n]{a} - z \sqrt[n]{a} = (x + y - z) \cdot \sqrt[n]{a} \text{ dır.}$$

Örnek 29

$\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405}$ toplamını bulalım

Çözüm

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 5} \\ &= 2 \sqrt[4]{5} + 3 \sqrt[4]{5} \\ &= (2 + 3) \cdot \sqrt[4]{5} \\ &= 5 \sqrt[4]{5} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 30

$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250}$ işleminin sonucunu bulalım

Çözüm

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} \\ &= 3 \sqrt[3]{2} + 2 \sqrt[3]{2} - 5 \sqrt[3]{2} = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 31

$3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot y} + 2 \cdot \sqrt[3]{y^4} - x \cdot \sqrt[3]{27 \cdot y}$ işleminin sonucunu bulalım

Çözüm

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot y} + 2 \cdot \sqrt[3]{y^4} - x \cdot \sqrt[3]{27 \cdot y} &= 3x \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot \sqrt[3]{y^3 \cdot y} - x \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot y} \\ &= 3x \cdot \sqrt[3]{y} + 2y \cdot \sqrt[3]{y} - 3x \cdot \sqrt[3]{y} \\ &= 2y \cdot \sqrt[3]{y} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Kareköklü Bir İfadenin Paydasını Rasyonel Sayı Olarak Yazma

Örnek 32

Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapalım.

a. $\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$ b. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ c. $(3\sqrt{2} - 5)(3\sqrt{2} + 5)$

Çözüm

a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$
 b. $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 2 = 3$
 c. $(3\sqrt{2} - 5)(3\sqrt{2} + 5) = (3\sqrt{2})^2 - (5)^2 = 9 \cdot 2 - 25 = -7$

Görüldüğü gibi bir köklü ifade uygun bir köklü ifadeyle çarpıldığında bir rasyonel sayı elde edilmektedir. Çarpımı rasyonel sayı olan iki köklü ifadeye birbirinin eşleniği denir. Yukarıdaki örnekte $\sqrt{5}$ in eşleniği kendisi, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ in eşleniği $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ve $3\sqrt{2} - 5$ in eşleniği ise $3\sqrt{2} + 5$ tir. Bir köklü ifadenin paydasını rasyonel sayı yapmak için köklü ifade paydanın eşleniği ile genişletilir.

Örnek 33

$\frac{5}{\sqrt{3}}$ ifadesini paydası rasyonel olacak şekilde yeniden düzenleyelim.

Çözüm

$\sqrt{3}$ ifadesinin kendisi ile çarpımının $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$ bir rasyonel sayı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ifadesi $\sqrt{3}$ ile genişletilerek ifadenin paydası rasyonel yapılır.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Dikkat

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Anahtar Bilgi

İki kare farkı:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Anahtar Bilgi

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ile $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ifadelerine birbirinin eşleniğidir. İki kare farkı özdeşliği kullanılarak $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ olduğu bulunur.

Örnek 34

$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ifadesini paydası rasyonel olacak şekilde yeniden düzenleyelim.

Çözüm

Paydada bulunan $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ sayısının eşleniği olan $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ ile kesri genişletelim.

Bu durumda,

$$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = 2(\sqrt{7}+\sqrt{3}) \text{ elde edilir.}$$

Örnek 35

$\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{5-\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

İfadeler eşlenikleri ile genişletilirse

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{5-\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} \\ &= \sqrt{3} - (\sqrt{5}+\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3} = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 36

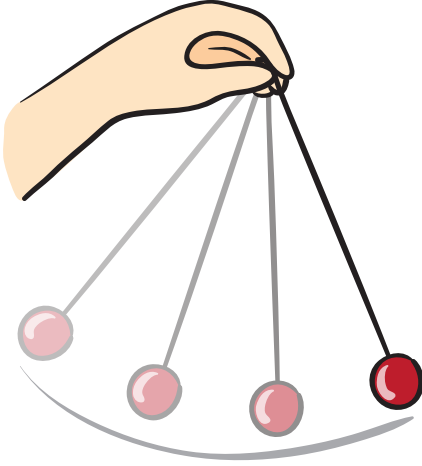
$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ ifadesini paydası rasyonel olacak şekilde yazalım.

Çözüm

Paydadaki $\sqrt[3]{2}$ sayısını rasyonel hale getirmek için kesri $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ ile genişletelim.

$$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2} \text{ olur.}$$

Köklü İfade İçeren Denklemler



Bir basit sarkacın tam bir salınımı için geçen süreye sarkacın periyodu denir ve

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Bu denklemde g yerçekimi sabitini göstermekte ve $g \approx 9,8 \text{ m/sn}^2$ dir. ℓ ise sarkacın metre cinsinden uzunluğunu göstermektedir.

Buna göre, periyodu 1 sn olan bir basit sarkaç yapmak istenirse sarkacın boyu kaç metre olur?

Yukarıdaki denklemde verilenler yerine yazıldığında

$$1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{9,8}}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü sarkacın uzunluğunu verecektir.

Bu örnekte de görüldüğü gibi bilinmeyen kök içinde olduğu denklemlere **köklü denklemler** denir. Köklü denklemlerin nasıl çözüldüğünü aşağıdaki örneklerle inceleyelim.

Örnek 37

$\sqrt{x} + 3 = 8$ olduğuna göre, x kaçtır?

Çözüm

$$\sqrt{x} + 3 = 8$$

$$\sqrt{x} = 8 - 3$$

$$(\sqrt{x})^2 = 5^2$$

$$x = 25$$

Sağlama Yapma

$$\sqrt{25} + 3 = 8$$

$$5 + 3 = 8$$

$$8 = 8$$

Çözümün doğru olup olmadığını başlangıçtaki denklemde x yerine 25 yazarak kontrol edelim.

Eşitlik sağlandığından $x = 25$ dir.

Dikkat

Köklü ifade içeren denklemlerin çözümünden elde edilen sonucun başlangıçtaki denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

Örnek 38

$\sqrt{x} + 11 = 8$ denkleminin gerçekte sayılarda çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{x} + 11 = 8$$

$$\sqrt{x} = 8 - 11$$

$$\sqrt{x} = -3$$

$$(\sqrt{x})^2 = (-3)^2$$

$$x = 9$$

Sağlama Yapma

$$\sqrt{9} + 11 = 8$$

$$3 + 11 = 8$$

$$14 \neq 8$$

Çözümün doğru olup olmadığını başlangıçtaki denklemden x yerine 9 yazarak kontrol edildiğinde eşitliğin sağlanmadığı görülmektedir. Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

$\sqrt{x} > 0$ olduğundan dolayı denklemin çözümünde $\sqrt{x} = -3$ bulunduğunda denklemin bir çözümünün olmadığı hemen görülebilir.

Örnek 39

$\sqrt{2x - 1} = 3$ olduğuna göre, x in değerini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{2x - 1} = 3$ eşitliğinin sol tarafındaki ifadeyi kök dışına çıkarmak için her iki tarafın karesi alınır.

$$(\sqrt{2x - 1})^2 = 3^2$$

$$2x - 1 = 9$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Sağlama Yapma

$$\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3$$

$$\sqrt{10 - 1} = 3$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3$$

Çözümün doğru olup olmadığını başlangıçtaki denklemden x yerine 5 yazarak kontrol edelim.

Eşitlik sağlandığından $x = 5$ tir.

Örnek 40

Konunun başlangıcında verilen basit sarkaç sorusuna dönelim. Periyodun 1 sn olduğu durumda sarkacın uzunluğunu veren denklem, $1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{9,8}}$ olarak yazılmıştı. Bu denkleme göre sarkacın uzunluğunun yaklaşık kaç cm olacağını bulalım.

Çözüm

$$1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{9,8}}$$

$$\frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{\ell}{9,8}}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\ell}{9,8}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4\pi^2} = \frac{\ell}{9,8}$$

$$\ell = \frac{9,8}{4\pi^2} \text{ bulunur.}$$

Hesap makinesi yardımıyla ℓ yaklaşık olarak $0,248 \text{ m} = 24,8 \text{ cm}$ bulunur.

Örnek 41

$\sqrt{x^2-3} = x-3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(\sqrt{x^2-3})^2 = (x-3)^2$$

$$x^2-3 = x^2-6x+9$$

$$x^2-3 = x^2-6x+9$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Sağlama Yapma

$$\sqrt{2^2-3} = 2-3$$

$$1 \neq -1$$

$x = 2$ değeri denklemi sağlamadığı için denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek 42

$\sqrt{2^{x+2}} = 4^3$ denkleminin çözümünü inceleyelim.

Çözüm

$$\sqrt{2^{x+2}} = 4^3 \Rightarrow 2^{\frac{x+2}{2}} = 2^6$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{2} = 6$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ bulunur.}$$

Örnek 43

$\sqrt{4^{x+3}} = (\sqrt[3]{8})^{2x-1}$ denkleminin çözümünü inceleyelim.

Çözüm

$$\sqrt{4^{x+3}} = (\sqrt[3]{8})^{2x-1} \Rightarrow 4^{\frac{x+3}{2}} = 8^{\frac{2x-1}{3}}$$

$$\Rightarrow 2^{2(\frac{x+3}{2})} = 2^{3(\frac{2x-1}{3})}$$

$$\Rightarrow 2^{x+3} = 2^{2x-1}$$

$$\Rightarrow x+3 = 2x-1$$

$$\Rightarrow x = 4$$

bulunur.

Örnek 44

$\sqrt[6]{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}} = \sqrt[36]{9}$ denkleminin çözümünü inceleyelim.

Çözüm

$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}} = \sqrt[36]{9} \Rightarrow \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{36}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{18}} = 3^{\frac{1}{18}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$

bulunur.

KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavram Yoklama ve Muhakeme

- Aşağıdaki ifadelerde her zaman doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.
 - $(...) x \neq 0, \sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{2x}$
 - $(...) \sqrt{(-6)^2} = 6$
 - $(...) \sqrt{\frac{125}{144}}$ gerçək sayısı rasyoneldir.
 - $(...) \sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$ gerçək sayısı rasyoneldir.
 - $(...) \frac{1}{\sqrt{5}}$ sayısının paydasını rasyonel yapmak için sayı $\sqrt{5}$ ile genişletilmelidir.
 - $(...) \sqrt{5} - 2$ sayısının eşleniği $2 - \sqrt{5}$ dir.
 - $(...) 4\sqrt{5} + \sqrt{7}$ ifadesi daha da sadeleştirilerek tek kök içinde yazılabilir.
- " $x^2 = 16$ ise x kaçtır?" sorusunun çözümü ile " $\sqrt{16}$ nın eşiti nedir?" sorusunun çözümü arasında ne fark vardır? Açıklayınız.
- Aşağıda Levent ve Serhat'ın köklü ifadeler ile ilgili yaptığı işlemler verilmiştir. Bu işlemlerdeki hataları bulunuz ve düzeltiniz.

Levent'in Çözümü

$$\sqrt{5} + \sqrt{11} = \sqrt{16} = 4$$

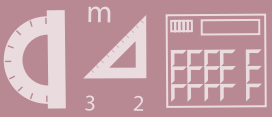
Serhat'ın Çözümü

$$2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = (2+7)\sqrt{10} = 9\sqrt{10}$$

- Taban ve üst bir gerçək sayı olacak şekilde yazılmak istense idi yukarıdaki tablodaki sayılar için cevabınız ne olurdu? Açıklayınız.

Alıştırmalar

- Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
 - $\sqrt{16} + \sqrt{(-7)^2}$
 - $\sqrt{169} - \sqrt{(-12)^2} + \sqrt{(-11)^2}$
 - $5\sqrt{10} - \sqrt{10}$
 - $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
 - $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{\frac{5}{27}}$
 - $\frac{\sqrt{200} \cdot \sqrt{63}}{\sqrt{14}}$
- Aşağıdaki köklü ifadeleri en sade biçimde yazınız.
 - $\sqrt{108}$
 - $\sqrt{128}$
 - $\sqrt[6]{4\sqrt{81}}$
 - $\sqrt[3]{40}$
 - $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^{11} \cdot c^{15}}$
- Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
 - $5\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{108}$
 - $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$
 - $\sqrt[4]{a^6} \cdot \sqrt[3]{(-a)^3}$



KENDİMİZİ SINAYALIM

4. Aşağıda verilen eşitliklerde noktalı yerlere gelecek sayıları bulunuz.

a. $\sqrt[6]{5^8} = \sqrt[3]{5^{\dots}}$

b. $\sqrt{75} = \sqrt{\dots \cdot 3} = \dots \cdot \sqrt{3}$

c. $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{\dots}$

ç. $a^3 \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^{\dots}}$

d. $ab^2 \sqrt[5]{ab^3} = \sqrt[5]{a^{\dots} b^{\dots}}$

5. $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt[3]{5}$, $z = \sqrt[6]{26}$ olduğuna göre, x, y, z sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

6. $\sqrt[5]{3^6 \sqrt[3]{3} \sqrt{3}} = \sqrt[5]{9^4 \sqrt[4]{9}}$ olduğuna göre, x değerini bulunuz.

7. Aşağıdaki ifadelerin paydalarını rasyonel hale getiriniz.

a. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{6}{\sqrt[4]{27}}$

c. $\frac{7}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$

ç. $\frac{9}{\sqrt{3}-1}$

8. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $x < 0 < y$ olmak üzere, $\sqrt{x^2} + \sqrt[6]{y^6}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10. Aşağıdaki denklemlerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt{x-18} = 0$

b. $\sqrt{5x-11} + 2 = 5$

c. $\sqrt{5x-1} + 2 = 5$

ç. $\sqrt{\frac{2}{5}x-1} = 3$

11. $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}} = 1$ olduğuna göre, x kaçtır?

12. $\sqrt{8^{x+3}} = (\sqrt[3]{32})^{2x-1}$ olduğuna göre, x kaçtır?

Uygulama ve Problem Çözme

1. Alanı 1024 m² olan kare şeklinde bir aynanın boyutları nedir?

2. Bir nesnenin belli bir yükseklikten düşme süresi $t = \frac{2\sqrt{s}}{5}$ ile modelleniyor. Burada t zamanı ve s de objenin atıldığı yüksekliği göstermektedir. Buna göre, 80 metre yükseklikten atılan bir nesnenin yere düşme süresi nedir?

3. Bir şehrin meydanına büyük bir sarkaçlı saat yapılmak istenmektedir. Bu sarkacın periyodu $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ile modellendiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız. (ℓ : Sarkacın metre cinsinden uzunluğu, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

a. Sarkacın periyodunun 2 sn olması için yaklaşık kaç metre uzunluğunda bir sarkaç yapılmalıdır?

b. Sarkacın periyodunun 4 sn olması için yaklaşık kaç metre uzunluğunda bir sarkaç yapılmalıdır?

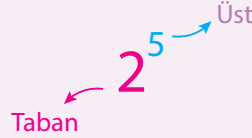
c. 9,8 metrelik bir sarkacın periyodu ne olur?

BÖLÜM ÖZETİ

Üstlü Sayılar

- Aynı gerçel sayının birden çok çarpımını kolay bir şekilde göstermek için üstlü sayılar kullanılır.

Örneğin $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ şeklinde yazılır.



- x bir gerçel sayı ve n ve \mathbb{Z}^+ için x^n ifadesine **üstlü ifade** denir. Burada x sayısına taban, n sayısına da üst veya kuvvet denir. x^n ifadesi " x in n . kuvveti" şeklinde okunur.

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} = x^n$$

- Negatif bir gerçel sayının çift sayı kuvvetlerinin sonucu pozitif işaretli, tek sayı kuvvetlerinin sonucu negatif işaretlidir.
- Tabanları aynı iki üstlü ifade çarpıldığında üstler toplanır.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$$

- Üstleri aynı olan iki üstlü ifadenin bölümünde, paydaki ifadenin üstünden paydadaki ifadenin üstü çıkarılır ve çıkan değer ortak tabana üst olarak yazılır.

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } m, n \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \frac{5^8}{5^2} = 5^6$$

- Üstleri aynı olan iki ifade çarpıldığında, tabanları çarpılır ve her iki ifadenin üstü çarpımının ortak üstü olarak yazılır.

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } m, n \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere } x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m, 2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

- Üstlü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapılabilmesi için üstleri ve tabanları aynı olan terimler elde edilir. Üstleri ve tabanları aynı olan terimlerin ortak parantezine alınarak katsayılar toplanır veya çıkarılır.

$$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a + b - c) \cdot x^n$$

- Üstleri aynı **iki üstlü ifadenin bölme işlemi**nde tabanlar bölüm olarak alınıp, üst olarak ortak üst yazılır.

$$x, y \in \mathbb{R} y \neq \{0\} \text{ ve } m, n \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere } \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m, \frac{6^3}{3^3} = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3 = 8$$

- Bir üstlü ifadenin kuvveti alındığında üstler çarpılır.

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } m, n \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere } (x^m)^n = x^{m \cdot n}, (7^3)^4 = 7^{12}$$

- a sıfırdan farklı bir rakam olmak üzere; $a \cdot 10^k$ sayısı $k + 1$ basamaklıdır.

- Değişkenin üst olarak yer aldığı bu tür denklemlere **üstlü denklemler** denir ve genel olarak $y = a \cdot b^x$ şeklinde gösterilir.

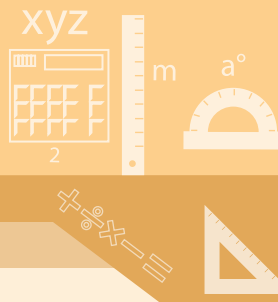
- Bir üstlü denklemde eşitliğin her iki tarafındaki tabanlar eşit ise üstler de eşittir.

$$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \text{ ve } m, n \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere, } x^m = x^n \Rightarrow m = n$$

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x^n = y^n \Rightarrow \begin{cases} x = y, & n \text{ tek ise} \\ x = y \text{ veya } x = -y, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
- $n \in \mathbb{Z}$ ve olmak üzere $(-1)^{2n} = 1, (-1)^{2n+1} = -1$

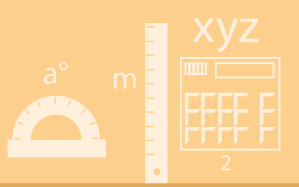
Köklü İfadeler

- $a \in \mathbb{R}^+$ ve olmak üzere, $x^2 = a$ denklemini sağlayan x değerlerine a sayısının **karekökleri** denir. Bu köklerden pozitif olanına, a sayısının **pozitif karekökü** denir ve \sqrt{a} ile gösterilir. $-\sqrt{a}$ gösterimi ise a sayısının **negatif karekökü** için kullanılır.
- $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, herhangi bir a gerçekte sayı için $x^n = a$ denklemini sağlayan x gerçekte sayılarına a sayısının **n . dereceden gerçekte sayı kökleri** denir ve $x = \sqrt[n]{a}$ olarak yazılır.
- $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, $n \in \mathbb{R}$ için $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases}$ dir.
- a pozitif bir gerçekte sayı olmak üzere $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dir. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere n . dereceden köklü ifadeler için genel olarak $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir.
- $a \in \mathbb{R}^+$ için $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$
- $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $a \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $a \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$ ve $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k]{a^{\frac{m}{k}}}$
- $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$
- $a \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m, n \geq 2$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^m \cdot b} = a^{\frac{m}{n}} \sqrt[n]{b}$
- $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $a \in \mathbb{R}^+$ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y) \sqrt[n]{a}$
- $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

1. $a = 2$ ve $b = 3$ için, $a^{-b} + b^{-a}$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $\left[\left(-\frac{1}{16} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{4}}$ işlemini sonucunu bulunuz.
3. 8^{-12} sayısının yarısı kaçtır?
4. $\frac{25^{25} + 25^{25} + 25^{25}}{50^{50} + 50^{50} + 50^{50} + 50^{50} + 50^{50}}$ ifadesinin değerini bulunuz.
5. $x = 3^{30}$, $y = 2^{45}$, $z = 10^{15}$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.
6. $5(a^7)^5 - 4(a^5)^7 - a^{34}$ işleminin sonucunu bulunuz.
7. $(-a^3)^2 \cdot (a^{-4})^{-3} \cdot (-a)^{-6} \cdot (-a^2)^{-3}$ işleminin sonucunu bulunuz.
8. $\frac{30^x - 15^x}{12^x - 6^x}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.
9. $3^x = 18$, $2^y = 21$, $5^z = 10$ olarak veriliyor, x , y ve z değerlerinin ayrı ayrı hangi ardışık iki tamsayı arasında bulunduğunu belirleyiniz ve bundan yararlanarak bu sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
10. $x^{0,6} = 64$ olduğuna göre, $x^{0,3}$ değeri kaçtır?
11. $10^x = 35$ olduğuna göre $2^{x+2} \cdot 5^{x-1}$ ifadesi kaçtır?
12. $9^{2a-b} = 27^{a+2b}$ olduğuna göre, $\frac{2b+a}{5b-a}$ işleminin sonucunu bulunuz.
13. $2^{2x+2} - 2^{2x+1} - 2^{2x-2} = 28$ olduğuna göre, x değerini bulunuz.
14. İnsan vücudunda normal olarak saniyede $2 \cdot 10^6$ alyuvar üretilir. Kanımızın bir litresinde ise yaklaşık olarak $4,8 \cdot 10^{12}$ alyuvar vardır. Buna göre, yarım litre kan veren birinin kaybettiği alyuvarlar normal şartlar altında yaklaşık kaç günde tekrar üretilir?
15. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
 - a. $(2 \cdot 10^{-7}) \cdot x = 1,6 \cdot 10^{10}$
 - b. $\frac{x}{3 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-6}$
16. $(x-3)^{2x-5} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
17. $4^{x+2} - 3 \cdot 4^x = 52$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
18. Bilim adamları, yaptıkları ölçümler sonrasında bir çilek tarlasında bulunan zararlı bir böcek türünün t hafta sonraki yaklaşık popülasyonunu $A = 1000 \cdot 2^t$ bağıntısı ile temsil edildiği sonucuna ulaşmışlardır. Ölçüme başlanan hafta $t = 0$ kabul edilmiştir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.
 - a. Bu böcek türünün başlangıçtaki popülasyonu nedir?
 - b. Bu bağıntıya göre başlangıçtan 4 hafta önceki böcek popülasyonu yaklaşık olarak kaçtır?
 - c. Ölçümden 3 hafta sonraki popülasyon ne kadardır?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

19. $72 \cdot 5^{11} \cdot 2^7$ sayısı kaç basamaklıdır?

20. Aşağıda verilen işlemlerin en sade halini bulunuz.

a. $\sqrt{1 - \frac{11}{36}} + \sqrt{2 + \frac{14}{25}}$

b. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

c. $\sqrt[3]{25 + \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{27}}}}$

ç. $\sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}}$

d. $\left(3^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(3^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(3^{\frac{1}{4}} + 1\right)$

21. Aşağıdaki denklemlerin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümelerini bulunuz.

a. $(2x - 1)^{1998} = (1 - 2x)^{1998}$

b. $(5x - 1)^{1999} = (x + 1)^{1999}$

c. $(x - 3)^{892} = (2x - 5)^{892}$

22. $A = \frac{\sqrt{2x-6} + 3x-4}{2x-1 + \sqrt{6-2x}}$ ifadesi bir gerçekte sayı belirttiğine göre, A'nın değerini bulunuz.

23. $\sqrt{x-4} + \sqrt{-2x+12} = A$ ifadesi bir gerçekte sayı belirttiğine göre x'in alacağı tam sayı değerlerin toplamını bulunuz.

24. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[4]{16^x}$ olduğuna göre, x değerini bulunuz.

25. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{7}$, $c = \sqrt[6]{35}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

26. $a^2x - 5 = 25x + a$ denkleminin gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesi \mathbb{R} olduğuna göre, a kaçtır?

27. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} < 4$ eşitsizliğinin;

a. Tam sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

b. Rasyonel sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

c. Gerçekte sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

28. $\sqrt{5} \leq \sqrt{x} < \frac{5}{2}$ eşitsizliğinin tam sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

29. $\sqrt[6]{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{7}-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

30. $\sqrt{\sqrt{x^2-4x+4}-3} = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Bu Bölümde Neler
Öğreneceğiz?**

- Oran ve orantı kavramlarını ve bu kavramları günlük yaşam problemlerinde kullanmayı
- Değişim, değişim oranı, ortalama, ağırlıklı ortalama ve yüzde kavramlarını günlük yaşam problemlerinde kullanmayı

Neden Öğreneceğiz?

Oran ve orantı kavramlarını günlük hayatta karşılaştığımız birçok durumla ilgili karar verme sürecinde kullanırız. Örneğin, belirli sayıda kişi için verilen yemek, pasta vb. tarifleri farklı sayıda kişi için uygulama, ürünlerin birim fiyatlarını belirleyerek en hesaplı/ekonomik alışveriş için kararı verme, en ekonomik GSM tarifesini seçme, bir arabanın kilometre başına düşen yakıt miktarını hesaplama gibi durumlarda oran - orantı kavramları kullanılmaktadır.

Günlük hayatta oran ve orantı kavramlarını kullanarak nesnelerin veya yapıların farklı ölçeklerdeki maketleri yapılabilir. Bir mimari yapının maketi oran kavramı kullanılarak inşaat başlamadan önce oluşturulup sergilenmektedir. Örneğin İstanbul'da bulunan Miniatürk minyatür parkında Türkiye ve Osmanlı coğrafyasından seçilmiş mimari eserlerin 1/25 oranla oluşturulmuş maketleri sergilenmektedir. Resimde Boğaziçi köprüsünün 1/25 oranında küçültülerek Miniatürk'te sergilenen maketi görülmektedir.

HAZIR MIYIZ?

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına (D), yanlış olanların yanına (Y) yazınız.
 - a. Bir arabanın hızı arttıkça birim zamanda alacağı yol miktarı da artar.
 - b. Bir tarlada iş yapan traktörün ön tekeri arka tekerden daha az devir yapar.
 - c. 10 işçiyle yapılan bir inşaat, işçi sayısı artırılsa daha kısa sürede biter.
 - ç. Özdeş musluklardan 5 tanesi, bir havuzu 10 tanesine göre daha kısa sürede doldurur.
 - d. Bir halı sahada sahanın boyutu arttıkça zemine döşenen çim halı miktarı da artar.
2. Aşağıdaki sol sütunda verilen terimleri sağ sütundaki açıklamalarla eşleştiriniz.

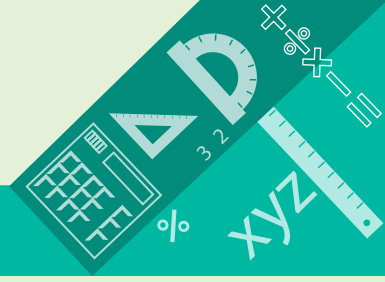
| | | | |
|----|--------------|---|-----|
| a. | Oran | Bir orantıda değişkenlerden biri artarken (veya azalırken) diğerinin de artması (veya azalması) | I |
| b. | Orantı | İki çokluğun birbirine bölünerek karşılaştırma yapılması | II |
| c. | Doğru orantı | En az iki oranın birbirine eşitliği | III |
| ç. | Ters orantı | Bir orantıda değişkenlerden biri artarken diğerinin azalması | IV |

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
 - a. $4x + 3 = 23$
 - b. $7x - 4 = 94$
 - c. $12x + 5 = 125$

4. Aşağıdaki sorularda verilen sayıları karşılaştırmak için noktalı yerleri "<", ">" sembollerinden biri ile doldurunuz.
 - a) $899 \dots\dots 901$ b) $64,1 \dots\dots 64.03$
 - c) $2050 \dots\dots 2005$ ç) $0,099 \dots\dots 0,01$
5. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $c = 4d$ ve $ac = 8$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
 - A) a ile c ters orantılıdır
 - B) c ile d doğru orantılıdır
 - C) a ile d ters orantılıdır
 - D) b ile d doğru orantılıdır
 - E) b ile c ters orantılıdır
6. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başlarında verilen boşluğa "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.
 - a. $n = 6$ için $n - 2 < 6$
 - b. $p = 2$ için $4p - 1 \geq 8$
 - c. $a = 2$ için $a - 7 \geq 15$
 - ç. $r = 9$ için $r + 2r \leq 30$
7. Aşağıda boş bırakılan yerleri aynı sayının kesir, ondalık kesir ve yüzde gösterimlerini düşünerek doldurunuz.

| KESİR | ONDALIK KESİR | YÜZDE |
|----------------|---------------|-------|
| $\frac{3}{20}$ | | |
| | 0,48 | |
| | | %10 |
| $\frac{4}{25}$ | | |
| | 0,76 | |
| | | %64 |

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında bir kavanoz dolusu beyaz leblebinin sayısını teker teker saymadan yaklaşık olarak belirleyebilmek için bir yöntem önerilecektir.

Araç ve Gereçler: Cam kavanoz, beyaz leblebi, sarı leblebi

KAVANOZDAKİ BEYAZ LEBLEBİ SAYISI

Matematik öğretmeni olan Ömer, beyaz leblebi ile dolu olan bir kavanozu sınıfa getirir ve sınıfa;

“Bu kavanozda yaklaşık kaç tane beyaz leblebi vardır?” sorusunu yöneltir.

Öğretmenin sorusunu sınıftaki öğrenciler leblebileri teker teker saymadan nasıl belirleyebilirler?

Sizde aşağıdaki adımları takip ederek kavanozdaki beyaz leblebilerin sayısını yaklaşık olarak belirleyebilirsiniz.

Bunun için aşağıdaki adımları gerçekleştirerek elde ettiğiniz verileri tabloya yazınız.

Adım 1 ►

Kavanozun içinden bir avuç beyaz leblebi alıp bunları sayarak beyaz leblebi sayısınıca sarı leblebileri kavanozun içine atalım. Beyaz ve sarı leblebiler iyice karışana kadar kavanozu sallayalım.

Adım 2 ►

Kavanozdan tekrar bir avuç kadar beyaz ve sarı leblebi karışımını alalım. Alınan karışımındaki beyaz ve sarı leblebi sayılarını belirleyelim.

| | |
|---|--|
| Adım 1’de kavanozdan alınan beyaz leblebi sayısı | |
| Adım 2’de kavanozdan alınan karışımındaki beyaz leblebi sayısı | |
| Adım 2’de kavanozdan alınan karışımındaki sarı leblebi sayısı | |
| Adım 2’deki beyaz leblebi sayısının sarı leblebi sayısına oranı | |

Buna göre,

- Başlangıçta kavanoz içinde kaç tane beyaz leblebi olduğunu oluşturduğunuz tabloyu ve orantı kavramını kullanarak nasıl belirleyebilirsiniz? Cevabınızı açıklayınız.

Not

Balık biyologlarının bir göldeki balık sayısını kayıt altına almak ve takip etmek için bu yöntemi kullandığını biliyor muydunuz?



Neler Öğreneceğiz?

- Oran kavramını
- Orantı kavramını
- Oran ve orantı kavramlarını problem çözme sürecinde kullanmayı

Anahtar Terimler

- Oran
- Orantı
- Ters Orantı
- Doğru Orantı

Sembol ve Gösterimler

- $a : b$
- $\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2.4.1. Oran ve Orantı

Başlarken

Günlük yaşamda alışveriş yaparken farklı boyutlarda ve seçeneklerde sunulan ürünleri satın alırken genellikle en ekonomik olanı tercih etmek isteriz. Bunu yaparken de her bir ürünün birim fiyatına göre dolayısıyla oran ve orantı kavramlarını kullanarak karar vermeye çalışırız. Örneğin, 5 kg'lık torbada 3 TL ye satılan patatesi mi yoksa 8 kg'lık torbada 5,60 TL'ye satılan patatesi mi almak en ekonomiktir? Neden?



Hatırlayalım

Oran

Bir sınıftaki kız ve erkek öğrencilerin sayılarını farklı şekillerde karşılaştırabiliriz. Örneğin 15 erkek ve 12 kız olan bir sınıfta erkeklerin kızlara oranını $\frac{15}{12}$ şeklinde gösterebiliriz. Veya saatteki hızı 70 km olan bir otomobilin hızını $\frac{70 \text{ km}}{1 \text{ sa}} = 70 \text{ km/sa}$ şeklinde ifade edebiliriz.

Bu örneklerde olduğu gibi iki çokluğun birbiri ile karşılaştırılmasına **oran** denir. a ve b iki sayı olmak üzere, a değerinin b değerine oranı; $\frac{a}{b}$ veya $a : b$ ($b \neq 0$) şeklinde gösterilir ve a'nın b'ye oranı şeklinde okunur.

Bir litrelik su şişesi 6 su bardağı ile tam olarak doldurulabiliyorsa $\frac{6}{1}$ bardak / şişe şeklinde oran olarak ifade edilebilir.

Bir oranı en sade şekliyle oluşturalım. Pilav yapmak için 4 bardak suya karşılık 2 bardak pirinç kullanıldığında kullanılan pirincin suya oranı, en sade şekliyle $\frac{\text{pirinç}}{\text{suy}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ şeklinde ifade edilir.

Orantı



Yüksekliği 66,9 metre olan Galata Kulesi'nin Miniaturk'te sergilenen maketi $\frac{1}{25}$ oranı kullanılarak oluşturulmuştur. Maketin yüksekliğini bulmak için iki oranın eşitliğinden faydalanabiliriz. Maketin yüksekliği x metre olsun.

Maketin yüksekliğinin Galata Kulesi'nin gerçek yüksekliğine oranının $\frac{1}{25}$ olması gerekmektedir.

Buna göre, $\frac{x}{66,9} = \frac{1}{25}$ olmalıdır.

Bu durumda maketin yüksekliği

$$x = 66,9 \cdot \frac{1}{25} = \frac{66,9}{25} = 2,676 \text{ metre olarak bulunur.}$$

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi iki ya da daha fazla oranın eşitliğine **orantı** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği bir orantı belirtir ve "a değerinin b değerine oranı, c değerinin d değerine oranına eşittir" şeklinde okunur.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısı sabit bir k değerine eşitlenebilir. Bu k değeri orantı sabiti olarak adlandırılarak orantı $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ şeklinde düzenlenir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği **a : b = c : d** şeklinde de gösterilebilir. Bu eşitlikte konumları dikkate alınarak a ve d değerleri **dışlar**; b ve c değerleri **içler** olarak adlandırılır.

Orantının Özellikleri

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ orantısında;}$$

1. İçler çarpımı ve dışlar çarpımı birbirine eşittir:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

2. Dıştaki terimler veya içteki terimler yer değiştirebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ veya } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

3. Oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ ise } \frac{a+c}{b+d} = k \text{ (k orantı sabiti)}$$

veya

$$\frac{a}{b} \text{ kesri m ile genişletilip, } \frac{c}{d} \text{ kesri n ile genişletilirse, } \frac{m \cdot a + n \cdot c}{m \cdot b + n \cdot d} = k$$

4. Oranlar çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ ise } \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$$

Dikkat

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise}$$

~~$$a \cdot b = c \cdot d$$~~

~~$$a + b = c + d$$~~

$$a \cdot d = b \cdot c \text{ dir.}$$

Dikkat

~~$$\frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$$~~

Bunu biliyor muydunuz?

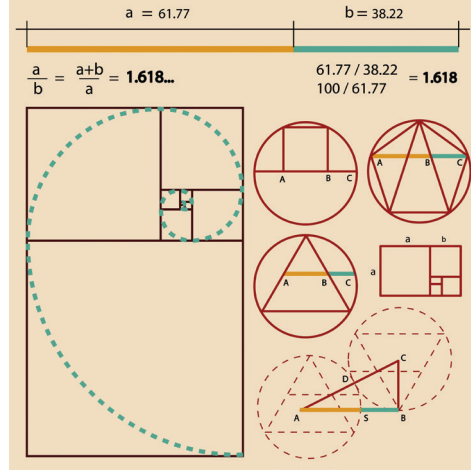


Altın oran, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ifadesi ile tanımlanan bir irrasyonel sayıdır. Bu özel oran, antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu olagelmıştır. Genellikle, Yunanca'da kesmek anlamına gelen kelimenin baş harfi olan τ karakteri ile gösterilen ve değeri 1,6180339887... olan bu sayı kutsal orantı ve Phidias ortalaması vb. farklı isimlerle de adlandırılır. Bu oran özelliklerini inceleyen matematikçi Phidias'ın adının ilk harfi olan ϕ ile gösterilse de daha yaygın olarak τ ile gösterilir.

Inceleylim

15-21 Mart tarihleri arası Tüketiciyi Koruma Haftası olarak ülkemizde kutlanmaktadır. Bilinçli bir tüketici olarak nelere dikkat etmemiz gerektiğini araştırınız.

Altın Oran



Bir AC doğru parçasını öyle bir B noktasından bölelim ki, oluşan iki parçadan kısa olanın uzunluğunun uzun parçanın uzunluğuna oranı, uzun parçanın tüm doğru parçasının uzunluğuna oranı eşit olsun.



Eğer AB doğru parçasının uzunluğunu 1 birim olarak sabitleyir ve AC doğru parçasının uzunluğu x ile gösterilirse, BC doğru parçasının uzunluğu $x - 1$ olur. Bu durumda uzunlukların oranları $\frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$ olur.

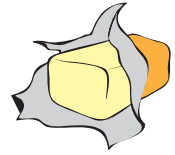
Buradan $x^2 - x + 1 = 0$ bulunur.

Fibonacci denklemi olarak bilinen bu denklemin pozitif kökü altın oranı τ vermektedir.

Örnek 1

| Margarin Sayısı | Fiyat |
|-----------------|----------|
| 2'li paket | 4,80 TL |
| 3'lü paket | 7,26 TL |
| 5'li paket | 11,20 TL |
| 6'lı paket | 13,80 TL |

Ayşe Teyze ihtiyacı olan margarini almak için bir markete gider. Markette almak istediği belirli bir margarinin farklı paketlerde ve farklı fiyatlarda satıldığını görür. Paketlerin içindeki margarin sayısı ve paket fiyatları yandaki tabloda verilmiştir.



Ayşe Teyze en ekonomik alışveriş yapmak için karar vermek durumundadır. Ayşe Teyze hangi paketi tercih ederse birim fiyat düşünlüğünde en ekonomik alışverişini yapmış olur?

Çözüm

Ayşe Teyze'nin hangi paketi tercih etmesi gerektiğine nasıl karar verebileceğini adım adım bulalım.

1. Adım: Problemi Anlama

Margarinin sayısına göre paketler oluşturulmuş ve paketlerin fiyatları lira ve kuruş cinsinden verilmiştir. En uygun fiyattaki margarini almak için Ayşe Teyzenin karar vermesi gerekmektedir. Problemde hangi tercihin daha kârlı olacağı sorulmaktadır.

2. Adım: Plan Yapma

Ayşe Teyzenin tercih yapabilmesi için öncelikle paketlerdeki bir margarinin fiyatını (birim fiyat) bulmalıyız. Bunun için her bir paketin fiyatını içindeki margarin sayısına bölerek paketin içindeki bir margarinin fiyatını bulabiliriz. Paketlere göre birim fiyatları karşılaştırarak en uygun tercihi yapabiliriz.

Alışveriş yaparken birim fiyat dışında ne gibi faktörlerin/değişkenlerin kararınızı etkileyebileceğini tartışınız? Buna göre hangi durumda ne tür değişkenleri göz önünde bulundurarak karar vermenin daha uygun olduğunu belirlemeye çalışınız.

3. Adım: Planı Uygulama

Her bir paketin içindeki bir margarinin fiyatını (birim fiyat) bulalım.

2'li paket margarinin fiyatı 4,80 TL olduğundan bir margarinin fiyatını elde etmek için $4,80 : 2 = 2,4$ TL olarak elde ederiz.

Benzer şekilde 3'lü paketin fiyatı 7,26 TL olduğundan bu paketin içindeki bir margarinin fiyatı $7,26 : 3 = 2,42$ TL dir.

5'li paketteki bir margarinin fiyatı ise $11,20 : 5 = 2,24$ TL dir.

6'lı paketteki bir margarinin fiyatı $13,80 : 6 = 2,30$ TL dir.

Paketlerdeki margarinerin birim fiyatlarını karşılaştırdığımızda en uygun paket 5'li paket, en pahalı paket ise 3'lü pakettir. Sonuç olarak Ayşe Teyzenin 5'li paketi tercih etmesi margarin başına en düşük fiyatı ödeyeceğinden dolayı daha ekonomik olacaktır.

4. Adım: Çözümün Kontrolü

Elde ettiğimiz sonucun doğruluğunu kontrol etmek için farklı yöntemler izleyebiliriz. Örneğin paketlerdeki margarinerin sayıları eşit olacak şekilde eşitlediğimizde her bir paketin yeni bir fiyatı ortaya çıkacaktır. Elde edeceğimiz fiyatları karşılaştırarak da tercih yapabiliriz. Her bir paketten kaç tane alarak margarin sayılarını eşitleyebilirsiniz? Margarin sayılarının eşitlendiği durumda paketlere ait toplam fiyatları sıralayınız. Bu sıralama yukarıda elde ettiğiniz bir margarine ait fiyat sıralaması ile örtüştü mü?

Dikkat

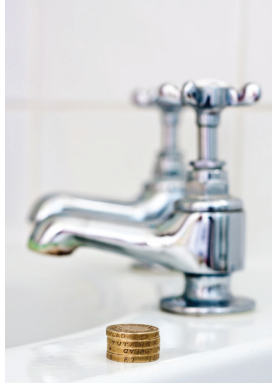
Acaba paketlerdeki margarin sayısı arttıkça fiyatlarında bir ucuzlama oluyor mu?

Matematik Tarihi

1887 doğumlu Macar bir matematikçi olan George Polya problemlerin çözümüne yardımcı olacak adımlar belirlemiştir. Bu adımlar:

1. Problemi anlama
 2. Plan yapma
 3. Planı uygulama
 4. Çözümün kontrolü
- şeklinde dir.

Örnek 2



Ahmet Bey ve Sedat Bey farklı şehirlerde yaşayan iki arkadaşdır. Bir gün telefonda görüşürlerken Ahmet Bey su faturasının yüksek gelmesinden yakınır ve Sedat Bey’le gelen son faturalarını karşılaştırırlar. Ahmet Bey’in faturasında ilk endeks numarası 3401 m^3 ve son endeks numarası 3481 m^3 olup; fatura tutarı 168 TL dir. Sedat Bey’in faturasında ise ilk endeks numarası 2641 m^3 ve son endeks numarası 2691 m^3 olup fatura tutarı 90 TL dir. Bu duruma göre su fiyatı hangisinin yaşadığı şehirde daha düşüktür?

Çözüm

Problemi Anlama

Problem günlük yaşamımızda çok sık karşılaştığımız faturalarla ilgilidir. Faturalarda kullanılan suyun miktarını gösteren ilk endeks ve son endeks sayıları ile buna bağlı tutarlar verilmiştir. Buna bağlı olarak hangi şehirdeki suyun fiyatının daha uygun olduğunu bulmamız istenmektedir.

Plan Yapma

İlk ve son endeks değerlerinden yola çıkarak kişilerin aylık kaç m^3 su tükettiklerini bulabiliriz. Hangi şehirde tüketilen suyun daha hesaplı olduğunu bulmak için de 1 m^3 suyun fiyatını (birim fiyat) hesaplamalıyız. Bunun içinde fatura tutarının (TL) kullanılan su miktarına (m^3) oranını kullanarak m^3 başına kaç TL ücret istendiğini hesaplayabiliriz.

Planı Uygulama

Ahmet Beyin faturası için son endeksten ilk endeksi çıkaralım:

$$3481 - 3401 = 80 \text{ m}^3 \text{ (Ahmet Bey'in fatura döneminde kullandığı su miktarı)}$$

$$\text{ve } 168:80 = 2,1 \text{ TL/m}^3 \text{ (Ahmet Bey'in kullandığı suyun m}^3 \text{ birim fiyatı)}$$

bulunur. Benzer işlemleri Sedat Bey’in faturası için de yapalım:

$$2691 - 2641 = 50 \text{ m}^3 \text{ (Sedat Bey'in kullandığı su miktarı)}$$

$$90 : 50 = 1,8 \text{ TL/m}^3 \text{ (Sedat Bey'in kullandığı suyun m}^3 \text{ birim fiyatı)}$$

Elde edilen değerlere göre Sedat Bey’in yaşadığı şehirde su tüketim ücretinin Ahmet Bey’in yaşadığı şehre göre daha hesaplı olduğu görülmektedir.

Çözümün Kontrolü

Planı uygulama aşamasında bulunan değerler çözümün doğruluğunu etkileyecektir. Bu değerlerin doğru olup olmadığını tüketim miktarları ve birim fiyatları kullanılarak yapılabilir:

$$1 \text{ m}^3 \text{ fiyatı } 2,1 \text{ TL olan suyun, } 80 \text{ m}^3 \text{ kullanımı } 80 \cdot 2,1 = 168 \text{ TL}$$

$$1 \text{ m}^3 \text{ fiyatı } 1,8 \text{ TL olan suyun, } 50 \text{ m}^3 \text{ kullanımı } 50 \cdot 1,8 = 90 \text{ TL dir.}$$

Ayrıca Ahmet Bey, kullandığı su miktarı göz önüne alındığında Sedat Bey'in yaşadığı şehirde yaşamış olsaydı $80 \cdot 1,8 = 144 \text{ TL}$ ödemesi gerekcekti. Halbuki kendi faturası 168 TL idi. O halde Sedat Beyin yaşadığı şehirdeki su fiyatı daha hesaplıdır.

Örnek 3



İkisi de benzinle çalışan araca sahip Tolga Bey ile Cansu Hanım araçlarının yakıt tüketimleri hakkında konuşmakta ve her ikisi de kendi aracının daha ekonomik olduğunu iddia etmektedir. Cansu hanım, 32 litre benzinle 355 km yol gittiğini, Tolga bey ise 25 litre benzinle 290 km yol gittiğini söylemektedir. Kimin arabası daha ekonomiktir?

Çözüm

Problemi Anlama

Problem gündelik hayatta sık karşılaştığımız arabaların yakıt tüketimlerini ele almaktadır. Tolga Bey ve Cansu Hanımın araçlarının yakıt tüketimleri verilmiş olup; ikisi arasında karşılaştırma yapılması yani hangisinin daha ekonomik olduğunun bulunması istenmektedir.

Plan Yapma

Karşılaştırma yapabilmek için araçların benzer şartlar altında kullanıldığını varsayalım. Araçları karşılaştırmak için her iki aracın da 1 litre benzinle kaç km yol gidebileceğini bulabiliriz.

Planı Uygulama

Cansu Hanım'ın aracının 1 litre benzinle alabileceği yolu, aracın gittiği yol ile harcadığı benzini oranlayarak bulabiliriz:

$$\frac{\text{Aracın gittiği yol}}{\text{Aracın harcadığı benzin}} = \frac{355 \text{ km}}{32 \text{ L}} \approx 11,09 \text{ km/L}$$

Tolga Bey'in aracının 1 litre benzinle alabileceği yol ise:

$$\frac{\text{Aracın gittiği yol}}{\text{Aracın harcadığı benzin}} = \frac{290 \text{ km}}{25 \text{ L}} \approx 11,6 \text{ km/L}$$

Buna göre Cansu Hanım 1 litre benzinle yaklaşık 11,09 km yol giderken Tolga Bey ise 1 litre benzinle 11,6 km yol gidebilmektedir. Dolayısıyla Tolga Bey'in iddiasının doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Çözümün Kontrolü

Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için Cansu Hanım ve Tolga Bey'in aynı kilometre yolu gittiklerinde her birinin harcadığı benzin miktarını hesaplayarak karşılaştırma yapabilirsiniz.

Problemin çözümü için alternatif bir yolda, güncel benzin fiyatlarını (L/TL) araştırarak araçların km başına kaç TL yakıt tükettiklerini hesaplamak olacaktır.

Sizde ailenizin ve tanıdıklarınızın kullandıkları araçların yakıt tüketimlerini karşılaştırarak hangi araçların daha ekonomik olduğunu araştırınız.

Örnek 4



Ali annesi için ALO182 Hasta Randevu Merkezini arayarak bir hastanenin ilgili biriminden randevu almıştır. GSM şirketleri ALO182 hattı için konuşulan dakika başına ücret yansıtmaktadır. Ali'nin kullandığı GSM şirketi 3 dakikalık konuşma için Ali'nin faturasına 42,3 kuruş yansıtmıştır. Daha önceki bir randevu için Ali, annesinin telefonundan

5 dakikalık görüşme yapmış ve annesinin kullandığı GSM şirketi ise 81 kuruş yansıtmıştır. Bu durumda hangi GSM şirketi ALO182 hattı için daha fazla ücret almaktadır?

Çözüm

Verilenlere göre Ali'nin kullandığı GSM şirketi 3 dakikalık görüşme için 42,3 kuruş, annesinin kullandığı GSM şirketi 5 dakikalık görüşmeye 81 kuruş ücret talep etmektedir.

Hangi GSM şirketinin daha hesaplı olduğunu bulmamız için GSM şirketlerinin ALO182 hattı için dakika başına ne kadar ücret talep ettiklerini bulmamız gerekmektedir.

İstenilen bilgiyi bulmak için uygun oranı yazıp birim fiyatı belirlemeliyiz.

Ali'nin GSM şirketi 3 dakikalık görüşme için faturaya 42,3 kuruş ücret yansıttığına göre;
1 dakikalık konuşma için $42,3 : 3 = 14,1$ kuruş yansıtmaktadır.

Annesinin GSM şirketi 5 dakikalık görüşme için faturaya 81 kuruş yansıttığına göre;
1 dakikalık konuşma için $81 : 5 = 16,2$ kuruş yansıtmaktadır.

Her iki GSM şirketinin ALO182 hattı için bir dakikalık fiyatları karşılaştırılırsa Ali'nin kullandığı GSM şirketi bu tür görüşmeler için daha ekonomik olduğu görülmektedir.

Bunu biliyor muydunuz?

Hastane Randevu Merkezi Nedir?

Hastane Randevu Merkezi, vatandaşların ALO 182 hattını arayarak veya internet üzerinden

<http://alo182.com/>

adresine bağlanarak, Sağlık Bakanlığına bağlı hastaneler ile Ağız ve Diş Sağlığı Merkezlerinden muayene randevusu almalarını sağlayan bir hizmettir.

Örnek 5

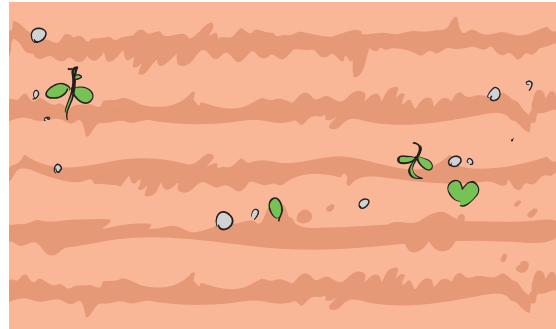


Ali, ailesiyle birlikte köyde yaşamaktadır. Kendi sebze ihtiyaçlarını karşılamak için, evlerinin önünde dikdörtgen şeklindeki 6,1 m eninde ve 10,3 m boyunda bir tarlayı ekip biçerler. Ancak tarlanın bakımı zor olduğundan; tarlanın eniyle boyu arasındaki oran sabit kalmak şartıyla ve tarlanın boyu 4,2 m olacak şekilde tarlayı

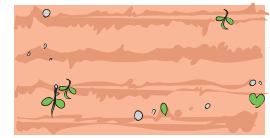
küçültmek isterler. Buna göre küçültülen eni kaç metre olur?

Çözüm

Problemde Alilerin tarlasının boyutları verilmiştir. Tarlada değişim yapılarak orantılı bir şekilde küçültme yapılmak isteniyor. Bizden istenen ise kenarlar arasındaki oranı sabit tutarak yeni tarlanın enini hesaplamaktır. Öncelikle birinci tarlanın enini ve boyunu gösteren aşağıdaki modeli çizelim. Benzer şekilde de oluşturulmak istenen ikinci tarlanın boyutlarını gösteren modeli çizelim.



10,3 m



4,2 m

6,1 m

Burada tarlanın ilk durumdaki eninin boyuna oranı ile son durumdaki eninin boyuna oranı eşit olmalıdır:

$$\frac{6,1\text{ m}}{10,3\text{ m}} = \frac{x}{4,2\text{ m}}$$

$$4,2 \cdot \frac{6,1}{10,3} = \frac{x}{4,2} \cdot 4,2$$

$$x = \frac{42}{10} \cdot \frac{6,1 \cdot 10}{10,3 \cdot 10}$$

$$x = \frac{42}{10} \cdot \frac{61}{103} \approx 2,49\text{ m bulunur.}$$

Örnek 6



2012 yılında “Toprak Mahsulleri Ofisi” tarafından yapılan “Türkiye’de Ekmek İsrafı Araştırması” adlı çalışmada Türkiye’de her gün 101 milyon ekmek üretilmekte, 95 milyon ekmek tüketilmektedir ve aradaki fark çöpe gitmektedir. Ekmek israfının yıllık karşılığı ile 500 km yol asfaltlanabilmektedir (Kaynak: <http://www.ekmekisrafetme.com>). Ankara-Bursa arası 384 km olduğuna göre günlük ne kadar ekmek israfı önlenirse Ankara-Bursa arasının asfaltlanma maliyeti karşılanacaktır?

Çözüm

Problemde Türkiye’de bir günde üretilen ve tüketilen ekmek sayısı verilmektedir. Günlük çöpe giden ekmek sayısını bulmak için üretilen ekmek sayısından tüketilen ekmek sayısını çıkarabiliriz. Buna göre günlük çöpe giden ekmek miktarı $101 - 95 = 6$ milyon adettir. Bunun yıllık parasal karşılığı ile 500 km yol asfaltlanabildiği belirtilmektedir. Şimdi günlük ekmek israfı ne kadar önlenirse 384 km yolun maliyeti karşılanacağını hesaplayalım.

Bu güncel problemin orantı yardımıyla matematiksel modelini oluşturalım ve bu denklemi çözelim. Günlük israfı önlenecek ekmek sayısına x diyelim. Buna göre

$$\begin{array}{ccc} \text{günlük israf edilen} & & \text{günlük israfı önlenecek} \\ \text{ekmek sayısı} & \leftarrow \frac{6 \text{ milyon}}{500 \text{ km}} = \frac{x}{384 \text{ km}} & \rightarrow \text{ekmek sayısı} \\ \text{yıllık karşılığında} & & \text{yıllık karşılığında} \\ \text{yapılabilecek yol} & & \text{yapılabilecek yol} \end{array}$$

$$384 \cdot \frac{6}{500} = \frac{x}{384} \cdot 384$$

$$x = 384 \cdot 0,012 = 4,608 \text{ bulunur.}$$

Günlük israf edilen 6 milyon ekmeğin yaklaşık 4,6 milyonu kadar tasarruf edilirse, bir yılda 384 km (Ankara-Bursa arası) yolun maliyeti karşılanmış olur. Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için bu orantıyı yıllık tüketilen ekmek sayısını hesaplayarak benzer orantı kurabilirsiniz. Elde ettiğiniz sonuç, 500 km için yıllık israf edilen ekmek sayısına eşit olacaktır. Bu sayıyı günlükte dönüştürünüz ve sonucu karşılaştırınız.

Siz de güncel ekmek fiyatlarından yola çıkarak ekmek israfının günlük ve yıllık tutarını hesaplayarak bu kadar para ile neler yapılabileceğini araştırınız.

Bu atölye çalışmasında bir meyve suyu karışımı tarifinden istenilen kişi sayısına göre karışım oluşturulması amaçlanmaktadır.

Araç-Gereçler: Elektronik tablolar yazılımı

Meyve Suyu Karışımı

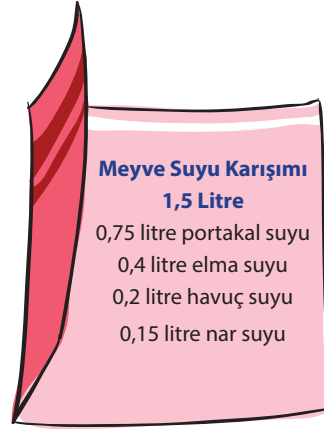
Kış aylarında grip ve nezle gibi hastalıklardan korunmak için tarife göre belirli oranlarda özel bir meyve suyu karışımı verilmiştir. 1,5 litre olarak verilen karışım 5 kişiliktir. Elektronik tablo yardımıyla daha fazla kişi için hazırlanacak olan aynı oranlara sahip karışımın içine konulacak portakal, elma, havuç ve nar suyunun miktarlarını hesaplayabiliriz.



Adım 1 ►

Elektronik tabloda tarifede verilen karışımın içindekilerini ve miktarlarını satır ve sütuna aşağıdaki gibi yazınız.

| | A | B | C |
|---|---------------|---------------------------------|-----------|
| 1 | İçindekiler | 5 kişilik meyve suyu- 1,5 litre | |
| 2 | portakal suyu | 0,75 | = B8 * B2 |
| 3 | elma suyu | 0,40 | |
| 4 | havuç suyu | 0,20 | |
| 5 | nar suyu | 0,15 | |
| 6 | Toplam | 1,5 | |
| 7 | Kişi sayısı | | |
| 8 | | = B7/5 | |



Adım 2 ►

B8 hücreğine " $= B7/5$ ", C2 hücreğine " $= B8*B2$ " yazınız ve "Enter" tuşuna basınız. C2 hücreğine bir kez tıklayınız ve hücrenin sağ alt köşesinden farenin sol tuşuyla tutup C6 hücreğine kadar sürükleyiniz.

- B8 hücreesindeki formül neyi ifade etmektedir?
- C2 hücreesindeki formül ile hangi değer hesaplanmaktadır?
- Buna göre C3, C4, C5 ve C6 hücrelerine hangi formüller yazılmalıdır?
- C2, C3, C4 ve C5 hücrelerinin toplamı C6 da formülle bulduğunuz sonuca eşit midir? Neden? C6 hücreesindeki sonuç ne anlama gelmektedir?
- "Bu karışımdan 115 kişilik hazırlamak için hangi meyve suyundan ne kadar kullanmak gerekir?" sorusuna cevap verecek şekilde elektronik tabloda ayarlayınız.

Örnek 7



Sema Hanım'ın 8, 10 ve 14 yaşlarında üç çocuğu vardır. Sema Hanım, 48 TL harçlığı üç çocuğuna yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştığında, her birine ne kadar harçlık düşeceğini orantı kavramını kullanarak çözelim

Çözüm

Sema Hanım, 48 TL harçlığı 8, 10 ve 14 yaşlarında olan üç çocuğuna yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştıracaktır. Çocukların her birinin alacağı harçlık miktarı sorulmaktadır. Her bir çocuğun alacağı harçlık miktarlarını değişkenle gösterelim.

8 yaşında olan çocuğunun alacağı harçlık miktarı a ,

10 yaşındaki çocuğunun alacağı harçlık miktarı b ,

14 yaşındaki çocuğunun alacağı harçlık miktarı c olsun.

Çocukların alacağı harçlık miktarları yaşlarıyla doğru orantılı olduğundan aşağıdaki orantıyı oluşturabiliriz.

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{10} = \frac{c}{14} = k \quad (k \text{ sayısı orantı sabitidir.})$$

Bu orantıyı kullanarak her değişkeni k cinsinden yazarsak;

$$\frac{a}{8} = k \text{ ise } a = 8k, \frac{b}{10} = k \text{ ise } b = 10k, \frac{c}{14} = k \text{ ise } c = 14k \text{ elde edilir.}$$

Sema Hanım'ın çocuklarına dağıtacağı toplam harçlık 48 TL olduğundan;

$a + b + c = 48$ dir. a , b ve c nin k cinsinden değerlerini denklemde yerine yazarsak;

$$8k + 10k + 14k = 48 \text{ ise } 32k = 48 \text{ olduğundan } k = 1,5 \text{ bulunur.}$$

Elde ettiğimiz k değeri orantı sabiti olduğundan eşitliklerde yerine yazıldığında a , b ve c değerlerini bulabiliriz.

$$a = 8k = 8 \cdot 1,5 = 12 \text{ TL}$$

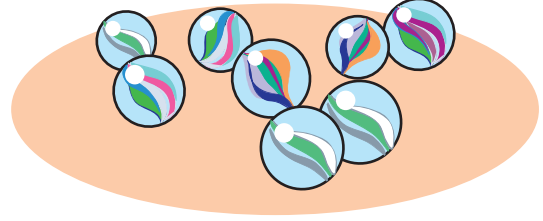
$$b = 10k = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ TL}$$

$$c = 14k = 14 \cdot 1,5 = 21 \text{ TL bulunur.}$$

Sonuç olarak; Sema Hanım 48 TL harçlığı üç çocuğuna yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştırırsa 8 yaşında olan çocuk 12 TL, 10 yaşında olan 15 TL, 14 yaşında olan 21 TL harçlık alır. Dağıtılan harçlığın çocukların yaşlarına göre orantılı olduğu görülmektedir.

Örnek 8

Kenan, Levent ve Sinan isimli üç arkadaş 65 tane bilyeyi sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılı olacak şekilde paylaşmışlardır. Her birinin kaç bilye aldığını hesaplayalım.



Çözüm

Üç arkadaş 65 tane bilyeyi 2, 3 ve 4 ile ters orantılı olarak paylaşmışlardır. Her birine düşen bilye sayısı sorulmaktadır.

Kenan'ın aldığı bilye sayısı x , Levent'in aldığı bilye sayısı y ve Sinan'ın aldığı bilye sayısı z olsun.

Ters orantılı iki sayı çarpım durumunda olacağından aşağıdaki orantı yazılabilir. Orantı sabitini 2,3 ve 4 sayısının katı olacak şekilde alabiliriz. Orantı sabitini 2,3 ve 4 ün ortak katı olan 12k olarak belirleyelim.

$x \cdot 2 = y \cdot 3 = z \cdot 4 = 12k$ elde edilir. Buradan;

$$x \cdot 2 = 12k \text{ olduğundan } x = 6k$$

$$y \cdot 3 = 12k \text{ olduğundan } y = 4k$$

$$z \cdot 4 = 12k \text{ olduğundan } z = 3k \text{ bulunur.}$$

Toplam bilye sayısı 65 olduğundan;

$$x + y + z = 65$$

$$6k + 4k + 3k = 65$$

$$13k = 65$$

$k = 5$ bulunur. k değeri yerine yazılırsa;

$$x = 6k = 6 \cdot 5 = 30$$

$$y = 4k = 4 \cdot 5 = 20$$

$$z = 3k = 3 \cdot 5 = 15 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak; Kenan 30 bilye, Levent 20 bilye, Sinan 15 bilye almıştır.

Üç arkadaşın aldıkları bilye sayıları 2, 3 ve 4 ile ters orantılı olduğuna göre hangi sayılarla doğru orantılı olduğunu belirleyiniz.

Örnek 9



Bir yağ fabrikasında çalışan dört işçi 1300 teneke yağ taşımışlardır. Emre ile Kenan'ın taşıdığı teneke sayısı sırasıyla 2 ve 3 ile doğru, Okan ve Nihat'ın taşıdığı teneke sayısı sırasıyla 4 ve 6 ile ters orantılıdır. İşçilerden her birinin taşıdığı yağ teneke sayısını bulalım.

Çözüm

Dört işçi 1300 teneke yağ, 2 ve 3 ile doğru, 4 ve 6 ile ters orantılı olacak şekilde taşımışlardır. Her birinin taşıdığı teneke sayısı sorulmaktadır.

Emre'nin taşıdığı teneke sayısı a , Kenan'ın taşıdığı teneke sayısı b , Okan'ın taşıdığı teneke sayısı c , Nihat'ın taşıdığı teneke sayısı d olsun. Yani a , 2 ile b , 3 ile doğru orantılı, c , 4 ile d , 6 ile ters orantılıdır.

Doğru orantılı olanlar bölüm durumunda, ters orantılı olanlar çarpım durumunda yazılırsa aşağıdaki orantı elde edilir. Ayrıca orantı sabiti 4 ve 6'nın ortak katı olan 12'ye k alınırsa işlem kolaylığı sağlanır.

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = c \cdot 4 = d \cdot 6 = 12 \cdot k \text{ orantısı yazılır. Bu orantıdan her biri } k \text{ cinsinden yazılırsa;}$$

$$a = 24 \cdot k \text{ (Emre'nin taşıdığı teneke sayısı)}$$

$$b = 36 \cdot k \text{ (Kenan'ın taşıdığı teneke sayısı)}$$

$$c = 3 \cdot k \text{ (Okan'ın taşıdığı teneke sayısı)}$$

$$d = 2 \cdot k \text{ (Nihat'ın taşıdığı teneke sayısı) olur.}$$

Toplam taşınan teneke sayısı 1300 olduğundan;

$$a + b + c + d = 1300 \text{ ise } 24 \cdot k + 36 \cdot k + 3 \cdot k + 2 \cdot k = 1300 \text{ ise } 65 \cdot k = 1300 \text{ olduğundan } k = 20 \text{ bulunur. } k \text{ değeri her birinde yerine yazılırsa;}$$

$$a = 24 \cdot k = 24 \cdot 20 = 480$$

$$b = 36 \cdot k = 36 \cdot 20 = 720$$

$$c = 3 \cdot k = 3 \cdot 20 = 60$$

$$d = 2 \cdot k = 2 \cdot 20 = 40 \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak; 1300 tenekeden Emre 480, Kenan 720, Okan 60 ve Nihat 40 teneke yağ taşımışlardır. Problemdeki verilenlere göre işçilerin taşıdığı teneke sayılarının, hangi sayılarla doğru orantılı olduğunu belirleyiniz.

Örnek 10



Sevim ceviz, fındık ve kuru üzümü karıştırarak 1050 gr bir karışım elde etmiştir. Ceviz miktarının, fındık miktarına oranı $\frac{2}{3}$; fındık miktarının kuru üzüm miktarına oranı $\frac{4}{5}$ 'tir. Bu karışımındaki ceviz miktarının kaç gr olduğunu hesaplayalım.

Çözüm

Sevim, ceviz, fındık ve kuru üzüm karıştırarak 1050 gr karışım elde ediyor. Ceviz'in fındığa oranı $\frac{2}{3}$, fındığın kuru üzüme oranı $\frac{4}{5}$ 'tir. Karışımındaki ceviz miktarı sorulmaktadır. Karışımındaki ceviz miktarına x , fındık miktarına y , kuru üzüm miktarına z diyelim.

Problemdeki verilene göre orantıları;

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \frac{y}{z} = \frac{4}{5} \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

İki orantıda da y değişkeni ortak olduğundan birinci orantıyı 4 ile ikinci orantıyı ise 3 ile genişletelim.

$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}, \frac{y}{z} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

Yani; x , y ve z sayıları sırasıyla 8, 12 ve 15 ile doğru orantılıdır. Dolayısıyla

$x = 8 \cdot k$, $y = 12 \cdot k$ ve $z = 15 \cdot k$ diyebiliriz. Bu sayıların toplamı 1050 olacağından,

$$8 \cdot k + 12 \cdot k + 15 \cdot k = 1050$$

$$35 \cdot k = 1050$$

$$k = 30 \text{ bulunur.}$$

k değeri x , y ve z de yerine yazılırsa,

$$x = 8 \cdot 30 = 240$$

$$y = 12 \cdot 30 = 360$$

$$z = 15 \cdot 30 = 450 \text{ bulunur.}$$

Karışımındaki ceviz miktarı 240 gr dır.

Örnek 11



Bir fabrikada üç farklı makineden üretim yapılmaktadır. A makinesinde üretilen günlük hatalı ürün sayısı; B makinesinde üretilen günlük hatalı ürün sayısı ile doğru orantılı, C makinesinde üretilen günlük hatalı ürün sayısı ile ters orantılıdır. Bir gün A makinesinden 25, B makinesinden 15 ve C makinesinden 30 tane hatalı ürün çıkmıştır. A makinesinden 30, B makinesinden 12 tane hatalı ürün çıktığı gün, C makinesinden kaç tane hatalı ürün çıkacağını hesaplayalım.

Çözüm

Üç farklı makineden üretim yapılmaktadır. A makinesinin hatalı ürün sayısı, B makinesinin hatalı ürün sayısı ile doğru, C makinesinin hatalı ürün sayısı ile ters orantılıdır. Bir defasında A'da 25, B'de 15 ve C'de 30 tane hatalı ürün çıkmıştır. Problemden A'da 30, B'de 12 tane hatalı ürün çıktığı gün C'de kaç tane hatalı ürün çıktığı sorulmuştur.

A makinesinde üretilen hatalı ürün sayısı x , B'deki y , C'deki z olsun. x ile y doğru orantılı olduğundan bölüm durumunda, x ile z ters orantılı olduğundan çarpım durumunda yazılmalıdır.

$$\frac{x \cdot z}{y} = k \quad (k \text{ orantı sabitidir.})$$

Öncelikle 25, 15 ve 30 u kullanarak orantı sabitini bulalım.

$$\frac{25 \cdot 30}{15} = k \quad \text{ise } k = 50 \text{ bulunur.}$$

Şimdi de ikinci durumda verilen sayıları yerine yazarak, z yi bulalım.

$$\frac{30 \cdot z}{12} = 50 \quad \text{ise } z = 20 \text{ bulunur.}$$

A'da 30, B'de 12 hatalı ürün çıktığı gün C'den de 20 hatalı ürün çıkmıştır.

Örnek 12

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 7$ ve $2a + 4c = 35$ olduğuna göre, $b + 2d$ ifadesinin sonucu kaçtır?

Çözüm

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 7$ orantısı ve $2a + 4c = 35$ denklemi verilmiş,

$b + 2d$ ifadesinin değeri istenmektedir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğinde pay ve payda aynı sayı ile genişletilirse oran değişmez.

Verilenler dikkate alınarak birinci kesir 2, ikinci kesir 4 ile genişletilebilir.

$\frac{2a}{2b} = \frac{4c}{4d}$ elde edilir. Orantının özelliğinden dolayı,

$$\frac{2a + 4c}{2b + 4d} = 7 \text{ yazılabilir.}$$

$2a + 4c = 35$ değeri orantıda yerine yazılırsa,

$$\frac{35}{2b + 4d} = 7 \text{ ise } 2b + 4d = 5 \text{ bulunur.}$$

$2b + 4d = 5$ eşitliğinin her iki tarafı 2'ye bölünürse

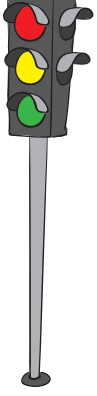
$$b + 2d = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1.



Gerçek uzunluğu 2 metre 15 cm olan bir trafik lambasının $\frac{1}{50}$ oranında küçültülmüş bir maketi hazırlanacaktır.

Maket trafik lambasının uzunluğunu hesaplamak için aşağıdaki adımlarda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

Problemi Anlama

Trafik lambasının gerçek uzunluğu'dir.
..... oranında küçültülmüştür.

Plan Yapma

Problemin çözümü için kurulmalıdır.

Planı Uygulama

$\frac{...}{50} = \frac{x}{...}$ orantısının çözümü cevabı verecektir.

2. "Ahmet'in yaşının Seda'nın yaşına oranı $\frac{5}{4}$ tür. 6 yıl sonra bu oran $\frac{6}{5}$ olacaktır. Ahmet ve Seda'nın yaşlarını bulunuz."

Yukarıdaki problemi çözerken izlenebilecek aşağıdaki adımlarda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

Problemi Anlama

Ahmet x yaşındadır. Seda y yaşındadır. 6 yıl sonra Ahmet yaşında olacaktır. Seda ise yaşında olacaktır.

Plan Yapma

Bir strateji belirleyiniz.

Planı Uygulama

6 yıl sonra yaşları oranı $\frac{...}{...}$ olacaktır. 6 yıl sonraki duruma ait orantı $\frac{...}{...} = \frac{6}{5}$; şu anki yaşlarına ait orantı $\frac{...}{...} = \frac{5}{4}$ şeklindedir.

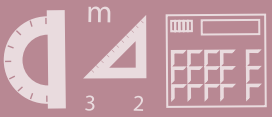
İki orantıdan elde ettiğiniz eşitlikleri kullanarak; Ahmet ve Seda'nın şu anki yaşlarını sırasıyla ve olarak buluruz.

3. Tolga ve Mete kendi aralarında kilolarını tartışmaktadırlar. Tolga, Mete'nin daha şişman olduğunu; Mete ise Tolga'nın daha şişman olduğunu iddia etmektedir. Arkadaşları Ali ise bu durumun "Vücut Kitle İndeksi" ile çözülebileceğini söyleyip Mete ve Tolga'nın boy-kütle değerlerini öğrenmek istemiştir. Mete'nin boyu 1,65 m, kütlesi 70 kg, Tolga'nın boyu 1,72 m kütlesi 75 kg'dır. Vücut Kitle İndeksi (VKİ), vücut kütlesinin (kg) boy uzunluğunun metre cinsinden karesine oranı ile hesaplanır. Vücut Kitle İndeksi değeri büyük olan kişi diğerine göre daha kiloludur.

Buna göre kimin daha şişman olduğuna karar veriniz.

Vücut Kitle İndeksi: Yetişkin bir insanın kütlesinin boyuna göre ideal olup olmadığını gösteren bir değerdir. Sağlık bakanlığının ilgili web sayfasından vücut kitle indeksinizi hesaplatırabilirsiniz:

<http://www.beslenme.saglik.gov.tr>



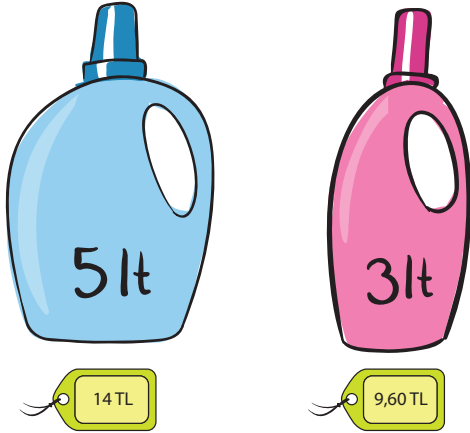
KENDİMİZİ SINAYALIM

4. Şekildeki etiket, bir markette 200 gramlık paketlerde satılan ceviz içine aittir. Etiket üzerinde belirtilen kütle, birim fiyat ve satış fiyatı göz önüne alındığında bu fiyat etiketiyle ilgili yanlış ifadeyi belirleyerek açıklayınız.



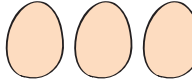
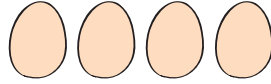
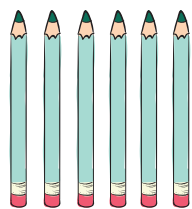
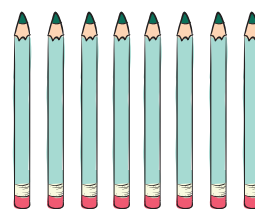
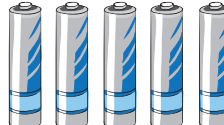
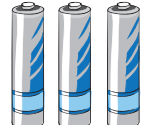
5. Sahilde yürüyüşe çıkan 4 arkadaş içmek için meyve suyu almaya karar veriyorlar. Markete girdiklerinde 330 mL olan kutu meyve suyunun fiyatının 1,25 TL; 1,5 L olan şişenin ise 3,75 TL olduğunu öğreniyorlar. 1,5 litrelik şişe aldıklarında kullanacakları pet bardakların tanesi 10 kuruştur. Siz böyle bir durumda olsaydınız birim fiyat açısından en kârlı alışveriş için hangisini tercih ederdiniz? Neden?

6.



Bir marketten deterjan alırken almak istediğiniz markanın aynı ürününün farklı boyutlarda satıldığını görüyorsunuz. Bu durumda birim fiyat açısından en kârlı alışveriş için hangisini tercih ederdiniz? Neden?

7. Aşağıda iki marketin çeşitli ürünlerdeki kampanyalarına yönelik bilgiler verilmiştir. Kampanyalarda belirtilen ürünlerin özelliklerinin aynı olduğu bilinmektedir. Buna göre hangi ürünü hangi marketten aldınız? Neden?

| A Marketi | B Marketi |
|--|---|
|  1,60 TL |  2,4 TL |
|  2,25 TL |  3,15 TL |
|  3,5 TL |  2 TL |

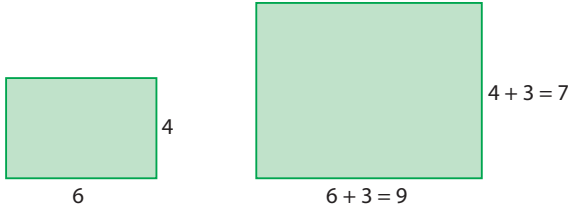
8. Bebek bezi almak için markete gelen Fatma Hanım aynı markanın farklı sayıda bez içeren çeşitlerinin aşağıdaki şekilde fiyatlandırıldığını görür.

| | |
|-------------|----------|
| 38 adet bez | 26,99 TL |
| 46 adet bez | 32 TL |
| 52 adet bez | |

Aynı markanın içinde 52 tane bez bulunan paketinin fiyat etiketi ise yoktur. Paketlerdeki bez sayısı arttıkça bezin birim fiyat değerinin azaldığı bilindiğine göre Fatma Hanım, 52 adetlik bezin fiyatını tahmini olarak nasıl belirler?

KENDİMİZİ SINAYALIM

9. Öğretmeni Hakan'dan kenarları 4 br ve 6 br olan dikdörtgeni, kenarlar arasındaki oranı koruyarak uzun kenarı 9 br olacak şekilde genişletmesini istiyor. Hakan dikdörtgeni şekildeki gibi genişleterek kenarları 9 br ve 7 br olan yeni bir dikdörtgen elde ediyor.



Hakan, öğretmenin isteğini doğru bir şekilde yerine getirmiş midir? Açıklayınız.

10. Ömer markete limon almaya gittiğinde file içinde iki çeşit paketlenmiş limonlar görmüştür. Kırmızı filede 3 adet limon 4 TL, mavi filede 4 adet limon 5 TL yazmaktadır.

Ömer'in yerinde olsaydınız birim fiyat üzerinden daha kârlı alışveriş yapmak için hangisini tercih ederdiniz?

11. Gülşen, 13 arkadaşını eve davet etmeye karar verir. Annesi ikramları hazırlarken Gülşen'inde pudingi hazırlamasına izin verir. Bir paket puding 4 kişiliktir ve bir paket pudinge 3,5 su bardağı süt eklenerek hazırlanmalıdır. Gülşen, kendi ailesini de hesaplayarak 16 kişilik puding yapmaya karar verir. Gülşen kaç su bardağı süt kullanmalıdır?

12. Ankara'da arsası bulunan Mehmet Amca arsasını parça parça satmak istiyor. Bu arsayı 4 ile doğru 2 ve 3 ile ters orantılı olacak şekilde 3 parçaya ayırıyor.

Bu bilgilere ek olarak aşağıdakilerden hangisi veya hangileri verildiğinde her bir arsanın büyüklüğü bulunulabilir?

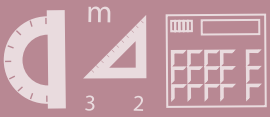
- I. Herhangi bir parçanın büyüklüğü
- II. Parçaların birbirine oranı
- III. Herhangi 2 parçanın farkı

- A) I ve II B) Yalnız I C) I ve III
D) Yalnız II E) II ve III

13. Öğretmen Selim Bey'in 3 çocuğu vardır. Bu çocukların yaşları sırasıyla 2, 4 ve 6 ile orantılıdır.

Buna göre her bir çocuğun yaşlarının bulunabilmesi için aşağıdakilerden hangisi verilirse çözüm için yeterli olmaz?

- A) Çocukların yaşları toplamı
- B) Herhangi iki çocuğun yaşları farkı
- C) Herhangi iki çocuğun yaşları toplamı
- D) Babanın yaşı ile çocuklardan herhangi birinin yaşları farkı
- E) Çocuklardan herhangi birinin yaşı



KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırmalar

1. Serdar Bey ile eşi Güldane Hanım beraber pazara çıkmışlardır. Elma satan bir pazarcı "1 kg 2 TL, 3 kg 5 TL" diye bağırılmaktadır.

Güldane Hanım bu elmadan 3 kg alırsa diğerine göre kg başına yaklaşık kaç lira kazançlı olur?

2. Bir çita 120 metreyi 4,1 saniyede, bir antilop 50 metreyi 2,1 saniyede koşabilmektedir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

- a. Çita ve antilop'un hızlarını karşılaştırınız. Hangisi daha hızlıdır, çita mı antilop mu? Açıklayınız.
- b. Saatteki hızı 90 km olan bir otomobilin hızını çita ve antilopun hızları ile karşılaştırınız.

3. Demirci Salih Usta; 46 m uzunluğundaki demir çubuğu 5, 7 ve 11 ile doğru orantılı olacak şekilde üç parçaya bölecektir.

En büyük parça, en küçük parçadan kaç m fazla olur?

4. X, Y, Z maddelerinden oluşan bir karışımın içindeki maddelerin ağırlıkları 2, 6 ve 7 sayıları ile ters orantılıdır.

Karışım Z maddesinden 30 gr olduğuna göre, bütün karışım kaç gr dır?

5. Esin, tokalarını 2 ile doğru, 3 ile ters orantılı olacak şekilde ikiye ayırıyor. Fazla sayıda olan parçayı mavi kutuya, az sayıda olan parçayı kırmızı kutuya dolduruyor.

Mavi kutudaki toka sayısı, kırmızı kutudaki toka sayısından 30 fazla olduğuna göre, Esin'in toplam kaç tokası vardır?

6. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2$ ve $\frac{3a - c}{3b - d} = k$ ise k kaçtır?

7. a sayısı b ile doğru, c ile ters orantılıdır. $a = 3$, $b = 7$ iken $c = 4$ tür.

Buna göre;

- a. $a = 2$, $b = 4$ iken $c = \dots$ dir.
- b. $a = 4$, $c = 2$ iken $b = \dots$ dir.
- c. $b = 11$, $c = 5$ iken $a = \dots$ dir.

8. A, B, C maddelerinden oluşan bir karışımındaki maddelerin ağırlıkları arasında $\frac{A}{C} = \frac{3}{4}$; $\frac{B}{C} = \frac{3}{5}$ oranları vardır.

Bu karışım 470 gr olduğuna göre;

- a. Karışımındaki A maddesi gr dır.
- b. Karışımındaki B maddesi gr dır.
- c. Karışımındaki C maddesi gr dır.

KENDİMİZİ SINAYALIM

Uygulamalar

1.

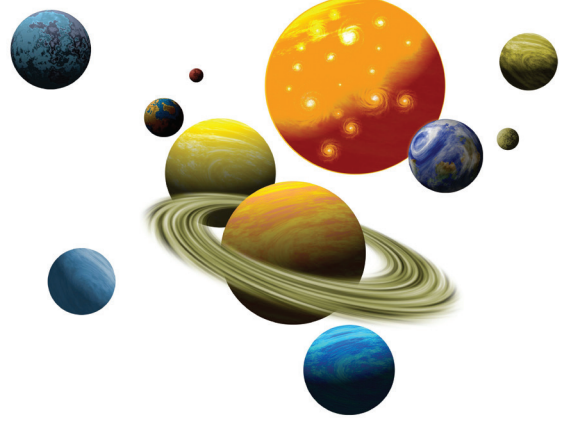


Yukarıda Erzurum 2011 Universiade Kış Olimpiyatları'nda kullanılan atlama kulelerinden uzun olanın boyu 125 metre, kısa olanının boyu ise 95 metredir. Bu kulelerin gerçek ölçüleri ile orantılı olarak bir maketi yapmak isteniyor.

Buna göre,

- Uzun olan atlama kulesinin boyu 0,5 metre alınırsa kısa olan atlama kulesinin boyunun kaç metre olması gerekir?
- Maket ile gerçeği arasında 3 e 500 lük bir oran oluşturmak istendiğinde; oluşacak makette uzun ve kısa atlama kulelerinin boyları kaç metre olacaktır?

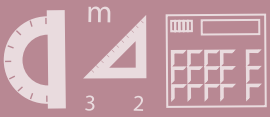
2.



Güneş sistemindeki gezegenlerin Güneş'e uzaklıkları ve bu gezegenlerin çap uzunlukları aşağıdaki tabloda verilmektedir. Güneş sisteminin bir modelini; gezegenlerin Güneş'e olan uzaklıkları ve yarıçapları arasındaki oranlara bağlı kalarak, oluşturmayı planlıyorsunuz. Modelinizde en küçük çapa sahip Merkür'ü temsil eden bir bilye zemine konulduktan sonra gerçek uzaklıkları ve çapları ile orantılı olacak biçimde;

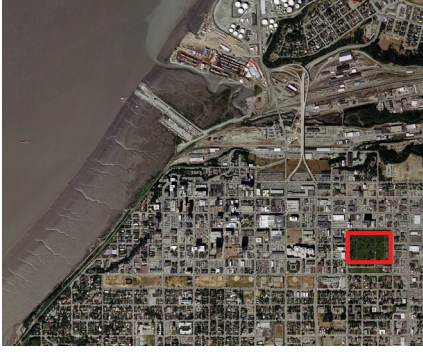
- Diğer gezegenleri temsil eden nesnelerin ne olabileceğini belirleyiniz.
- Güneş ve gezegenleri modellemek için ihtiyaç duyacağınız zeminin boyutlarını belirleyiniz.

| Gezegen | Güneşten ortalama uzaklık (km) | Gezegenin Çapı (km) |
|---------|--------------------------------|---------------------|
| Merkür | 57 900 000 | 4 878 |
| Venüs | 108 200 000 | 12 104 |
| Dünya | 149 600 000 | 12 756 |
| Mars | 227 900 000 | 6 787 |
| Jüpiter | 778 300 000 | 142 796 |
| Satürn | 1 427 000 000 | 120 660 |
| Uranüs | 2 871 000 000 | 51 118 |
| Neptün | 4 497 100 000 | 48 600 |



KENDİMİZİ SINAYALIM

3.



Uydudan çekilmiş, $\frac{1}{25\,000}$ ölçekli bir fotoğrafta, kırmızı çerçeve içine alınmış dikdörtgen şeklindeki bir arsanın alanı $0,016\text{ cm}^2$ dir.

Buna göre arsanın gerçek alanı kaç m^2 dir?

4. Pizzanın fiyatını belirlemede pizzanın boyutları önemli bir kriterdir. Aşağıdaki tabloda işletme müdürü olduğunuz bir restoranda üretilen farklı çap değerlerine sahip pizza türlerine yer verilmiştir.

Buna göre,

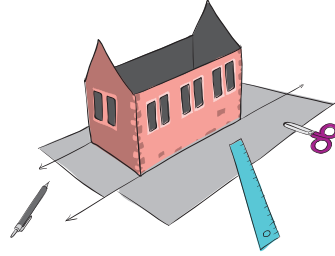
- a. 18 cm çapındaki pizzanın fiyatı 9,50 TL olarak belirlenirse diğer pizza türleri için orantılı olarak fiyat belirleyiniz.
- b. 36 cm çapındaki pizzanın fiyatı 30 TL olarak belirlenirse diğer pizza türleri için orantılı olarak fiyat belirleyiniz.

| | (a) Seçeneği için belirlediğiniz fiyatlar | (b) Seçeneği için belirlediğiniz fiyatlar |
|-------|---|---|
| 40 cm | | |
| 36 cm | | 30 TL |
| 23 cm | | |
| 18 cm | 9,5 TL | |

- c. Yukarıda (a) seçeneğindeki fiyatlandırma ile 36 cm'lik pizzadan günde ortalama 150 tane satıldığında elde edilen kazanç, (b) seçeneğindeki fiyatlandırma ile 36 cm'lik en az kaç pizza satarak elde edilebilir?

5. Çözümünde $\frac{2}{6} = \frac{7}{x}$ orantısının kullanılacağı problem yazınız.

6.

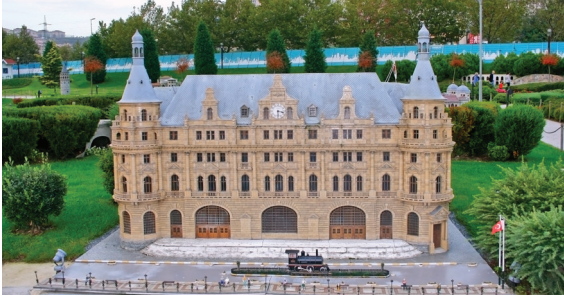


Okulunuzun çevresini modellemeniz istendiğinde en gerçekçi modeli nasıl oluşturursunuz?

Bunun için gerçek uzunluklardan ve alanlardan yararlanabilirsiniz. Bu modeli elinizdeki materyallerle (kağıt, kalem, tahta, ilaç kutuları v.s.) oluşturmaya çalışınız.

KENDİMİZİ SINAYALIM

7.



Miniatürk'te sergilenen Haydarpaşa tren garının maketi

Miniatürk'te maket parkında Türkiye ve Osmanlı coğrafyasından seçilmiş eserlerin 1/25 ölçekli maketlerine yer verilmiştir. Miniatürk hakkında detaylı bir araştırma yaparak, buradaki maketlerin boyutları hakkında bilgi edininiz. Bu verilerden yararlanarak eserlerin gerçek boyutlarını bulunuz.

Neler Öğreneceğiz?

- Gerçek hayat durumlarını modellemede ve problem çözmede denklem ve eşitsizlikleri kullanmayı

Anahtar Terimler

- Denklem ve eşitsizlik
- Aritmetik ortalama
- Ağırlıklı ortalama
- Değişim oranı
- Ters orantı
- Birim zamanda yapılan iş

Sembol ve Gösterimler

- <
- >
- ≤
- ≥
- \bar{x}

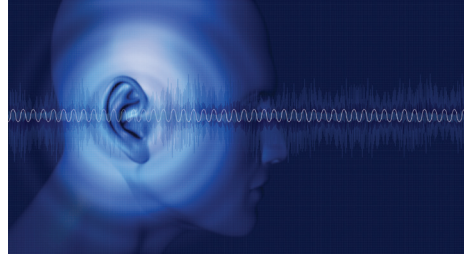
2.4.2. Problemler

Başlarken

Matematikte karşımıza çıkan bir çok problemi çözmek için denklem ve eşitsizliklerden yararlanırsınız. Bununla ilgili çeşitli örnekler aşağıda verilmiştir.



Örnek 1



S sesin hızı, T sıcaklığın Celcius cinsinden değeri olmak üzere sesin havadaki hızı yaklaşık olarak $S = 331,5 + 0,6 T$ formülü ile hesaplanır. Bu eşitliği kullanarak ses hızı verildiğinde ortamın sıcaklığını veren denklemi elde ederek ses hızının 344,1 m/sn olması durumunda sıcaklık kaç °C dir?

Çözüm

Ortamın sıcaklık değerini hesaplamak için eşitlikteki T değerini bulmamız gerekiyor.

$$S = 331,5 + 0,6 T \text{ (Eşitliğin her iki tarafından 331,5 değerini çıkaralım)}$$

$$S - 331,5 = 331,5 + 0,6 T - 331,5$$

$$S - 331,5 = 0,6 T \text{ (eşitliğin her iki tarafını 0,6 sayısına bölelim)}$$

$$\frac{S - 331,5}{0,6} = \frac{0,6 T}{0,6} \text{ ise } \frac{S - 331,5}{0,6} = T \text{ (eşitliği düzenleyelim)}$$

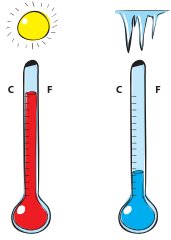
$T = \frac{5}{3}(S - 331,5)$ eşitliğini kullanarak hızı havada 344,1 m/sn. olan ses için sıcaklığı hesaplayalım. Eşitlikte S yerine 344,1 yazalım.

$$T = \frac{5}{3}(344,1 - 331,5) \text{ ise } T = 21 \text{ °C bulunur.}$$

Örnek 2

2013 yılı Şubat ayında en yüksek ortalama sıcaklık yaklaşık 59 Fahrenheit ile İskenderun'da tespit edilmiştir. Bu sıcaklığın Celcius cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm



Sıcaklık ölçümü Fahrenheit (F) ve Celcius (C) gibi farklı birimlerle gösterilmektedir. Örneğin, normal şartlarda suyun donma sıcaklığı 0°C veya 32°F ; kaynama sıcaklığı 100°C veya 212°F dir.

Sıcaklık ölçü birimleri olan Fahrenheit (F) ve Celcius (C) arasında doğrusal bir ilişki söz konusudur. Bu ilişki cebirsel olarak

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu ilişkiyi kullanarak Fahrenheit (F) ve Celcius (C) sıcaklık ölçü birimleri arasında dönüşümler yapabiliriz.

59°F in kaç $^{\circ}\text{C}$ olduğunu bulmak için $F = \frac{9}{5}C + 32$ formülünü C değerini verecek şekilde düzenleyip $F = 59$ için ifadenin değerini hesaplayabiliriz.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \text{ (eşitliğin her iki tarafından 32 çıkaralım)}$$

$$F - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32 \text{ ise } F - 32 = \frac{9}{5}C \text{ (eşitliğin her iki tarafını 5 ile çarpalım)}$$

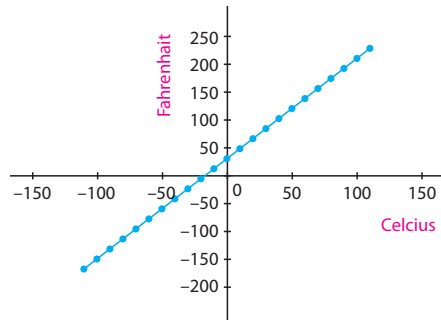
$$5F - 160 = 9C \text{ (eşitliğin her iki tarafını 9'a bölelim)} \quad C = \frac{5F - 160}{9} \text{ dir.}$$

$$F = 59 \text{ için } C = \frac{5 \cdot 59 - 160}{9} = \frac{135}{9} = 15 \text{ dir.}$$

Siz de $^{\circ}\text{C}$ ile $^{\circ}\text{F}$ birimleri arasındaki dönüşümü kullanarak yandaki tablodaki noktalı yerleri doldurunuz.

| Celcius ($^{\circ}\text{C}$) | Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 70 | |
| | 122 |
| 113 | |
| | 207 |

Celcius ve Fahrenheit arasındaki ilişkiyi doğrusal denklem olarak düşünersek grafiği yandaki gibi olur.



Örnek 3



Taban yarıçapı r birim ve yüksekliği h birim olan bir silindirin yüzey alanını $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ formülüyle bulabiliriz. Bu formülü h için düzenleyerek taban yarıçapı 2 br ve yüzey alanı 32π br² olan silindir şeklindeki konserve kutusunun yüksekliğini bulalım.

Çözüm

$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ eşitliğini silindirin yüksekliğini bulmak için aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad (\text{eşitliğin her iki tarafından } 2\pi r^2 \text{ ifadesini çıkaralım})$$

$$S - 2\pi r^2 = 2\pi rh \quad (\text{eşitliğin her iki tarafını } 2\pi r \text{ ile bölelim})$$

$$\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{2\pi rh}{2\pi r}$$

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \quad (\text{eşitliği ayrı ayrı kesir şeklinde gösterelim})$$

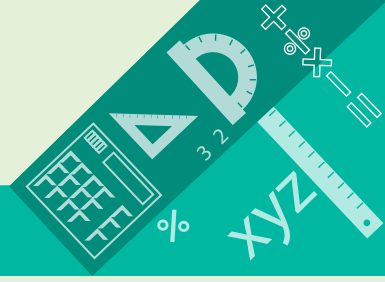
$$h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

$r = 2$ ve $S = 32 \cdot \pi$ değerleri için h değerini bulalım.

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

$$h = \frac{32 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 2} - 2$$

olduğundan $h = 6$ br bulunur.



Bu atölye çalışmasında elektrik dağıtım şirketinin kullanıcılarına sunduğu tarifeler dikkate alınarak tüketilen elektrığe göre en uygun tarifenin seçilmesi amaçlanmaktadır.

Elektrik Kullanımı

Elektrik dağıtım şirketlerinin kullanıcılara uyguladığı bir ve üç zamanlı iki farklı tarifiesi bulunmaktadır. Bir zamanlı tarife gün boyunca tüketilen elektrik enerjisi tek fiyat üzerinden değerlendirilir. Üç zamanlı tarife ise gün üç bölüme ayrılarak her bölüm farklı fiyatlandırılmaktadır. Her iki tarifeye ait fiyatlandırma aşağıdaki tabloda verilmiştir.



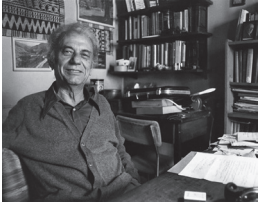
| Tarife | | Fiyatlandırma |
|---|-------------------|---------------|
| Bir zamanlı tarife | | 23 kr/kWh |
| Üç zamanlı tarife ve zaman dilimleri | A (06.00 – 17.00) | 22 kr/kWh |
| | B (17.00 – 22.00) | 36 kr/kWh |
| | C (22.00 – 06.00) | 11 kr/kWh |

Tekin ailesi; ortalama olarak aylık A zaman diliminde 40 kWh, B zaman diliminde 30 kWh ve C zaman diliminde 70 kWh; Akkaş ailesi ise günün A diliminde 30 kWh, B diliminde 60 kWh ve C diliminde 50 kWh elektrik tüketmektedir. Buna göre;

- Tekin ailesi hangi tarifeyi tercih ederse daha ekonomik olur? Açıklayınız.
- Akkaş ailesi hangi tarifeyi tercih ederse daha ekonomik olur? Açıklayınız.

Bunu biliyor muydunuz?

10 TL lik banknotların üzerinde ünlü matematikçimiz Ord. Prof. Dr. Cahit Arf'ın fotoğrafı olduğunu biliyor muydunuz?



Cahit Arf (1910-1997)

Cahit Arf'la ilgili daha ayrıntılı bilgi için

<http://www.biltek.tubitak.gov.tr/bdergi/ozel/arf/default.html>

Örnek 4



Kerem kumbarasında biriktirdiği 36 tane demir parayı bütünletmek için mahallesindeki bakkal Hüseyin amcaya gidiyor. Hüseyin amca paraları bütünleyerek Kerem'e 10 TL veriyor. Kerem'in kumbarasından 50 kr ve 25 kr'luk demir paralar çıktığına göre, paraların kaç tanesi 50 kr'luktur?

Çözüm

Problem Kerem'in kumbarasında bulunan bozuk paraların bütünleştirilmesinden bahsetmektedir. Kumbaradan çıkan 36 tane 50 kr ve 25 kr'luk demir paraların toplamı 10 TL'ye karşılık geldiğine göre çıkan demir paraların kaç tanesinin 50 kr'luk olduğu sorulmaktadır?

Kumbaradaki 50 kr'luk paraların sayısına x diyelim. Geriye $36 - x$ tane 25 kr'luk kalmış olur.

x tane 50 kr toplam $50x$ kr

$36 - x$ tane 25 kr toplam $25 \cdot (36 - x)$

Paraların toplamı 10 TL olacağından;

$$50x + 25 \cdot (36 - x) = 1000 \quad (10 \text{ TL} = 1000 \text{ kr})$$

$$50x + 900 - 25x = 1000$$

$$25x = 100$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

Kumbaranın içindeki demir paraların 4 tanesi 50 kr'luktur.

Problemi denklem kurmadan da çözebiliriz.

Kerem'in kumbarasından çıkan paraların hepsinin 50 kr olduğunu düşünelim.

Buradan $50 \cdot 36 = 1800 \text{ kr} = 18 \text{ TL}$ bulunur.

Oysa ki Kerem'in bozuk paraları 10 TL idi. Bu durumda $18 - 10 = 8 \text{ TL}$ fazlalık olmuştur. Bu fazlalık kumbaradaki 25 kr'luk demir paraları 50 kr'luk kabul ettiğimizden olmuştur. Dolayısıyla her bir 25 kr'luk parayı $50 - 25 = 25 \text{ kr}$ fazla almış olduk.

Toplam fazlalığımız 8 TL olduğuna göre,

$$\frac{8 \text{ TL}}{25 \text{ kr}} = \frac{800 \text{ kr}}{25 \text{ kr}} = 32 \text{ işleminden } 25 \text{ kr'luk paraların } 32 \text{ tane olduğu bulunur.}$$

Toplam demir para 36 tane olduğuna göre,

$$36 - 32 = 4 \text{ tane } 50 \text{ kr'luk demir para bulunur.}$$

Örnek 5



Uğur bilgisayarındaki 27 GB'lık veriyi CD'lere ve DVD'lere yedeklemiştir. CD'lerin her birine 0,5625 GB (576 MB) lık; DVD'lerin her birine 4,5 GB veri yüklemek şartıyla Uğur toplamda 20 tane CD ve DVD kullanmıştır.

Buna göre Uğur'un kaçar tane CD ve DVD kullandığını denklem kurarak çözelim.

Çözüm

Uğur, bilgisayarındaki 27 GB veriyi elindeki CD ve DVD lere kopyalamıştır. Bu iş için toplam 20 CD ve DVD kullanıldığı verilmiş olup bir CD ve bir DVD nin aldığı veri miktarları belirtilmiştir. Bizden Uğur'un 27 GB lık veriyi kopyalarken kullandığı 20 diskin kaç tanesinin CD ve kaç tanesinin DVD olduğunun belirlenmesi istenmektedir.

Uğur'un kullandığı CD sayısına x dersek; toplamda 20 tane CD ve DVD kullanıldığından kullanılan DVD sayısı $20 - x$ olur.

Verileri kopyalarken dosya boyutlarını göz ardı edip ve aynı dosyanın parçalanarak farklı CD veya DVD lere aktarılabilceğini varsayalım. Bu durumda CD'lerin her birisi 0,5625 GB veri aldığından toplamda $x \cdot 0,5625$ GB veri;

DVD'lerin her birisi 4,5 GB'lık veri aldığından toplamda $(20 - x) \cdot 4,5$ veri saklanır.

CD ve DVD'lere yedeklenen verinin toplam boyutu 27 GB olduğundan aşağıdaki eşitliği kurabiliriz.

$$\begin{aligned} x \cdot 0,5625 + (20 - x) \cdot 4,5 &= 27 \\ x \cdot 0,5625 + 4,5 \cdot 20 - 4,5 x &= 27 \\ x \cdot 0,5625 - 4,5 x &= 27 - 90 \\ -3,9375 x &= -63 \\ x &= 16 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buna göre Uğur 16 tane CD ve $20 - 16 = 4$ tane DVD kullanmıştır.

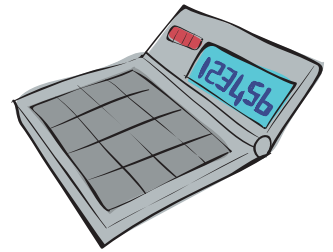
Problemi başka bir yoldan da çözebiliriz. Kabul edelim ki kullanılan disklerin 20'si de CD olsun.

Bu durumda $20 \cdot 0,5625 = 11,25$ GB lık veri yedeklenebilecektir.

Uğur'un yedeklemek istediği veri toplam 27 GB olduğuna göre $27 - 11,25 = 15,75$ GB lık veri yedeklenemeyecektir. Bu ise kullanılan disklerin tamamını CD olarak düşünmemizden kaynaklandı.

Yani $4,5 - 0,5625 = 3,9375$ GB lık kullanamadığımız alan bu 15,75 GB lık kısmın dışarıda kalmasına neden olmuştur.

O halde $\frac{15,75}{3,9375} = 4$ tane DVD nin kullanıldığı anlaşılmaktadır.



Bunu biliyor muydunuz?

Telefonumuzun hafıza kartı, bilgisayarımızın hard diski ve flash belleğimiz gibi belleklerin kapasitesini belirtmek için; terabyte (TB), gigabyte (GB), megabyte (MB) ve kilobyte (KB) gibi birimleri sürekli kullanırız. Bu birimler arasında:

- 1 TB = 1024 GB
- 1 GB = 1024 MB
- 1 MB = 1024 KB
- 1 KB = 1024 Byte

şeklinde bir ilişki vardır.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasının amacı cep telefonu operatörlerinin tarifelerini karşılaştırma amacıyla karar verme sürecinde denklem kurma ve çözmenin nasıl kullanılacağına örneklenilmesidir.

Cep Telefonu

En hızlı ilerleyen teknoloji ürünlerinden biri olan cep telefonu hayatımızda önemli bir yere sahiptir. GSM şirketleri uygun tarifelerle daha çok müşteri elde etmek için çeşitli tarifeler düzenlemektedirler. Cep telefonu kullanıcıları da en ekonomik tarifeyi seçmek isterler. Peki, siz en ekonomik tarifeyi kullandığınızı düşünüyor musunuz?

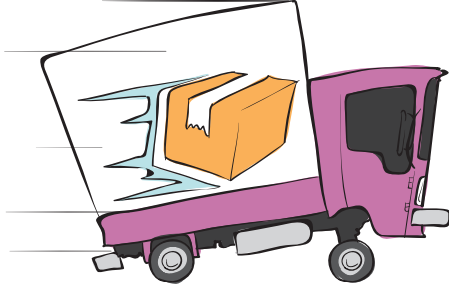


Konuşma süresi ve attığı mesaj sayısını arkadaşları ile karşılaştırdığında cep telefonu operatörünü değiştirmeye karar veren bir kişi, dört GSM operatörünün kampanyalarını araştırarak kendisine uygun olduğunu düşündüğü tarifelerle aşağıdaki tabloyu oluşturuyor.

| | | Sabit Ücret (TL) | Süre Aşımında Konuşma Ücreti (TL/dk.) | Mesaj Ücreti (TL) |
|---------------------|---|---------------------|--|----------------------|
| GSM Operatörleri | A | 18 | 0,4 | 0,1 |
| | B | - | 0,5 | 0,1 |
| | C | 40 | 0,3 | ücretsiz |
| | D | 10 | 0,6 | ücretsiz |

- Konuşma süresini k ve mesaj sayısını da m ile gösterirsek her bir operatörün talep edeceği fatura miktarını gösteren denklemleri yazınız.
- Kişi aylık ortalama 650 dakika görüşme yapıyor ve 100 mesaj gönderiyorsa hangi GSM operatörünü tercih etmelidir? Açıklayınız.
- D operatörü kaç dakikaya kadar C operatöründen daha ekonomiktir?
- D ve C operatörünün konuşma süresine bağlı fatura tutarlarını gösteren grafiklerini aynı analitik düzlemde oluşturunuz.

Örnek 6



Bir kargo şirketinde dağıtım görevlisi olarak çalışan Ersin, her biri 5 kg olan kutuları asansörle 6. kata taşıması gerekmektedir. Ersin'in kütlesi 77 kg ve asansörün yük taşıma kapasitesi 400 kg olduğuna göre bir seferde asansörle en fazla kaç kutu taşıyabileceğini hesaplayalım.

Çözüm

Problemde taşınacak kutuların eşit kütledede olduğu, Ersin'in kütlesi ve asansörün yük taşıma kapasitesi verilmiştir. Bir seferde asansörle en fazla kaç kutu taşınabileceği sorulmuştur. Bunun için asansöre konulan kutuların ve Ersin'in kütleleri toplamının 400 kg'ı geçmemesi gerekmektedir.

Asansöre bir seferde konulacak kutuların sayısı x olsun.

$(\text{Ersin'in kütlesi}) + (\text{Bir kutunun kütlesi}) \cdot (\text{Kutu sayısı}) \leq 400$ olmalıdır.

Diğer bir deyişle $77 + 5x \leq 400$ olmalıdır.

Bu eşitsizliği çözersek

$$77 + 5x \leq 400$$

$$5x \leq 400 - 77$$

$$5 \cdot x \leq 323$$

$$x \leq \frac{323}{5}$$

$$x \leq 64,6 \text{ olmalıdır.}$$

Diğer bir deyişle asansörde tek seferde taşınacak kutu sayısı 64,6 dan küçük olmalıdır.

Kutu sayısı ondalık kesir olamayacağından tek seferde asansörde taşınabilecek kutu sayısı en çok 64 olabilir.

Bu durumda kutuların toplam kütlesi $64 \cdot 5 = 320$ kg, Ersin'in kütlesi 77 kg olduğundan her seferde asansörle 397 kg yük taşınabilir.

Örnek 7



Serhat'a yeni aldığı GSM hattı için operatörü iki farklı tarife sunmuştur. Birinci tarife aylık 80 TL karşılığında her yöne sınırsız konuşma içermektedir. İkinci tarife ise aylık sabit ücret 20 TL ve her yöne dakikası 10 kuruştur. İki tarife de internet kullanımı ve SMS ücretsiz olduğuna göre aylık kaç dakikaya kadar ikinci tarifenin daha hesaplı olduğunu hesaplayalım.

Çözüm

Problemde Serhat'ın tercih edeceği tarifelerin ücretlendirmesi verilmiştir. Birinci tarife 80 TL olup her yöne sınırsız konuşma, ikinci tarife aylık 20 TL sabit ücret olup her yöne dakikası 10 kuruş olarak hesaplanmaktadır. Problemde aylık kaç dakikaya kadar konuşulması halinde ikinci tarifenin daha uygun bir tercih olduğu sorulmaktadır.

Konuşulan süreye (x dakika) göre ödenecek ücret (y TL);

Birinci tarife tercih edildiğinde, $y = 80$ TL

İkinci tarife tercih edildiğinde, $y = 20 + 0,1 \cdot x$ TL ($10 \text{ kuruş} = 0,1 \text{ TL}$) şeklinde ifade edilebilir.

İkinci tarifenin hangi durumda daha hesaplı olacağını bulmak istiyoruz. O halde,

$$80 > 20 + 0,1 \cdot x$$

$$80 - 20 > 0,1 \cdot x$$

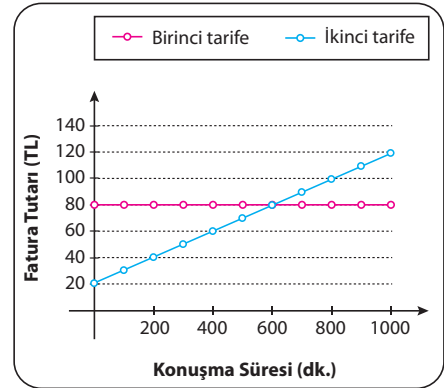
$$60 > 0,1 \cdot x$$

$$600 > x \text{ olmalıdır.}$$

Bu durumda aylık 600 dakika konuşmaya kadar ikinci tarife daha hesaplıdır.

600 dakika aşıldığında ikinci tarife göre fatura tutarı 80 TL'yi geçeceğinden dolayı birinci tarife daha hesaplı olacaktır. 600 dakika konuşulduğunda ise her iki tarifenin fatura tutarları eşit olmaktadır.

Her iki tarife için konuşma süresi (dakika) ve fatura tutarını (TL) yandaki gibi grafikte de gösterebiliriz.



Örnek 8



Örgü yaparak aile ekonomisine katkıda bulunmaya çalışan Zeynep Hanım bir kitapçıda kazak modellerinin olduğu bir dergi görür.

Bu dergiyi 20 TL'ye kitapçıdan alır. Eve döndüğünde dergiyi incelemeye başlayan Zeynep Hanım, beğendiği kazak modellerinden biri için 10 TL'lik malzeme gideri olacağını hesaplar.

Kendi el emeğini de düşünerek kazağın satış fiyatını 75 TL olarak belirleyen Zeynep Hanım bu modelin satışından en az 240 TL kâr etmek istemektedir. Bu durumda Zeynep Hanım'ın kaç kazak satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Soruda beğenilen kazak modelini üretmek için malzeme tutarı ve alınan derginin fiyatı verilmiştir. 75 TL den satılması planlanan bu kazaktan en az kaç tane satılırsa 240 TL'lik kâr elde edileceği sorulmaktadır.

Zeynep Hanım'ın kâr yapabilmesi için kazakların satışından elde edilen paradan, kazağın üretilmesi için yapılan tüm harcamaların çıkarılması gerekmektedir.

Zeynep Hanım'ın sattığı kazak sayısına x diyelim. Bu durumda kazakların satışından elde edilecek kazanç $75x$ TL olur. Kazakların üretimi için alınacak malzemelere harcanacak para ise $10x + 20$ TL'dir. Bu bilgileri kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$75x \geq (10x + 20) + 240$$

Bu eşitsizlik çözülürse; $75x - (10x + 20) \geq 240$ ise $65x - 20 \geq 240$ olur.

$$65x \geq 260 \text{ ise } x \geq 4 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda Zeynep Hanım'ın beklediği kârı edebilmesi için en az 4 kazak satmalıdır.

Problemi deneme yanılma yöntemini kullanarak da çözebiliriz.

Zeynep Hanım 2 kazak satmış olsun. Bu durumda kazakların satışından,

$$75 \cdot 2 = 150 \text{ TL elde edilir. Kazakların maliyeti ise, } 10 \cdot 2 + 20 = 40 \text{ TL'dir.}$$

O halde Zeynep Hanım'ın kârı $150 - 40 = 110$ TL olacaktır.

110 TL'lik kâr problemde istenilen 240 TL'lik kârın yarısından daha az olduğunda kazak miktarını en az iki katına çıkartmalıyız. Bu durumda satılan kazakların miktarını 4 olsun.

O halde kazakların satışından, $75 \cdot 4 = 300$ TL elde edilir.

Kazakların maliyeti ise, $10 \cdot 4 + 20 = 60$ TL olur.

Bu durumda Zeynep Hanım'ın kârı $300 - 60 = 240$ TL olacaktır. Böylece Zeynep Hanım istediği kârı elde edebilmesi için en az 4 kazak satması gerekir.

Çözümünüzü göz önünde bulundurarak Zeynep Hanım'ın daha az kazak satarak istediği kârı elde edebilmesi için problemde nasıl bir değişiklik yapılmalıdır? Açıklayınız.

Örnek 9



32 yaşındaki Ahmet Bey'in iki çocuğunun yaşları toplamı 10 dur. Kaç yıl sonra Ahmet Bey'in yaşı çocuklarının yaşları toplamının 2 katı olacağını hesaplayalım.

Çözüm

Problemde Ahmet Bey'in yaşı ve iki çocuğunun yaşları toplamı verilmiş olup kaç sene sonra Ahmet Bey'in yaşının çocuklarının yaşları toplamının iki katı olacağı istenmektedir.

Problemi denklem kurup çözebileceğimiz gibi verileri tablo üzerinde göstererek de çözebiliriz.

x yıl sonra Ahmet Bey'in yaşı $32 + x$, iki çocuğunun yaşları toplamı $10 + 2x$ olur.

Bu değerleri aşağıdaki gibi tablo üzerinde gösterelim.

| | Ahmet Beyin Yaşı | İki Çocuğunun Yaşları Toplamı |
|---------------|------------------|-------------------------------|
| Şimdi | 32 | 10 |
| x yıl sonra | $32 + x$ | $10 + 2x$ |

x yıl sonra Ahmet Bey'in yaşının iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katı olduğu bilgisinden aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$32 + x = 2 \cdot (10 + 2 \cdot x)$$

Denklemini x için çözersek,

$$32 + x = 20 + 4x \Rightarrow 32 - 20 = 4x - x \Rightarrow 12 = 3x \Rightarrow x = 4 \text{ olur.}$$

Bu durumda 4 yıl sonra Ahmet Bey'in yaşı çocukların yaşları toplamının 2 katına eşit olacaktır.

Çözümün sağlamasını aşağıdaki tablo üzerinde de görebiliriz.

| | Ahmet Beyin Yaşı | Çocukların Yaşları Toplamı |
|-------------|------------------|----------------------------|
| 1 yıl sonra | 33 | $10 + (1 + 1) = 12$ |
| 2 yıl sonra | 34 | $10 + (2 + 2) = 14$ |
| 3 yıl sonra | 35 | $10 + (3 + 3) = 16$ |
| 4 yıl sonra | 36 | $10 + (4 + 4) = 18$ |
| 5 yıl sonra | 37 | $10 + (5 + 5) = 20$ |

Örnek 10



Bir annenin yaşı 4 er yıl ara ile doğmuş 3 çocuğun yaşları toplamına eşittir. Anne 42 yaşında olduğuna göre en büyük çocuk doğduğunda annenin yaşını bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre anne şu an 42 yaşındadır. Üç çocuğu da 4 er yıl aralıklarla doğmuştur. Buna göre büyük çocuk doğduğunda annenin kaç yaşında olduğu istenmektedir.

Anne ve çocukların yaşları bulunduğunda, büyük çocuk doğduğu zaman annenin yaşının kaç olduğunu bulabiliriz.

En küçük çocuğun şimdiki yaşına x dersek, ortanca kardeş 4 yıl önce doğduğundan şimdiki yaşı $x + 4$, en büyük çocuğun yaşı ise $x + 8$ olur.

Bu durumda,

$$x + (x + 4) + (x + 8) = 42$$

$$3x + 12 = 42$$

$$3x = 42 - 12$$

$$3x = 30$$

$$x = 10 \text{ (en küçük çocuğun yaşı)}$$

Bu durumda en büyük çocuğun yaşı $x + 8$ ise $10 + 8 = 18$ bulunur.

En büyük çocuk 18 yıl önce doğduğuna göre annenin o zaman ki yaşı

$$42 - 18 = 24 \text{ olur.}$$

Dikkat

İki kişi arasındaki yaş farkının yıllar geçse de değişmeyeceği gerçeği yaşla ilgili bazı problemlerde işinize yarayacaktır.

Örnek 11



15 yaşındaki Kübra'nın annesi ile babasının yaşları farkı 5 dir. Annesi babasının yaşına geldiğinde; annesi ile babasının yaşları farkının kaç katının Kübra'nın yaşına eşit olacağını hesaplayalım.

Çözüm

Problemde Kübra'nın anne ve babasının yaşları farkı ve Kübra'nın yaşı verilmiştir. Annesi, babasının yaşına geldiğinde anne ve babasının yaşları farkının kaç katının Kübra'nın yaşına eşit olduğunu bulmamız istenmektedir.

Verilenleri bir tablo üzerinde gösterelim.

Annenin şimdiki yaşı x olmak üzere, babanın şimdiki yaşı $x + 5$ olur.

Anne babanın yaşına geldiğinde annenin yaşı $x + 5$ olur.

Bu zamana kadar $x + 5 - x = 5$ yıl geçmiş olur.

| | Birinci durum | İkinci durum | Geçen süre (yıl) |
|----------------|---------------|--------------|------------------|
| Annenin Yaşı | x | $x + 5$ | 5 |
| Babanın yaşı | $x + 5$ | $x + 5 + 5$ | 5 |
| Yaşları farkı | 5 | 5 | |
| Kübra'nın yaşı | 15 | 20 | 5 |

Dolayısıyla anne, babanın yaşına geldiğinde babanın yaşı $x + 5 + 5 = x + 10$ olacaktır.

Baba ve annenin yaşları farkı $x + 10 - (x + 5) = 5$ olur.

Kübra'nın yaşı 5 sene sonra $15 + 5 = 20$ olduğundan yaşlar farkının 4 katı Kübra'nın yaşına eşit olur.

Değişken kullanmadan problemi çözersek;

5 sene sonra Kübra'nın yaşı $15 + 5 = 20$ olduğundan ve anne ile baba arasındaki yaşlar farkı sabit olup değişmeyeceğinden, anne ile babanın yaş farkının 4 katı Kübra'nın yaşına eşit olur.

Örnek 12



Fırıncı Mehmet usta ekmek pişirme aşamalarında, undan hamur yaparken unun ağırlığının $\frac{1}{5}$ oranında arttığını, hamurdan ekmek pişirirken hamurun ağırlığının $\frac{1}{8}$ ini kaybettiğini hesaplamıştır. Pişmiş bir ekmek 210 gramdır. Günlük 650 ekmek satan Mehmet ustanın her biri 50 kg olan un çuvallarından en az kaç tane kullanması gerektiğini bulalım.

Dikkat

1 ton = 1000 kg

1 kg = 1000 g

Çözüm

Soruda verilenlere göre un, hamur haline getirilirken ağırlığı $\frac{1}{5}$ oranında artmakta; hamur pişirilip ekmek haline getirilirken ağırlığının $\frac{1}{8}$ ini kaybetmektedir. Bir ekmek pişirildikten sonra 210 g gelmektedir. 650 ekmek için 50 kg olan un çuvallarından kaç tane gerekli olduğu sorulmaktadır.

Undan hamur yapılırken ağırlık $\frac{1}{5}$ oranında artıyorsa eski ağırlığının

$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ i olur, hamur pişirildiğinde ağırlığının $\frac{1}{8}$ ini kaybediyorsa eski ağırlığının

$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ si olur.

210 g pişmiş ekmek elde etmek için gerekli olan un miktarına x diyelim.

Bu durumda $x \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{8} = 210$ ise $x \cdot \frac{42}{40} = 210$ ise $x = 200$ g bulunur.

650 pişmiş ekmek için gerekli olan un miktarı $650 \cdot 200 = 130\,000$ g = 130 kg dır.

O halde her biri 50 kg olan un çuvallarından en az 3 tane kullanılmalıdır.

Örnek 13



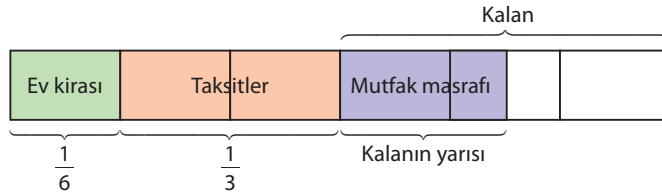
Yakup Bey, kızı Beyza'ya matematik çalıştırırken kendi ev masrafları ile ilgili şu soruyu yönlendirir: "Maaşımın $\frac{1}{6}$ ini ev kirasına, $\frac{1}{3}$ ini taksitlere ödedikten sonra kalanın yarısını mutfak masrafına ayırdığımda geriye 600 TL kaldığına göre maaşım kaç liradır?"

Beyza bu soruyu çözerken geriye kalan parayı yanlışlıkla 600 TL yerine 500 TL olarak çözümünü gerçekleştirdiğine göre bulduğu cevap ile doğru cevap arasındaki farkı bulalım.

Çözüm

Babası Beyza'ya "Maaşımın $\frac{1}{6}$ sını ev kirasına, $\frac{1}{3}$ ünü taksitlere ödediğini, geri kalan parasının yarısını mutfak masraflarına ayırdığını ve bunun sonucunda 600 TL parası kaldığını" söylüyor. Buna göre Beyza'dan maaşının ne kadar olduğunu bulmasını istiyor. Beyza sorudaki 600 TL yi, yanlışlıkla 500 TL olarak alıyor. Bu yanlışlık sonucunda elde edilen miktarla babasının gerçek maaşı arasındaki fark sorulmaktadır.

Bu soruya uygun bir şekil çizelim;



Babasının maaşına x diyelim. Bu durumda maaşının

$$x \cdot \frac{1}{6} + x \cdot \frac{1}{3} = x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = x \cdot \frac{3}{6} = \frac{x}{2} \text{ si ev kirası ve taksitlere gitmektedir.}$$

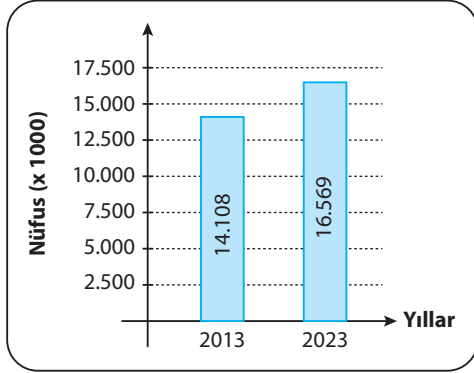
Bu durumda maaşının geriye $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ si kalmıştır. Bunun da yarısı mutfak masraflarına ayrıldığında kalan paranın 500 TL olduğu düşünülürse babasının maaşı

$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 500$ eşitliğinden $x = 2000$ bulunur. Ancak gerçekte geriye 600 TL kalmış olduğu düşünülürse; gerçekte maaşın $\frac{x}{4} = 600$ eşitliğinden $x = 2400$ TL olduğu bulunur.

İki sonuç arasındaki fark; $2400 - 2000 = 400$ TL dir.

Yani, Beyza babasının maaşını 400 TL eksik hesaplamıştır.

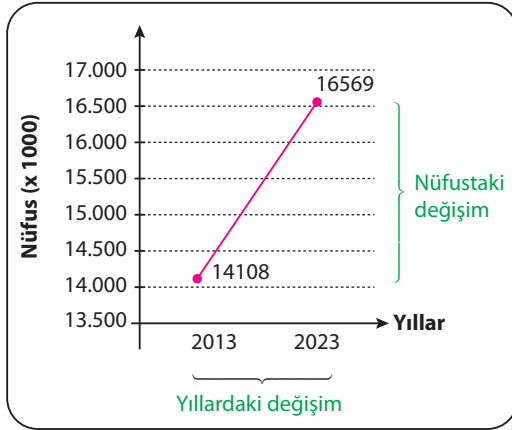
Örnek 14



Türkiye İstatistik Kurumunun 2013-2023 yıllarına ait nüfus projeksiyonlarına göre İstanbul'a ait veriler yandaki sütun grafiğinde gösterilmektedir. İstanbul'un 2013 den 2023 e nüfusunda beklenen değişim oranını bulalım.

Çözüm

Grafikten İstanbul'un 2013 yılına ait nüfusu 14 108 000 ve 2023 yılına ait nüfusu 16569 000 olarak belirlenmiştir. Bu yıllar arasındaki nüfusta oluşan değişim oranı istenmektedir. Bunun için bu yıllar arasında geçen sürenin ve bu süreye karşılık değişen nüfus tahminleri arasındaki farkın hesaplanıp oranlanması gerekmektedir.



Geçen süre; $2023 - 2013 = 10$ yıldır.

Bu 10 yıla karşılık nüfusta $16.569.000 - 14.108.000 = 2.461.000$ kadar bir değişim gerçekleşmesi tahmin edilmektedir.

O halde Değişim Oranı

$$= \frac{16.569.000 - 14.108.000}{2023 - 2013}$$

$$= \frac{2.461.000}{10} = 246.100$$

olarak gerçekleşecektir.

Buna göre İstanbul'un nüfusunda 2013 ile 2023 yılları arasında ortalama 246.100 kişi/yıl artış beklenmektedir.

Anahtar Bilgi

Değişim Oranı

Değişim oranı değişen farklı iki niceliğin karşılaştırılmasıdır. Örneğin; bir şehrin nüfusu zamanın değişmesiyle değişir. Nüfusta oluşan değişimin, zamandaki değişime oranlanmasıyla değişim oranı bulunur.

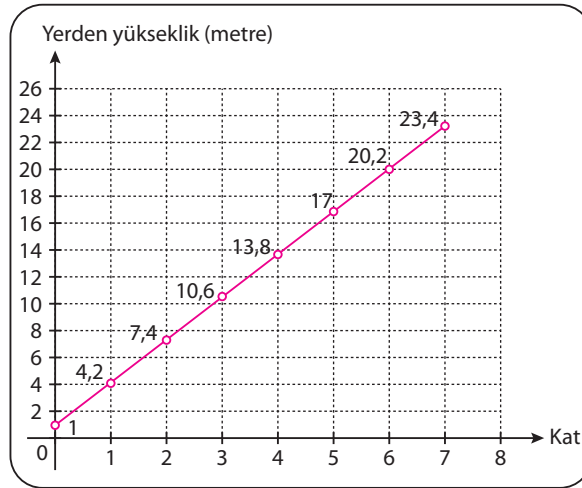
İnceleyelim

Siz de Türkiye İstatistik Kurumu'nun <http://www.tuik.gov.tr> sitesinden yararlanarak, doğduğunuz şehrin 1960, 1970, 1980, ..., 2010 yılları için nüfus bilgilerini araştırınız. Elde ettiğiniz verileri grafikte gösteriniz. Bu bilgiler ışığında onar yıllık dilimler için nüfus değişim oranlarını hesaplayınız.

Örnek 15



Barış, matematik ödevini hazırlamak için, evinin bulunduğu apartmanın katlarının yerden yüksekliklerinin kaç metre olduğuna dair bir bilgiyi apartman yöneticisinden elde ederek katlar ve yerden yüksekliklerini gösteren aşağıdaki grafiği oluşturur.



Buna göre aşağıda istenenleri yapalım.

- Katları ve yerden yükseklikleri gösteren iki sütunlu bir tablo oluşturunuz.
- Zeminden (0. kat) Barışların evinin bulunduğu dördüncü kata göre yerden yükseklikteki değişim oranını bulunuz.
- Barışların evinin bulunduğu kattan en son kat olan yedinci kata göre yerden yükseklikteki değişim oranını bulunuz.
- Binayı oluşturan katların tavan yükseklikleri hakkında ne söylenebilir?

Çözüm

- a. Verilen grafikte her bir katın yerden yüksekliği belirtilmiştir. Bu verileri bir tabloda verelim.

| Kat | Yerden Yüksekliği (metre) |
|-----|---------------------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 4,2 |
| 2 | 7,4 |
| 3 | 10,6 |
| 4 | 13,8 |
| 5 | 17 |
| 6 | 20,2 |
| 7 | 23,4 |

- b. Tabloda, yukarı katlara çıkıldıkça yerden yüksekliğin arttığı görülmektedir. Değişim oranını bulmak için katın konumundaki değişimin yükseklikteki değişime oranını bulmamız gerekir.

Zeminden (0. Kat) Barışların evinin bulunduğu dördüncü kata çıkıldığında;

$$4 - 0 = 4$$

4 kat değişmesine karşın değişen yükseklik miktarı ise; $13,8 - 1 = 12,8$ m dir

O halde değişim oranı; $\frac{12,8}{4} = 3,2$ metre/kat olacaktır.

- c. Bir önceki adımda olduğu gibi önce katlardaki değişimi bulalım;

Barışların evinin bulunduğu kattan en son kata kat numarasındaki değişim;

$7 - 4 = 3$ olacaktır. Oluşan bu değişime karşılık yerden yükseklikteki değişim;

$$23,4 - 13,8 = 9,6 \text{ m dir.}$$

Bu durumda Barışların evinin bulunduğu kattan en son kata yerden yükseklikteki

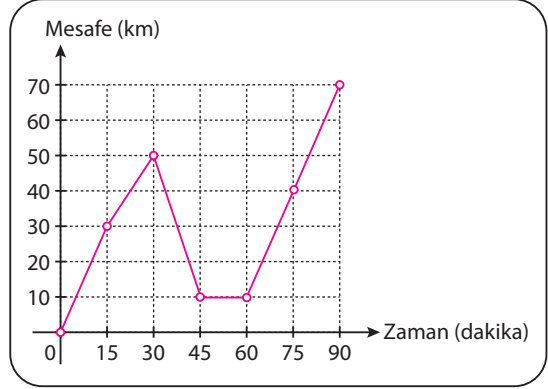
değişim oranı; $\frac{9,6}{3} = 3,2$ metre/kat bulunur.

Katlar arasındaki beton ve zemin döşemesi (parke, fayans vb.) göz önüne alınmazsa her bir katın tavan yüksekliğinin yaklaşık 3,2 metre olduğu söylenebilir.

Örnek 16

Berke, eşi ve üç çocuğuyla birlikte Ankara'dan ailesiyle birlikte yola çıkarak Kırıkkale'de oturan an-ne-babasını ziyarete gidecektir. Yan tarafta Berke ve ailesinin yola çıktıktan sonra eve olan uzaklıklarını gösteren mesafe-zaman grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları ce-vaplayalım.



- Grafikte belirtilen 15'er dakikalık aralıklardan hangisinde değişim oranı en büyük-tür?
- Aşağıdaki cümleyi grafikteki bilgilere göre devam ettirerek Berke'nin seyahatini anlatınız.

"İlk 15 dakikada Ankara'dan 30 km uzaklaşan Berke,"

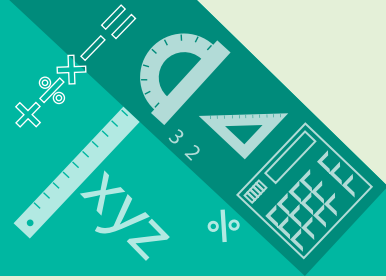
Çözüm

- Grafikten yararlanarak her 15'er dakikalık süreler için değişim oranını tablo oluşturarak aşağıdaki gibi belirleyelim.

| Zaman Aralığı (dk) | Uzaklıktaki Değişim (km) | Zamandaki Değişim (dk) | Uzaklıktaki Değişimin Zamandaki Değişime Oranı (km/dk) |
|--------------------|--------------------------|------------------------|--|
| 0' – 15' | $30 - 0 = 30$ | 15 | $\frac{30}{15} = 2$ |
| 15' – 30' | $50 - 30 = 20$ | 15 | $\frac{20}{15} \approx 1,33$ |
| 30' – 45' | $10 - 50 = -40$ | 15 | $-\frac{40}{15} = -2,66$ |
| 45' – 60' | $10 - 10 = 0$ | 15 | $\frac{0}{15} = 0$ |
| 60' – 75' | $40 - 10 = 30$ | 15 | $\frac{30}{15} = 2$ |
| 75' – 90' | $70 - 40 = 30$ | 15 | $\frac{30}{15} = 2$ |

Yukarıdaki tabloyu incelediğimizde 30 ve 45. dakikalar arasındaki değişim oranının yaklaşık olarak $-2,66$ 'ya karşılık geldiği görülmektedir. Değişim oranındaki negatif işaret bize sadece değişkenlerden biri artarken diğ erinin azaldığını göstermektedir. Bu nedenle değişim oranlarını karşılaştırırken iş aretten bağımsız olarak düşünmemiz gerekmektedir. Bu durumda değişim oranının en yüksek olduğu aralık 30 ve 45. dakikalar arası olacaktır.

- b.** Örnek bir hikaye şu şekilde olabilir: "Ankara'dan Kırıkkale'ye doğru seyahate çıkan Berke ve ailesi ilk 15 dakikada 30 km, sonraki 15 dakikada 20 km yol alarak Ankara'dan 50 km uzaklaşıyorlar. Daha sonra bir nedenden dolayı geriye dönerek 40 km Ankara'ya doğru geri dönüyorlar. Ardından bir dinlenme tesisinde 15 dakika mola verip tekrar Kırıkkale'ye doğru yola çıkıyorlar. Buradan sonra 30 dakika süresince 60 km daha yol gidip, varmak istedikleri yere, harekete başladığı andan 90 dk sonra toplamda 150 km yol alarak ulaşıyorlar."



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında hız, zaman ve alınan yol arasındaki ilişki vurgulanmaktadır.

Sipariş

Murat ve Cem, Sivas'ta bir elektronik mağazasında çalışmaktadırlar. Düzce'deki bir müşterinin siparişini teslim etmek üzere kamyoneti ile yola çıkan Murat saatte ortalama 60 km hızla yol almaktadır. 4 saat sonra Yozgat'ta mola veren Murat, müşteri teslim faturasını yanına almadığını fark ederek durumdan mağazayı haberdar eder. Murat'ın Yozgat'tan Düzce yönünde yine aynı hızla yola çıktığı anda Cem'de faturayı Murat'a ulaştırmak üzere mağazadan ayrılır. Cem arabası ile 100 km sabit hız yaparak Murat ile aynı yolu izleyerek yola devam etmektedir.

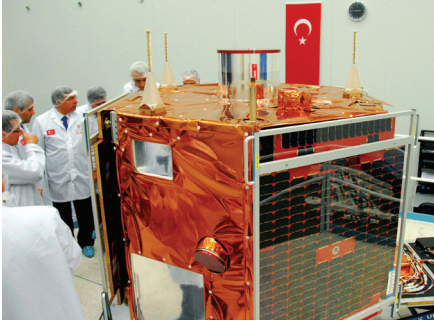


Buna göre;

- Cem yola çıktığı anda Murat ile aralarındaki mesafe kaç km dir? Yukarıdaki harita üzerinde Cem ile Murat'ın konumlarını yaklaşık olarak gösteriniz.
- Birlikte harekete başladıktan 1 saat sonra Cem ile Murat'ın aralarındaki mesafe kaç km azalmıştır? Aynı şekilde 2, 3, 4,... saat sonra aralarındaki mesafe kaç km azalır?
- Cem, Murat'a kaç saat sonra yetişir?
- Karayolları Genel Müdürlüğü'nün hazırladığı mesafe cetvellerini kullanarak Cem ile Murat'ın yaklaşık olarak nerede karşılaşacaklarını tespit ediniz.

<http://www.kgm.gov.tr/Sayfalar/KGM/SiteTr/Root/Uzakliklar.aspx>

Örnek 17



TÜBİTAK Uzay Teknolojileri Araştırma Enstitüsü ve TUSAŞ iş ortaklığı tarafından yüksek yerlilik oranıyla üretilen Göktürk-2 fırlatıldıktan 12 dakika sonra 686 kilometre yüksekteki yörüngesine ulaşmıştır. Buna göre uydunun fırlatılışından yörüngeye oturduğu ana kadar saatteki ortalama hızını hesaplayalım.

Çözüm

Uydu, fırlatıldığı andan itibaren 12 dakikada 686 km yol almıştır. Bizden uydunun saatteki ortalama hızını hesaplamamız istenmektedir.

Uydunun 1 dakikada alacağı yolu bulup buradan 1 saatte aldığı yolu bulmalıyız. Bir dakikada aldığı yol,

$$\frac{686}{12} \approx 57,16 \text{ km dir.}$$

“1 saat = 60 dakika” olduğundan 1 saate aldığı yol,

$$60 \cdot 57,16 \approx 3430 \text{ km}$$

O halde uydunun yörüngeye oturduğu ana kadarki ortalama hızı 3430 km/sa. olacaktır.

Göktürk 2 uydusu yerden yaklaşık 686 km yükseklikteki yörüngesinde hareket ederek dünyanın çevresini yaklaşık 98 dakikada dolaşiyor. Uydu bu yükseklikte dünyanın çevresini bir kere dolaştığında yaklaşık 44.000 km yol kat ediyor. Buna göre Göktürk 2 nin yörüngesindeki hareket hızını siz hesaplayınız.

Bunu biliyor muydunuz?

GÖKTÜRK-2 TÜBİTAK kaynaklarıyla gerçekleştirilen ilk milli yer gözlem uydusudur.

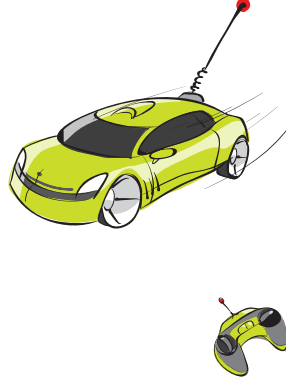
Ayrıntılı bilgi için

<http://www.uzay.tubitak.gov.tr/tubitakUzay/tr/projects/spaceApplications.php>

adresini ziyaret edebilirsiniz

İnceleyelim**Ne Kadar Hızlı Koşabilirim?**

Uzunluğunu bildiğiniz bir pistte bütün gücünüzle belli bir süre koşarak kat ettiğiniz mesafeyi ve bunu ne kadar zamanda aldığınızı not ediniz. Bu verilerden hareketle saatteki hızınızı km/sa. olarak hesaplayınız. Bunu ünlü atletlerin hızları ve tabiattaki bazı hayvanların hızları ile karşılaştırınız.

Örnek 18

Alper, babasının kardeşine aldığı uzaktan kumandalı oyuncak arabanın ne kadar hızlı olduğunu merak etmektedir. Kronometre ile arabanın uçtan uca 9 metre olan salonu 1,5 saniyede gittiğini tespit etmiştir.

Buna göre arabanın saattaki hızını bulalım.

Çözüm

Uzaktan kumandalı araba 9 metre yolu 1,5 saniyede aldığına göre hızı $\frac{9}{1,5}$ m/sn dir.

Birimler arasında dönüşüm yaparak bunu km/saat olarak ifade edebiliriz.

1,5 saniyenin kaç saat olduğunu bulmak için 3600'e, 9 metreyi kilometreye çevirmek için de 1000'e bölmek gerekecektir. Bu durumda uzaktan kumandalı arabanın hızı

$$\frac{\frac{9}{1000} \text{ km}}{\frac{1,5}{3600} \text{ sa}} = \frac{9}{1000} \cdot \frac{3600}{1,5} = 21,6 \text{ km/sa olarak hesaplanır.}$$

Örnek 19

Arzu, evden çıkarak saatte 5 km hızla yürümeye başlıyor. Kardeşi de 1 saat sonra bisikletiyle saatte 20 km hızla Arzu'yu takip etmeye başlıyor. Kardeşinin kaç saat sonra Arzu'ya yetişeceğini bulalım.

Çözüm

Arzu'nun saatteki hızı 5 km, kardeşinin ise 20 km'dir. Arzu yürümeye başladıktan 1 saat sonra kardeşi onun peşinden gitmeye başlıyor.

Bir saat sonra kardeşi yola çıktığında Arzu ile arasındaki mesafe 5 km olacaktır. Kardeşi, Arzu'dan saatte $20 - 5 = 15$ km daha fazla yol aldığına göre; 5 km lik açığı $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ saatte yani 20 dakikada kapatarak Arzu'ya yetişmiş olur.

Bu problemi bir de denklem kurarak çözelim.

Kardeşinin Arzu'ya t saat sonra yetişeceğini varsayalım. Bu durumda Arzu'nun yürüdüğü süre $t + 1$ olur. Kardeşi, Arzu'ya yetiştiği anda ikisinin de evden çıktıktan sonra aldıkları yollar eşit olur.

O halde,

| | Hızı (km/sa.) | Geçen Süre (sa.) | Alınan Yol (km.) |
|---------|---------------|------------------|-------------------|
| Arzu | 5 | $t + 1$ | $5 \cdot (t + 1)$ |
| Kardeşi | 20 | t | $20 \cdot t$ |

$5 \cdot (t + 1) = 20 t$ olmalıdır. Denklemi çözersek,

$$5 \cdot (t + 1) = 20 \cdot t$$

$$5t + 5 = 20t$$

$$20t - 5t = 5$$

$$15t = 5$$

$$t = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ saat bulunur.}$$

Kardeşi, Arzu'ya $\frac{1}{3}$ saat, yani 20 dk sonra yetişir.

Bu süre içinde kardeşi $\frac{1}{3}$, Arzu ise $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ saat yol almıştır.

Kardeşi $\frac{1}{3} \cdot 20 = \frac{20}{3}$ km yol almıştır

Arzu'da $\frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{20}{3}$ km km yol almıştır.

Bu durumda da iki kardeşin aldıkları mesafenin eşit olduğu görülmektedir.

Anahtar Bilgi

Mutlak Hız

20 km/sa hızla akan nehirde akıntıyla aynı yönde 50 km/sa hızla giden tekne, nehrin kenarında sabit duran birine göre $50 + 20 = 70$ km/sa hızla gidiyordur. Aynı tekne akıntıyla ters yönde gittiğinde nehrin kenarında sabit duran kişiye göre $50 - 20 = 30$ km/sa hızla gider. Bu iki durumda bulunan 70 km/sa ve 30km/sa hızlar nehrin kenarındaki sabit kişiye göre teknenin mutlak hızlarıdır.

Örnek 20



Temel hızı saatte 20 km/saat olan bir tekne ile saatte 4 km/saat hızla akan nehirde akıntıya karşı belli bir mesafeye kadar gidip başladığı yere geri dönmüştür. Temel'in teknesinin gidiş dönüşteki ortalama hızını bulalım.

Çözüm

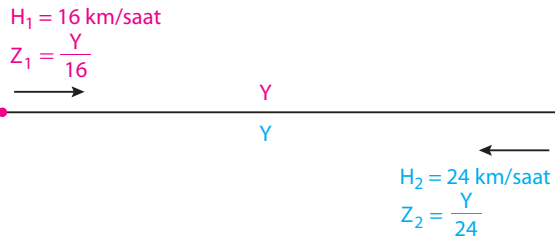
Temel'in teknesinin saatteki hızı 20 km/saat ve nehirdeki akıntının hızı saatte 4 km/saattir. Bizden istenen teknenin gidiş dönüşteki ortalama hızıdır.

Tekne akıntıya karşı yol alırken saatteki mutlak hızı $20 - 4 = 16$ km/saat, dönüşte akıntıyla aynı yönde olacağından hızı $20 + 4 = 24$ km/saattir.

Ortalama hız; toplam alınan yolun, yolda geçen toplam süreye bölünmesiyle elde edilir.

Burada gidilen yolu Y alırsak, toplam alınan yol $2Y$ dir. Gidiş ve dönüşte geçen zaman sırasıyla Z_1 ve Z_2 ile hızı ise H_1 ve H_2 ile gösterelim. Ortalama hızı da H_{ortalama} ile gösterelim.

Hız = $\frac{\text{Yol}}{\text{Zaman}}$ formülünden; $Z_1 = \frac{Y}{16}$, $Z_2 = \frac{Y}{24}$ bulunur.



$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Toplam Alınan Yol}}{\text{Yolda Geçen Süre}}$$

$$H_{\text{Ortalama}} = \frac{2Y}{\frac{Y}{24} + \frac{Y}{16}} = \frac{2Y}{\frac{40Y}{24 \cdot 16}} = 2Y \cdot \frac{24 \cdot 16}{40Y}$$

$$H_{\text{Ortalama}} = 19,2 \text{ km/sa. bulunur.}$$

Teknenin gidiş dönüşteki ortalama hızı 19,2 km/sa'dir.

Örnek 21



Bir paraşütçü atladıktan yere ulaşmaya kadar 3,4 km yol almıştır. Bu paraşütçünün 50 saniyede 1 km yol kat ettikten sonra paraşütü açılıyor. Paraşütü açıldıktan sonra paraşütçünün yere ulaşması 200 saniye sürüyor.

Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

- Paraşütçünün paraşüt kapalıyken ortalama hızı nedir?
- Paraşütçünün paraşüt açıkken ortalama hızı nedir?

Çözüm

Problemden paraşütçünün atladıktan sonra yere ininceye kadar toplam 250 sn. yol kat ettiği anlaşılmaktadır. Ayrıca paraşüt açıldıktan sonra paraşütçünün hızının azalacağını düşünebiliriz.

Paraşütçünün, paraşüt kapalıyken ortalama hızı, paraşüt kapalıyken gittiği yolun zamana bölümü ile hesaplanır.

Paraşütçünün, paraşüt kapalıyken ortalama hızı $H_{\text{ort}} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ km/sn'dir.}$

Saatteki ortalama hızı ise $\frac{1 \text{ km}}{50 \text{ sn}} = \frac{1 \text{ km}}{\frac{50}{3600} \text{ sa}} = \frac{3600}{50} = 72 \text{ km/sa}$ şeklinde hesaplanır.

Paraşütçü, paraşütü açıkken $3,4 - 1 = 2,4 \text{ km}$ yol almaktadır.

Bu yolu alması için gereken süre ise 200 sn'dir. Bu durumda;

Paraşütçünün, paraşüt açıkken ortalama hızı $H_{\text{ort}} = \frac{2,4}{200} = 0,012 \text{ km/sn'dir.,}$

Saatteki ortalama hızı ise $\frac{2,4 \text{ km}}{200 \text{ sn}} = \frac{2,4 \text{ km}}{\frac{200}{3600} \text{ sa}} = 43,2 \text{ km/sa}$ şeklinde hesaplanır.

Paraşüt açıldıktan sonra paraşütçünün hızının 43,2 km/sa olarak hesaplanması, hızın azalacağı tahmininin doğru olduğunu göstermektedir.

Örnek 22



Kenan ve Nihat iki atlettir. Bu atletler aynı anda, aynı noktadan, aynı yöne doğru çevresi 2000 m olan dairesel bir pist etrafında koşmaya başlıyorlar. Kenan'ın hızı 250 m/dk ve Nihat'ın hızı ise 200 m/dk'dır. Kaç dakika sonra Kenan'ın, Nihat'ı ilk kez geçtiğini bulalım.

Çözüm

Kenan'ın hızı 250 m/dk., Nihat'ın hızı 200 m/dk'dır. Hızlı olan yavaş olana pistin çevresi olan 2000 m fark açarsa ilk kez geçmiş olur.

Hızlı olan dakikada hızlarının farkı kadar yavaş olanın önüne geçer. Hızları farkı 2000 m ile bölünürse kaç dakika sonra ilk kez geçeceği bulunur.

$$\text{İlk Kez Geçme Süresi} = \frac{\text{Aradaki mesafe}}{\text{Hızlarının farkı}} = \frac{2000 \text{ m}}{(250 - 200) \text{ m/dk}} = 40 \text{ dk}$$

40 dk. sonra Kenan, Nihat'ın 2000 m önüne geçer, yani böylece ilk kez Nihat'ı geçer.

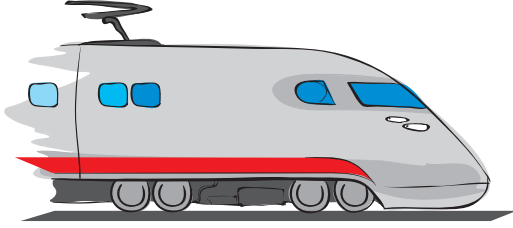
Diğer bir çözüm yolu olarak koşucular arasındaki mesafeyi belirli dakikalarda izleyecek olursak;

| | Nihat'ın aldığı yol | Kenan'ın aldığı yol | Aralarındaki mesafe |
|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 10 dakika sonra | 2000 | 2500 | 500 |
| 20 dakika sonra | 4000 | 5000 | 1000 |
| 30 dakika sonra | 6000 | 7500 | 1500 |
| 40 dakika sonra | 8000 | 10000 | 2000 |

40 dakika sonra Kenan 10000 m, Nihat 8000 m yol almış olur.

Aradaki fark 2000 m yani dairesel pistin uzunluğuna eşit olduğundan Kenan Nihat'ı 40 dk. sonra ilk kez geçmiştir olur.

Örnek 23



Ali, tren istasyonunda raylara paralel şekilde 60 m/dk hızla yürümektedir. Karşı yönden 60 km/sa hızla gelen tren Ali'yi karşılaştıkları andan itibaren 18 saniyede tamamen geçmiştir. Trenin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulalım

Çözüm

Trenin hızı saatte 60 km/sa, Ali'nin hızı ise dakikada 60 m/dk'dır. Tren Ali'yi 18 saniyede tamamen geçmiştir.

Ali ile trenin hızları farklı birimlerde verildiği için öncelikle hızları aynı birimden olacak şekilde ifade edelim.

Trenin aldığı yol 1 saatte 60 km ise 1 dakikada 1 km'dir.

1 km = 1000 m olduğuna göre, Tren 1 saniyede $\frac{1000}{60} = \frac{50}{3}$ m yol alır.

Ali, 1 dakikada 60 m yürüyorsa 1 saniyede 1 m yürür.

Tren ile Ali birbirlerine doğru yani zıt yönde hareket ettiklerinden birim zamanda aldıkları yol hızlarının toplamına eşittir. Trenin boyu, hızlarının toplamı ile sürenin çarpımıyla bulunur.

Trenin boyuna x diyelim.

Trenin boyu = (Hızları toplamı) \times (Süre)

$$x = \left(\frac{50}{3} + 1 \right) \cdot 18$$

$$x = \frac{53}{3} \cdot 18 = 318 \text{ m}$$

O halde, trenin boyu 318 m'dir. Bulunan sonucun sağlaması şöyle yapılabilir:

Trenin 18 saniyede aldığı yol $\frac{50}{3} \cdot 18 = 300 \text{ m}$ dir.

Ali'nin 18 sn aldığı yol ise 18 metredir.

Bu ikisinin toplamı 318 eder, bu da trenin boyuna eşittir.

Bu atölye çalışmasının amacı iki hareketlinin hızlarının elektronik tablo yazılımı kullanılarak karşılaştırılmasıdır.

Araç-Gereçler: Bilgisayar, elektronik tablo yazılımı

Hangisi Daha Çok Yol Kateder?

Bir hareketli 1. saniye sonunda 1 santimetre, 2. saniye sonunda 2 santimetre ve 3. saniye sonunda 4 santimetre yol almaktadır. Hareketlinin bu şekilde her saniye bir önceki saniyede kat ettiği yolun iki katı kadar yol aldığını düşünürsek hareketlinin hareket başladıktan sonraki 30 saniye süresince alacağı yolu hesaplayalım. Saatte 260 km hıza ulaşabilen bir otomobilin 30 saniyede alacağı yol ile bu hareketlinin aldığı yolu karşılaştıralım.

Bunun için bir elektronik tablo yazılımı kullanabiliriz.

Adım 1 ►

Elektronik tabloları açınız ve birinci satıra aşağıdaki şekilde başlıkları yazınız.

| | A | B | C | D |
|---|-------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1 | Zaman | Hareketlinin Katettiği Yol (cm) | Hareketlinin Katettiği Yol (m) | Hareketlinin Katettiği Yol (km) |
| 2 | 1 | 1 | 0,01 | 0,00001 |

Adım 2 ►

A2 hücresine 1, A3 hücresine 2 yazınız. Her iki hücreyi aynı anda seçerek oluşan dikdörtgenin sağ alt köşesindeki kutuyu A31 hücresine kadar sürükleyiniz. Böylece A2 hücresinden A31 hücresine kadar 1'den 30'a kadar ardışık sayıları yazmış oluruz. Bu sayılar zamanı belirtmek üzere oluşturulmuştur.

Adım 3 ►

B2 hücresine 1, B3 hücresine $= 2 * B2$ yazınız.

Adım 4 ►

B3 hücresine bir kez tıklayınız. Hücresinin sağ alt köşesinde farelin sol tuşuna basılı tutarak B31 hücresine kadar sürükleyiniz. Böylece her bir saniyede hareketlinin aldığı yol santimetre olarak hesaplanmış olur.

Adım 5 ►

Hareketlinin aldığı yolu metre olarak hesaplamak için C2 hücresine $=B2/100$ yazılır. Daha sonra Adım 4'teki çoğaltma yöntemi kullanılarak C2-C31 hücrelerine her bir saniyede hareketlinin aldığı yol metre olarak hesaplanmış olur.

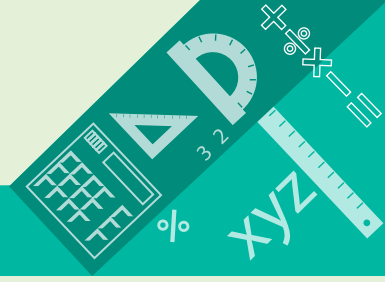
Adım 6 ►

Hareketlinin aldığı yolu kilometre olarak hesaplamak için D2 hücresine $=C2/1000$ yazılır. Daha sonra Adım 4'teki çoğaltma yöntemi kullanılarak D2-D31 hücrelerine her bir saniyede hareketlinin alacağı yol kilometre olarak hesaplanmış olur.

Adım 7 ►

Hareketlinin aldığı yolun kilometre olarak toplamı belirlemek için; D32 hücresine; $=TOPLA(D2:D31)$ yazılır.

Saatte 260 km/s hıza ulaşabilen bir otomobilin 30 saniyede alacağı yolu hesaplayınız. Bu değerle, Adım 7'de ulaştığınız bu değeri karşılaştırınız.



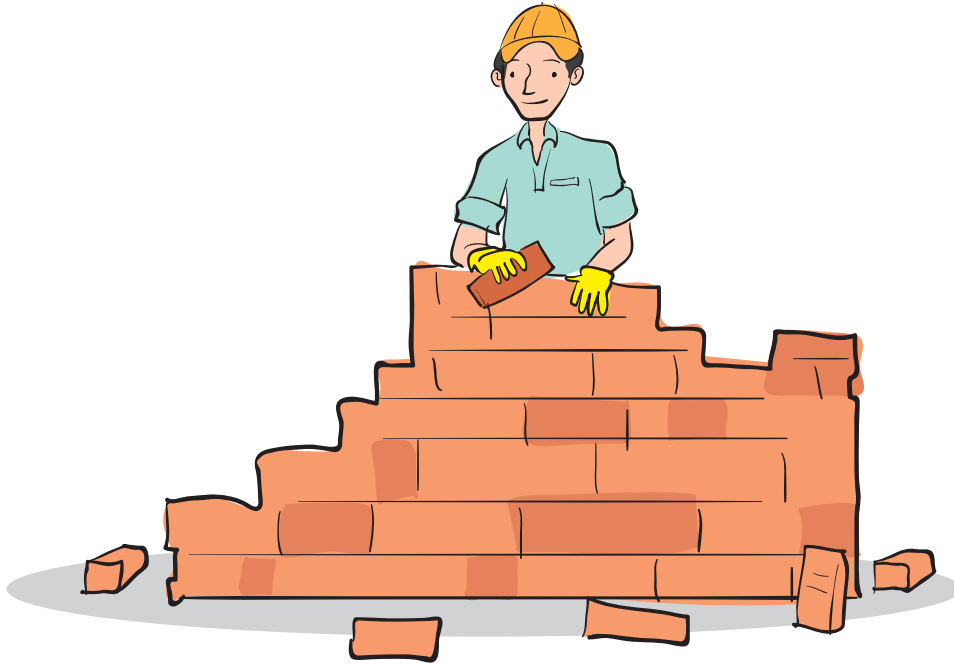
Bu atölye çalışmasında bir duvar inşasında çalışan işçi sayısı ile işin bitme süreleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Duvar İnşaatı

Bir okulun bahçe duvarı yapılacaktır. Bu duvarı bir işçi yalnız başına 30 günde bitirebiliyor. Eşit hızda çalışan başka işçilerin katılımıyla bu iş yapılmak isteniyor. Aşağıdaki tablo işçilerin sayısı arttıkça bu işin kaç günde biteceğini belirtmektedir.

| İşçi sayısı | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|----|----|----|-----|-----|
| Gün sayısı | 30 | 15 | 10 | ... | ... |

- Tablodaki verilere göre işçi sayısı ile gün sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
- Her bir sütundaki işçi sayısı ile gün sayılarını çarparak sonucu üçüncü bir satırda belirtiniz. Elde ettiğiniz sonuçlara göre ne söyleyebilirsiniz?
- Bulduğunuz çarpımdan yararlanarak tablodaki boşluklara gelecek gün sayılarını bulunuz.
- İşçi sayısı 10 olduğunda işin kaç günde biteceğini elde ettiğiniz ilişkiye göre hesaplayınız.
- İşin 6 günde bitirilebilmesi için kaç işçiye ihtiyaç vardır? Açıklayınız.



Örnek 24



Veysel ve Fatih kardeşler pirinç ektikleri tarlayı sulamaktadırlar. Veysel tek başına sulama yaptığı işi 10 saatte, Fatih ise tek başına 15 saatte bitirebilmektedir. Her ikisi birlikte çalıştıklarında sulama işinin kaç saatte biteceğini hesaplayalım.

Çözüm

Soruda verilen bilgilerle aşağıdaki tablo oluşturulabilir.

| | İşin tamamlandığı Süre (Saat) | İşin bir saatte bitirildiği bölümü |
|--------|----------------------------------|---------------------------------------|
| Veysel | 10 | $\frac{1}{10}$ |
| Fatih | 15 | $\frac{1}{15}$ |

Tablodan da görüldüğü gibi Veysel işi 10 saatte bitiriyorsa, bir saatte işin $\frac{1}{10}$ ini; Fatih ise işi 15 saatte bitiriyorsa bir saatte işin $\frac{1}{15}$ ini bitirmektedir.

Veysel ve Fatih beraber çalıştıklarında, bir saatte işin ne kadarını bitirdiklerini iki kesri toplayarak buluruz.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad (\text{Fatih ve Veysel'in birlikte çalışarak 1 saatte işin bitirdikleri kısmı})$$

O halde işin tamamı 6 saatte bitmiş olur.

Örnek 25



Doğan tek başına odasını 5 saatte boyayabilmektedir. Arkadaşı Can ile birlikte ise aynı işi 3 saatte bitiriyorlar. Can ve Doğan birlikte 2 saat çalıştıktan sonra Can bir iş için ayrılmak zorunda kalıyor. Geri kalan kısmı Doğan tek başına tamamlıyor. Doğan'ın odasının toplam kaç saatte boyandığını bulalım.

Çözüm

Doğan tek başına 5 saatte, Can ile birlikte çalışarak 3 saatte boyama işini yapabilmektedir. Can 2 saat yardım ettikten sonra işi bırakmış ve geri kalan kısmı Doğan bitirmiştir. İşin toplam kaç saat sürdüğü sorulmaktadır.

Boyama işini ikisi birlikte 3 saatte bitirilebiliyorsa 2 saatte $\frac{2}{3}$ 'si bitirilir, geriye işin $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 'ü kalır. Doğan tek başına bu işin tamamını 5 saatte bitirebiliyorsa işin $\frac{1}{3}$ 'ünü $\frac{5}{3}$ saatte bitirir. Birlikte de 2 saat çalışmışlardı. Boyama işi toplam $\frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$ saat sürmüştür. Yani 3 saat 40 dakikada bitmiştir.

Örnek 26



Annesi küçük Yasemin'in banyosunu yaptıracaktır. Küveti doldurmak için musluğu açar, ancak gideri kapatmayı unutur. Musluk, gider kapalıyken küveti 5 dakikada doldurmaktadır. Gider ise dolu küveti musluk kapalıyken 6 dakikada boşaltmaktadır. 3 dakika sonra Yasemin'in annesi gideri kapatmadığını fark eder ve gideri kapatır. Küvetin toplam kaç dakikada dolduğunu bulalım.

Çözüm

Küvetin tamamını musluk tek başına 5 dk'da doldurmakta, gider ise dolu küveti 6 dk'da boşaltmaktadır. Gider 3 dk. boyunca açık unutulmuş, fark edildikten sonra kapatılmıştır. Küvetin kaç dakikada dolacağı sorulmaktadır.

Verilen bilgileri kullanarak aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

| | Küvetin tamamını yalnız başına doldurabileceği/ boşaltabileceği süre (dk.) | Birim zamanda yalnız başına doldurabileceği/ boşaltabileceği kısım | 3 dakikada küvetin doldurulan/ boşaltılan kısmı |
|----------------|--|--|---|
| Musluk | 5 | $\frac{1}{5}$ 'ini doldurur. | $\frac{3}{5}$ 'ini doldurur. |
| Gider | 6 | $\frac{1}{6}$ 'sını boşaltır. | $\frac{3}{6}$ 'sını boşaltır. |
| İkisi birlikte | | | $\frac{3}{5} - \frac{3}{6}$ |

İkisi beraber açık olduğunda küvetin $\frac{3}{5} - \frac{3}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ 'i dolmuş olur.

Geriye küvetin $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ 'u boş kalır. Geri kalan bu kısımda sadece musluk açık olacaktır.

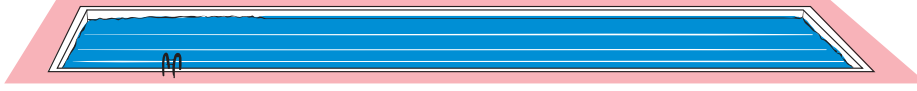
Musluk birim zamanda $\frac{1}{5}$ 'ini doldurduğuna göre geriye kalan $\frac{9}{10}$ 'luk kısmını t dakikada doldurur.

Bu durumda $\frac{1}{5} = \frac{9}{10t}$ ise $\frac{1}{5} = \frac{9}{10t}$ ise $10t = 45$ ise $t = 4,5$ dk bulunur.

O halde, küvet $3 + 4,5 = 7,5$ dakikada doldurur.

Siz de giderin ve musluğun birlikte sürekli açık olma durumunda küvetin kaç dakikada dolacağını hesaplayınız.

Örnek 27



Bir üniversitedeki olimpik havuzun boyu 50 m, eni 25 m ve derinliği 5 m dir. Havuz iki musluk ile doldurulmaktadır. Musluklardan biri havuzu 8 saatte, diğeri ise 10 saatte doldurmaktadır. Musluklar 3 saat açık kaldıktan sonra su şebekesinde problem çıkmış ve sular kesilmiştir. Havuzun tam olarak dolması için, kaç metreküp daha suya ihtiyaç olduğunu bulalım.

Çözüm

Havuzu musluklardan biri tek başına 8 saatte, diğeri ise tek başına 10 saatte doldurmaktadır. Musluklar 3 saat açık kaldıktan sonra su kesilmiştir. Havuzu doldurmak için ne kadar suya ihtiyaç olduğu sorulmaktadır. Ayrıca havuzun boyutları 50 m, 25 m ve 1 m' dir.

Verilen bilgilerle aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

| | Havuzun tamamını doldurduğu süre (saat) | 1 saatte havuzun doldurulan kısmı | 3 saatte havuzun doldurulan kısmı |
|----------------|--|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. Musluk | 8 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 2. Musluk | 10 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |
| İkisi birlikte | | | $\frac{3}{8} + \frac{3}{10}$ |

Üç saat sonunda havuzun,

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{10} = \frac{27}{40} \text{ 'ı dolar, } \frac{40}{40} - \frac{27}{40} = \frac{13}{40} \text{ 'ü boş kalır.}$$

Havuzun hacmini bulalım.

$$\text{Havuzun hacmi} = 50 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 6250 \text{ m}^3$$

$$6250 \text{ m}^3 \text{ havuzun, } \frac{13}{40} \text{ 'ü } 6250 \cdot \frac{13}{40} = 2031,25 \text{ m}^3 \text{ olur.}$$

O halde havuzu doldurmak için 2031,25 m³ suya ihtiyaç vardır.

Örnek 28



Kütüphanecilik kulübü üyesi olan Aslı sınıftaki öğrencilerin son bir ayda okudukları kitap sayısını araştırarak aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur. Sınıfın kitap okuma durumu hakkında bilgi almak isteyen sınıf öğretmenine Aslı'nın nasıl bir cevap vereceğini bulalım.

| İsim | Kitap Sayısı | İsim | Kitap Sayısı | İsim | Kitap Sayısı |
|-------|--------------|--------|--------------|-------|--------------|
| Ali | 5 | Ceyhun | 5 | Orhan | 9 |
| Ayşe | 7 | Semih | 6 | Aslı | 10 |
| Funda | 8 | Selma | 4 | Ceyda | 8 |
| Celal | 3 | Fatih | 10 | Berna | 6 |

Çözüm

Sınıftaki 12 öğrencinin toplam okuduğu kitap sayısı bulunur. Bu sayı öğrenci sayısına bölünürse öğrenci başına ortalama kaç kitap okunduğu bulunur.

$$\frac{5 + 7 + 8 + 3 + 5 + 6 + 4 + 10 + 9 + 10 + 8 + 6}{12} = \frac{81}{12} = 6,75$$

Bu durumda Aslı, öğretmene sınıfta ortalama olarak her bir öğrencinin yaklaşık olarak 7 kitap okuduğunu söyleyebilir.

Örnek 29



Kuruyemişi Saim usta iki çeşit çerez karışımı yapmayı düşünmektedir. Karışımlardaki çerez miktarları ve kg fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| Cinsi | Kg fiyatı (TL) | 1. karışımdaki miktarı (kg) | 2. karışımdaki miktarı (kg) |
|---------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Antep fıstığı | 22 | 3 | 2 |
| Badem | 18 | 2 | 2,5 |
| Fındık | 14 | 3 | 2 |
| Yer fıstığı | 12 | 4 | 3 |
| Leblebi | 11 | 3 | 4 |

Hangi karışımın kg fiyatının daha hesaplı olduğunu hesaplayalım.

Çözüm

Fiyatları farklı çerezlerden farklı miktarlarda kullanılarak iki çeşit karışık çerez elde edilmiştir.

Her bir karışımın maliyetini, çerezin toplam ağırlığına bölerek kg fiyatları bulunur.

Önce 1. karışımın kg fiyatını bulalım.

| Cinsi | Kg fiyatı (TL) | 1. karışımındaki miktarı (kg) | Tutar (TL) |
|---------------|----------------|-------------------------------|-------------------|
| Antep fıstığı | 22 | 3 | $22 \cdot 3 = 66$ |
| Badem | 18 | 2 | $18 \cdot 2 = 36$ |
| Fındık | 14 | 3 | $14 \cdot 3 = 42$ |
| Yer fıstığı | 12 | 4 | $12 \cdot 4 = 48$ |
| Leblebi | 11 | 3 | $11 \cdot 3 = 33$ |

$$\frac{66 + 36 + 42 + 48 + 33}{3 + 2 + 3 + 4 + 3} = \frac{225}{15} = 15 \text{ TL}$$

1. karışımın kg fiyatı 15 TL dir. Şimdi 2. karışımın 1 kg lık fiyatını bulalım.

| Cinsi | Kg fiyatı (TL) | 2. karışımındaki miktarı (kg) | Tutar (TL) |
|---------------|----------------|-------------------------------|---------------------|
| Antep fıstığı | 22 | 2 | $22 \cdot 2 = 44$ |
| Badem | 18 | 2,5 | $18 \cdot 2,5 = 45$ |
| Fındık | 14 | 2 | $14 \cdot 2 = 28$ |
| Yer fıstığı | 12 | 3 | $12 \cdot 3 = 36$ |
| Leblebi | 11 | 4 | $11 \cdot 4 = 44$ |

$$\frac{44 + 45 + 28 + 36 + 44}{2 + 2,5 + 2 + 3 + 4} = \frac{197}{13,5} \approx 14,6 \text{ TL}$$

2. karışımın kg fiyatı 14,6 TL dir.

Sonuç olarak; 1. karışım 2. karışımından kg başına yaklaşık 0,4 TL yani 40 kuruş daha pahalıdır.

Anahtar Bilgi

Ağırlıklı Ortalama

Dizi içindeki her bir terimin, belirli bir ağırlıkla ayrı ayrı çarpıldıktan sonra bulunan toplamın, ağırlık toplamına bölünmesi ile elde edilen ortalama ağırlıklı ortalama olarak adlandırılır.

Örnek 30

Bir şirketin insan kaynakları müdürü, şirkete iş için başvuran kişilerle gerçekleştirdiği mülakatlarda belirlenen 6 beceriyle ilgili 10 üzerinden bir değerlendirme yapmaktadır.

Mülakatlar sonucu bir sekreter, bir bilişim uzmanı ve bir satış elemanı alımı gerçekleştirilecektir. Şirketin insan kaynakları yetkilisi farklı mesleklerin farklı

beceriler gerektireceğini düşünmektedir. İlgili pozisyon için seçim yapılırken nasıl bir yol izlenebileceğini inceleyelim.

Çözüm

Örneğin, üç kişi için mülakat değerlendirme aşağıda verilen tablodaki gibi olsun.

| Beceriler | Selim | Emre | Seda |
|----------------------|-------|------|------|
| Bilgisayar Kullanımı | 6 | 9 | 7 |
| Yabancı Dil | 9 | 9 | 7 |
| Davranış | 5 | 3 | 9 |
| İletişim | 7 | 4 | 9 |
| Genel Kültür | 8 | 9 | 4 |
| Üretkenlik | 7 | 9 | 5 |
| Aritmetik Ortalama | 7 | 7,16 | 6,83 |

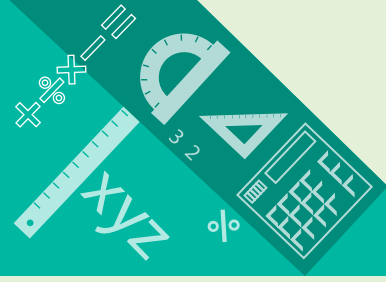
Beceri puanlarının aritmetik ortalaması göz önüne alındığında sekreterlik (veya diğer pozisyonlardan herhangi biri) için Emre seçilmelidir.

Ancak bu şekilde bir seçim doğru bir yaklaşım olmayabilir. Çünkü Emre'nin davranış ve iletişim becerileri için değerlendirme puanları oldukça düşüktür. Sekreterlik için bu becerilerin önemi göz ardı edilemez. Bu nedenle puanlandırmada farklı becerilere farklı puanlar verilebilmesini sağlayan bir ağırlıklandırma yapılması işe yarayabilir. Örneğin becerileri önem durumuna göre 1, 2, 3 ile ağırlıklandırabiliriz. Sekreterlik için en önemli beceri olarak düşünebileceğimiz iletişim becerisinin ağırlığına 3, daha sonra önemli beceriler olarak düşünülecek bilgisayar kullanma ve davranış becerilerine 2, diğer becerilerin ağırlığını 1 olarak belirleyelim. Daha sonra ilgili beceri puanları, bu ağırlık değerleri ile çarpılarak yeni puanlar, bu puanların aritmetik ortalaması olarak ağırlıklı ortalamayı hesaplayabiliriz.

| | Ağırlıklı Puanlar | | | |
|------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------|
| Beceriler | Selim | Emre | Seda | Ağırlık |
| Bilgisayar Kullanımı | $6 \times 2 = 12$ | $9 \times 2 = 18$ | $7 \times 2 = 14$ | 2 |
| Yabancı Dil | $9 \times 1 = 9$ | $9 \times 1 = 9$ | $7 \times 1 = 7$ | 1 |
| Davranış | $5 \times 2 = 10$ | $3 \times 2 = 6$ | $9 \times 2 = 18$ | 2 |
| İletişim | $7 \times 3 = 21$ | $4 \times 3 = 12$ | $9 \times 3 = 27$ | 3 |
| Genel Kültür | $8 \times 1 = 8$ | $9 \times 1 = 9$ | $4 \times 1 = 4$ | 1 |
| Üretkenlik | $7 \times 1 = 7$ | $9 \times 1 = 9$ | $5 \times 1 = 5$ | 1 |
| Toplam | 67 | 63 | 75 | |
| Ağırlıklı aritmetik ortalama | $67 : 10 = 6,7$ | $63 : 10 = 6,3$ | $75 : 10 = 7,5$ | |

Becerilerin ağırlıkları değiştirildiğinde sekreterlik için en uygun kişinin Seda olduğu görülmektedir.

Siz de bilişim uzmanı ve satış elemanı için ayrı ayrı tablolar düzenleyiniz. Her iki meslek için becerilerin olası ağırlıklarını belirleyiniz. Oluşturduğunuz tablolardaki verileri kullanarak Selim ve Emre için hangi işin daha uygun olacağını belirleyiniz.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasını amacı, ağırlıklı ortalamanın nasıl hesaplanabileceğini kavratmaktır.

Araç-Gereçler: Hesap Makinesi

Karne

9. Sınıf öğrencisi olan Tuğçe'nin 1. yarıyıl karnesi aşağıda verilmektedir. Fakat karnenin oluşturulduğu bilgisayar yazılımındaki bir problemden dolayı bazı notların yerine ## işareti çıkmıştır.



| Dersler | Sınav Puanları | | | Sözlüler | | | Proje Ödev | Ders Saati | Dönem Puanı |
|--|----------------|----|----|----------|----|----|------------|------------|-------------|
| Beden Eğitimi-Görsel Sanatlar - Müzik | 80 | 80 | | 80 | 90 | | | 2 | 82,5 |
| Biyoloji | 70 | 70 | | 80 | 80 | | | 3 | 75 |
| Coğrafya | 80 | 85 | | 75 | 80 | | | 2 | ## |
| Dil ve Anlatım | 90 | 85 | | 85 | 90 | | | 2 | 87,5 |
| Din Kültürü ve Ahlak Bilgisi | 90 | 90 | | 90 | 90 | | | 1 | ## |
| Fizik | 65 | 75 | | 70 | 80 | | ## | 2 | 78 |
| Yabancı Dil | 50 | 60 | 60 | 60 | 60 | 70 | | 6 | ## |
| Kimya | 70 | 70 | | 80 | 80 | | ## | 2 | 79 |
| Matematik | 85 | 89 | 90 | 90 | 90 | ## | | 6 | 89 |
| Sağlık Bilgisi | 75 | 65 | | 80 | 70 | | | 2 | ## |
| Seçmeli-1 | 80 | 80 | | ## | 90 | | | 1 | 85 |
| Seçmeli-2 | 70 | 70 | | 70 | 80 | | | 1 | ## |
| Tarih | 55 | 65 | | 65 | 65 | | ## | 2 | 67 |
| Türk Edebiyatı | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | ## | 3 | 84 |
| Toplam Ders Saati | | | | | | | | 35 | |
| Birinci yarıyıl ağırlıklı not ortalaması | | | | | | | | | |

Her bir dersin dönem notu; o ders için verilen tüm notların aritmetik ortalaması ile hesaplanmaktadır. Dönemin ağırlıklı ortalaması ise her bir dersin ders saati ile dönem notunun çarpımının toplam ders saatine bölümü ile hesaplanmaktadır. Buna göre;

- Tuğçe'nin karnesindeki ## işaretinin çıktığı yerlere hangi sayılar gelmelidir?
- Tuğçe'nin birinci yarıyıl ağırlıklı ortalamasını hesaplayınız?
- Sizin karnenizin, üç ders hariç Tuğçe'nin karnesi ile aynı olduğunu düşünün. Bu üç dersin dönem notlarının Tuğçe'ninkilere nazaran 10 ar puan yüksek olduğunu kabul edersek, ağırlıklı dönem ortalamanız hangi üç dersi seçerseniz en yüksek olacaktır?

KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1. Aşağıdaki boşlukları uygun sayılarla doldurunuz.

Bir Metro istasyonunda metrodan 80 kişi inmiş, 72 kişi binmiştir. İnenlerin $\frac{3}{8}$ ü erkek, binenlerin $\frac{7}{12}$ si kadındır.

- Metrodan kadın yolcu inmiştir.
- Metroya erkek yolcu binmiştir.
- Metroda en başta 73 erkek yolcu olsaydı, son durumda erkek yolcu kalırdı.
- Metroda en başta kadın yolcu olsaydı, son durumda 66 kadın yolcu kalırdı.

2. Bir yük asansörünün taşıyabileceği azami yük miktarı 450 kg dır.

Buna göre aşağıdaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

- Bu asansöre kütlesi 35 kg olan kolilerden en fazla yüklenebilir.
- Bu asansöre eşit kütlede ve kütleleri tam sayı olan 20 koli yüklenmişse her bir kolinin kütlesi en fazla kg dır.
- Kütlesi bir kolinin kütlesinin 3 katı olan bir işçi, 12 koliyle birlikte bu asansöre binmişse kolilerin kütlesi en fazla kg dır.

3. Levent Bey'in yaptığı matematik sınavında sorduğu $4 \cdot p = \frac{3}{5}(r - 17)$ denkleminde r nin p cinsinden değerini hesaplayınız." sorusuna öğrencileri Zeynep ve Demet'in verdiği cevap aşağıda verilmiştir.

Demet

Zeynep

$$4 \cdot p = \frac{3}{5}(r - 17)$$

$$4 \cdot p + 17 = \frac{3}{5}r$$

$$r = \frac{5}{3}(4 \cdot p + 17)$$

$$4 \cdot p = \frac{3}{5}(r - 17)$$

$$\frac{20}{3}p = r - 17$$

$$r = \frac{20}{3}p + 17$$

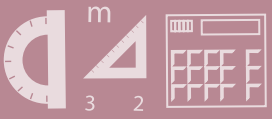
Demet mi yoksa Zeynep mi bu soruyu doğru çözmüştür? Açıklayınız.

4. "Hızı 50 km/sa olan bir tren, uzunluğu 400 m bir tüneli 24 sn geçmektedir.

Bu trenin boyu kaç metredir?" sorusu yanlış bir sorudur. Hangi veri/veriler düzeltilerek sorudaki yanlışlık giderilebilir?

5. Aralarında 70 km mesafe olan iki araçtan birincisinin hızı 60 km/sa ve ikincisinin hızı 80 km/sa olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına (D), yanlış olanların yanına (Y) yazınız. Cevaplarınızı nedenleriyle açıklayınız.

- (....) Hızlı olan yavaş olanı takip ederse 8 saatte yetişir.
- (....) Birbirlerine doğru hareket ederlerse yarım saat sonra karşılaşırlar.
- (....) Birbirlerini takip etme durumunda aradaki mesafenin değişmemesi için yavaş olanın hızını 20 km/sa. artırması gerekir.
- (....) Bulundukları yerden zıt yönde harekete geçerse 2 saat sonra aralarındaki mesafe 280 km olur.



KENDİMİZİ SINAYALIM

6. Ahmet sınavda çıkan "10 dakikada aldığı yol 200 km olan hareketlinin 1 saatteki hızını hesaplayınız?" sorusunun cevabını $\frac{200}{10} = 20 \text{ km/sa}$ bulmuştur.
- Ahmet'in cevabının doğruluğunu inceleyiniz, yanlış çözmüş ise sebebi nedir?
7. Kerem ve Emrah'ın yaşları toplamı 42 dir. Ahmet, 10 sene sonraki bu toplamın 52 olacağını söylüyor. Ahmet'in hesabının doğruluğunu inceleyiniz.
8. İsmet Bey, bir ürün satın almak istemektedir. Şehrinde bulunan bir mağazadan ve sanal ortamdaki bir alışveriş sitesinden fiyat araştırmıştır. Ürünlerin etiket fiyatları her ikisinde de aynı, ancak bir süreliğine alışveriş sitesinde etiket fiyatı üzerinden % 5 indirim uygulanmaktadır. Mağaza ürünün teslimatını ücretsiz yapmakta, alışveriş sitesi ise kargo ücreti olarak 20 TL almaktadır.
- İsmet Bey, mağazayı daha hesaplı olduğu için tercih ettiğine göre, ürünün etiket fiyatı için ne söyleyebilirsiniz?

Alıştırmalar

1.



Arkadaşlarının doğum günü için aralarında para toplayarak 30 TL olan yaş pastayı almak isteyen bir grup arkadaş Ahmet de katılınca kişi başı toplayacakları para 1 TL azalıyor.

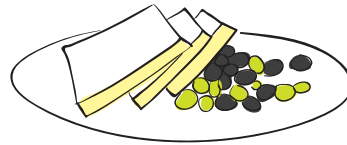
Son durumda Ahmet'le beraber grupta kaç kişi vardır?

2.

Bir belediye, abonelerin ödeyecekleri su faturalarını şöyle ücretlendirmektedir. Kullanılan ilk 8 m^3 su için sabit bir ücret alınmakta ve 8 m^3 su tüketiminin aşılması durumunda da sonraki her bir m^3 su için ayrı ücret alınmaktadır.

Buna göre 20 m^3 su kullandığında 36 TL, 28 m^3 su kullandığında ise 52 TL ödeyen bir abone 2 m^3 su kullandığında ne kadar öder?

3.

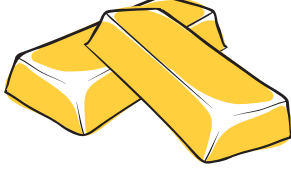


Kilogramı 9 TL olan peynirden 650 g; kilogramı 8 TL olan zeytinden 400 gram alan Fatih Bey ne kadar para öder?



KENDİMİZİ SINAYALIM

4.



Yatırım yapmak isteyen Ömer Bey gramı 92,2 TL den 500 gram altın alıyor.

İlerleyen zamanlarda paraya ihtiyacı olduğunda altınların 200 gramını 90,1 TL/g den, 300 gramını ise 93,7 TL/g den bozdurduğuna göre Ömer Bey'in bu yatırımındaki kâr-zarar durumu nedir?

5. 30 odalı bir oteldeki odaların bazıları 2 kişilik, bazıları da 3 kişiliktir.

Otel 79 kişilik olduğuna göre, 3 kişilik kaç oda vardır?

6. Dikdörtgen şeklindeki bir arsanın kısa kenarı $2a - 5$ metre; uzun kenarı ise $4a + 9$ metredir.

Tarlanın çevresinin en az 920 metre olabilmesi için a en az kaç m olmalıdır?

7. Bir şirket x liraya aldığı bir ürünü y liraya satmaktadır. Tamsayı olan x ve y arasında $y = 300 - 2x$ bağıntısı vardır.

Şirketin zarar etmemesi için, bu ürünü en fazla kaç liraya almalıdır?

8. Yaşları 5 ten büyük 3 kişinin 5 yıl sonraki yaşları toplamı 84 ise 5 sene önceki yaşları toplamı nedir?

9. Bir kızı ve bir oğlu olan Ayşe Hanım, kızı doğduğunda oğlu ile arasında, oğlunun yaşının üç katı kadar bir yaş farkı vardı.

Kızı 12 yaşına geldiğinde oğlu 20 yaşında olduğuna göre Ayşe Hanım oğlu doğduğunda kaç yaşındaydı?

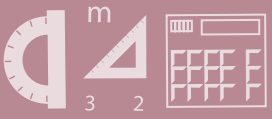
10. 2012 yılında yaşını soran Ali'ye matematik öğretmeni "şu anki yaşı doğum yılımın rakamları toplamı" cevabını veriyor.

Ali'nin matematik öğretmeni 2013 yılında kaç yaşındadır?

11. Kurduğu firmanın 20. yılını kutlayan Ali Bey 40 yaşındadır. Ali Bey 25 yaşındayken ilk çocuğu Emre dünyaya gelmiştir.

Firma 50. yılını kutladığında Emre kaç yaşında olacaktır?

12. Fatma Hanım aldığı 5 litre sütün $\frac{3}{5}$ 'ü ile yoğurt yapıp, yaptığı yoğurdun $\frac{1}{6}$ 'ini pastaya katmıştır. Fatma hanımın pastaya kattığı yoğurt miktarı nedir?



KENDİMİZİ SINAYALIM

13. Alican'ın sınıfının $\frac{3}{7}$ 'si erkek öğrenci, erkek öğrencilerin $\frac{1}{4}$ 'ü gözlüklüdür. Sınıf mevcudu kaç olabilir?

14. Nazan'ın boyu babasının boyunun $\frac{4}{5}$ 'ü kadardır. Nazan birkaç yıl sonra 16 cm daha uzamış, babasının boyu ise değişmemiştir. Boylarını karşılaştırdıklarında Nazan'ın boyunun babasının boyuna oranı $\frac{8}{9}$ 'olmuştur. Nazan'ın şimdiki boyu kaç cm dir?

15. Bir stadın seyirci kapasitesinin $\frac{1}{6}$ 'sı VIP, $\frac{2}{5}$ 'sı kale arkası geri kalan kısmı maraton kısmından oluşmaktadır. Maraton kısmı 13000 kişi olduğuna göre VIP ve kale arkası kısmına düşen seyirci sayısı kaçtır?

16. Bir gazete çıkardığı sayfa sayısının $\frac{1}{8}$ 'ini spor sayfasına ayırıp, spor sayfasının da $\frac{2}{3}$ 'sini futbol haberlerine ayırmaktadır. Bu gazete futbol dışındaki spor haberlerine 2 sayfa ayırdığına göre gazetenin sayfa sayısını bulunuz.

17. Seda odasının uzunluğunu 12 adım olarak ölçmüş ve babasından da odayı kendi adımlarıyla ölçmesini istemiştir. Babasının adımlarıyla oda 7 adım gelmiştir.

Seda'nın adımları babasının adımlarının $\frac{1}{3}$ 'ünden 15 cm fazla olduğuna göre, Seda'nın odasının uzunluğu kaç m'dir?

18. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ formülünü d'yi verecek şekilde düzenleyiniz.

19. Mahmut'un doğum gününe 25 bin dakika kalmıştır. Bu kaç gün, kaç saat, kaç dakika demektir?

20. Oyun arşivine sahip olmak isteyen Ali 1 TB (terabayt) kapasiteli harici bellek alıyor.

Bir oyun 2048 MB (megabayt) yer kaplıyorsa Ali harici belleğine kaç oyun doldurabilir?

(1 TB = 1024^2 MB)

21. Ahmet bir işi yalnız başına 10 günde, Veli 15 günde bitirmektedir. İkisi beraber işin yarısını kaç günde bitirir?



KENDİMİZİ SINAYALIM

22. Azmi usta bir evin $\frac{1}{3}$ 'ini 4 saatte boyamıştır. İşin erken bitmesini isteyen usta çalışma hızını 2 kat artırdığına göre işin tamamı kaç saatte bitmiştir?

23. Feza ile Ömer birlikte çalışıp bir işin $\frac{4}{9}$ 'unu 8 günde bitiriyorlar. Feza rahatsızlanıp işi bırakıyor, geri kalan işi Ömer 20 günde bitiriyor.

Ömer işin tamamını tek başına kaç günde bitirebilir?

24. Bir musluk bir havuzu 6 saatte dolduruyor.

Birim zamanda akan su miktarı %50 artarsa bu musluk boş havuzu kaç saatte doldurur?

25. Birim zamanda aynı miktarda su akıtan üç musluk bir havuzu 5 saatte dolduruyor. Musluklar açıldıktan 2 saat sonra musluklardan biri kapatılıyor. Diğer iki musluk havuz doluncaya kadar açık bırakılıyor.

Havuz toplam kaç saatte dolmuştur?

26. Bir yüzücü nehrin aktığı yöne doğru yüzünce dakikada 30 m, nehrin aktığı yönün tersi yönünde yüzünce 20 m yol almaktadır.

Yüzücü aynı hızla akıntısız bir suda yüzdüğünde dakikada kaç metre yol alır?

27. İki yerleşim yeri arasında yolcu taşımacılığı yapan bir otobüs yolun asfaltlama çalışması bitmiş kısımlarında saatte 90 km hızla, asfaltlanmamış kısımlarında ise saatte 60 km hızla gitmektedir. İki şehir arasındaki yolun $\frac{3}{4}$ 'ü asfaltlandığına göre, bu aracın yol boyunca ortalama hızı kaçtır?

28. Sinem ve Oğuzhan dairesel bir koşu pistinin etrafında aynı anda aynı noktadan zıt yönde koşmaya başlıyorlar. Sinem'in hızı 25 m/dk Oğuzhan'ın hızı ise 27 m/dk dır.

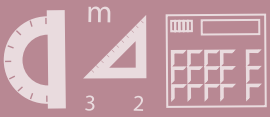
5 dakika sonra karşılaştıklarına göre, pistin çevresi kaç metredir?

29. Doğrusal bir cadde üzerinde oturan Leyla ile Ece telefonlaşarak buluşmaya karar verirler. Aynı anda evden çıkarak birbirlerine doğru yönlerini hiç değiştirmeden yürürler. Leyla 60 m/dk hızla, Ece ise 50 m/dk hızla yürümektedir.

Evlerinin arasındaki mesafe 1320 m olduğuna göre, Ece'nin evinden kaç metre uzakta karşılaşırlar?

30. Ersin evden parka bisikletiyle 18 km/sa hızla gitmiş, 9 km/sa hızla dönmüştür.

Gidiş dönüşteki ortalama hızı kaç km/sa olur?



KENDİMİZİ SINAYALIM

31. Üniversite öğrencisi olan Neslihan, iki GSM şirketinin mesaj için belirlediği fiyatları incelemiştir. İlk mesaj başına 41 kr, ikincisi ise aylık 1000 mesajlık paket için 8 TL şeklindedir.

Neslihan ikinci tarifeyi tercih ettiğine göre kârlı çıkması için aylık en az kaç mesaj atmalıdır?

32. Selçuk, telefonuyla gönderdiği mesaj başına yurtiçi için 37 Kr., yurtdışı için 55 Kr. ödemektedir.

Ay içinde gönderdiği 70 mesaj için 33,1 TL ödeyen Selçuk, mesajlardan kaçını yurtiçi yönlere kullanmıştır?

33. Bir gazete Ocak ayında 70 bin adet satmıştır. Sonraki her ay bir önceki ayın %10 fazlası kadar gazete satmıştır.

Bu gazetenin dört aylık değişim oranı nasıldır.

34. Türkiye'nin 2007 ve 2012 yıllarının nüfusu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| 2007 | 2012 |
|------------|------------|
| 70.586.259 | 75.627.384 |

Bu verilere göre bu yıllar arasında nüfustaki değişim oranını bulunuz.

Uygulama

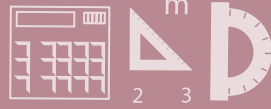
1.

| Dakika | Okuldan uzaklık (metre) |
|--------|-------------------------|
| 0 | 6000 |
| 1 | 5500 |
| 2 | 5000 |
| 3 | 4500 |
| 4 | 4000 |
| 5 | 3500 |
| 6 | 3000 |
| 7 | 2500 |
| 8 | 2000 |
| 9 | 1500 |
| 10 | 1000 |
| 11 | 500 |
| 12 | 0 |

Erol her gün okula servis ile gidip gelmektedir. Yukarıdaki tablo, Erol'un evden ayrıldığı andan itibaren geçen süre ile bu süreye karşılık okula olan uzaklığını göstermektedir.

Buna göre;

- Yukarıdaki tabloyu özetleyerek, zaman-okuldan uzaklık çizgi grafiğini oluşturunuz.
3. dakikadan 10. dakikaya okuldan uzaklıklarının değişim oranını hesaplayınız.
- Başlangıçtan 10. dakikaya okuldan uzaklıklarının değişim oranını hesaplayınız.



KENDİMİZİ SINAYALIM

2. Matematik dersinde bir karenin alanını öğrenen Tuğrul'dan, öğretmeni "kenar uzunlukları 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm ve 6 cm olan karelerin alanlarını bularak aşağıdaki gibi bir tablo oluşturmasını istemektedir.

| Karenin | | Bir üst satırdaki kare ile | | Değişim oranı |
|---------------------|--------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|-------------------|
| Kenar uzunluğu (cm) | Alanı (cm ²) | Kenar uzunlukları arasındaki değişim | Alanları arasındaki değişim | |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | 4 | 2 - 1 = 1 | 4 - 1 = 3 | $\frac{3}{1} = 3$ |
| 3 | 9 | 3 - 2 = 1 | | $\frac{5}{1} = 5$ |
| 4 | 16 | | | |
| 5 | 25 | 5 - 4 = 1 | | |
| 6 | 36 | | 36 - 25 = 11 | |
| 7 | 49 | | | |

Değişim ve değişim oranlarının hesaplandığı bu tablodaki boş bırakılan bazı hücreleri Tuğrul nasıl doldurması gerekir? Açıklayarak tabloyu doldurunuz.

3.

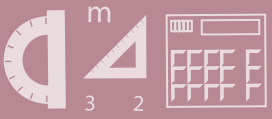


Ankara'dan, İngiltere'ye uçan Cengiz, uçuşla ilgili bilgilere yer verilen uçak içindeki ekranı incelemektedir. Ekrandaki bilgilerden yararlanarak

bir uçağın yüksekliğine karşılık, dışındaki sıcaklığı gösteren aşağıdaki tabloyu oluşturur. Ardından tabloya üç sütun daha eklemeye karar verir.

| Yükseklik (m) | Uçağın dışındaki sıcaklık (°C) | Yükseklikte meydana gelen değişim (m) | Sıcaklıkta meydana gelen değişim (°C) | Değişim oranı (°C/m) |
|---------------|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------|
| 1000 | 8,60 | | | |
| 1500 | 6,10 | 500 | -2,50 | -2,50/500 |
| 2300 | 2,1 | | | |
| 3400 | -3,4 | | | |
| 4000 | -6,4 | | | |

- a. Tablodaki son satır dışındaki boş hücrelere uygun değerleri giriniz.
- b. Elde ettiğiniz değişim oranları arasında nasıl bir ilişki vardır?



Problemler

KENDİMİZİ SINAYALIM

4. Aktaş ailesi bir seyahat için Ankara'daki evlerinden arabalarıyla saat 07.00'de yola çıkıyorlar. 160 km'lik yolu 2 saatte alıp kahvaltı molası veriyorlar. 1 saat mola verdikten sonra 2 saat boyunca 180 km yol daha alıyorlar. Yol çalışmasından dolayı hızlarını düşürerek sonraki 90 km'lik kısmını 1,5 saatte alıyorlar. Yarım saat ihtiyaç molası verdikten sonra yolculuklarının geriye kalan 80 km'sini de 30 dakika alarak yazlıklarına varıyorlar.

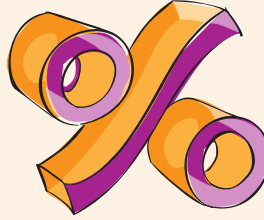
- Yolculukları saat kaçta tamamlanmıştır?
- Ne kadar yol almışlardır?
- Kahvaltı için durduklarında saat kaçtı?
- İkinci molalarını saat kaçta verdiler?
- Tüm yolculuk boyunca aracın ortalama hızı kaçtır?
- Yolculuğa ait yol-zaman grafiğini çiziniz.

2.4.3 Yüzde Kavramı ve Uygulamaları

Başlarken

Alışverişe çıktığınızda vitrinlerde indirimler ve kampanyalar gözünüze çarpar. Bu indirimler ve kampanyalar gösterilirken yüzde işareti (%) kullanılır.

Yüzde kavramını; oranları karşılaştırmada, alışverişte indirim miktarını hesaplamada, faiz hesaplamalarında sıkça kullanırız.



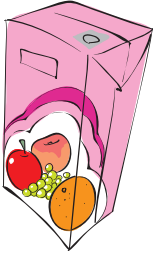
Neler Öğreneceğiz?

- Yüzde kavramını indirim, kâr, zarar, faiz ve karışım gibi problem durumlarında kullanma

Anahtar Terimler

- Yüzde
- Kâr
- Zarar
- Faiz
- İndirim

Örnek 1



Emre marketten 1,5 litrelik pakette satılan %100 meyve sularından imal edilmiş karışık meyve suyu alıyor. Emre paketin içeriğini incelediğinde elma suyu oranı %65, portakal suyu oranı %30, üzüm suyu oranı %2, şeftali suyu oranı %3 yazdığını görüyor. Bu karışık meyve suyunun içindeki elma, portakal, üzüm ve şeftali sularının kaçar mililitre olduklarını merak eden Emre'ye yardım edelim.

Çözüm

Problemde 1,5 L karışık meyve suyunun içindeki çeşitli meyve sularının oranları verilmiştir.

%65 elma %30 portakal

%2 üzüm %3 şeftali

Bu oranlara göre karışık meyve suyunun içinde kaç mL elma suyu, portakal suyu, üzüm suyu, şeftali suyu olduğu istenmektedir.

Problemde cevap mililitre cinsinden istendiği için 1,5 litreyi mililitre cinsinden yazıp verilen yüzde hesaplamalarını yapabiliriz. 1 L = 1000 mL olduğu için 1,5 L = 1500 mL dir.

Bu durumda Emre'nin aldığı meyve suyunun içeriğindeki

$$\text{Elma suyu miktarı} = 1500 \cdot \frac{65}{100} = 975 \text{ mL}$$

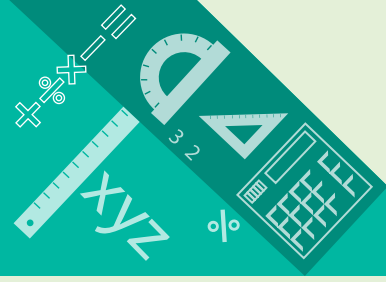
$$\text{Portakal suyu miktarı} = 1500 \cdot \frac{30}{100} = 450 \text{ mL}$$

$$\text{Üzüm suyu miktarı} = 1500 \cdot \frac{2}{100} = 30 \text{ mL}$$

$$\text{Şeftali suyu miktarı} = 1500 \cdot \frac{3}{100} = 45 \text{ mL bulunur.}$$

Sembol ve Gösterimler

- %

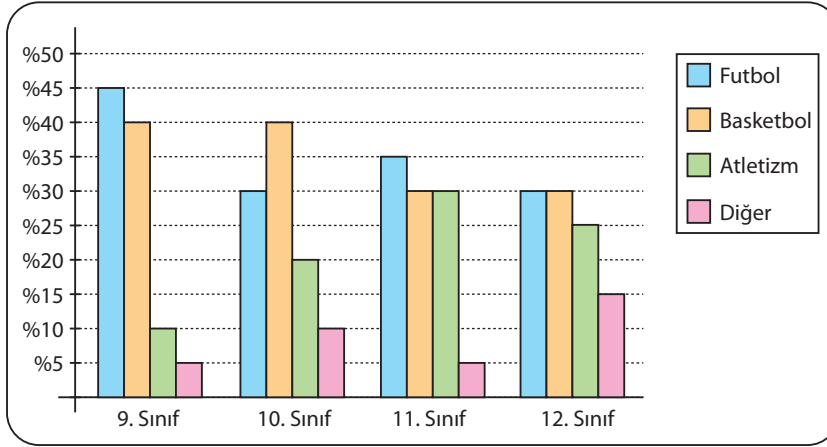


MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasının amacı yüzde kavramı ile ilgili uygulama yapmaktır.

Spor

Bir okuldaki öğrencilerin en çok ilgilendikleri spor dalları ile ilgili yapılan bir araştırmanın sonuçları aşağıdaki sütun grafiğinde verilmiştir.



Aşağıdaki tabloda öğrenci sayısı verilen bu lisede yukarıdaki araştırma sonuçlarına göre;

| Sınıf | Öğrenci sayısı | Futbol | Basketbol | Atletizm |
|-----------|----------------|--------|-----------|----------|
| 9. sınıf | 200 | | | |
| 10. sınıf | | 54 | | |
| 11. sınıf | 300 | | | |
| 12. sınıf | | | 48 | |
| Toplam | 840 | | | |

- Yukarıda verilen grafikten yararlanarak tablodaki ilgili boşluklara hangi sayıların geleceğini bulunuz.
- Bu okulda futbol ile ilgilenen tüm öğrencilerin yüzdesini hesaplayınız.
- Bu okulda basketbol ile ilgilenen tüm öğrencilerin yüzdesini hesaplayınız.
- Bu okulda atletizm ile ilgilenen tüm öğrencilerin yüzdesini hesaplayınız.

Örnek 2



Can ve Melike çifti evde kullanmak üzere bir dizüstü bilgisayar almayı düşünmektedir. Beğendikleri ürünün satış etiketinde "1100 TL + KDV" yazmaktadır. Elektronik eşyalarda Katma Değer Vergisi (KDV) oranı %18 olduğuna göre bu bilgisayarın KDV dahil satış fiyatını bulalım.

Çözüm

Bilgisayarın satış fiyatının 1100 TL ve uygulanan KDV oranının %18 olduğu belirtilmiş, bilgisayar için toplam ödenecek miktar istenmektedir.

KDV eklenmemiş satış fiyatı üzerinden %18 oranında KDV hesaplanır ve etiket fiyatına eklenerek ödenmesi gereken ücret bulunur.

$$1100 \cdot \frac{18}{100} = 198 \text{ TL (KDV tutarı) ,}$$

$$1100 + 198 = 1298 \text{ TL (ürünün KDV dahil satış fiyatı)}$$

Örnek 3



Şenol Bey 2013 yılında trafikte kırmızı ışıkta durmamış ve 166 TL trafik cezası yazılmıştır. Cezasını ilk 15 gün içinde öderse cezada %25 indirim yapılacaktır. İndirimli ödeme süresinde ceza ödenirse Şenol Bey'in ne kadar ceza ödeyeceğini bulalım.

Çözüm

Şenol Bey'e kesilen ceza miktarı 166 TL dir. Ancak erken ödeme yapılırsa ceza %25 indirimli ödenecektir. Şenol Bey'in ödemesi gereken ceza miktarının hepsini %100 olarak alırsak % 25 lik erken ödeme indirimiyle cezanın % 75 i ödenir. Bu durumda 166 TL nin %75'ini bulursak ödenen miktarı bulmuş oluruz.

O halde ödenmesi gereken tutar $166 \cdot \frac{75}{100} = 124,5 \text{ TL}$ bulunur.

Bu problemi ayrıca %25 lik erken ödeme indirimini hesaplayıp 166 TL'den çıkararak da çözebiliriz.

$$166 \cdot \frac{25}{100} = 41,5 \text{ TL (erken ödeme indirim tutarı)}$$

$$166 - 41,5 = 124,5 \text{ TL (ödeyeceği toplam miktar)}$$

Anahtar Bilgi



Alışverişte aldığımız ürünlerin fiyatları belirlenirken KDV (Katma Değer vergisi) oranlarıyla birlikte yapılır. KDV oranı farklı ürün grupları için %1, %8, %18 olarak uygulanmaktadır. Ürünün normal satış fiyatı üzerine KDV değeri de eklenerek ürünün etiket fiyatı belirlenir. Ülkemizde satılan her ürün grubu için uygulanan KDV oranlarını www.gib.gov.tr adresinden inceleyebilirsiniz.

Anahtar Bilgi



KDV oranı %18 olan bir ürünün satış fiyatını, ürünün KDV'siz fiyatını 1,18 ile çarparak bulabilirsiniz.

İnceleyelim

Bir ürünün etiket fiyatı üzerinden önce %15 indirim sonra indirimli fiyat üzerinden % 8 indirim yapıldığında ürünün etiket fiyatı üzerinden %23 indirim yapılmış olur mu?

Örnek 4



Cebinde 48 TL si bulunan Ayşe giyim mağazasında bir tişört beğeniyor. Üzerinde 60 TL yazan tişörtün etiket fiyatlarında %15 indirim olduğunu ayrıca ayın son gününe özel, indirimli fiyat üzerinden %8 daha indirim yapılacağını öğreniyor. Yapılan indirimler sonucu Ayşe'nin bu tişörtü almaya parasının yeterli olup olmadığını bulalım.

Çözüm

Tişörtün etiket fiyatı 60 TL dir. Bu miktar üzerinden önce %15 indirim yapılacaktır. Bu indirimli fiyat üzerinden de tekrar %8 indirim yapılacaktır.

Etiket fiyatı üzerinden %15 indirim yapılırsa %85 i ödenir.

$$60 \text{ TL nin } \%85 \text{ i } 60 \cdot \frac{85}{100} = 51 \text{ TL dir.}$$

51 TL üzerinden tekrar %8 indirim yapılırsa miktarın %92 si ödenmelidir.

$$51 \text{ TL'nin } \%92 \text{ si; } 51 \cdot \frac{92}{100} = 46,92 \text{ TL'dir.}$$

Bu durumda 50 TL si bulunan Ayşe'nin tişörtü almak için yeterli parası bulunmaktadır.

Tişörtün indirimli satış fiyatını tek adımda $60 \cdot \frac{85}{100} \cdot \frac{92}{100} = 46,92 \text{ TL}$ şeklinde de çözebiliriz.

Örnek 5



Ayşen Hanım bir mağazada beğendiği perde takımının fiyatını pazarlık yaparak 1500 TL den 1290 TL ye indirmiştir. Ayşen Hanımın pazarlık sonucu ilk fiyatı üzerinden yüzde kaç indirim aldığını bulalım.

Çözüm

Perde takımının ilk fiyatı 1500 TL, pazarlık sonucu 1290 TL'ye indirilmiştir.

Bizden istenen "bu iki fiyat arasındaki fark, 1500 TL nin yüzde kaçıdır?" sorusunun cevabıdır.

$$1500 - 1290 = 210 \text{ TL}$$

Bu miktar 1500 TL nin % x i olsun. Bu durumda yapılan indirim oranı

$$1500 \cdot \frac{x}{100} = 210 \text{ ise } x = 210 \cdot \frac{100}{1500} = 14 \text{ olarak bulunur.}$$

Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için 1500 TL'nin %14'ü hesaplanırsa;

$$1500 \cdot \frac{14}{100} = 210 \text{ TL olarak bulunur.}$$

Bu değer 1500 TL'den çıkarılırsa $1500 - 210 = 1290 \text{ TL}$ olacaktır. O halde bulduğumuz sonuç doğrudur.

Örnek 6



Bayan çantaları satan bir mağaza ürünlerin maliyeti üzerine %30 kâr koyarak etiket fiyatını belirlemektedir. Sezon sonu ise etiket fiyatı üzerinden %30 indirim yaparak satış yapmaktadır. Sezon sonunda maliyetinden 18 TL daha düşük fiyata satılan bir çantanın maliyetini belirleyelim.

Çözüm

Mağazada her ürün maliyetine %30 kâr eklenerek satılmaktadır. Sezon sonrası ise etiket fiyatından %30 indirim yapılmaktadır. Sezon sonunda bir çantanın maliyetinden 18 TL daha ucuza satıldığı verilmiştir.

Çantanın maliyetine x TL diyelim. Bu durumda çantanın %30 kârla sezondaki satışı

$$x + x \cdot \frac{30}{100} = 1,3 \cdot x \text{ olur.}$$

Sezon sonunda bu fiyat üzerinde %30 indirim yapıldığı için indirimli satış fiyatı

$$1,3x - 1,3x \cdot \frac{30}{100} = 0,91x \text{ TL dir.}$$

Maliyeti ile sezon sonundaki fiyatı arasındaki fark

$$x - 0,91x = 0,09x \text{ bulunur.}$$

Bu fark ise 18 TL olarak verilmiştir. O halde maliyet farkı

$$0,09x = 18 \text{ ise } x = 200 \text{ TL olarak bulunur.}$$

Sonucun doğruluğu kontrol etmek için 200 sayısına %30 unu ekleyelim,

$$200 + 200 \cdot \frac{30}{100} = 260 \text{ TL}$$

Daha sonra bulunan sayının %30' unu kendisinden çıkarırsak;

$$260 - 260 \cdot \frac{30}{100} = 182 \text{ TL bulunur.}$$

Bu miktarı maliyetten çıkardığımızda $200 - 182 = 18$ TL olacaktır.

İnceleyelim

Bir sayıyı önce %20 azaltıp sonra %10 artırarak veya önce %20 artırıp sonra %10 azaltınca aynı sayı elde edilir mi?

Örnek 7



Beyaz eşya mağazası sahibi Ahmet Bey dükkanındaki buzdolabı ve çamaşır makinesinin etiket fiyatını, KDV oranını ekleyip sonra belirli bir indirim yaparak belirlemektedir. Aşağıdaki tabloda buzdolabı ve çamaşır makinesine ait ilk fiyatı, KDV oranı ve indirim oranları verilmiştir.

| | İlk fiyat | KDV oranı | İndirim oranı | Etiket Fiyatı |
|------------------|-----------|-----------|---------------|---------------|
| Buzdolabı | 1860 | %18 | %5 | ? |
| Çamaşır Makinesi | 1320 | %18 | %10 | ? |

Tablodaki verilere göre çamaşır makinesinin ve buzdolabının etiket fiyatını hesaplayalım.

Çözüm

Problemde ürünlerin ilk fiyatları, KDV ve indirim oranları verilmiş ve etiket fiyatları istenmektedir.

Etiket fiyatını bulabilmek için; önce ilk fiyatlarına KDV eklenerek indirim uygulanmalıdır.

Önce buzdolabının etiket fiyatını hesaplayalım.

$$1860 \cdot \frac{18}{100} = 334,8 \quad (\text{Buzdolabının KDV oranı})$$

$$1860 + 334,8 = 2194,8 \quad (\text{KDV eklenmiş fiyatı})$$

$$2194,8 \cdot \frac{5}{100} = 109,74 \quad (\text{Uygulanan indirim fiyatı})$$

$$2194,8 - 109,74 = 2085,06 \quad (\text{Etiket fiyatı})$$

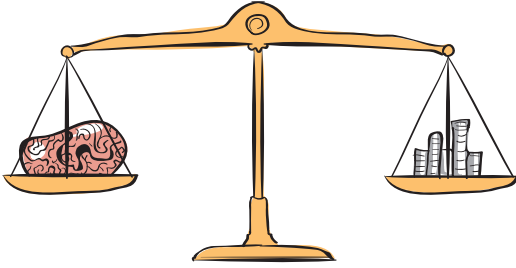
Çamaşır makinesinin etiket fiyatı ise;

$$1320 \cdot \frac{18}{100} = 237,6$$

$$1320 + 237,6 = 1557,6$$

$$1557,6 - 1557,6 \cdot \frac{10}{100} = 1401,84 \text{ TL bulunur.}$$

Örnek 8



Bir şirket, bünyesinde çalıştırdığı mühendislerin maaşlarına zam yapacaktır. Bunun için iki farklı seçenek sunmaktadır. Birinci seçeneğe göre aylık 250 TL; ikinci seçeneğe göre ise aylığın %12,5'i kadar zam önerilmektedir. Bu durum karşısında aylık maaşı a TL

olan bir mühendis 250 TL, aylık maaşı b TL olan bir mühendis de % 12,5'lik zammı tercih etmiştir. Buna göre a ve b değerlerini karşılaştıralım.

Çözüm

Aylığı a TL olan mühendis 250 TL'lik zammı tercih ettiğine göre 250 TL, a TL'nin %12,5'undan büyüktür. O halde

$$250 > a \cdot \frac{12,5}{100} \text{ ise } 250 \cdot \frac{100}{12,5} > a \text{ olur.}$$

Eşitsizliği düzenlediğimizde $2000 > a$ bulunur.

Aylığı b TL olan mühendis de %12,5'lik zammı tercih ettiğine göre b TL'nin %12,5'u, 250 TL'den büyük olmalıdır.

O halde

$$b \cdot \frac{12,5}{100} > 250 \text{ ise } b > 250 \cdot \frac{100}{12,5} \text{ olur.}$$

Eşitsizliği düzenlediğimizde $b > 2000$ TL bulunur.

Bu durumda a sayısı 2000 den küçük, b sayısı da 2000 büyük olduğundan

$a < 2000 < b$ bulunur.

Yukarıdaki şirket, ikinci seçenekteki zam oranı %10 olarak değiştirdiğinde bu iki mühendis yine aynı tercihlerde bulunuyorlarsa maaşı a TL olan mühendisin en çok kaç TL maaşı olduğunu da benzer bir yaklaşımla siz hesaplayınız.

Örnek 9



Toptan balık tüccarı olan Emir Bey yurtdışından aldığı 300 tonluk hamsi siparişini eşit şekilde, soğutma sistemi bulunan 12 tıra yükleyip göndermiştir. Her bir aracın taşıma maliyeti 3 bin TL'dir. Yolda araçlardan birinin soğutma sistemi iyi çalışmadığından hamsiler bozulmuştur. Hamsinin tonunu 5 bin TL ye alan ve 6 bin TL ye satan Emir Bey'in bu alışveriş sonucunda yüzde kaç kâr veya zarar ettiğini bulalım.

Çözüm

Hamsinin tonu 5 bin TL ye alınıp, 6 bin TL'ye satılmıştır. 300 ton balık 12 araca eşit bölündüğünde her birine yüklenen balık miktarının 25 ton olduğunu buluruz. Araçlardan birindeki balıklar bozulduğuna göre, 25 ton balık bozulmuştur. Alışverişteki kâr veya zarar durumunu bulabilmemiz için toplam gider ve toplam geliri hesaplamamız gerekir. Gelir-gider farkı bulunduğunda fark pozitif ise kâr, negatif ise zarar edilmiştir.

Alışverişteki gideri hesaplarken aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

| Gider çeşidi | Miktar | Birim maliyet | Gider |
|--------------|---------|---------------|-----------------------------------|
| Hamsi alış | 300 ton | 5 000 TL | $300 \cdot 5000 = 1\,500\,000$ TL |
| Araç | 12 adet | 3 000 TL | $12 \cdot 3000 = 36\,000$ TL |

Tabloda da görüldüğü gibi 300 tonluk hamsinin alış ve taşıma giderleri toplamı: $1\,500\,000 + 36\,000 = 1\,536\,000$ TL olmuştur.

Taşıma sırasında bir araçtaki hamsilerin tamamı bozulduğundan satış için $300 - 25 = 275$ ton hamsi kalır. Bunun satışından elde edilecek geliri gösteren tabloyu oluşturalım.

| Gelir çeşidi | Miktar | Satış fiyatı | Gelir |
|--------------|---------|--------------|-------------------------------------|
| Hamsi satış | 275 ton | 6 bin TL/ton | $275 \cdot 6\,000 = 1\,650\,000$ TL |

Hamsi satışından elde edilen gelir ve gider arasındaki fark;

$$1\,650\,000 - 1\,536\,000 = 114\,000 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda Emir Bey bu ticaretten 114.000 TL kâr elde etmiştir. Yüzde kaç kâr edildiğini bulmak için 114.000'in toplam maliyet olan 1.536.000 TL'nin yüzde kaç olduğunu bulmalıyız.

$$\frac{114\,000}{1\,536\,000} = \frac{x}{100} \text{ ise } x \approx 7,42$$

Sonuç olarak Emir bey bu ticaretten yaklaşık olarak % 7,42 kâr etmiştir.

Tırlardan ikisi bozulsaydı yüzde kaç zarar edeceğini tahmin ediniz. Tahmininizi çözümle karşılaştırınız.

Örnek 10



Erhan, Matematik dersinin birinci sınavında 75, ikinci sınavında 60 ve üçüncü sınavından da 90 almıştır. Erhan'ın sınavları arasındaki değişimi yüzde olarak hesaplayalım.

Çözüm

Erhan'ın birinci sınav notu 75, ikinci sınav notu 60 ve üçüncü sınav notu ise 90 olarak verilmiştir. Birinci sınav notu 75 den ikinci sınav notu 60 a; ikinci sınav notu 60 dan üçüncü sınav notu 90 a ve son olarak birinci sınav notu 75 den; üçüncü sınav notu 90 a gerçekleşen değişim oranları istenmektedir.

1. sınavdan 2. sınava;

Değişim miktarı_(1 den 2 ye) = $60 - 75 = -15$ dir. Bu değişimi yüzde olarak ifade etmek istersek;

$$\text{Değişim}_{(1 \text{ den } 2 \text{ ye})} = \frac{\text{Değişim miktarı}}{\text{Başlangıç miktarı}} = \frac{-15}{75} = \frac{-1}{5} = \frac{-20}{100}$$

Yani 1. Sınavdan 2. Sınava Erhan'ın notu %20 azalmıştır.

2. sınavdan 3. sınava;

Değişim miktarı_(2 den 3 e) = $90 - 60 = 30$ dir. Bu değişimi yüzde olarak ifade etmek istersek;

$$\text{Değişim}_{(2 \text{ den } 3 \text{ e})} = \frac{\text{Değişim miktarı}}{\text{Başlangıç miktarı}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}$$

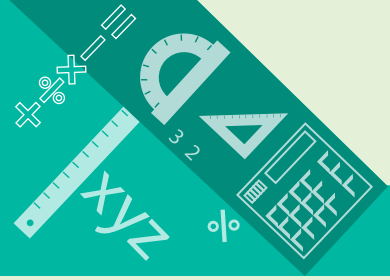
Yani 1. Sınavdan 2. Sınava Erhan'ın notu %50 artmıştır.

1. sınavdan 3. sınava;

Değişim miktarı_(1 den 3 e) = $90 - 75 = 15$ dir. Bu değişimi yüzde olarak ifade etmek istersek;

$$\text{Değişim}_{(1 \text{ den } 3 \text{ e})} = \frac{\text{Değişim miktarı}}{\text{Başlangıç miktarı}} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$$

Yani 1. Sınavdan 3. Sınava Erhan'ın notu %20 artmıştır.



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasının amacı bankaya yatırılan belli bir miktar paranın farklı seçeneklere göre faiz getirilerinin nasıl hesaplanacağını gösterilmesidir.

Araç-Gereçler: Bilgisayar ve elektronik tablolama yazılımı

Hangi Yöntem Daha Kârlı?

Sencer ve Nida aylık %0,43 faizle bir bankaya 10 000'er lira yatırıyorlar. Sencer her ay hesabına eklenen faizi çekerken, Nida 3 yıl boyunca hesabında herhangi bir işlem gerçekleştiriyor. Üç yıl sonunda her ikisi de hesaplarındaki tüm parayı çekiyorlar. Bu durumda üç yıl sonunda elde edecekleri faiz oranlarını bir elektronik tablolama yazılımı yardımıyla elde edelim.

Bir elektronik tablolama yazılımı kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.



Adım 1 ►

1. Satırdaki ilgili hücreleri resimdeki gibi doldurunuz.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|----------------------|---------------------|-----------|--------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1 | Sencer'in Ana Parası | Nida'nın Ana Parası | Süre (Ay) | Aylık Faiz Oranı (%0,43) | Sencer'in Aylık Faiz Getirisi | Nida'nın Aylık Faiz Getirisi |

Adım 2 ►

Sencer ve Nida'nın aylık faiz getirisini belirlemek için E2 ve F2 hücresine sırasıyla $=A2*D2$ ve $=B2*D2$ yazınız. Diğer hücelere resimde gösterilen sayısal değerleri giriniz.

| | A | B | C | D |
|---|----------------------|---------------------|-----------|--------------------------|
| 1 | Sencer'in Ana Parası | Nida'nın Ana Parası | Süre (Ay) | Aylık Faiz Oranı (%0,43) |
| 2 | 10.000,00 TL | 10.000,00 TL | 1 | 0,00430 |

Adım 3 ►

Nida'nın o aya ait faiz getirisiyle artan anaparasını belirlemek için B3 hücresine $= B2 + F2$ yazınız.

Adım 4 ►

- Sencer'in anaparasını değiştirmeden A2-A37 hücrelerinin içeriğini 10 000 TL olacak şekilde çoğaltma işlemi yapınız.

- Nida'nın değişen anaparasını belirlemek için B3 hücresine tıklayınız. Oluşan dikdörtgenin sağ alt köşesinden tutarak B37 hücresine kadar sürükleyiniz.
- C3 hücresine 2 yazınız. C2 ve C3 hücrelerini birlikte seçtikten sonra oluşan dikdörtgenin sağ alt köşesinden tutarak C37 hücresine kadar sürükleyiniz.
- D2-D37 hücrelerinin içeriğini 0,0043 olacak şekilde çoğaltma işlemi yapınız.
- E2 hücresine tıklayınız. Oluşan dikdörtgenin sağ alt köşesinden tutarak E37 hücresine kadar sürükleyiniz.
- Nida'nın değişen faiz getirisini belirlemek için F2 hücresine tıklayınız. Oluşan dikdörtgenin sağ alt köşesindeki kareyi tutarak F37 hücresine kadar sürükleyiniz.
- Bu adımlar sonucunda aşağıdaki soruları cevaplayınız.
 - a. Sencer'in toplam faiz getirisini hesaplayınız.
 - b. Nida'nın toplam faiz getirisini hesaplayınız.
 - c. Sencer, her üç ayda bir hesabına eklenen faizi çekseydi (a) ve (b) seçeneklerindeki sorular için cevabınız değişir miydi? Açıklayınız?

Örnek 11

1800 TL kredi kartı borcu olan Alpay Bey, borcunu bir defada ödeyeme mektedir. Bu nedenle Alpay Bey her ay borcunun %25'ini ödeyecek, geri kalan borcuna da aylık %2 faiz uygulanacaktır. Buna göre (kartı tekrar kullanmamak şartıyla) kaç ay sonra Alpay Beyin borcunun 1000 TL'nin altına düşeceğini bulalım.



Çözüm

1800 TL borcun her ay %25'i ödenecek, geri kalan miktara aylık %2 faiz uygulanacaktır. Kaç ay sonra borcunun 1000 TL'nin altına düşeceği sorulmaktadır.

Her ay 1800 TL'nin %25'i düşerse geriye %75 kalır. Bu durumda ilk ay için 1800 TL'nin %75'i alınır, bulunan değere %2 eklenir. Yani bulunan değer, 1,02 ile çarpılır. Bulduğumuz değer 1000 TL'nin altına düşene kadar devam eder.

Çözümü tablo üzerinde gösterelim.

| | Toplam Borç | Faizle birlikte toplam borç | Ödenen kısım | Kalan kısım |
|--------|-------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| İlk ay | 1800 | 1800 | $1800 \cdot \%25 = 450$ | $1800 \cdot \%75 = 1350$ |
| 2. ay | 1350 | $1350 \cdot \%102 = 1377$ | $1377 \cdot \%25 = 344,25$ | $1377 \cdot \%75 = 1032,75$ |
| 3. ay | 1032,75 | $1032,75 \cdot \%102 = 1053,405$ | $1053,405 \cdot \%25 = 263,35125$ | $1003 \cdot \%75 = 790,05375$ |

Buna göre uygulanan ödeme planına göre Alpay Bey'in kredi kartı borcu 3. ay sonunda 1000 TL'nin altına düşmektedir.

Örnek 12



Bir banka, mevduat hesaplarına yıllık %6 faiz uygulamaktadır. Bu bankaya 18.000 TL para yatıran birinin 16 ay sonra ne kadar faiz getirisi alacağını bulalım.

Çözüm

Yıllık %6 faizle bir bankaya yatırılan 18000 TL'nin 16 ay sonraki faiz getirisi sorulmaktadır. Yıllık %6 olan faiz oranını 12'ye bölerek aylık faiz oranını bulabiliriz. Daha sonra anapara-yı aylık faiz yüzdesi ile çarparak aylık faiz miktarını ve son olarak da bu değeri 16 ile çarparak toplam faiz getirisini buluruz.

$$\frac{\%6}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005 = \frac{5}{1000} = \%0,5 \quad (\text{aylık faiz oranı})$$

$$18.000 \cdot \frac{0,5}{100} = 90 \text{ TL} \quad (\text{aylık faiz getirisi})$$

Bu durumda 16 ay için faiz getirisi $90 \cdot 16 = 1440$ TL bulunur.

18.000 TL'nin yıllık %6 faiz oranıyla 16 aylık getirisi 1440 TL'dir.

İnceleyelim

1000 TL, yıllık %20 faiz oranı ile;

- 1 yıl süreyle ne kadar faiz getirir?
- 12 ay süreyle ne kadar faiz getirir?
- 360 gün süreyle ne kadar faiz getirir?

Sorularını yandaki ifadeleri kullanarak hesaplayınız ve karşılaştırma yapınız.

Yıllık, Aylık ve Günlük Faiz

Bankaya yatırılan anapara: A, faiz oranı: n, zamanı ise t ile gösterirsek;

A TL'nin yıllık %n faizle,

$$t \text{ yılda getireceği faiz, } F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot t$$

$$t \text{ ayda getireceği faiz, } F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot \frac{t}{12}$$

$$t \text{ günde getireceği faiz, } F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot \frac{t}{360}$$

ifadeleriyle hesaplarız.

Örnek 13

Sinan parasını yıllık %20'den 3 yıllığına faize yatırıyor. Eğer parasını % 40'tan 5 yıllığına faize yatırsaydı 280 TL daha fazla para alacaktı. Buna göre Sinan'ın bankaya yatırdığı parayı hesaplayalım.

Çözüm

Sinan'ın bankaya yatırdığı anaparaya A diyelim. Bu durumda yıllık %20 faiz oranıyla 3 yıllığına ve yıllık %40 faiz oranıyla 5 yıllığına bankaya yatırıldığında elde edeceği faiz getirilerinin hesaplanması gerekmektedir.

$$A \cdot \frac{20}{100} \cdot 3 = \frac{3A}{5} \quad (\%20 \text{ faiz oranıyla 3 yıllık getiri})$$

$$A \cdot \frac{40}{100} \cdot 5 = 2A \quad (\%40 \text{ faiz oranıyla 5 yıllık getiri})$$

Elde edilen faiz getiri değerleri arasındaki fark 280 TL olduğuna göre;

$$2A - \frac{3A}{5} = 280 \text{ ise } \frac{7A}{5} = 280$$

A = 200 TL (bankaya yatırılan ana para) olarak hesaplarız.

Örnek 14



Salih biriktirdiği parasını bir bankaya yatırmaya karar verir. Bu nedenle parasının %20'sini yıllık %40 faizle 3 ay, kalan parasını ise yıllık %60 faizle 8 ay süre için bir bankaya yatırır. Bu süreler sonunda Salih, bankadan anapara ve faiz getirisi ile birlikte toplam 6 700 TL alır. Buna göre Salih'in %60 faizle bankaya ne kadar para yatırmış olduğunu hesaplayalım.

Çözüm

Salih, parasının bir miktarını 3 ay, bir miktarını ise 8 ay süreyle bankaya yatırmıştır.

Paranın %20'si, $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ oranı olduğundan paranın bütününe 5A TL diyebiliriz.

Bu durumda paranın % 20'si $5A \cdot \frac{20}{100} = A$ TL olur. Kalan parası ise 4A TL olur.

Bankaya yatırıldığında elde edilecek faiz getirileri ise;

$$A \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{3}{12} = \frac{A}{10} \quad (\text{paranın \%20'sinin \%40 faizle 3 ay sonunda elde edilen faiz getirisi})$$

$$4A \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{8}{12} = \frac{8A}{5} \quad (\text{paranın \%80'sinin \%60 faizle 8 ay sonunda elde edilen faiz getirisi})$$

ifadeleriyle elde ederiz. Dolayısıyla anaparayla faiz getirisinin toplamını veren eşitlik;

$$5A + \frac{A}{10} + \frac{8A}{5} = 6700 \text{ ise } \frac{67A}{10} = 6700 \text{ ise } A = 1000 \text{ TL olur.}$$

Anapara ise $5 \cdot A = 5.000$ TL'dir. Problemden %60 faizle bankaya yatırılan para sorulduğundan $4 \cdot A = 4.000$ TL olarak hesaplanır.

İnceleyelim

Örnek 15'teki karışımın kilogram fiyatı birinci tip paketin kilogram fiyatına mı daha yakın yoksa ikinci tip paketin kilogram fiyatına mı daha yakın olacaktır? Neden?

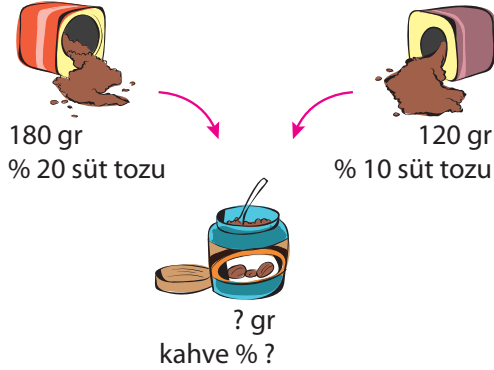
Örnek 15



Gökhan marketten iki farklı paket kahve alıyor. Birinci paket 180 gram olup %20 oranında süt tozu, ikinci paket 120 gram olup %10 oranında süt tozu içermektedir. Gökhan eve geldiğinde aldığı kahveleri bir kavanoza boşaltıp karıştırıyor. Yeni karışımın süt tozu oranını yüzde olarak hesaplayalım.

Çözüm

Problem iki farklı kahve çeşidinin karışımından bahsetmektedir. Karışımı oluşturan kahvelerdeki süt tozu oranı verilmiş olup bizden istenen yeni karışımındaki süt tozu oranıdır. Problemdaki verileri şekil olarak gösterelim.



Problemden iki kahve çeşidinin karıştırılmasıyla oluşan toplam kahve ve süt tozu miktarlarını bulabiliriz. Daha sonra ise süt tozunun toplam karışımındaki oranını hesaplayarak sonuca ulaşmış oluruz.

$$180 + 120 = 300 \text{ g (karışımındaki toplam miktar)}$$

$$180 \cdot \frac{20}{100} = 36 \text{ g (180 g'lık kahvenin içindeki süt tozu miktarı)}$$

$$120 \cdot \frac{10}{100} = 12 \text{ g (120 g'lık kahvenin içindeki süt tozu miktarı)}$$

$$36 + 12 = 48 \text{ g (karışımındaki toplam süt tozu miktarı)}$$

300 gram karışımın 48 gramı süt tozu olduğuna göre karışımındaki yüzdesi x olsun

$$\text{Bu durumda } 300 \cdot \frac{x}{100} = 48 \text{ ise } x = 16 \text{ bulunur.}$$

Yani süt tozunun karışımındaki oranı %16 olur.

Örnek 16



Bir kimyacı bilimsel bir çalışma için %60'lık asit çözeltisinden 15 litre hazırlamak istemektedir. Ancak depoda sadece %40'lık ve %70'lik asit çözeltileri bulunmaktadır. İstenilen oranda çözelti elde etmek için her bir asit çözeltisinden ne kadar alması gerektiğini bulalım.

Çözüm

15 litre çözeltide %60 oranında asit olması için bu çözeltinin içinde $15 \cdot \frac{60}{100} = 9$ L asit olması gerekmektedir. Her iki çözeltiden de eşit miktarda alındığını varsayalım. Bu durumda aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

| Karışım | Miktarı (L) | Asit Oranı | Asit Miktarı (L) |
|-------------------------------|-------------|------------|------------------------|
| 1. karışım | 7,5 | %40 | $7,5 \cdot 0,4 = 3$ |
| 2. karışım | 7,5 | %70 | $7,5 \cdot 0,7 = 5,25$ |
| Yeni karışımdaki asit miktarı | | | 8,25 |

İstenilen 15 litrelik yeni karışımda asit miktarının 9 litre olması gerekirken 8,25 litre elde edilmiş oldu. Dolayısıyla 9 litre asit elde etmemiz için asit oranı yüksek karışımdan daha fazla alınması gerekir. Problemi denklem kurarak çözmeye çalışalım.

%40'lık çözeltideki asit miktarı x litre ile gösterildiğinde %70'lik çözeltideki asit miktarı $15 - x$ litre olacaktır. Bu durumda aşağıdaki tabloyu dolduralım.

| Karışım | Asit Oranı | Miktarı (L) | Asit Miktarı (L) |
|-----------------|------------|-------------|--|
| Birinci karışım | %40 | x | $\frac{40}{100} x = 0,4x$ |
| İkinci karışım | %70 | $15 - x$ | $\frac{70}{100} (15 - x) = 10,5 - 0,7 \cdot x$ |
| Yeni karışım | %60 | 15 | $\frac{60}{100} \cdot 15 = 9$ |

Tablodaki verilere göre denklemi $0,4x + 10,5 - 0,7x = 9$ şeklinde yazabiliriz.

Bu denklemi çözdüğümüzde;

$0,4x + 10,5 - 0,7x = 9$ ise $0,3x = 1,5$ olduğundan $x = 5$ bulunur.

Sizde çözeltinin 15 L değil de 45 L olması durumunda, %40'lık ve %70'lik asit çözeltilerinden ne kadar alınması gerektiğini belirleyiniz

Örnek 17



Bir kahve işletmesinde; iki farklı boyutta paketlenmiş kahveler ve bu paketler kullanılarak oluşturulan bir kahve karışımı satılmaktadır. Birinci tip paketin kütlesi 0,5 kilogram ve fiyatı 25 TL iken ikinci tip paketin kütlesi 250 g ve fiyatı 8 TL'dir.

İşletme sahibinin, birinci tip paketten 1 adet, ikinci tip paketten 6 adet alarak oluşturacağı karışımı zarar etmemesi için kaç liradan satışa sunması gerektiğini hesaplayalım.

Çözüm

Problemde farklı kütlelerde ve fiyatlardaki kahveden yeni bir karışım elde edilerek yeni bir fiyat belirlenmesi istenmektedir. Verilenlere göre çözüme yardımcı olacak aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

| Paket Tipi | Paketin Kütlesi (g) | Paket Adedi | Toplam Kütle | Paket Fiyatı (TL) |
|-------------|---------------------|-------------|--|-------------------|
| Birinci Tip | 500 | 1 | $1 \times 500 \text{ gr} = 500 \text{ gr} = 0,5 \text{ kg}$ | 25 TL |
| İkinci Tip | 250 | 6 | $6 \times 250 \text{ gr} = 1500 \text{ gr} = 1,5 \text{ kg}$ | 8 TL |

Birinci tip paketten 1 adet, ikinci tip paketten 6 adet alarak oluşturulduğu durumda 2 kg'lık karışım elde edilir.

Bu durumda 2 kg'lık karışımın fiyatını belirlerken zarar etmemesi için aynı geliri elde etmemiz gerekir.

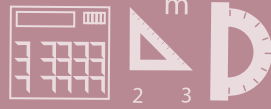
İki paketi ayrı ayrı satıldığında;

$$1 \cdot 25 + 6 \cdot 8 = 25 + 48 = 73 \text{ TL olarak bulunur.}$$

O halde karışımın toplam 2 kg olduğundan satıştan zarar etmemesi için kilogramı en az; $73 : 2 = 36,5 \text{ TL'den}$ satılmalıdır.

Problemde verilenlere göre aşağıdaki soruları da siz cevaplandırınız.

- Kahve karışımı, paketlerden eşit sayıda alarak oluşturulursa; satıcının zarar etmemesi için karışımın kilogram fiyatını en az kaç TL belirlemesi gerekmektedir?
- Birinci tip paketten 1 adet, ikinci tip paketten 6 adet alarak oluşturduğu kahve karışımından %10 kâr etmek istiyorsa bu karışımın kilogram fiyatı kaç TL olarak belirlenmelidir?



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavrama ve Muhakeme

1. Aşağıda bir malın satış fiyatı üzerine yapılan değişikliklerle ilgili bilgiler verilmiştir.

Sol sütundaki ifadeleri sağ sütundaki uygun ifadelerle eşleştiriniz.

| | | | |
|---|---|---|---------------------------|
| Satış fiyatı üzerinden %10 indirim yapıldıktan sonra yeni fiyat üzerinden tekrar %10 indirim yapılıyor. | A | 1 | % 20 indirim yapılmıştır. |
| Satış fiyatı üzerinden %40 indirim yapıldıktan sonra yeni fiyat üzerinden tekrar %40 indirim yapılıyor. | B | 2 | % 80 indirim yapılmıştır. |
| Satış fiyatı üzerinden %20 indirim yapıldıktan sonra yeni fiyat üzerinden tekrar %75 indirim yapılıyor. | C | 3 | % 64 indirim yapılmıştır. |
| Satış fiyatı üzerinden %60 indirim yapıldıktan sonra yeni fiyat üzerinden tekrar %100 zam yapılıyor. | D | 4 | %19 indirim yapılmıştır. |

2. Aşağıdaki soruların cevaplarını doğru şekilde eşleştiriniz.
- a. 120 sayısının $\frac{1}{5}$ inin %25 fazlası
- b. Yaşları toplamı 22 olan iki arkadaşın 5 yıl sonraki yaşları toplamı
- c. Tuz oranı %20 olan 30 L çözelti ile tuz oranı % 15 olan 40 L çözeltinin karışımındaki tuz miktarı

.....30

.....12

.....32

3. Yıllık enflasyon oranının %60 olduğu bir ülkede, Fatih bey havaalanında çalışmaktadır.

Yılın ilk 6 ayında % 25 zam alan Fatih Bey'in yılsonunda zararda olmaması için yılın 2. yarısında alması gereken zam oranı en az yüzde kaç olmalıdır?

4. Matematik sınavında "120 kg'dan 150 kg'a gerçekleşen değişimin yüzdesini nedir?" sorusuna Murat ile Burak'ın verdiği cevaplar aşağıda gösterilmiştir.

Murat

$$\frac{150 - 120}{150} = \frac{30}{150} = 0,2$$

veya

%20 artma

Burak

$$\frac{150 - 120}{120} = \frac{30}{120} = 0,25$$

veya

%25 artma

Buna göre soruyu Murat mı yoksa Burak mı doğru çözmüştür? Açıklayınız.

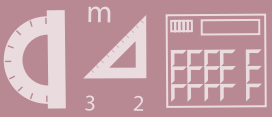
- 5.

%20

Sevda Hanım, Yavuz Bey'e "Benim maaşım sizin maaşınızdan %10 fazladır. Yani sizin maaşınız benim

maaşımdan %10 daha eksiktir" demiştir.


Sizce Sevda Hanım nerede hata yapmıştır?



KENDİMİZİ SINAYALIM

6. Bir mağaza indirim kartına sahip olan müşterilerine %10 indirim uygulamaktadır. Mağazanın ürünlerine %10 zam uyguladığı gün kasiyer Emre indirim kartı olan müşterilerinden ürünlerin eski fiyatlarını almaktadır.

Emre nerede hata yapmaktadır?

7.  10 000 TL maaş alan Ahmet Bey'in maaşına ilk 6 ay %2, ikinci 6 ay için %3 zam yapılıyor. Ahmet Bey yıllık toplamda %5 zam alacağını düşünmektedir.

Ahmet Bey nerede hata yapmaktadır?

Alıştırmalar

1. Bir CD fiyatında %10 artış yapılarak 9.90 TL'ye satılıyor.
CD'nin ilk fiyatını veren denklemi oluşturarak bu denklemi çözünüz.
2. Ramazan Bayramında konuklarına baklava ikram etmek isteyen Şaziye Hanım kuruyemişiye uğrar. Kuruyemişçinin hazırladığı kütlesinin %40'ı fındık olan 2 kg'lık fındık ceviz karışımını alır. Ancak cevizin az geleceğini düşünerek karışıma 400 gr daha ceviz eklettirir.
Buna göre yeni karışımın fındık/ceviz oranı kaçtır?
3. Bir ayakkabı mağazası ayakkabılarda %25 indirim yaptığında satışlarında %40 artış oluyor. Buna göre ayakkabı mağazasının cirosunda nasıl bir değişiklik olur?

4. %2'si tuz olan 50 g tuzlu su ile %80'i su olan 70 g tuzlu su karıştırılıyor.

Karışımın tuz oranını bulunuz.

5. %40'ı tuz olan 6 litre tuzlu su elde edebilmek için; %20 ve %50'si tuz olan iki farklı tuz-su karışımından hangi miktarlarda alınmalıdır?

6. %35'i tuz olan 120 L tuz-su karışımının ne kadarı buharlaştırılırsa tuz oranı %45'e çıkar?

7. Tarık ile Murat bilyelerini bir araya getirdiğinde 150 bilyeleri oluyor. Bilyelerin %24 ünü Murat vermiştir.

Murat bilyelerin üzerine kaç bilye daha eklerse %50'sini Murat vermiş olur?

8. Bir manifaturacı elindeki A marka gömleklerin %15'ini %20 karla, %25'ini %20 zararla, %30'unu %15 karla ve geri kalanını da %15 zararla satmıştır. Manifaturacının bu satış sonunda karar zarar durumu nedir?

(Probleminin verilerini gösteren bir tablo oluşturarak problemi çözünüz.)

BÖLÜM ÖZETİ

Oran

İki çokluğun birbiri ile karşılaştırılmasına oran denir. a ve b iki sayı olmak üzere a değerinin b değerine oranı; $\frac{a}{b}$ veya a:b (b≠0) şeklinde gösterilir ve a'nın b'ye oranı şeklinde okunur.

Orantı

İki ya da daha fazla oranın eşitliğine orantı denir ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği bir orantı belirtir. Bunu "a değerinin b değerine oranı, c değerinin d değerine oranına eşittir" şeklinde okunur.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında a ve d değerleri "dışlar"; b ve c değerleri "içler" olarak adlandırılır.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ eşitliğinde "k" sayısına "orantı sabiti" denir.

Orantı Özellikleri

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında;

1) İçler çarpımı ve dışlar çarpımı birbirine eşittir: b.c = a.d

2) Dıştaki terimler veya içteki terimler yer değiştirebilir: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ veya $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3) Oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{a+b}{b+d} = k$, $\frac{a}{b}$ ile $\frac{c}{d}$ ile genişletilirse $\frac{ma+nc}{mb+nd} = k$ olur.

4) Oranlar taraf tarafa çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{ac}{bd} = k^2$

Doğru Orantı ve Ters Orantı

1) a'nın değeri artarken (azalırken) b'nin değeri de artıyorsa (azalıyorsa), a ve b birbiri ile doğru orantılıdır ve $\frac{a}{b} = k$ ile gösterilir.

2) a'nın değeri artarken (azalırken) b'nin değeri azalıyorsa (artıyorsa), a ve b birbiri ile ters orantılıdır ve a.b = k ile gösterilir.

Birim Fiyat

En ekonomik alışverişin gerçekleştirilmesi ile ilgili alışverişlerde karşılaştırmaların birim fiyat üzerinden gerçekleştirilmesi gerekir. 4 kilogramının fiyatı 8 TL olan bir kayısının kilogram fiyatı $\frac{8}{2} = 2$ TL olarak hesaplanır.

Değişkenleri Birbiri Cinsinden İfade Etme

Bir formülü veya cebirsel ifadeyi değişkenlerden birini verecek şekilde yeniden yazabiliriz. Bir dairenin alanını $A = \pi \cdot r^2$ ile hesaplanırken, bu formül kullanılarak dairenin yarıçapı $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ eşitliğiyle hesaplanır.

Denklem ve Eşitsizlikler

Matematikte karşımıza çıkan sözel problemleri x ve y gibi değişkenler yardımıyla denklem oluşturup çözebiliriz.

Bir GSM şirketinde aylık sabit ücret 10 TL ve her yöne dakikası 15 Kr'tur. Konuşma süresine bağlı aylık ücreti veren denklem $y = 0,15x + 10$ olarak gösterilir.

Belli koşulu sağlayan sayıları matematiksel olarak ifade etmek için eşitsizlik kavramı kullanılır.

Yukarıda verilen örneği "Ali aylık konuşma ücretinin 40 TL'yi geçmemesin istememektedir. Ali'nin 1 ay boyunca konuşabileceği süreleri matematiksel olarak gösteriniz" sorusunun cevabı $0,15x + 10$ olarak gösterilir.

Yüzde Kavramı

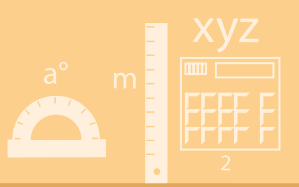
80 TL'nin %10'u $80 \cdot \frac{10}{100} = 8$ olarak hesaplanır.

Yıllık, Aylık ve Günlük Faiz

Bankaya yatırılan anapara A, faiz oranı n, zamanı ise t ile gösterirsek; A TL'nin yıllık %n faizle,

- t yılda getireceği faiz, $F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot t$
- t ayda getireceği faiz, $F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot \frac{t}{12}$
- t günde getireceği faiz, $F = A \cdot \frac{n}{100} \cdot \frac{t}{360}$

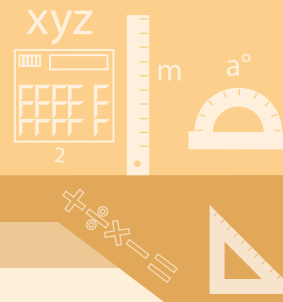
formülleriyle hesaplanır.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

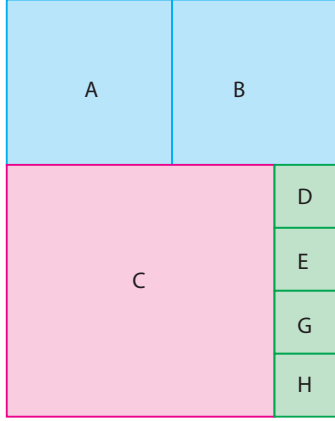
1. Aşağıdaki ifadelerin doğru olanları yanına (D), yanlış olanları yanına (Y) yazınız.
 - a. (....) a ile b doğru orantılıysa b ile a ters orantılıdır.
 - b. (....) Orantı en fazla 3 oranın eşitliğinden oluşur.
 - c. (....) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğinde içler çarpımı dışlar çarpımına her zaman eşittir.
 - ç. (....) İki sayının oranında sayılar aynı sayı ile çarpıldığında oranda değişme olmaz.
 - d. (....) Markaları aynı olan 200 mL şampuanın 4 TL, 300 ml şampuanın 5 TL olduğu bir markette 300 ml olan şampuan diğerine göre daha ekonomiktir.
 - e. (....) 50 km'de 10 TL benzin yakan araç kilometrede 5 TL benzin yakar.
 - f. (....) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğinde $a+c=b+d$ eşitliği her zaman doğrudur.
2. Aşağıdaki boşlukları uygun ifadelerle doldurunuz.
 - a. a sayısının b sayısına oranı..... şeklinde gösterilir.
 - b. Bir sınıftaki kız sayısının erkek sayısına oranı $3/5$ ise, erkek sayısının kız sayısına oranı dır.
 - c. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğinde içler ile dışlar çarpıldığında..... eşitliği oluşur.
 - ç. a, b ile doğru c ile ters orantılıysa; b, c ile orantılıdır.
 - d. a-1, b+2 ile doğru orantılıdır. a=2 olduğunda b=3 ise, a=3 olduğunda b=..... dır.

3. Bir sınıftaki kız ve erkek öğrencilerin sayıları sırasıyla 1,4 ve 1,6 sayılarıyla orantılıdır. Buna göre; aşağıdaki ifadelerin doğru olanları yanına (D), yanlış olanları yanına (Y) yazınız.
 - a. (....) Kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $7/8$ 'dir.
 - b. (....) Kız öğrencilerin sayısı erkek öğrencilerin sayısının 1,4 katıdır.
 - c. (....) Kız öğrencilerin sayısı erkek öğrencilerin sayısından az değildir.
 - ç. (....) Kız öğrencilerin sayısı en az 14'tür.
 - d. Erkek öğrencilerin sayısı en az 8'dir.
4. Aşağıda verilen miktarları istenilen oranlarda bölünüz
 - a. 500 g peyniri 2 ye 3 oranda
 - b. 14 saatlik zamanı 3 e 4 oranda
 - c. 36 litre sütü 9 a 3 oranda
 - ç. 2400 yi 10 a 2 oranda
 - d. 2 km lik yolu 17 ye 3 lük oranda
 - e. 1800 yi 3:4:2 lik oranda.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

5. Yandaki şekilde aynı renk kareler özdeş olmak üzere; aşağıda verilmiş kare çiftlerinin kenar uzunluklarının oranını bulalım.



A karesinin C karesine,

D karesinin B karesine,

E karesinin A karesine.

Problem Anlama: Karelerin kenar uzunluklarını bulalım.

C karesinin kenar uzunluğu..... br,

D karesinin kenar uzunluğu..... br,

E karesinin kenar uzunluğu..... br.

Plan hazırlama: Problemi çözmek için bir plan yap.

Planı Uygulama: A karesinin kenar uzunluğu..... br,

B karesinin kenar uzunluğu..... br,

Oranları yazalım.

$$\frac{A}{C} = - \quad \frac{D}{B} = - \quad \frac{E}{A} = -$$

6. Tuğba Hanım fındık yağı almak için bir markete gider. Markette sıvı yağ reyonuna göz atan Tuğba Hanım aynı markanın 5 litrelik fındık yağının 39 TL ve 2 litrelik fındık yağının 18,5 TL olduğunu görür. Buna göre Tuğba Hanım 5 litrelik fındık yağını almaya karar verirse bir litrede diğerine göre kaç lira kazanç sağlamış olur?

Problem Anlayalım: Tuğba Hanım bir markete fındık yağı almak için gider. Markette 5 litre fındık yağı TL iken litre fındık yağı 18,5 TL'dir. Problemden sorulmaktadır.

Plan Hazırlama: 5 litrelik fındık yağının alınması durumunda kazancın bulunabilmesi için her iki duruma ait litre fiyatlarının bulunarak bu değerlerin birbirinden gerekmektedir.

Planı Uygulama: 5 litrelik fındık yağının bir litresi = TL'dir.

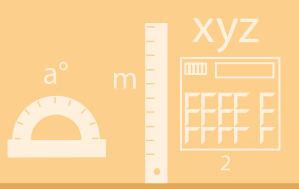
2 litrelik fındık yağının bir litresi = TL'dir.

Bu durumda bir litrede kazanç TL'dir.

Problemimiz başka yoldan da çözülebilir;

5 litre fındık yağının 2 litresi, $\frac{5 \text{ litre}}{39 \text{ TL}}$ $\frac{2 \text{ litre}}{\text{TL}}$ oran-

tısı ile bulunur. Marketteki 2 litrelik yağın fiyatı da TL idi. Bu durumda iki litredeki kazanç TL olurken bir litrede TL olur.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

7. Okul servis şoförleri Ahmet Bey, Yusuf Bey ve Ayşe Hanım arabalarının benzin tüketimlerini karşılaştırmaya karar vermişler;

- Ahmet Bey; arabasının 35 litre benzin ile 350 km gittiğini,
- Yusuf Bey; arabasının 30 litre benzin ile 290 km gittiğini,
- Ayşe Hanım ise arabasının 32 litre benzin ile 300 km gittiğini ifade ediyor.

Sizce hangi servis şoförünün arabası daha ekonomiktir?

8. Bekir Bey oğlunu okula götürmek için otomobiliyle her sabah 10 kilometre yol kat etmektedir. Bir gün komşusu Oğuz Bey'le konuşurken, Oğuz Bey okul için alternatif bir yol daha olduğunu ve bu yolun kat etmesi gereken yolu 2 km arttırdığını fakat yakıt tüketimi için daha uygun olduğunu söyler. Bunun üzerine Bekir Bey otomobilinin yol bilgisayarıyla da yararlanarak her iki yol için veriler elde eder.

| | Kilometre (km) | Süre (dk) | 100 km'deki yakıt tüketimi (Litre) | Benzinin Litre Fiyatı (TL) |
|----------------|----------------|-----------|------------------------------------|----------------------------|
| Standart Yol | 10 km | 13 | 8.2 L | 4,65 TL |
| Alternatif Yol | 12 km | 11 | 4,5 L | |

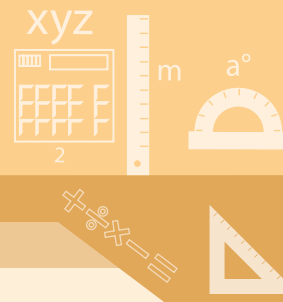
Bu tabloya göre;

- a. Bekir Bey problemin çözümü için gerekli gördüğü verileri kullanarak aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur. Sizce bu veriler içinde problemin çözümünde kullanılmayacak veri/veriler var mıdır?
- b. Bekir Bey yakıt ekonomisi için hangi yolu seçmelidir?
9. Sercan ile Elif girdikleri aynı standarttaki iki farklı matematik testinden yaptıkları doğru sayısını karşılaştırıyorlar. Sercan 80 soruluk testten 46 doğru; Elif ise 90 soruluk testten 45 doğru yapmışlar ise hangi öğrenci daha başarılı olmuştur?
10. Aşağıdaki tabloda iller arasındaki kuş uçuşu olarak mesafeleri verilmiştir.

| İller | Kuş uçuşu mesafe | Haritadaki mesafe |
|--------------------|------------------|-------------------|
| Ankara-Erzurum | 720 km | 4,5 cm |
| Kırşehir-Bartın | 320 km | 2 cm |
| Trabzon-Van | A | 2,625 cm |
| Gaziantep-İstanbul | 850 km | B |

Tablodan faydalanarak haritadaki 1 cm'nin, kuş uçuşu olarak kaç km'ye karşılık geldiğini hesaplayarak A ve B yerine gelecek sayıları bulunuz.

11. Ali çok sevdiği arabasının fotoğrafını çekip masasına koymuştur. Arabasının eni 1,50 m boyu ise 2,70 m uzunluğundadır. Arabanın fotoğraftaki boyu 9 cm ise fotoğraftaki eni kaç cm'dir?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

12. 120 bilye üç arkadaşta 2, 3 ve 5 ile orantılı olarak paylaştırılıyor.
- a. n çok bilye alan..... tane bilye almıştır.
- b. En az bilye alan tane bilye almıştır.
- c. Üçü bilyelerini eşitlemek isterse 3 ile orantılı şekilde alanatane bilye verilmelidir.
13. Ayşe, Burak, Canan ve Deniz bir yardım kuruluşuna 150 TL bağışta bulunmak istiyorlar. Ayşe'nin 30 TL'si, Burak'ın 60 TL'si, Canan'ın 70 TL'si ve Deniz'in 90 TL'si bulunmaktadır. Bu yardımı paralarıyla doğru orantılı olacak şekilde paylaşırlarsa, Canan'ın ne kadar vermesi gerekir?
14. Bir lisede, kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı 9:7 dir. Bu lisede toplam 560 öğrenci olduğuna göre;
- a. Erkek öğrencilerin sayısını bulunuz.
- b. Kız öğrencilerin sayısının tüm öğrencilerin sayısına oranını bulunuz.
15. İrfan, bir teli 7 ve 9 ile doğru orantılı olacak şekilde iki parçaya ayırıyor. Uzun parça, kısa parçadan 15 cm fazla olduğuna göre, telin tamamı kaç cm dir?
16. Sefa, 210 tane bilyesini 2 ve 3 ile doğru, 4 ile ters orantılı olacak biçimde üç parçaya ayırıp arkadaşlarına veriyor. Her bir arkadaşına kaç tane bilye verdiğini hesaplayınız.

17. $\frac{A}{B} = \frac{8}{7}, \frac{B}{C} = \frac{3}{5}$ olduğuna göre, $\frac{A}{C}$ kaçtır?

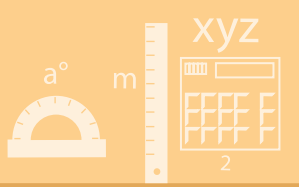
18. $\frac{2 \cdot c + 3 \cdot c}{2 \cdot b - 3 \cdot d}$ olduğuna göre, $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ oranının değerini bulunuz.

19. A, B ve C tamsayıları, sırasıyla 3, 4 ve 6 ile ters orantılıdır. A + B + C toplamı 200 ile 350 arasında kaç farklı değer alabilir?

20. Kilogramı 5 TL olan çekirdekten 200 gr almak isterseniz ne kadar para ödersiniz?

21. Bir market çalışanlarına çalıştıkları saat karşılığında maaş veriyor. Bir haftada 30 saat çalışan haftalık 100 TL alıyorsa 42 saat çalışan haftalık ne kadar ücret alır?

22. Serdar bey yurt dışında bulunan arkadaşının tatil için Türkiye'ye geleceğini öğrenince yurtdışından gelirken yeni piyasaya çıkan bir telefonu almasını istiyor. Telefonun fiyatı 750 dolar ise Serdar bey arkadaşına ne kadar Türk lirası yollarsa aynı değere gelmiş olur(1 dolar=1,82 Türk lirası).



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

23. Yatırım yapmak isteyen Ömer Bey gramı 92,2 TL den 500 gram altın alıyor. İlerleyen zamanlarda paraya ihtiyacı olduğunda altınlarını bozduran Ömer Bey 200 gramını, gramı 90,1 TL den, 300 gramını ise 93,7 TL den bozdurduğuna göre Ömer Bey'in kaç TL kar veya zarar ettiğini bulunuz.

24. Saim Bey bir kuruyemişçi dükkânına uğruyor. Bu kuruyemişçiden 2 kg Antep fıstığı ve 3 kg badem alınca 122 TL, 3 kg Antep fıstığı ve 2 kg badem alınca 142 TL ödüyor.

- a.** Yukarıda verilen değerleri birer denklemle ifade ediniz?
- b.** Bu kuruyemişçiden 1 kg badem ve 1 kg Antep fıstığı alınca kaç TL öder?
- c.** Bir kg Antep fıstığı mı yoksa 1 kg badem mi pahalıdır?

25. Tuba ve Zeynep pul biriktirmektedirler. Tuba'nın pul sayısı Zeynep'in pul sayısından 150 fazladır. Tuba pullarının 60 tanesini Zeynep'e verince Zeynep'in pullarının sayısı Tuba'nın pullarının sayısının 4 katı oluyor. Tuba'nın pul sayısını veren denklemi oluşturunuz.

26. Amerika dan bayram tatiline gelen Ahmet'in amcası Ahmet'e 50 dolar bayram harçlığı vermiştir. 20 TL lik bir oyuncak alması için Ahmet en az kaç dolarını Türk lirasına dönüştürmelidir? (1 dolar=1,82 Türk lirası).

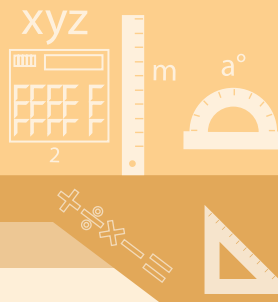
27. Orhan Bey bir alışveriş sonrası cebinde 13 TL kaldığını fark eder. Taksi ile evine dönmek isteyen Orhan Bey taksiye biner. Taksinin açılış ücreti 2,95 TL ve kilometre başı ücreti 1,83 TL'dir. Orhan Bey'in cebindeki parasıyla evine gidebilmesi için evinin uzaklığını veren eşitsizliği belirleyiniz.

28. Erdal Bey, Sinem Hanım'dan üç yaş büyüktür. Şu anda ikisinin yaşları toplamı, dört yıl ara ile doğmuş iki çocuğunun yaşları toplamının 5 katına eşittir. Sinem Hanım'ın 50 yaşını geçmediği bilindiğine göre çocukların yaşları ile ilgili ne söylenebilir?

29. Bir GSM şirketi abonelere yüklediği TL miktarının $\frac{2}{5}$ 'i kadar hediye TL veriyor. 30 TL yükleyen bir müşteri kaç TL hediye kazanır?

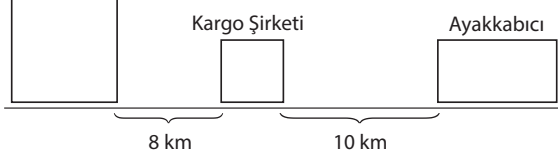
30. Aşağıdaki tabloda bir ilaç mümessilinin İstanbul'dan Erzurum'a yaptığı yolculuğa dair bilgiler verilmiştir. Tablodaki boşlukları doldurunuz.

| Güzergah | Kilometre | Hız | Çıkış Saati | Varış Saati |
|---------------------|-----------|-------------|-------------|-------------|
| İstanbul Ankara | 455 km | 70 km/sa | 13.00 | |
| Ankara Kırşehir | 189 km | 63 km/sa | | 10.00 |
| Kırşehir Kayseri | 132 km | | 14.00 | 15.30 |
| Kayseri Erzurum | 632 km | 79 km/sa | | |



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

31.



Bir kargo şirketinde dağıtım sorumlusu olarak çalışan Kemal Bey, bir okula ve bir ayakkabıcıya ait kargoları teslim etmek için aracıyla saatte 40 km/sa sabit hızla yol almıştır. Kargoları ilk olarak okula, daha sonra ayakkabıcıya teslim eden Kemal Bey, okulun içinde ve ayakkabıcıda kargo teslimi nedeniyle zaman kaybetmiş ancak yolda herhangi bir zaman kaybı olmamıştır. Buna göre,

- Kemal Bey okula kaç dakikada varmıştır?
- Kemal Bey yola çıktıktan 39 dk. sonra tekrar kargo şirketine döndüğüne göre okul içinde ve ayakkabıcıda kaç dakika zaman harcamıştır? (12 dakika)
- Kemal Bey'in okulda harcadığı zaman, ayakkabıcıda harcadığı zamanın 3 katı olduğuna göre Kemal Bey okula kaç dakika zaman harcamıştır.

- 100 m koşu yarışmalarında dünya rekoru 1968 Meksiko olimpiyatlarında 9.95 sn. de koşan ABD'li Jim Hines'e aitti. 2009 Berlin olimpiyatlarında Jamaikalı Usain Bolt 9.58 sn. de koşarak yeni Dünya rekorunun sahibidir. Usain ve Jim bu hızlarıyla 100 m koşusunda yarışsalar Usain, Jim 'den kaç m önde yarışı bitirir?

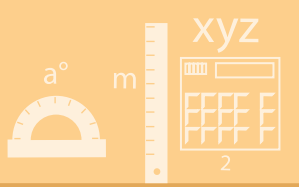
- Ömer aracıyla Ankara'dan Erzurum'a doğru yola çıkar. Ömer aracıyla, saatte 80 km/sa hızla giderse saat 13.00'de, 110 km/sa hızla giderse saat 10.00'da Erzurum'da oluyor.

- Ömer'in saat 12.00'de Erzurum'da olması için aracın saatteki hızı kaç olmalıdır?
- Ömer saat kaçta Ankara'dan yola çıkmıştır?

- Uzunluğu 380 m ve hızı 90 km/sa olan bir trenin 270 m'lik bir tüneli kaç saniyede geçtiğini bulunuz. Eğer tren aynı hızla 540 m'lik bir tünele girseydi bu tünelden kaç saniyede geçerd?

- Aşağıdaki problemlerden hangisinin çözümünde kullanılan adımlar;
"Bir musluk 6 saatte havuzun $\frac{2}{3}$ 'sini dolduruyorsa boş havuzu kaç saatte doldurur?" probleminin çözümünde kullanılan adımlara benzerdir?

- Bir işçi bir işi 8 saatte tamamlamaktadır. İşin $\frac{3}{4}$ kısmını kaç saatte bitirir?
- Bir motosiklet 10 saatte yolun $\frac{5}{8}$ 'lik kısmını gittiğine göre yolun tamamını kaç saatte gider



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

36. 10 arkadaş 20 gün kamp yapmayı planlamaktadır. Buna göre, yiyecek hazırlıklarını yapmışlardır. Aşağıdaki ifadelerin doğru olanları yanına (D), yanlış olanları yanına (Y) yazınız.

- a. (....) 2 kişi kampa gitmezlerse, geri kalanlara yiyecekleri 25 gün yeter.
- b. (....) 10 kişi daha kampa katılırsa yiyecekleri 12 gün yeter.
- c. (....) 5 gün sonra kamptan beş kişi ayrılırsa, kalanlara yiyecekleri 30 gün daha yeter.

37. Bir çiftlikte her koyuna eşit miktarda yem verilmektedir. Çiftlikte 72 koyuna 24 gün yetecek yem bulunmaktadır. Aşağıdaki tabloda gün sonu itibari ile satılan koyun sayıları ve kalan koyunlara kalan yem miktarının kaç gün yeteceğine dair bazı bilgiler verilmiştir. Tablodaki boşluklara uygun sayıları yazınız.

| Gün sayısı (Gün sonu itibari ile) | Satılan Koyun Sayısı | Kalan Yem Miktarının Kaç gün Yeteceği |
|---|-------------------------|---|
| 8. | 24 | |
| 10. | 15 | |
| 13. | | 87 |

38. Serkan, Ali ve Enver bir işi sırasıyla a, b ve c günde bitirmektedirler. Serkan'ın Ali'den ve Ali'nin de Enver'den daha hızlı çalıştığı bilindiğine ve üçü birlikte bu işi 18 günde bitirdiklerine göre Enver bu işi en az kaç günde tamamlar?

39. Aşağıdaki tabloda Bolu iline ait 5 günlük hava sıcaklık değerleri verilmiştir. Aşağıdaki soruları nedenleriyle açıklayınız.

| TARİH | Sıcaklık (°C) | | Hadise |
|-------------------|---------------|-----------|--------|
| | En Düşük | En Yüksek | |
| 30 Mart Cumartesi | 7 | 19 | |
| 31 Mart Pazar | 9 | 23 | |
| 1 Nisan Pazartesi | 10 | 20 | |
| 2 Nisan Salı | 7 | 20 | |
| 3 Nisan Çarşamba | 10 | 23 | |

- a. 5 güne ait en düşük değerlerin aritmetik ortalamasını bulunuz.
- b. 5 güne ait en yüksek değerlerin aritmetik ortalamasını bulunuz.
- c. Tabloda yer verilen nisan ayına ait en düşük değerlerin
- ç. Hafta sonuna ait en yüksek değerlerin aritmetik ortalamasını bulunuz.

40. 5 kadın ve 9 erkeğin çalıştığı bir atölyedeki 14 kişinin yaş ortalaması 22 dir. Buna göre; aşağıdaki ifadelerin doğru olanları yanına (D), yanlış olanları yanına (Y) yazınız.

- a. (....) 14 kişinin yaşları toplamı, kişi sayısı ile yaş ortalamasının çarpımıyla bulunur.
- b. (....) Erkeklerin yaş ortalaması 22 ise kadınların da yaş ortalaması 22 dir.
- c. (....) Erkeklerin yaş ortalaması 17 ise kadınların yaş ortalaması 29 olur.
- ç. (....) 19,21 ve 26 yaşlarındaki üç kişi daha atölyede işe başlarsa yaş ortalaması değişmez.
- d. (....) Yaşları 18 ve 27 olan iki kişi atölyeden ayrılırsa yaş ortalaması azalır.

BÖLÜM DEĞERLENDİRME

41. Matematik öğretmeni Ayşe Hanım 23 kişinin yazılı ortalamalarını hesaplıyor ve sınıf ortalaması 62 çıkıyor. Yazılıya girmeyen iki kişi sonradan yazılıya girip yazılıdan 82 ve 92 aldıklarına göre yeni ortalama kaç olur?

42. Babaları; Fatih, Gürsel ve Belma'yı matematik dersinin karne notunun 100'lük sistemde 85 ve yukarısı olması durumunda ödüllendireceğini söylemiştir. Aynı okulun farklı sınıflarında okuyan üç kardeşin bu dersten aldıkları notlar aşağıdaki tabloda verilmiştir. Her bir not ortalamaya eşit oranda katıldığına göre üç kardeşin babaları tarafından ödüllendirilmeleri için 3. sınavları en az kaç olmalıdır. Hangi kardeşin, bu dönem ödül alma ihtimali artık kalmamıştır?

| | Sınavlar | | | Sözlüler | | |
|--------|----------|----|---|----------|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| Fatih | 88 | 85 | ? | 90 | 95 | 90 |
| Gürsel | 51 | 90 | ? | 85 | 95 | 95 |
| Belma | 75 | 85 | ? | 75 | 75 | 95 |

43. Ortak para toplayıp 90TL lik yardım yapmak isteyen bir grup kişiye Ersin de katılınca kişi başına ödeyecekleri para 1 TL azalıyor. Son durumda Ersin'le beraber grupta kaç kişi vardır?

44. Üniversite öğrencisi olan Serkan'ın bir derse ait ara sınav notu 42, dönem sonu sınavı notu 70'tir. Aşağıda farklı üniversitelere ait ağırlıklı ortalama hesaplanırken kullanılan katsayılar ve geçme notları verilmiştir. Serkan bu dersten geçtiğine göre hangi üniversitenin öğrencisidir?

| | A Üniversitesi | B Üniversitesi | C Üniversitesi | D Üniversitesi |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Ağırlık Vize | 4 | 5 | 3 | 3.5 |
| Ağırlık Final | 6 | 5 | 7 | 6.5 |
| Geçme Notu | 60 | 70 | 65 | 60 |

45. Ali ve Ahmet 200 sayısının %50 sini hesaplarken aşağıdaki şekilde hesaplamışlardır.

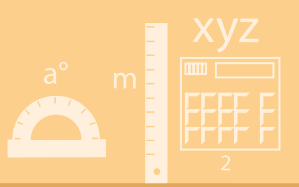
ALİ

AHMET

$$200 \cdot \frac{50}{100} = 100$$

$$200 \cdot \frac{100}{50} = 400$$

Kim nerede hata yapmıştır?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

46. Yasemin ve Merve 42'nin %50 sini hesaplamak istiyorlar.

YASEMİN

$$\frac{x}{42} = \frac{50}{100}$$

MERVE

$$\frac{42}{x} = \frac{50}{100}$$

Yasemin ve Merve'nin kurduğu denklemlerden hangisinde yanlışlık vardır?

47. Adnan Bey'in elektrik faturası 83 TL gelmiş ve Adnan Bey faturayı zamanında ödemeyi unutmuştur. Gecikme zammı olarak faturanın %4 faturaya yansıtılacağına göre, Adnan Bey ne kadar gecikme zammı ödeyecektir?
48. Nuray Hanım taksitli fiyatı 2690 TL olan bir koltuk takımı beğenmiştir. Peşin ödemelerde taksitli fiyat üzerinden %8 indirim uygulanmaktadır. Peşin ödeme yapan Nuray Hanım ne kadar kârlı çıkmıştır?
49. Mehmet 1500 TL yazan dizüstü bilgisayarda %20 indirim olduğunu ve hafta sonu alırsa bu indirime ek olarak %20 indirim daha olduğunu öğreniyor. Mehmet hafta sonu dizüstü bilgisayarını alırsa kaç lira öder?

50. Bir giyim mağazası sahibi olan Ahmet Bey maliyet fiyatı 80 lira olan montları %35 karla satmaktadır. Sezon sonu geldiğinde etiket fiyatı üzerinden %20 indirim yapıyor ise son durumda karı maliyet fiyatı üzerinden yüzde kaçtır?

51. Kemal Bey etiket fiyatı 25 lira olan gömleklerin fiyatını 20 liraya indirmek istiyor.

$$\frac{25 - 20}{20} = \frac{5}{20} = \%25$$

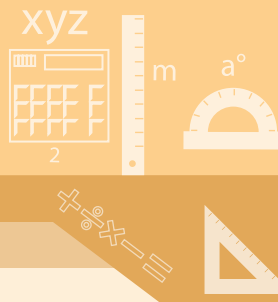
şeklinde hesaplayıp gömleklerin etiket fiyatlarında %25 indirim şeklinde camlara yazı yapıyor. Kemal bey nerede hata yapmıştır?

52. %30 karla 260 TL ye satılan bir mont %30 zararlı kaç liraya satılır?

53. Devlet, memurlara ilk altı ay için %4, ikinci altı ay için %3 zam yapmıştır. Yıl boyunca toplam yüzde kaç zam yapmıştır?

54. Yıllık enflasyon oranı iki basamaklı bir sayı olan bir ülkede a liraya satılan bir malın fiyatı satıştan bir yıl sonra en az kaç lira olur?

55. 3 tanesini 2 TL ye aldığı kalemelerin 4 tanesini 3 TL satan bir kırtasiyeci yaklaşık % kaç kar etmiştir?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

56. Bir kenarı 10 br olan bir karenin kenarları % 12 kısaltılırsa, alanı yüzde kaç küçülür?
57. Kenarları 8 m ve 7 m olan bir dikdörtgenin kenar uzunluklarından her biri 1 m kısaltıldığında dikdörtgenin alanı yüzde kaç küçülür?
58. Alper Bey Toki'den ev almaya hak kazanıyor. Aynı fiyat üzerinden Alper Bey'e 2 çeşit ödeme şekli sunuluyor. Birinci ödeme şeklinde Alper Bey paranın %10 unu peşin öderse 96 ay ödeme, ikinci ödeme şeklinde paranın %25 ini peşin öderse 120 aylık ödeme yapması gerekmektedir. Birinci ödeme şeklini tercih eden Alper Bey aylık 1,215TL ödeme yaptığına göre ikinci ödeme şeklini tercih etseydi aylık ne kadar öderdi?
59. Aşağıda belirtilen değişimlerin yüzdelerini hesaplayarak örnekte verildiği gibi yazınız.
- "24 cm den 30 cm ye değişim oranı; % 25 artma gerçekleşmiştir."
- a. 42 dakikadan 21 dakikaya
- b. 24 TL den 52,8 TL ye
- c. 3 kg dan 5 kg a
- ç. 120 metreden 94 metreye
- d. 50 gb dan 32,5 gb a

60. Aşağıdaki tabloda son beş yıl Türkiye'de uçakla seyahat eden yolcu sayısı verilmiştir.

| YIL | İÇ HAT (milyon kişi) | DIŞ HAT (milyon kişi) | TOPLAM (milyon kişi) |
|--------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 2008 | 35,8 | 43,6 | 79,4 |
| 2009 | 41,2 | 44,2 | 85,4 |
| 2010 | 50,6 | 52,2 | 102,8 |
| 2011 | 58,3 | 59,4 | 117,7 |
| 2012 | 64,7 | 65,6 | 130,3 |
| Toplam | 250,6 | 265 | 515,6 |

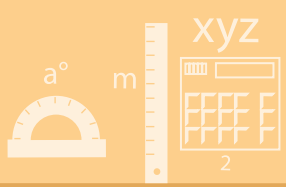
Bu tabloya göre;

- a. 2010 yılında iç hatlarda yolculuk yapan yolcu sayısı, 5 yıl boyunca iç hatlarda toplam yolculuk yapanların yüzde kaçıdır?
- b. 2011 yılında dış hatlarda yolculuk yapan yolcu sayısı, 2009 yılında dış hatlarda yolculuk yapan yolculara göre, yüzde kaç artmıştır?

61. Aşağıdaki tabloda bir lisedeki bazı kulüplerin 2011 ile 2012 yıllarına ait öğrenci sayıları verilmiştir.

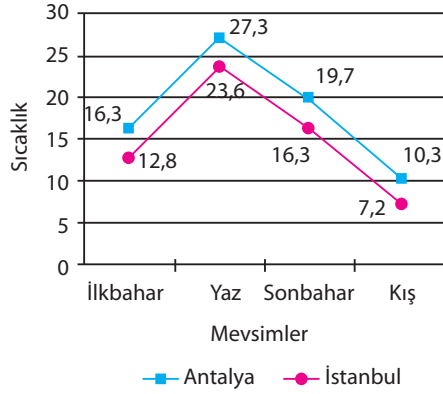
| | 2011 | 2012 |
|----------------------|------|------|
| Matematik Kulübü | 110 | 132 |
| Satranç Kulübü | 200 | 150 |
| Gitar Kulübü | 80 | 100 |
| Sivil Savunma Kulübü | 125 | 85 |

Buna göre tabloda verilen her bir kulübün 2011 den 2012 ye öğrenci sayılarındaki değişimin yüzdelerini hesaplayınız.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

62. Antalya ve İstanbul'un dört mevsime ait sıcaklık ortalamaları aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Buna göre;

- Antalya'nın yıllık sıcaklık ortalaması kaçtır?
 - İstanbul'un yıllık sıcaklık ortalaması kaçtır?
 - Antalya'nın sıcaklığındaki mevsimler arası sıcaklık değişim yüzde kaçtır?
 - İstanbul'un sıcaklığındaki mevsimler arası sıcaklık değişimin yüzdesi kaçtır?
 - Sıcaklıktaki en yüksek ve en düşük değişimin yüzdesi hangi mevsimler arasında hangi ilde gerçekleşmiştir?
63. Bankaya yatırılan 2400 TL 3 ay sonra 24 TL faiz getirdiğine göre; bankanın uyguladığı faiz miktarı yıllık yüzde kaçtır?
64. Emre bey parasının yarısını yıllık %20 den 6 ay, diğer yarısını ise %30 dan 6 aylığına faize yatırıyor. Sene sonunda Emre Bey in faiz getirisi yüzde kaçtır?
65. Engin parasını yıllık %20 faizle bankaya yatırmıştır. Bu parayı yıllık %25 faizle yatırsaydı bir yılda 12,5 TL fazla faiz alacaktı. Buna göre, Engin'in faize yatırdığı para kaç TL dir?
66. Ahmet Bey 90000TL parasıyla yatırım yapmak istiyor. İki seçenek düşünen Ahmet Bey ilk seçeneğinde parasını bankaya yatırmayı, diğer seçeneğinde ise bir ev satın alıp kiraya vermeyi düşünüyor. Parayı yatıracağı banka yıllık %9 basit faiz oranı, alacağı ev ise 800TL aylık kira geliri getirdiğine göre sizce Ahmet Beyin bir sene sonunda daha karlı çıkabilmesi için hangi seçimi yapması uygun olur?
67. Çayı fazla şekerli olan Caner şekerini azaltmak için bardaktaki çayın birazını boşaltmıştır. Caner doğru yolu mu kullanmıştır? Caner amacına ulaşmak için ne yapmalıdır?
68. "Tuz oranı % 40 olan 10 litre su, tuz oranı % 30 olan kaç litre su ile karıştırılırsa yeni karışımın tuz oranı % 45 olur" ifadesi doğru mudur? Neden?
69. Boş bardağa çay doldurulup 2 şeker atıldığında şeker oranı % 40 oluyor. Bu bardağa 1 şeker daha atılırsa son durumda şeker oranı yüzde kaç olur?



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

1. Aşağıda verilen sayılardan hangisi rasyonel sayıdır?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\sqrt{\frac{12}{15}}$ C) $\sqrt{25} - \sqrt{8}$
D) $\sqrt{\frac{45}{180}}$ E) $\sqrt{0,9}$

2. Aşağıda verilenlerden hangisi irrasyonel sayıdır?

- A) $\sqrt{0}$ B) $\sqrt{25} + \sqrt{9}$ C) $\sqrt{0,09}$
D) $\sqrt{\frac{\pi^2}{25}}$ E) $\sqrt[3]{0,008}$

3. Küpü kendisine eşit olan kaç tane gerçek sayı vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. Bir araba tamiri için ödenen fatura 577 TL'dir. Parçalara ödenen fatura 325 TL ve her saat için ödenen işçilik ücreti ise 28 TL dir. Buna göre tamir işlemi kaç saat sürmüştür?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

5. Bir dersten A almak için, her biri 100 puan üzerinden 4 sınavın ortalamasının 90 olması gerekmektedir. İlk 3 sınavdan sırasıyla 85, 92 ve 83 puan aldınız. Notunuzun A gelmesi için son sınavdan en az kaç almanız gerekir?

- A) 85 B) 90 C) 95
D) 100 E) Hiçbiri

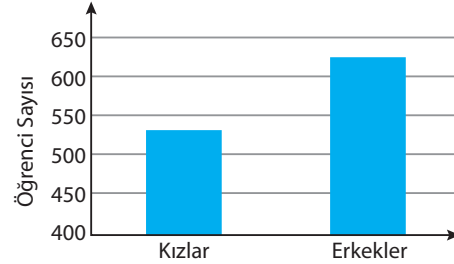
6. Aşağıda verilen aralıklardan hangisi $2\sqrt{2}$ sayısını içerir?

- A) (1, 2) B) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ C) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$
D) $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ E) (3, 4)

7. $\frac{14}{27} + \frac{101}{50} + \frac{121}{30} + \frac{17}{36} + \frac{29}{30}$ işleminin yaklaşık değeri nedir?

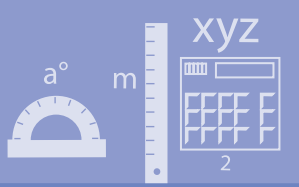
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8.



Yukarıdaki sütun grafiği bir okuldaki kız ve erkek sayılarını göstermektedir. Bu grafiğe göre aşağıdakilerden hangisi kızların sayısının erkeklerin sayısına oranına en yakın değerdir?

- A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{51}{61}$
D) $\frac{53}{62}$ E) $\frac{55}{63}$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

9. $a = 2\sqrt{5}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{3}$, $d = \sqrt{17}$ sayıları aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak sıralanmıştır?

A) $a < b < c < d$ B) $d < c < b < a$ C) $c < d < b < a$

D) $c < d < a < b$ E) $d < c < a < b$

10. $\sqrt{640}$ sayısının yaklaşık değerini bulmak için aşağıdakilerden hangisinin yaklaşık değeri bilinmelidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{10}$

11. Aşağıda verilen sayı kümesi ikililerinden hangisi ayrık kümelerdir?

A) İrrasyonel Sayılar-Gerçek Sayılar

B) Rasyonel Sayılar-Gerçek Sayılar

C) Tam Sayılar- Doğal Sayılar

D) Tam Sayılar-İrrasyonel Sayılar

E) Tam Sayılar-Rasyonel Sayılar

12. $\frac{x-3}{4} + \frac{2x+1}{5} = \frac{3x+1}{2}$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{21}{17}$ B) $-\frac{15}{17}$ C) 1

D) $\frac{15}{17}$ E) $\frac{21}{17}$

13. $0,2x + 0,25(2x - 4) = 3,2$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. $-2 < \frac{x-1}{2} \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 3]$ B) $(-3, 4]$ C) $(-4, 2]$

D) $(-3, 3)$ E) $[-3, 4)$

15. $x + 1 < 2x - 1 \leq x + 11$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, 12]$ B) $(2, 13]$ C) $[2, 12)$

D) $(2, 12)$ E) $[2, 13)$

16. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-6 < x < 5$ ve $3 < y < 6$ olduğuna göre, $2x - 3y$ ifadesi hangi aralıktadır?

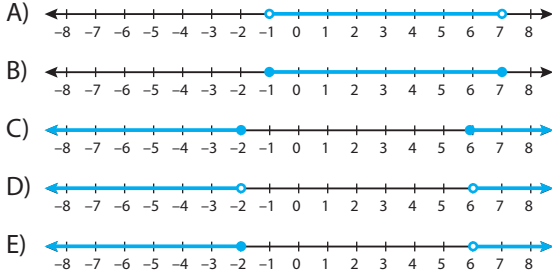
A) $(-21, -18)$ B) $(-30, 1)$ C) $(-30, 19)$

D) $(-3, 8)$ E) $(-21, 3)$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – II

1. Aşağıdakilerden hangisi $|2x - 6| < 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin sayı doğrusu üzerinde gösterimidir?



2. $|3x - 2| = |2x + 1|$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0, 3\}$ B) $\left\{\frac{1}{5}, 3\right\}$ C) $\{-1, 1\}$
D) $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{5}, 3\right\}$

3. $|2x - 3| = x + 7$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-1, 3\}$ B) $\left\{-\frac{4}{3}, 10\right\}$ C) $\left\{\frac{4}{3}, 9\right\}$
D) $\left\{-\frac{5}{4}, 11\right\}$ E) $\left\{\frac{5}{4}, 8\right\}$

4. Aşağıdaki eşitsizliklerin hangisi $|3x + 5| < 6$ eşitsizliğine denktir?

- A) $x > \frac{1}{3}$ veya $x < -\frac{11}{3}$
B) $-\frac{11}{3} < x < \frac{1}{3}$
C) $-2 < x < 2$
D) $-\frac{1}{3} < x < \frac{11}{3}$
E) $x > \frac{11}{3}$ veya $x < -\frac{1}{3}$

5. $x < 0 < y < z$ olduğuna göre,

$|x - y| + |z - y| + |y - x|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $z - y$ B) $y - z$ C) $y + z - 2x$
D) $2y + z + x$ E) $y - z + x$

6. $|x - 3| + |x + 5|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

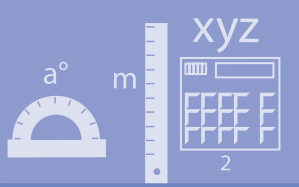
7. Aşağıdaki denklemlerden hangisi "sayı doğrusu üzerinde -2 ve 3 noktalarına uzaklıkları toplamı 8 'e eşit olan gerçek sayılar" ifadesini belirtir?

- A) $|x - 2| - |x + 3| = 8$
B) $|x + 2| + (x - 3)| = 8$
C) $|(x - 2) + (x + 3)| = 8$
D) $|x + 2| + |x - 3| = 8$
E) $|x - 2| + |x + 3| = 8$

- 8.

Çözüm kümesi sayı doğrusu üzerinde yukarıdaki gibi gösterilen eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|x - 2| > 3$
B) $|x - 2| < 3$
C) $|x - 2| \geq 3$
D) $|x - 2| \leq 3$
E) $|x - 2| > 3$ veya $|x - 2| < 3$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – II

9. $|x - 2| - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 6) B) (-2, 6) C) (-4, 4)
D) (-2, 8) E) (-6, 2)

10. $1 < |2x + 1| < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-3, 1] \cup (0, 2)$
B) $(-3, -1) \cup (0, 2)$
C) $(-3, -1) \cap (0, 2)$
D) $[-3, 1] \cup (0, 2)$
E) (0, 2)

11. $16 \leq a^2 \leq 36$ eşitsizliğinin gerçekte sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [4, 6]
B) [-6, -4]
C) [-6, 4]
D) $[-6, -4] \cup [4, 6]$
E) $[-6, -4] \cap [4, 6]$

12. Aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi $3x - 4 \leq 2y$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde değildir?

A) (3, 3) B) (-1, 0) C) (4, 4)
D) (-3, -6) E) (1, -1)

13. $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümü olan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 3) B) (5, 0) C) $(1, \frac{1}{2})$
D) (2, -2) E) (3, 1)

14. $\begin{cases} 5x + by = 16 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$ denklem sisteminin çözümü $(3, -\frac{1}{2})$ noktasıdır. Buna göre, b nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

15. Aşağıdaki denklem sistemlerinden hangisinin çözüm kümesi boş kümedir?

A) $\begin{cases} 2x - 5y + 4 = 0 \\ x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$
B) $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$
C) $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$
D) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$
E) $\begin{cases} 2x + 8y - 24 = 0 \\ x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} ax + 4y = 13 \\ 2x + by = 5 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümü (3, 1) sıralı ikilisi olduğuna göre, a + b kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – III

1. $\begin{cases} ax + 8y - 1 = 0 \\ 2x + by + 2 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminde bütün x gerçek sayıları için bir y değeri bulunabildiğine göre, $a + b$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -17 B) -10 C) -6 D) 6 E) 10

2. $\begin{cases} (a - 1)x + 3y - 4 = 0 \\ (2a - 2)x + by + 12 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, b aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

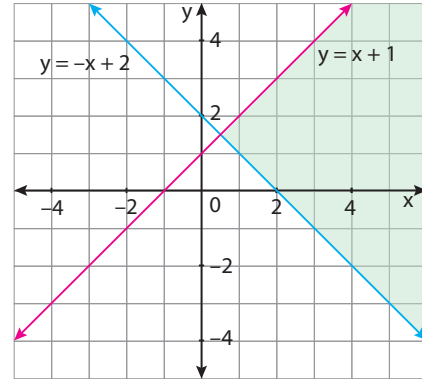
3. Bir kimyager % 20 lik alkol çözeltisi ile % 60 lık alkol çözeltilerini kullanarak 200 ml lik % 45 alkol çözeltisi elde etmek istiyor. Bu karışımı elde edebilmek % 60 lık alkol çözeltisinden kaç ml kullanmalıdır?

A) 50 B) 75 C) 100 D) 125 E) 150

4. Bir süper markette iki adet satış kasası bulunmaktadır. Birinci kasadaki kuyrukta her birinde n_1 tane ürün satın alan m_1 müşteri, ikinci kasadaki kuyrukta ise her birinde n_2 ürün satın alan m_2 müşteri beklemektedir. Her bir ürünü kasadan geçirmek t saniye ve her bir müşteri için ürünler kasadan geçtikten sonra ödeme yapıncaya kadar geçen süre p saniyedir. Aşağıdaki seçeneklerden hangisi birinci kasadaki bekleme süresinin daha kısa olduğunu ifade etmektedir?

A) $m_1(p+n_1t) = m_2(p+n_2t)$
 B) $m_1(p+n_1t) < m_2(p+n_2t)$
 C) $m_2(p+n_1t) < m_1(p+n_2t)$
 D) $m_2(p+n_2t) < m_1(p+n_1t)$
 E) $m_1(p+n_2t) < m_2(p+n_1t)$

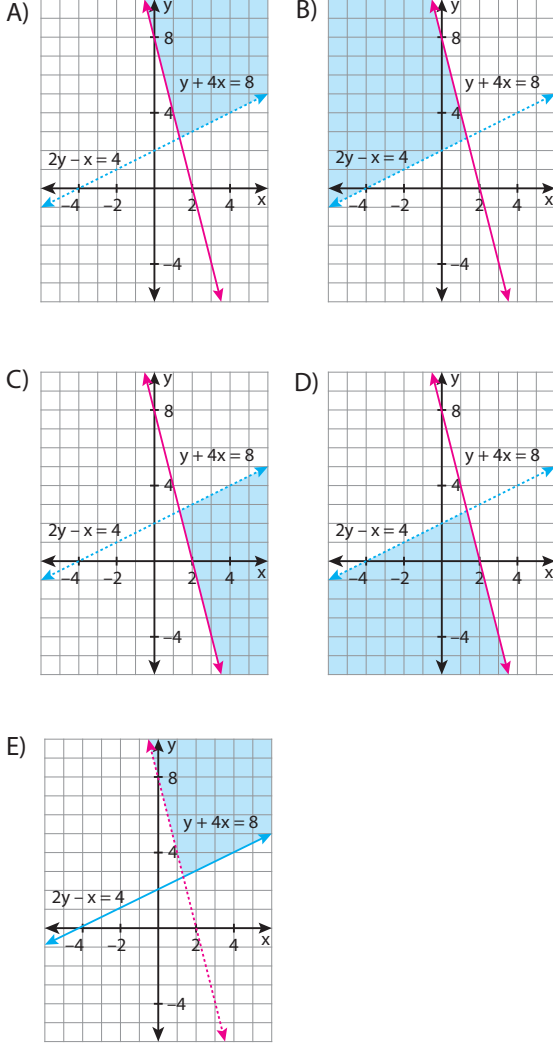
5. Aşağıda grafik üzerinde görülen taralı bölge hangi eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir?



- A) $\begin{cases} y > x + 1 \\ y < -x + 2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y \geq x + 1 \\ y < -x + 2 \end{cases}$
 C) $\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \geq -x + 2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \leq -x - 2 \end{cases}$
 E) $\begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \leq -x - 2 \end{cases}$

ÜNİTE DEĞERLENDİRME – III

6. $\begin{cases} 2y - x < 4 \\ y + 4x \geq 8 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki grafiklerden hangisinde doğru gösterilmektedir?



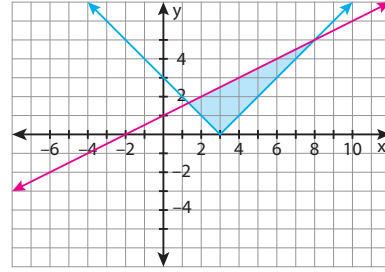
7. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözümü boş kümedir?

A) $\begin{cases} y < x + 1 \\ y < x - 2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y < x + 1 \\ y > x - 2 \end{cases}$

C) $\begin{cases} y > x + 1 \\ y < x - 2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > -x - 2 \end{cases}$

E) $\begin{cases} y > 2x + 1 \\ y < -x - 2 \end{cases}$

8. Aşağıda grafik üzerinde görülen taralı bölge hangi eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir?



A) $\begin{cases} y \geq x - 3 \\ y \geq \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y \leq |x - 3| \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} y \geq x - 3 \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} y \geq |x - 3| \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$

E) $\begin{cases} y \geq |x - 3| \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$

9. Boyunun enine oranı altın orana eşit olan dikdörtgenler **altın dikdörtgen** olarak adlandırılmaktadır. 4 m uzunluğundaki bir telden elde edilen altın dikdörtgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

(Not: Altın oran = $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$)

- A) $4\sqrt{5} - 2$ B) $4\sqrt{5} - 4$ C) $4\sqrt{5} - 8$
- D) $4\sqrt{5} - 10$ E) $4\sqrt{5} - 12$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – IV

1. $\frac{2^{12} - 2^{11}}{2^{11} + 2^9}$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{6}{5}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 4

2. $\frac{5^x + 5^x + 5^x + 5^x}{3^x + 3^x + 3^x} = \frac{500}{81}$ olduğuna göre, x değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $(0,16)^{2x-4} = 1$ olduğuna göre, $(x-3)^{19}$ un değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

4. $2^x = k$ ve $3^x = p$ olduğuna göre, 48^x in değeri aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?

A) k^3p B) k^2p^2 C) kp^4 D) k^4p E) k^3p^2

5. $x < 0$, $y > 0$ ve $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $81^{\sqrt{4x^2-4}} = 64^{\sqrt{9y^2-9}}$ olduğuna göre, $x - y$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $A = 24^3 \cdot 125^3$ olduğuna göre, A sayısı kaç basamaklıdır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

7. $\frac{25^{25} + 25^{25} + 25^{25}}{5^{50} + 5^{50} + 5^{50} + 5^{50} + 5^{50}}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{25}$

8. Bir saat koleksiyoncusunda antika değerinde bir saat bulunmaktadır. Sanat tarihçileri bu saatin şimdiki değerini 10 000 TL olarak belirlemiştir. Ayrıca saatin yıllık % 4 oranında değer kazanacağını öngörmüşlerdir. Buna göre, 5 yıl sonra satması durumunda koleksiyoncunun elde edeceği geliri veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $10000 \cdot (1 + 0,5)^4$ B) $10000 \cdot (1 + 0,05)^4$
C) $10000 \cdot (1 + 0,04)^5$ D) $10000 \cdot (1 + 0,4)^5$
E) $10000 \cdot (1 + 0,004)^5$

9. Laboratuvar ortamında bir bakteri popülasyonunun her hafta 3 katına çıktığı belirlenmiştir. A başlangıç popülasyonunu ve x hafta sayısını göstermek üzere, aşağıdaki ifadelerden hangisi bakteri popülasyonun x hafta sonra ulaştığı değeri gösterir?

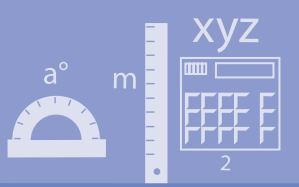
A) $A \cdot 3x$ B) $A \cdot x^3$ C) $(A \cdot 3)^x$
D) $A \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^x$ E) $A \cdot 3^x$

10. $2^{2x+2} - 2^{2x+1} - 2^{2x-2} = 28$ olduğuna göre, x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. $3\sqrt{32} - 2\sqrt{48} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{27}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$
D) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – IV

12. $\sqrt[3]{9^{3x-6}} = 4\sqrt{81^{3x+4}}$ olduğuna göre, x aşağıdaki-
lerden hangisidir?

A) -8 B) -6 C) 4 D) 0 E) 2

13. $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3}$ ifadesinin bir gerçek sayı belirt-
mesi için x in alabileceği tamsayı değerlerinin
toplamı kaçtır?

A) 9 B) 15 C) 22 D) 30 E) 33

14. $\frac{\sqrt{0,01} + \sqrt{0,81} - \sqrt{(-1)^2}}{\sqrt[3]{(-1)^3} - \sqrt{0,16} - \sqrt{0,04}}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{5}{4}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{5}{4}$

15. $\sqrt{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{4}} \dots \sqrt{1-\frac{1}{100}}$ işleminin
sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{10}$ D) 1 E) 2

16. $x < 0 < y$ olmak üzere, $\sqrt{x^2} + \sqrt[4]{y^4} + \sqrt[3]{(x-y)^3}$ ifade-
sinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - 2y$ B) $2x + 2y$ C) 0
D) $2x$ E) $2y$

17. $\sqrt{11} - \sqrt{3} = A$ olduğuna göre, $\sqrt{11} + \sqrt{3}$ ifade-
si aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $A + 3$ B) $3 \cdot A$ C) $8 \cdot A$ D) $\frac{4}{A}$ E) $\frac{8}{A}$

18. $\frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{89} + \sqrt{90}}$
işleminin sonucu nedir?

A) $3\sqrt{10}$ B) $4\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{10}$
D) 0 E) 1

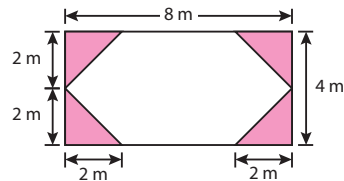
19. $\sqrt[3]{16\sqrt{8}\sqrt[3]{4}\sqrt{2}} = 2^x$ olduğuna göre, x değeri
aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{45}{36}$ B) $\frac{54}{36}$ C) $\frac{65}{36}$ D) $\frac{71}{36}$ E) $\frac{77}{36}$

20. Bir ayrıtının uzunluğu a birim olan küpün hacminin
yarısı kadar hacime sahip bir küp elde edilmek is-
teniyor. Bunun için büyük küpün bir ayrıtı ile küçük
küpün ayrıtının oranı ne olmalıdır?

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt[3]{3}$ E) $\sqrt{3}$

21. Dikdörtgen şeklindeki bir demir levha her bir kö-
şesinden bir kenarı 2 m olan ikizkenar dik üçgenler
şekildeki gibi kesiliyor. Kalan kısmın çevresi aşağı-
dakilerden hangisidir?



A) $8\sqrt{2}$ B) 16 C) $8\sqrt{2} + 16$
D) $8(\sqrt{2} + 1)$ E) 24



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

1. Yumurta almak için markete giden Ali 5 farklı paketle karşılaşmıştır.

| | Yumurta sayısı | Fiyatı |
|----------|----------------|--------|
| 1. Paket | 3 tane | 0.9 TL |
| 2. Paket | 5 tane | 1.4 TL |
| 3. Paket | 12 tane | 3.3 TL |
| 4. Paket | 20 tane | 5 TL |
| 5. Paket | 30 tane | 7.7 TL |

Verilen paketlerden hangisini seçerse Ali bir yumurtayı daha ucuza almış olur?

- A) 1. Paket B) 2. Paket C) 3. Paket
D) 4. Paket E) 5. Paket

2. Bir markette, aynı firmaya ait çekirdek paketlerinin ağırlıkları ve fiyatları aşağıdaki gibidir.

| | Ağırlık | Fiyatı |
|----------|---------|--------|
| 1. Paket | 50 gr | 0.5 tl |
| 2. Paket | 150 gr | 1.4 tl |
| 3. Paket | 250 gr | 2.2 tl |
| 4. Paket | 300 gr | 3 tl |
| 5. Paket | 450 gr | 4.2 tl |

Çekirdek almak isteyen Ayşe hangi paketi tercih ederse gram fiyatının daha ekonomik olduğu bir alışveriş yapmış olur?

- A) 1. Paket B) 2. Paket C) 3. Paket
D) 4. Paket E) 5. Paket

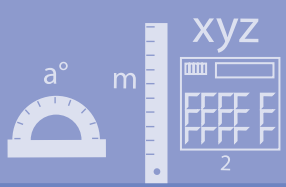
3. İki araçtan birincisinin deposu 250 TL'ye, ikincisinin deposu ise 285 TL dolmaktadır. 1. araç bir depoyla 615 km gidebilmektedir. 2. aracın daha ekonomik olması için bir depoyla en az kaç km (sonuç tamsayı olacak şekilde) yol gitmelidir?

- A) 700 B) 702 C) 704
D) 706 E) 707

4. 2.8 kg'lık salça kutusu 8,4 TL'ye, 5 kg'lık salça kutusu ise 13 TL ye satılmaktadır.

5 kg'lık salça kutusundan alan biri 2,8 kg'lık salça kutusundan alan birine göre kg başına yaklaşık kaç TL kârlı olmuştur?

- A) 0,15 TL B) 0,22 TL C) 0,35 TL
D) 0,4 TL E) 0,46 TL



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

5. Yakıt yönünden ekonomik bir dizel araç almayı planlayan Ferhat Bey dizel araç kullanan arkadaşlarına araçlarının yakıt tüketimlerini sorar. Ferhat Bey aldığı yanıtları aşağıdaki şekilde bir tabloya aktarır.

| Araçlar | Yol Uzunluğu (km) | Yakıt Tüketimi (litre) |
|---------|-------------------|------------------------|
| A | 600 km | 27 litre |
| B | 80 km | 3,5 litre |
| C | 450 km | 22,5 litre |

Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

- A) Ferhat Bey B aracını tercih etmelidir.
B) A aracının 10 km'deki yakıt tüketimini bulabilmek için $\frac{600}{27} = \frac{x}{10}$ orantısı kullanılır.
C) 100 km'de A aracı C aracından 0,5 litre fazla yakıt yakar.
D) A aracı 120 km'de 5,8 litre yakıt tüketir.
E) A aracı daha pahalıdır.

6. Aşağıda aynı markaya ait beyaz peynirlerin iki farklı ambalajdaki fiyatları verilmiştir.

1000 gr tam yağlı beyaz peynir 9,5 TL

750 gr tam yağlı beyaz peynir 7,8 TL

Bu bilgilere göre her iki ambalajdaki beyaz peynirlerin 100 gram fiyatları arasındaki fark kaç TL dir?

- A) 0,07 TL B) 0,08 TL C) 0,09 TL
D) 0,1 TL E) 0,13 TL

7. x sayısı y ile doğru ve a ile ters orantılıdır. a sayısı b ile ters ve c ile doğru orantılıdır.

Buna göre;

I. y ile a ters orantılıdır.

II. x ile c doğru orantılıdır.

III. x ile b doğru orantılıdır.

önergelerinden hangisi ya da hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve III
D) II ve III E) I ve II

8. Tuğba Ressam yaptığı resminde çiçekleri renklendirmek için kırmızı (K), sarı (S) ve beyaz (B) renkleri $\frac{K}{S} = \frac{2}{3}$ ve $\frac{S}{B} = \frac{9}{2}$ oranında karıştırıyor. Tuğba Ressam'ın oluşturduğu bu karışımındaki kırmızı rengin miktarının, beyaz rengin miktarına oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) 1 D) 3 E) 4,5

9. Akif Usta un, yağ ve şekeri sırasıyla 2:3:1 oranında karıştırarak 36 kg'lık bir karışım hazırlıyor.

Akif Usta'nın bu karışımında kullandığı şeker miktarını, un miktarına göre yorumlayınız.

- A) un miktarından 6 kg az
B) un miktarından 6 kg fazla
C) un miktarından 1 kg az
D) un miktarından 1 kg fazla
E) un miktarından 12 kg az



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

10. a sayısı b ile doğru orantılı ve c ile ters orantılıdır. a=3 ve b=4 iken c=6 olduğuna göre b=2 ve c=4 için a kaçtır?

A) 9 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{9}{7}$

11. 630 m²'lik bir arazisi olan Ömer Amca, bu arazisine bir ev yaptırmak ister. Bunun için araziye incelemeye gelen mühendis arsayı sırasıyla ev, çevre düzenlemesi ve taşıt parkı için sırasıyla 3 ile doğru, 2 ve 4 ile ters orantılı olarak üç parçaya ayırır.

Buna göre mühendisin çevre düzenlemesi için ayırdığı parça kaç m²'dir?

A) 20 B) 42 C) 50 D) 60 E) 84

12. Bir şirket bir ürünü x liraya almakta, y liraya satmaktadır. Tamsayı olan x ve y arasında $y=200-2x$ bağıntısı vardır. Bu şirketin zarar etmemesi için, bu ürünü en fazla kaç liraya almalıdır?

A) 64 B) 65 C) 66 D) 67 E) 68

13. Bir manav pazarda satmak için aldığı karpuzların tanesini 3 TL'den satarak 30 TL kar yapmıştır. Ertesi gün satışların iyi gitmemesi üzerine yine önceki gün sattığı kadar karpuzun tanesini 2,5 TL'den satmış ve 5 TL zarar etmiştir.

Buna göre bu manav iki günde kaç tane karpuz satmıştır?

A) 70 B) 90 C) 140 D) 160 E) 180

14. 3 yıl önceki yaşları ortalaması 17 olan bir ailenin 7 yıl sonraki yaş ortalaması kaçtır?

A) 17 B) 20 C) 24 D) 27 E) 30

15. Bugünkü yaşları toplamı 85 olan 5 kişilik Karataş ailesinin 3 yıl sonraki yaşları toplamı kaçtır?

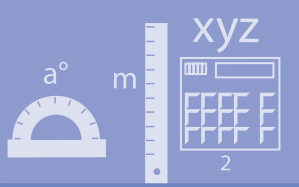
A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

16. Ömer 4, Beyza 15 yaşındadır. Kaç yıl sonra Beyza'nın yaşı Ömer'in yaşının 2 katından 6 fazla olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. Ela ile annesinin yaşları toplamı 46'dır. 2 yıl önce annenin yaşı, Ela'nın yaşının 2 katından 12 fazladır. Buna göre Ela'nın bugünkü yaşı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

18. Bir baba yaşını merak eden iki çocuğuna şu şekilde bir açıklama yapar. "Benim yaşımla sizin yaşlarınızın toplamından 27 büyüktür. 4 yıl sonra benim yaşımla sizin yaşlarınızın toplamının 2 katı olacak."

Bu bilgilere göre babanın bugün kaç yaşında olduğunu bulunuz.

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

19. Bugünkü yaşları 3 ve 4 ile orantılı olan Tuğba ve abisi Avni'nin 4 yıl sonraki yaşları 10 ve 12 ile orantılı olacaktır. Buna göre Avni'nin bugünkü yaşı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

20. 2008 yılında Seda'nın yaşının Bülent'in yaşına oranı $\frac{3}{4}$ tür. 2014 yılında ise Bülent'in yaşının Seda'nın yaşına oranı $\frac{6}{5}$ ise sırasıyla Seda ve Bülent'in doğum yıllarını bulunuz?

A) 1997 – 1995
B) 1999 – 1996
C) 1998 – 1996
D) 1999 – 1994
E) 2000 – 1996

21. Osman dünyaya geldiğinde annesi 32 yaşındadır. Anne ile Osman'ın şimdiki yaşları toplamı 54 olduğuna göre 13 yıl önce anne kaç yaşındadır?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 38

22. Ersin evden parka bisikletiyle 18 km/sa hızla gitmiş, 9 km/sa hızla dönmüştür.

Gidiş dönüşteki ortalama hızı kaç km/sa olur?

A) 12 B) 13 C) 13,5 D) 14 E) 14,5

23. Pizza yapan bir işletme pizzaları hazırladıktan sonra evlere siparişleri ulaştırmak için motorlu görevlisine bu pizzaları teslim eder. Bu görevli pizzacıdan 2 km uzakta bulunan bir eve 3 dakikada ulaşır, 2 dakika bu siparişi teslim etmek için uğraşır sonra diğer siparişi için 1 km'lik yolu 2 dakikada alır. Burada da teslim için 4 dakika harcayan görevli 2,4 km'lik dönüş yolculuğunu ise 4 dakikada alır.

Buna göre motorlu görevlinin pizzacıdan çıkışı ve girişi arasındaki ortalama hızı kaç m/sn'dir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI



1. Cem bisikletiyle evden kütüphaneye 20 km/saat hızla hareket ediyor. Ev ile kütüphane arası 28 km olduğuna göre Cem evden kütüphaneye kaç dakikada gitmiştir?

A) 72 B) 75 C) 78 D) 80 E) 84

2. Çember şeklindeki bir pistte yarışan iki bisikletli- den biri diğerinden 3 dakika önce bir turluk yarışı bitiriyor. Buna göre aşağıdaki durumlardan hangisi bu yarışın sonucunu değiştirmez?

- I. Çemberin yarıçapı ve bisikletlilerin hızları yarı yarıya düşürüldüğünde
II. Çemberin çevresinin üç katı uzunluğunda düz bir yolda yarışıldığında
III. Çemberin yarıçapı yarıya düşürülerek 2 turluk yarış yapıldığında

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III
D) II ve III E) I-II-III

3. Atletizm yarışmalarına hazırlanan bir koşucunun hedefi a birim uzunluğundaki bir yolu t saatte koşabilmektir.

Bu hedefe ulaşabilmek için koşucu yaptığı antrenmanların birinde bu yolun $\frac{1}{4}$ 'ünü $\frac{t}{3}$ saatte koştuğuna göre geri kalan yolu hedefine ulaşarak tamamlayabilmesi için ilk hızını kaç katına çıkar- malıdır? ?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

4. 540 km'lik bir yolculuğa çıkacak olan Alper'in, aracı ile kat edeceği bu yolun bir kısmı toprak bir kısmı da asfaltdır. Alper'in aracının topraktaki ve asfalttaki ortalama hızları sırası ile 60 km/saat ve 80 km/saat- tir ve araç yolun tamamını 7 saatte almıştır.

Buna göre yolun toprak kısmını Alper kaç saatte geçmiştir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

5. Samet'in çalışma hızı Erdem'in çalışma hızının 2 katıdır. Samet işe başladıktan 3 gün sonra Erdem işe başlıyor. Kalan işi ikisi birlikte 6 günde bitiri- yor. Buna göre Samet bu işi tek başına kaç günde bitirir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

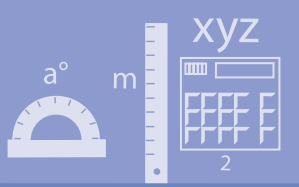
6. Uzunluğu 100 m olan bir tren saat'te 45 km hızla hareket ederek bir tüneli 12 sn de geçtiğine göre trenin boyu kaç m'dir?

A) 36 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

7. 200 m²'lik bir fındık bahçesini Güler Teyze 12 saatte toplarken Merve Teyze 18 saatte toplayabiliyor. İkisi birlikte yine bu kadar ölçüye sahip olan bir bahçede 6 saat birlikte çalıştıktan sonra Merve Teyze yemek hazırlamak için işten ayrılıyor.

Buna göre Güler Teyze kalan işi kaç saatte bitirir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

8. Bir inşaatta çalışan üç işçi belli bir işi sırasıyla a, b ve c günde bitirebilmekte ve a, b, c arasında $a < b < c$ ilişkisi bulunmaktadır.

Bu üç işçi aynı işi birlikte 16 günde bitirebildiğine göre c aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 16 B) 24 C) 47 D) 48 E) 49

9. Eşit miktarda su akıtan 4 musluk bir su tankerinin $\frac{1}{3}$ 'ünü 8 saatte dolduruyor. Bu musluklardan 3'ü aynı su tankerinin tamamını kaç saatte doldurur?

A) 12 B) 24 C) 32 D) 48 E) 54

10. A musluğu havuzun tamamını 6 saatte doldurabilmektedir. Havuzun yüksekliğinin yarısında dolu havuzu yarısına kadar 4 saatte boşaltabilen bir musluk bulunmaktadır. Havuz bosken iki musluk da birlikte açılırsa, havuz kaç saatte dolar?

A) 7 B) 11 C) 15 D) 19 E) 23

11. Uzunlukları aynı olan iki mumdan biri 3 saatte değeri ise 5 saatte yanarak bitmektedir. Bu iki mum aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra birinin boyu diğerinin boyunun $\frac{1}{3}$ 'ü olur?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

12. 9 kız, 12 erkek öğrencinin katıldığı bir sınavda kız öğrencilerin puan ortalaması 81, erkek öğrencilerin puan ortalaması 72 olduğuna göre tüm öğrencilerin puan ortalaması yaklaşık olarak kaçtır?

A) 74,3 B) 75,9 C) 77,2 D) 79 E) 80,2

13. Salih pazara 100 kg domates getirmiştir. Domateslerin $\frac{1}{5}$ i eziktir. Ezik domatesleri %10 zararla, geri kalanını da % 20 kârla satmıştır.

Toplamda ne kadar kâr veya zarar etmiştir?

A) %12 kâr B) %12 zarar C) % 13 kâr
D) % 13 zarar E) %14 kâr



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

14. Kimya dersinde ilk sınavda 72 alan Asım, 2.sınavda 90 almıştır. Asım, 2. sınavda notunu ilk sınava göre, yüzde kaç artırmıştır?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 38

15. Ramazan Bayramında konuklarına baklava ikram etmek isteyen Şaziye hanım kuruyemişçiye uğrar. Kuruyemişçinin hazırladığı ağırlıkça %40'ı fındık olan 2 kg lık fındık ceviz karışımını alır. Ancak cevizin az geleceğini düşünerek karışıma 400 gr daha ceviz eklettirir. Buna göre yeni karışımın $\frac{\text{fındık}}{\text{ceviz}}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

16. Bir satıcı bir malı % 10 kârla 220 TL'ye ve başka bir malı da %10 zararlı 198 TL'ye satıyor. Satıcının bu iki alışveriş sonucundaki kâr ve zarar durumu nedir?

A) 2 TL kârlı B) 2 TL zararlı C) 4 TL kârlı
D) 4 TL zararlı E) Kâr veya zarar etmemiştir

17. 50 L tuzlu suyun tuz oranını %12'den, %20'ye çıkarmak için kaç L su buharlaştırılmalıdır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

18. Kuruyemiş dükkânı işleten Yavuz Amca, bir üreticiden kilosu 5 TL'ye yaş üzüm alır.

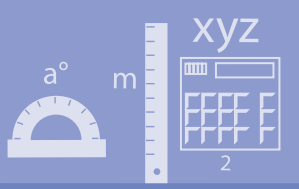
Aldığı yaş üzümün kuruduktan sonra % 35 fire verdiğini tespit eden Yavuz Amca, bu yaş üzümlerden %30 kar yapmak istediğine göre yaş üzümün kilogram satış fiyatını kaç TL olarak belirlemelidir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19. Bir ayakkabı mağazası ayakkabılarda % 25 indirim yaptığında satışlarında %40 artış oluyor.

Buna göre indirimden sonra mağazanın toplam satış gelirlerinde nasıl bir değişiklik olur?

A) % 4 azalır B) % 5 azalır C) % 4 artar
D) % 5 artar E) % 7 artar



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

20. Yıllık enflasyon oranının %60 olduğu bir ülkede, Fatih bey havaalanında çalışmaktadır.

Yılın ilk 6 ayında % 25 zam alan Fatih beyin yıl-sonunda zararda olmaması için yılın 2. yarısında alması gereken zam oranı en az % kaç olmalıdır?

A) %28 B) %30 C) %33 D) %35 E) %40

21. Misafirleri için hazırlayacağı pastada un miktarının %30'u kadar şeker kullanan Tuğba gelecek misafirlerden birinin şeker hastası olduğunu unuttuğunu fark eder. Tuğba bunun için hazırladığı karışımın $\frac{1}{5}$ 'ini alarak yerine aynı ağırlıkta un koyar.

Buna göre hazırlanan yeni karışımın ağırlıkça şeker yüzdesi kaçtır?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

22. Balık yetiştirme çiftliği olan Akif, bir havuzu iki tane musluk kullanarak tuzlu su ile doldurur.

Bu havuzu, % 25'lik tuzlu su akıtan bir musluk 5 saatte, % 40'lık tuzlu su akıtan diğer bir musluk ise 10 saatte doldurabiliyor ise boş olan bu havuz musluklardan ikisi birlikte açılarak doldurulduğunda havuzdaki tuz oranı yüzde kaç olur?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

23. Ayşe teyze bir bankaya yatırdığı x TL'nin yıllık %40'dan 4 aylık faizi ile başka bir bankaya yıllık %60'tan 6 ay yatırdığı y TL'nin faizinin eşit olduğunu görüyor.

Buna göre Ayşe Teyze'nin bankaya yatırdığı paralar arasında nasıl bir eşitlik vardır?

A) $4x = 9y$ B) $9x = 4y$ C) $4x = 6y$
D) $6y = 4x$ E) $x = y$

Ünite

3

FONKSİYONLAR

Bölüm 3.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- Fonksiyon kavramını
- Gerçek sayılar üzerinde tanımlanmış fonksiyon örneklerini
- Gerçek/gerçekçi hayat durumlarının fonksiyon olarak modellenebileceğini
- Verilen bir fonksiyona ait değerler tablosu oluşturmayı
- Bir fonksiyonun şema ve grafik yardımıyla gösterimlerini
- Birim, sabit ve doğrusal fonksiyonları
- İki fonksiyonun eşitliği kavramını

Neden Öğreneceğiz?

Fonksiyonlar matematiğin en temel konularından biridir ve matematiğin günlük hayatta en fazla kullanılan konularındandır. Bu nedenlerle fonksiyon kavramının iyi anlaşılması ve fonksiyonlarla ilgili temel cebirsel işlem becerilerinin kazanılması gerekmektedir.

Fonksiyonların kullanımını içeren veya fonksiyonlarla modellenebilen gerçek/gerçekçi hayat durumlarına verilebilecek örneklerden bazıları şunlardır:

- Zamana bağlı yer kabuğu hareketlerini gösteren sismografik ölçümler
- Farklı dövizlerin, altın ve petrolün zamana bağlı değişim değerlerinin belirtildiği grafiksel gösterimler
- Simülasyonların oluşturulması
- Uzaydaki gezegen ve yıldız gibi cisimlerin konumlarının zamana bağlı belirlenmesi
- Uzaya gönderilen uydu ve uzay araçlarının yapım ve kullanımı için gerekli olan bilimsel çalışmalar

HAZIR MIYIZ?

1. Aşağıda verilen sayılar arasındaki ilişkiye uygun birer kural oluşturunuz.

a. 2 4 6 8 ... b. 1 3 5 7 ...

c. 4 7 10 13 ç. 1 4 9 16
2. $(x + 1, 6) = (5, y - 4)$ eşitliğini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.
3. $(a^2 - b^2, 6) = (48, a + b)$ olduğuna göre, $a \cdot b$ kaçtır?
4. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{5, 8\}$ kümeleri için $A \times B$ kümesini yazınız. Şema ve grafikte gösteriniz.
5. $A \times B = \{(1,3), (1,5), (1,7), (4,3), (4,5), (4,7)\}$ olduğuna göre, A ve B kümelerini bulunuz ve $A \times B$ yi grafikte gösteriniz.
6. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{4, 5, 6\}$ kümeleri için $A \times B$ kümesinin kaç alt kümesinde A kümesinin tüm elemanları birer kez kullanılır?
7. x ve y tam sayı olmak üzere $3x + 2y = 17$ koşulunu sağlayan beş tane (x, y) ikilisi yazınız.
8. Ardışık iki doğal sayının karelerinin farkı 7 olduğuna göre, bu iki sayının toplamı kaçtır?
9. $x = 1$ ve $y = -1$ için,
 $(5x - 3y) - [(x - 3y) - (y - (x - y))]$
 işleminin sonucu kaçtır?
10. $(3a - 2b) + 4(4a + 2b) - (a + 2b)$
 işleminin sonucu nedir?
11. "Bir sayının 3 katına 7 eklenip sonucu 2 ile bölünüp 4 eklendiğinde 12 bulunuyorsa bu sayı kaçtır?" sorusunun çözümünü sağlayan denklemi yazınız.
12. "Hangi sayının yarısının 7 katı aynı sayının 3 katının 3 fazlasına eşittir?" sorusunun çözümünü sağlayan denklemi yazınız.
13. $2x + y = 12$ doğrusu veriliyor. Aşağıda verilen noktalardan hangileri bu doğrunun üzerindedir? Bulunuz.

a. (1,10) b. (2,8) c. (3,5)

ç. (7,-2) d. (9,-6) e. (3,7)

HAZIR MIYIZ?

14. Tablolardaki a ve b değerleri arasındaki kurallar tabloların altında belirtilmiştir. Bu kurallara uygun olarak tabloları doldurunuz.

a.

| a | b |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

$$b = a - 3$$

b.

| a | b |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

$$b = 7a$$

c.

| a | b |
|----|---|
| 3 | |
| 5 | |
| 7 | |
| 9 | |
| 11 | |

$$b = 3a + 2$$

15. Tablolardaki x ve y değerleri arasındaki ilişkiye uygun bir kural bulunuz.

a.

| x | y |
|---|----|
| 1 | 4 |
| 2 | 7 |
| 3 | 10 |
| 4 | 13 |
| 5 | 16 |

b.

| x | y |
|---|----|
| 1 | 7 |
| 2 | 13 |
| 3 | 19 |
| 4 | 25 |
| 5 | 31 |

c.

| x | y |
|----|----|
| 3 | 1 |
| 5 | 5 |
| 7 | 9 |
| 9 | 13 |
| 11 | 17 |

16. Bir fabrikada bir ham madde işletilerek elde edilen ürün ham maddenin değerinin dört katına satılmaktadır. Bu fabrikada bir günde 1000 TL lik ham madde işlenebilmektedir.

Fabrikada 10 günde ne kadarlık ham madde işlenir? İşlenen ham maddeden elde edilen ürünün değeri kaç TL olur?

17. Yetişkin bir ağacın 26 otomobilden yayılan karbondioksiti emme kapasitesine sahip olduğu iddia edilmektedir. Buna göre; Bulunduğunuz şehirdeki tahmini otomobil sayısına göre en az kaç ağaca ihtiyaç vardır?

18. $y = x - 2$ denkleminde, x değişkeninin aldığı değerlere karşılık olarak y değişkeninin alabileceği değerlerin oluşturduğu ikilileri grafik üzerinde gösteriniz.

19.
$$\begin{cases} 3a + 5b = 17 \\ 2a - 3b = -14 \end{cases}$$
 denklem sistemini sağlayan (a, b) ikilisi bulunuz.

Neler Öğreneceğiz?

- Fonksiyon kavramını
- Bir fonksiyonun tanım ve değer kümelerini
- Bir fonksiyon için değerler tablosu oluşturmayı
- Bağımlı-bağımsız değişkenler arasındaki ilişki olarak fonksiyonları
- İki fonksiyonun eşit olma durumunu

Anahtar Terimler

- Fonksiyon
- Tanım kümesi
- Değer kümesi
- Görüntü kümesi
- Bağımlı değişken
- Bağımsız değişken
- Eşit fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- $f: A \rightarrow B$
- $f(x)$

3.1.1. Fonksiyon Kavramı**Başlarken**

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok durumda, aralarında ilişkilendirme olan iki çokluktan birinin diğerine bağımlı olarak değiştiğini görürüz. Örneğin, her hafta tartılan bir bebek için kilonun zamana bağlı değişimi söz konusudur.

Hareket halindeki bir araba için alınan yolun zamana bağlı değişiminden bahsedebiliriz. Benzer şekilde bir fabrikadaki üretilen ürün miktarının işçi sayısına bağlı değişimini de örnek verebiliriz. Bu örneklerdeki ve benzeri durumları fonksiyon kavramını kullanarak matematiksel olarak çalışabiliriz.



Kümeler konusunda soyut ve somut nesne topluluklarını ve bu toplulukların genel özelliklerini kümelerde işlemleri kullanarak incelemiştik. Bu ünite de ise iki kümenin elemanları arasındaki belirli türdeki ilişkilendirmeleri yani fonksiyonları inceleyeceğiz. Sınıftaki öğrencilere birer öğrenci numarası vermek, bu sınıftaki öğrenciler kümesi ile bu sınıf için kullanılacak öğrenci numaralarının kümesi arasında bir fonksiyon belirttiği gibi, bir şirketin günlük kar veya zararı, bir ağacın boyunun günlere göre değişimi, gökyüzüne doğru attığımız bir topun zamana bağlı yüksekliği, güneş ile dünya arasındaki mesafenin zamana bağlı büyüklüğü de birer fonksiyon belirtmektedir.

Matematikte öğrendiğimiz birçok şey fonksiyon olarak görülebilir. Örneğin, aritmetikteki toplama ve çarpma işlemleri sayı ikililerini sayılara eşleyen birer fonksiyondur. Benzer şekilde, geometrideki öteleme ve döndürme işlemleri geometrik şekiller arasındaki bir fonksiyondur. Olasılık konusunda olayları, olma olasılıklarıyla eşleme de bir fonksiyon örneğidir. Fonksiyonlar, trigonometri, limit, türev ve integral gibi daha sonraki yıllarda göreceğimiz birçok matematik konusu için de temel bir kavramdır.

Fonksiyonlar konusunu öğrenmekle günlük hayatta karşılaşılabileceğimiz birçok problemi kolaylıkla çözebileceğimiz gibi kainatın işleyişi hakkındaki düşüncelerimiz de derinlik kazanacaktır. Kainattaki varlıklar hakkındaki bilgilerin ve kainatta gözlemlenen olayların matematiksel olarak incelenebilmesinde anahtar bir rolü olan fonksiyonların kullanımı sadece matematikle sınırlı değildir. Fizik gibi doğa bilimlerinde fonksiyonların çok etkin ve yaygın bir kullanımı vardır. Günümüzde fonksiyonlar konusu, mühendislikten ekonomiye, eğitim bilimlerinden tıpa kadar birçok alanda başarıyla kullanılmaktadır.



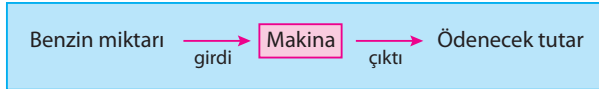
Bir akaryakıt istasyonunda alınan benzin miktarı değiştikçe ödenecek tutar da değişir. Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi bir örnekle inceleyelim.

Benzinin litresinin 5 TL olduğunu varsayalım. Farklı miktarlardaki benzin için ödenecek tutarları bir tablo ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz. Örneğin 5 litre benzin alan biri 25 TL ödemelidir.

| Miktar(L) | Tutar (TL) |
|-----------|------------|
| 1 | 5 |
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |
| 6 | 30 |
| 7 | 35 |

Akaryakıt istasyonlarında, alınan benzin miktarı ile ödenecek tutar arasındaki ilişkiyi gaz pompa makinasındaki ekrandan daha iyi izleyebiliriz. Şöyle ki, öncelikle “Litre Fiyatı” girilerek makina kullanıma hazır hale getirilir. Sonrasında benzin aldıkça miktarını “Litre” ekranından, ödenecek tutarı da “Satış Tutarı” ekranından takip edebiliriz. Bu şekilde iki çokluk arasındaki ilişkiyi gözlemleriz. Diğer bir ifadeyle, TL cinsinden ödenecek tutarın litre cinsinden benzin miktarına bağlı değişimini ekrandan izleyebiliriz. Farklı örneklerle ilgili kullanışlı genellemeler yapabilmek için bu durumu

biraz daha irdeleyelim. Gaz pompa makinası, alınan benzin miktarını okudukça ödenecek tutarı göstermektedir. Bu durumu bir şema ile gösterebiliriz:



Makinanın okuduğu değerlere “girdi”, hesapladığı tutara “çıkı” diyelim.

Örneğin, aşağıdaki şema 4 litre benzine karşılık 20 TL ödeme yapılması gerektiğini belirtiyor. Ayrıca makinanın hesaplama yapmak için kullandığı kuralı da görebiliyoruz:



Burada şu iki duruma dikkat edelim:

1. Her girdi için bir çıktı hesaplanmakta
2. Her bir girdi için yalnızca bir çıktı bildirilmekte

Fonksiyonun matematiksel tarifine geçmeden, fonksiyonun iki çokluk arasında bu iki şartı sağlayan ilişkilendirmeler olduğunu belirtelim.

Bunu biliyor muydunuz?

Değişken, bir problem ya da bir dizi işlemler bağlamında değişen bir değerdir. **Sabit** ise değişmeden kalan değerdir. Örneğin, $y = 2x + 5$ ifadesinde x ve y değişkenler, 2 ve 5 sabitlerdir.

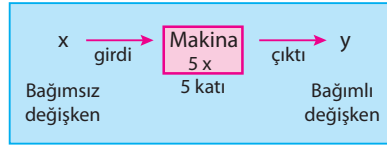
Matematik Tarihi
Johann Bernoulli



(1667-1748)

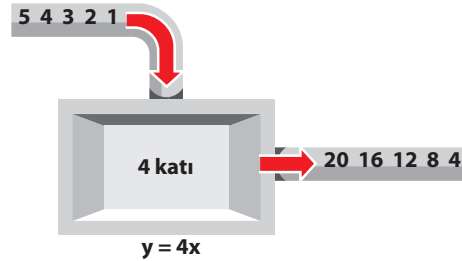
1718'de Johann Bernoulli "bir değişken ve sabit sayılarla ifade edilen herhangi bir ifade"yi fonksiyon olarak ele almıştır.

Bu makinede alınan benzin miktarı değiştikçe ödenmesi gereken tutar da değiştiğinden ikisi de değişken olarak isimlendirilebilir. Tutarın değişmesi miktara bağlıdır. Bu durumda tutara bağımlı değişken, miktara ise bağımsız değişken denilebilir. Miktarı x , tutarı y ile isimlendirdiğimizde y , x e bağımlı bir değişken olur. Yukarıdaki şekilsel gösterimi miktarın her durumu için ayrı ayrı yapmaktansa, bağımlı ve bağımsız değişkenleri kullanarak şu şekilde genel bir anlatım yapabiliriz:



Bu örnekteki x ve y arasındaki ilişkiyi $y = 5x$ ifadesiyle belirtebileceğimize dikkat edelim. Şimdi başka bir makine örneği üzerinde bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını biraz daha açalım.

Örnek 1

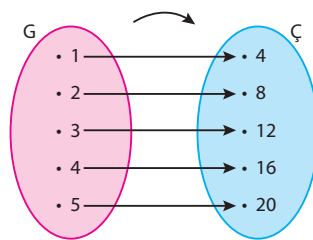


| Girdi (x) | Çıktı (y) |
|-----------|-----------|
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |
| 3 | 12 |
| 4 | 16 |
| 5 | 20 |
| x | 4x |

Makineye giren değerler (bağımsız değişkenler) ile çıkan değerler (bağımlı değişkenler) arasındaki ilişki:

$$\text{"Çıktı"} = 4 \cdot \text{"Girdi"}$$

şeklinde. Örneğin, makineye sırasıyla 1 girince 4; 2 girince 8 çıkıyor. Diğer örnekler makine ve tablo üzerinde gösterilmiştir.



Girdileri bir küme ve çıktıları başka bir küme olarak da düşünebiliriz. Bu durumda her bir girdiye karşılık gelen çıktı eşlenir.

Şimdi kümeler arasındaki ilişki bağlamında fonksiyonun matematiksel tanımını verelim.

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. A dan A ya tanımlı bir fonksiyona kısaca **A da tanımlı fonksiyon** da denir. Fonksiyonlar genellikle f, g, h, F, G, H gibi sembollerle gösterilir.

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu kısaca şu şekilde gösterilir:

$$f : A \rightarrow B$$

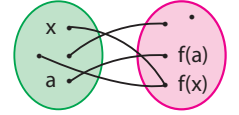
Burada **A ya** fonksiyonun **tanım kümesi**, **B ye** ise fonksiyonun **değer kümesi** denir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını, B kümesindeki bir y elemanı ile ilişkilendiriyor ise **y , x in f altındaki görüntüsü** veya **f in x teki değeri y dir** denir ve bu durum **$y = f(x)$** şeklinde ifade edilir. Tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye fonksiyonun **görüntü kümesi** denir ve **$f(A)$** ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterilir:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

İnceleyelim

Tanım Kümesi Değer Kümesi



Bağımsız değişkenler bağımlı değişkenlerde bir değişime neden olmak için manipüle edilen değişkenlerdir.

Yapmış olduğumuz fonksiyon tanımındaki şu iki özelliği vurgulayalım:

1. Tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden bir elemanla mutlaka ilişkilendirilmiştir,
- ve
2. Tanım kümesindeki herhangi bir eleman değer kümesinden en fazla bir elemanla ilişkilendirilmiştir.

$f : A \rightarrow B$ olması bu iki şartın aynı anda sağlanması anlamına gelmektedir. Şimdi bu durumu tersinden okuyalım:

Yukarıdaki şartlardan en az biri sağlanmıyorsa $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon belirtmez. Daha net bir ifadeyle,

1. Tanım kümesinde, değer kümesinden bir elemanla ilişkilendirilmeyen en az bir eleman var ise (çıktısı olmayan girdi varsa)

veya

2. Tanım kümesinde, değer kümesinden birden fazla elemanla ilişkilendirilen en az bir eleman var ise (birden fazla çıktısı olan girdi varsa)

f fonksiyon belirtmez.

Bunu biliyor muydunuz?

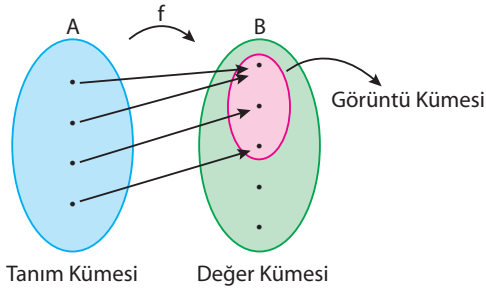
Fonksiyon kavramı, teknolojik gelişmelerin sonucu olarak da ortaya çıkan ve gerçek dünyadaki birçok girdi-çıkı durumlarını temsil eden matematiksel ilişkiler bağlamında da kullanılmaktadır.

Matematik Tarihi
Gottfried Wilhelm Leibniz



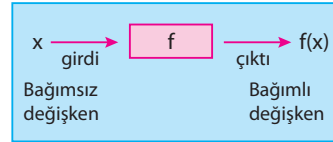
(1646-1716)

Fonksiyonu "bir çokluğun bir başkasına bağlı olarak değişmesi" olarak tanımlamıştır.



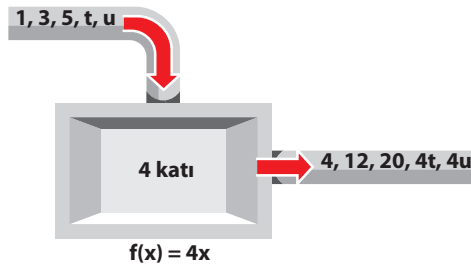
Dikkat edilecek olursa bir fonksiyonun görüntü kümesi, değer kümesinin bir alt kümesidir, yani $f(A) \subset B$ dir. Bu durum yandaki gibi bir şekilde açıklanabilir.

Yukarıdaki örneklerdeki makina benzetmesine tekrar geri dönecek olursak, f fonksiyonu x girdisini alıp $f(x)$ çıktısına götüren bir makina şeklinde düşünülebilir.

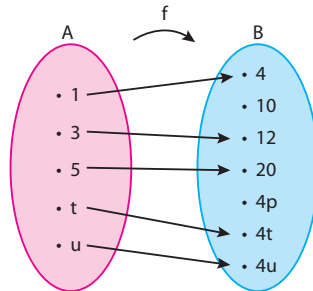


Örnek 2

$A = \{1, 3, 5, t, u\}$ ve $B = \{4, 10, 12, 20, 4p, 4t, 4u\}$ kümeleri için $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu A kümesindeki her elemanı, bu elemanların 4 katı olan ve B kümesinde yer alan elemanlarla ilişkilendirsin. Bu durumu temsilen aşağıdaki makina modellemesini kullanabiliriz.



| Girdi | Çıktı |
|-------|-------------|
| 1 | $f(1) = 4$ |
| 3 | $f(3) = 12$ |
| 5 | $f(5) = 20$ |
| t | $f(t) = 4t$ |
| u | $f(u) = 4u$ |



A kümesinden alınan girdi değerlerine karşılık gelen çıktı değerleri hem yaptığımız makina modellemesinde hem de oluşturduğumuz tabloda gösterilmiştir. Bu fonksiyon için tanım kümesi A , değer kümesi B ve görüntü kümesi $f(A) = \{4, 12, 20, 4t, 4u\}$ dur. Görüntü kümesinin değer kümesinin bir alt kümesi olduğunu, yani $f(A) \subset B$ olduğunu biliyorduk. Bu örnekte $f(A) \neq B$ olabileceğini, yani görüntü ve değer kümelerinin farklı kümeler olabileceğini gözlemliyoruz.

Burada, $f(1) = 4$ olması durumunu, "1 in f altındaki görüntüsü 4 tür" veya f nin "1 deki değeri 4 tür" şeklinde de belirtebiliriz. Benzer şekilde, bu örneğimizde 3 ün f altındaki görüntüsünün 12 ve f nin 5 teki değerinin 20 olduğunu söyleyebiliriz.

Fonksiyon herhangi bir girdiye karşılık girdinin 4 katı olan bir çıktı verdiğinden, x değişkenini kullanarak fonksiyonun yaptığı ilişkilendirmeyi kısaca

$$f(x) = 4x$$

şeklinde ifade edebiliriz. Tanım kümesinden herhangi bir elemanı temsil eden x değişkenini girdi kabul ettiğimizde çıktıyı göstermek için birbirine denk olan birkaç seçeneğimiz vardır : $4x$, $f(x)$ veya y .

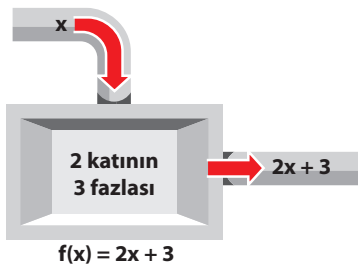
Şöyle ki;

- Fonksiyonun ilişkilendirme kuralını kullanırsak, çıktıyı $4x$ ile gösterebiliriz.
- x e karşılık gelen çıktının, x in f altındaki görüntüsü olduğunu kullanırsak, çıktıyı $f(x)$ ile gösterebiliriz.
- Bağımsız değişken olan x girdisine karşılık, çıktının bağımlı bir değişken belirteceğinden, çıktıyı y değişkeni ile gösterebiliriz.

Dolayısıyla, $f(x) = 4x$, $y = f(x)$ veya $y = 4x$ ifadeleri aynı ilişkiyi belirtmektedir.

Herhangi bir anlam karmaşasına meydan vermemek için yaptığımız sembol kullanımlarını ve tanımlamaları bu örnek üzerinde detaylı bir şekilde açıkladık. Fonksiyonlarla ilgili birkaç örnek üzerinde daha çalıştığımızda bu tanımlama ve sembollerini daha rahat kullanıyor olacağız.

Örnek 3



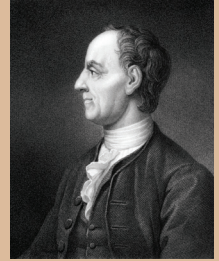
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu "verilen bir gerçekte sayıyı 2 katının 3 fazlasıyla eşleştiriyor" şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun makina modellemesini şekildedeki gibi yapabiliriz.

Gerçek sayılar sonsuz bir küme olduğundan bütün gerçekte sayıların f altındaki görüntülerini tek tek yazamayız. Bir x değişkenini kullanarak f fonksiyonunun yaptığı ilişkilendirmeyi $f(x) = 2x + 3$ şeklinde

belirtebiliriz. İstenildiği zaman da, verilen herhangi bir gerçekte sayının f altındaki görüntüsünü bulabiliriz. Örneğin, x in alabileceği bazı değerler ve bu değerlerin f altındaki görüntüleri aşağıda verilmiştir:

Matematik Tarihi

Leonhard Euler



(1707-1783)

Fonksiyonu harflerle göstermek için çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar matematiksel bir ifade olarak fonksiyonun oluşmasını sağlamıştır. Euler yaptığı tanımlamada, f fonksiyonunu göstermek amacıyla, $y = f(x)$ bağıntısını yazmıştır.

EULER in yukarıdaki resmi Jakob Emanuel Handmann tarafından çizilmiş yağlı boya tablosudur.

Bunu biliyor muydunuz?



Dünyanın etrafında binlerce uydu birer yörüngede dönmektedirler. Bu uyduların hızları bulundukları yörünge-
nin dünyaya uzaklığına göre değişiklik göstermektedir. Yani, uyduların hızları dünyaya olan uzaklıklarının bir fonksiyonudur.

$$x = -4 \text{ ise } f(-4) = 2 \cdot (-4) + 3 = -5 \text{ tir.}$$

$$x = -\frac{5}{2} \text{ ise } f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 3 = -5 + 3 = -2 \text{ dir.}$$

$$x = -1 \text{ ise } f(-1) = 2(-1) + 3 = 1 \text{ dir.}$$

$$x = 0 \text{ ise } f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \text{ tür.}$$

$$x = \frac{7}{8} \text{ ise } f\left(\frac{7}{8}\right) = 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right) + 3 = \frac{7}{4} + 3 = \frac{19}{4} \text{ tür.}$$

$$x = 1 \text{ ise } f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \text{ tir.}$$

$$x = a \text{ ise } f(a) = 2a + 3 \text{ tür.}$$

$$x = a + 1 \text{ ise } f(a + 1) = 2(a + 1) + 3 = 2a + 5 \text{ tir.}$$

$$x = t^2 \text{ ise } f(t^2) = 2t^2 + 3 \text{ tür.}$$

Bunları, daha kolay anlaşılır olması için bir tablo halinde verebiliriz:

| | | | | | | | | | |
|------|----|----------------|----|---|----------------|---|--------|--------|------------|
| x | -4 | $-\frac{5}{2}$ | -1 | 0 | $\frac{7}{8}$ | 1 | a | a + 1 | t^2 |
| f(x) | -5 | -2 | 1 | 3 | $\frac{19}{4}$ | 5 | 2a + 3 | 2a + 5 | $2t^2 + 3$ |

Bir takım x girdi değerlerine karşılık f(x) çıktı değerlerinin verildiği tabloya **f nin değerler tablosu** denilmektedir.

Şimdiye kadar verdiğimiz örneklerde fonksiyon için hep cebirsel ifadeler kullandık. Ancak, fonksiyonların tanım ve değer kümeleri arasında yaptıkları ilişkilendirmelerin cebirsel bir ifadeyle açıklanabilecek bir kuralı olmak zorunda değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 4

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri için $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer tablosu şu şekilde verilsin:

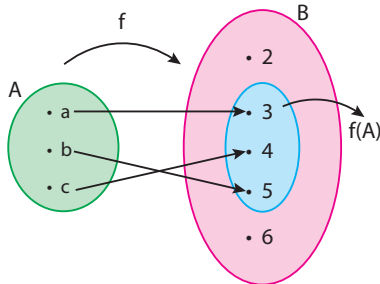
| | | | |
|------|---|---|---|
| x | a | b | c |
| f(x) | 3 | 5 | 4 |

Bu durumda $f(a) = 3$, $f(b) = 5$ ve $f(c) = 4$ olduğunu görüyoruz. Yani a, b ve c nin f altındaki görüntüleri sırasıyla 3, 5 ve 4 tür. A kümesi f nin tanım kümesi, B kümesi f nin değer kümesi ve $f(A) = \{3, 4, 5\}$ de f nin görüntü kümesidir.

f nin fonksiyon tanımında verdiğimiz şartları sağlayan bir ilişkilendirme olduğuna dikkat edelim:

1. A da, f nin B den bir elemanla ilişkilendirmediği boşta eleman yok. Yani A daki her elemanın B kümesinde olan bir görüntüsü var.
2. A da, f altında görüntüsü birden fazla olan eleman yok. Yani A daki elemanların f altında yalnız birer görüntüleri var.

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi değer kümesinde, tanım kümesinden bir elemanla eşleşmeyen eleman olması fonksiyon olmaya engel değildir.



A, B ve $f(A)$ kümelerinin Venn şemalarını kullanarak f fonksiyonunun yaptığı ilişkilendirmeyi şekildeki gibi gösterebiliriz.

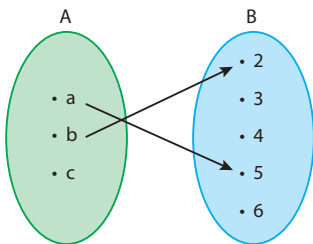
Sonlu bir A kümesi ile herhangi bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verildiğinde $f(A)$ görüntü kümesinde en az 1, en fazla $s(A)$ kadar eleman olacağını görebiliriz.

Şimdi fonksiyon belirtmeyen ilişkilendirmelere örnekler verelim:

Örnek 5

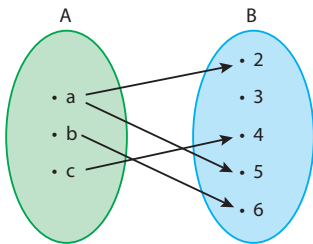
$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri için aşağıdaki ilişkilendirmeler bir fonksiyon belirtmez:

a.



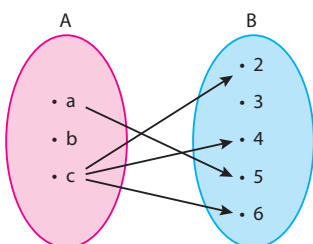
Bu ilişkilendirmede A kümesindeki c elemanı B kümesinden herhangi bir elemanla eşleşmemiştir. Dolayısıyla bu bir fonksiyon belirtmez.

b.



Bu ilişkilendirmede A kümesindeki a elemanı B kümesinden birden fazla elemanla eşleşmiştir. Dolayısıyla bu bir fonksiyon belirtmez.

c.



Burada A kümesindeki b elemanı B kümesinden herhangi bir elemanla eşleşmemiştir. Üstelik c elemanı B kümesinden birden fazla elemanla eşleşmiştir. Bu iki nedenden dolayı bu ilişkilendirme bir fonksiyon belirtmez.

Örnek 6

Aşağıda verilen durumların fonksiyon belirtip belirtmeyeceğini bulalım.

- a. Alfabedeki her harfin kendisiyle başlayan günle ilişkilendirilmesi
- b. Sınıftaki öğrencilerin doğum günleri ile ilişkilendirilmesi
- c. Ülkemiz vatandaşlarının Türkiye Cumhuriyeti kimlik numaralarıyla ilişkilendirilmesi

Çözüm

- a. Alfabedeki harfler = {a, b, c, ..., z}, günlerin baş harfleri = {p, s, ç, c} olduğundan her harfin eşleşeceği bir günün baş harfi yoktur. Bu durum bir fonksiyon belirtmez.
- b. Sınıftaki her bir öğrencinin yalnız bir doğum günü olduğundan bu durum sınıftaki öğrenciler kümesinden sınıftaki öğrencilerin doğum günlerini kapsayan herhangi bir doğum günleri kümesine tanımlı bir fonksiyon belirtir.
- c. Her bir vatandaşlarımız için yalnız bir Türkiye Cumhuriyeti kimlik numarası olduğundan bu durum bir fonksiyon belirtir.

Örnek 7

$f: \{0, 3, 5, \frac{2}{3}, -4, \sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 3x - 4$ ile verilen fonksiyonun görüntü kümesini bulalım.

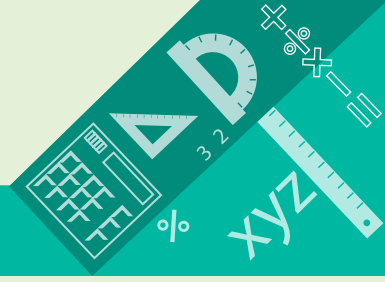
Çözüm

Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünü bulalım.

| x | f(x) |
|---------------|---|
| -4 | $f(-4) = 3 \cdot (-4) - 4 = -16$ |
| 0 | $f(0) = 3 \cdot 0 - 4 = -4$ |
| $\frac{2}{3}$ | $f(\frac{2}{3}) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -2$ |
| $\sqrt{2}$ | $f(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 4$ |
| 3 | $f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 5$ |
| 5 | $f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 11$ |

Buna göre görüntü kümesi $\{-16, -4, -2, 3\sqrt{2} - 4, 5, 11\}$ dir.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında fonksiyon kavramını ve bir kümenin (tanım kümesi) her bir elemanını başka bir kümenin (değer kümesi) bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişki olarak fonksiyon tanımını inceleyeceğiz.

“Aklından bir sayı tut” diyerek başlayan sorularla karşılaşmışsınızdır. Bizde bu ifadeden hareketle bir örnekle başlayalım.

Adım 1 ►

Aklınızdan bir doğal sayı tutunuz.

Adım 2 ►

Bu sayıyı 4 ile çarpınız.

Adım 3 ►

Elde ettiğiniz sayıya 2 ekleyiniz.

Adım 4 ►

Bulduğunuz sayıyı 2 ye bölünüz.

Adım 5 ►

Elde ettiğiniz sonucu söyleyiniz.

Adım 6 ►

Bu aşamalara göre tabloyu doldurunuz.

Adım 7 ►

Tuttuğunuz sayı ile çıkan sonuç arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz. Bu ilişki bir fonksiyon mudur? Neden?

Adım 8 ►

Şimdi de, yukarıda verilen adımları sondan başa doğru uygulayarak yandaki tabloyu doldurunuz.

| Sayı | Sonuç |
|------|-------|
| 1 | ... |
| 2 | ... |
| 3 | ... |
| x | ... |

| Sayı | sonuç |
|------|-------|
| ... | 21 |
| ... | 35 |
| ... | 43 |

Örnek 8

Bir $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu "Her bir tam sayıyı, karesinin 2 katının 4 eksiğine götürüyor." şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, 2, 5 ve $2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) sayılarının görüntülerini bulalım.

Çözüm

Bizden $f(2)$, $f(5)$ ve $f(2k)$ ifadelerin değerlerini bulmamız isteniyor. Önce fonksiyonun verilen kuralını cebirsel bir ifadeye dönüştürmemiz tekrar eden benzer işlemler için bize kolaylık sağlayacaktır.

Herhangi bir n tam sayısının karesi n^2 dir. Dolayısıyla n sayısının karesinin 2 katı $2n^2$ dir. Buradan n tam sayısının karesinin 2 katının 4 eksiğinin $2n^2 - 4$ olduğu sonucuna ulaşırız. Bu durumda, fonksiyonun kuralını $f(n) = 2n^2 - 4$ şeklinde verebiliriz (bu fonksiyonun kuralını $f(x) = 2x^2 - 4$ olarak da verebiliriz, çünkü hem n hem x değerleri tanım kümesinden alınan bir değişkeni belirtmektedir). Buna göre,

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

$$f(5) = 2 \cdot 5^2 - 4 = 2 \cdot 25 - 4 = 46$$

$$f(2k) = 2 \cdot (2k)^2 - 4 = 2 \cdot 4k^2 - 4 = 8k^2 - 4$$

olur. Böylece, 2'nin f altındaki görüntüsü 4, 5'in görüntüsü 46 ve $2k$ 'nin görüntüsü $8k^2 - 4$ 'tür.

Örnek 9

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu $f(x) = 8 - x$ ile veriliyor. Bu fonksiyonun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

Fonksiyonun kuralını kullanarak tanım kümesindeki elemanların görüntülerini bulalım.

$$f(1) = 8 - 1 = 7$$

$$f(3) = 8 - 3 = 5$$

$$f(5) = 8 - 5 = 3$$

$$f(7) = 8 - 7 = 1 \text{ olur.}$$

Bu nedenle, görüntü kümesi $f(A) = \{1, 3, 5, 7\}$ olur.

Örnek10

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = x + 5$ ile verilen bir fonksiyon için tanım, değer ve görüntü kümeleri hakkında $B = \{4, 6, 8\}$, $f(A) = B$ ve $s(A) = 3$ olduğu biliniyor. Buna göre A kümesini bulalım.

Çözüm

$s(A) = 3$ olduğundan $a \leq b \leq c$ olmak üzere $A = \{a, b, c\}$ olsun. Şimdi a, b ve c değerlerini bulalım.

Bu durumda $\{4, 6, 8\} = f(A) = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{a + 5, b + 5, c + 5\}$ olur.

Buradan $a + 5 = 4$, $b + 5 = 6$ ve $c + 5 = 8$ eşitliklerinden $A = \{-1, 1, 3\}$ olarak bulunur.

Örnek11

$f: (1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 4x + 2$ ile verilen f fonksiyonun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

Bu fonksiyonun tanım kümesi $(1, 7]$ aralığı olduğundan, tanım kümesindeki herhangi bir x elemanı $1 < x \leq 7$ eşitsizliklerini sağlar. Bu aralıktaki her bir sayının görüntüsünü bulmak yerine şimdi bu tür x ler için $f(x)$ in sağladığı eşitsizlikleri bulalım.

$$x \in (1, 7] \Rightarrow 1 < x \leq 7$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 1 < 4x \leq 4 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 4 < 4x \leq 28$$

$$\Rightarrow 4 + 2 < 4x + 2 \leq 28 + 2$$

$$\Rightarrow 6 < 4x + 2 \leq 30$$

$$\Rightarrow 6 < f(x) \leq 30$$

$$\Rightarrow f(x) \in (6, 30]$$

Tekrar edecek olursak, $x \in (1, 7]$ iken $f(x) \in (6, 30]$ olmaktadır.

Bu nedenle, $f((1, 7]) \subset (6, 30]$ olur.

Şimdi herhangi bir $y \in (6, 30]$ değerinin tanım kümesi olan $(1, 7]$ aralığından bir elemanın görüntüsü olup olmadığına bakalım.

$$f(x) = y \Rightarrow 4x + 2 = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 2}{4} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} 6 < y \leq 30 &\Rightarrow 4 < y - 2 \leq 28 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{y-2}{4} \leq 7 \\ &\Rightarrow 1 < x \leq 7 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Yani $f(x) = y$ ve $y \in (6, 30]$ ise $1 < x \leq 7$ olmalıdır. Buradan $(6, 30] \subset f((1, 7])$ sonucunu elde etmiş oluruz.

$f((1, 7]) \subset (6, 30]$ ve $(6, 30] \subset f((1, 7])$ olduğundan $f((1, 7]) = (6, 30]$ sonucunu elde ederiz.

Fonksiyonların grafikleri ve doğrusal fonksiyon konularını öğrendikten sonra bu problemin daha kısa çözümlerini de yapabiliyor olacağız.

Örnek12

Bir f fonksiyonu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri ifadelerin değerlerini bulalım.

- a. $f(x + 5)$
- b. $f(x - 6)$

Çözüm

- a. $f(x) = x^2$ eşitliğinde x gördüğümüz yere $x + 5$ yazalım:

$$f(x + 5) = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 \text{ olarak bulunur.}$$

- b. Benzer şekilde $f(x - 6) = (x - 6)^2$

$$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2$$

$$= x^2 - 12x + 36 \text{ dır}$$

Örnek13

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ kuralı ile veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım.

- a. $f(0)$
- b. $f(-1)$
- c. $f(2x)$
- ç. $f(x + 1)$
- d. $f(a + b)$

Anahtar Bilgi

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Çözüm

Bu ifadeler sırasıyla $0, -1, 2x, x+1$ ve $a+b$ nin f altındaki görüntüleridir. f nin kuralında x yerine bu değerleri yazarak görüntülerini bulabiliriz.

a. $f(0) = \frac{0+2}{0^2+1} = 2$

b. $f(-1) = \frac{-1+2}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2}$

c. $f(2x) = \frac{2x+2}{(2x)^2+1} = \frac{2x+2}{4x^2+1}$

ç. $f(x+1) = \frac{(x+1)+2}{(x+1)^2+1} = \frac{x+3}{x^2+2x+2}$

d. $f(a+b) = \frac{(a+b)+2}{(a+b)^2+1} = \frac{a+b+2}{a^2+2ab+b^2+1}$

Örnek 14

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2 - x + 1$ kuralı ile veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım.

a. $f(-1)$

b. $f(2)$

c. $f(x^2)$

ç. $f(x+1)$

d. $x \neq 1$ iken $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

e. $x \neq a$ iken $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Çözüm

a. $f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

b. $f(2) = (2)^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

c. $f(x^2) = (x^2)^2 - x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$

ç. $f(x + 1) = (x + 1)^2 - (x + 1) + 1 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1 = x^2 + x + 1$

d. $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 1 - (1^2 - 1 + 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$, bu sadeleştirme

işlemini $x \neq 1$ koşulu altında çalıştırdığımızdan yapabildiğimize dikkat edelim.

e. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - x + 1 - (a^2 - a + 1)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2 - (x - a)}{x - a}$
 $= \frac{(x + a)(x - a) - (x - a)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a - 1)}{x - a} = x + a - 1$

yine buradaki sadeleştirme işlemini $x \neq a$ koşulu altında çalıştırdığımızdan yapabiliyoruz.

Örnek 15

Bir f fonksiyonu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x + 1$ olarak tanımlanıyor. Buna göre

$$f(2) + f(-1) + f(5) = f(m + 1) + 6$$

eşitliğini sağlayan m değerini bulalım.

Çözüm

Öncelikle eşitlikteki her bir ifadenin değerini bulmalıyız:

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

$$f(m + 1) = 2 \cdot (m + 1) + 1 = 2m + 3$$

bulunur ve verilen eşitlik $5 + (-1) + 11 = 2m + 3 + 6$ şeklinde olur. Buradan $15 = 2m + 9$ ve $m = 3$ olarak bulunur.

Örnek 16

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x+3) = 9x - 11$ olarak tanımlanan f fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım.

- a. $f(4)$ b. $f(0)$

Çözüm**1. Yol**

- a. $f(4)$ ün değerini bulmak için $f(x+3) = 9x - 11$ eşitliğinin sol tarafını $f(4)$ yapan x değerini bulmalıyız.

$$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ olduğundan}$$

$$x = 1 \text{ için } f(x+3) = 9x - 11 \Rightarrow f(1+3) = 9 \cdot 1 - 11 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow f(4) = -2 \text{ olur.}$$

- b. Benzer şekilde,

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ olduğundan}$$

$$x = -3 \text{ için } f(x+3) = 9x - 11 \Rightarrow f(-3+3) = 9 \cdot (-3) - 11 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow f(0) = -38 \text{ olur.}$$

2. Yol

Öncelikle verilen eşitliği kullanarak $f(x)$ in ifadesini bulalım.

$x + 3$ te x yerine $x - 3$ yazarsak x elde edileceğinden

$$f(x-3+3) = 9(x-3) - 11 \Rightarrow f(x) = 9x - 38$$

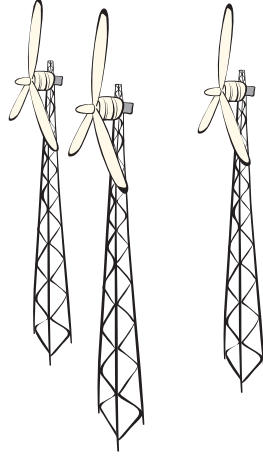
Buradan

a. $f(4) = 9 \cdot 4 - 38 = -2$

b. $f(0) = 9 \cdot 0 - 38 = -38$

olarak bulunur.

Örnek 17



Rüzgâr türbininin rüzgâr enerjisinden ürettiği elektrik, rüzgâr türbininin verimliliğine, havanın yoğunluğuna, rüzgârın dik olarak geçmekte olduğu alana ve en önemlisi rüzgârın hızına bağlıdır. Rüzgâr gücü, rüzgâr enerjisinden üretilen elektriğin miktarını belirtmek için kullanılan bir tabirdir. Bir rüzgâr türbininde havanın yoğunluğu $1,225 \text{ kg/m}^3$ iken rüzgâr gücünü $P(v)$ (Watt) rüzgârın hızı v (m/s) cinsinden veren fonksiyon şu şekilde olsun:

$$P(v) = v^3 \cdot 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Buna göre rüzgârın hızı 10 m/s ve 20 m/s iken bu rüzgâr türbininin üreteceği gücün kaç Watt olduğunu hesaplayalım. ($\text{Watt} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$ eşitliğini kullanalım.)

Rüzgâr hızı iki katına çıkınca bu rüzgâr türbininin üreteceği gücün kaç katına çıkacağını bulalım ($v \neq 0$).

Çözüm

Rüzgârın hızı 10 m/s iken $v = 10 \text{ m/s}$ olacağından bu rüzgâr türbininin rüzgâr gücü

$$\begin{aligned} P(10) &= 10^3 (\text{m/s})^3 \cdot 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \\ &= 100 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = 100 \text{ Watt olacaktır.} \end{aligned}$$

Rüzgârın hızı 20 m/s iken $v = 20 \text{ m/s}$ olacağından bu rüzgâr türbininin rüzgâr gücü

$$\begin{aligned} P(20) &= 20^3 (\text{m/s})^3 \cdot 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \\ &= 800 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = 800 \text{ Watt olacaktır.} \end{aligned}$$

Rüzgâr hızı $v \text{ m/s}$ iken bu rüzgâr türbininin rüzgâr gücü $P(v) = v^3 \cdot 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ idi.

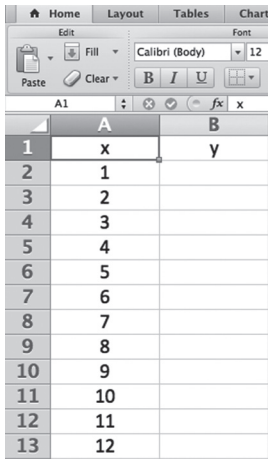
Rüzgâr hızı $2v \text{ m/s}$ iken bu rüzgâr türbininin rüzgâr gücü $P(2v) = 8v^3 \cdot 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ olacağından, $P(2v) = 8 \cdot P(v)$ olur. Bu nedenle rüzgâr hızı 2 katına çıkarken rüzgâr gücü 8 katına çıkmaktadır.

MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, bir elektronik tablolama programı yardımıyla bağımsız ve bağımlı değişken arasındaki ilişkiyi ve bu ilişkinin grafiksel gösterimini inceleyeceğiz.

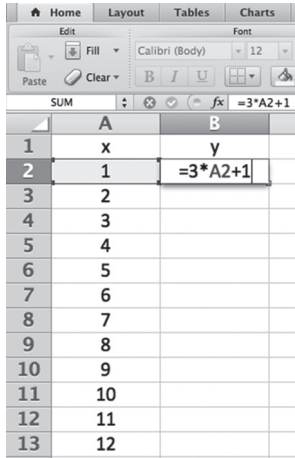
Araç- Gereçler: Bir elektronik tablolama programı.

- Bir elektronik tablolama programını (Excel vb.) açıp x ve y sütunları oluşturunuz.
- x sütununa istediğiniz kadar değer girişi yapınız. y sütunundaki değerleri $y = 3x + 1$ kuralına uygun olarak bulunuz. Bunun için;
- y sütununun ilk hücresine çift tıkladıktan sonra $= (3 * A2 + 1)$ yazıp enter tuşuna basınız. A2 x sütunundaki ilk hücreyi temsil etmektedir. Hücrenin kendisine tıklandığında formüle hücrenin kodu otomatik eklenir.
- Hücrenin sağ alt köşesindeki noktaya tıklayıp aşağıya x sütunu kadar çekip bırakınız. Program benzer formülü x deki tüm değerler için uygulayacaktır.



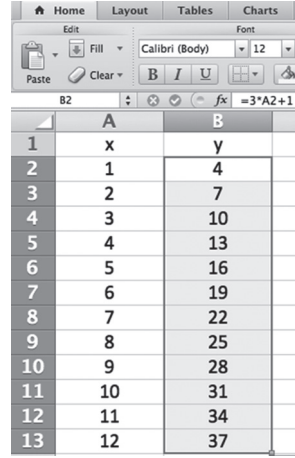
| | A | B |
|----|----|---|
| 1 | x | y |
| 2 | 1 | |
| 3 | 2 | |
| 4 | 3 | |
| 5 | 4 | |
| 6 | 5 | |
| 7 | 6 | |
| 8 | 7 | |
| 9 | 8 | |
| 10 | 9 | |
| 11 | 10 | |
| 12 | 11 | |
| 13 | 12 | |

Şekil 1



| | A | B |
|----|----|---------|
| 1 | x | y |
| 2 | 1 | =3*A2+1 |
| 3 | 2 | |
| 4 | 3 | |
| 5 | 4 | |
| 6 | 5 | |
| 7 | 6 | |
| 8 | 7 | |
| 9 | 8 | |
| 10 | 9 | |
| 11 | 10 | |
| 12 | 11 | |
| 13 | 12 | |

Şekil 2



| | A | B |
|----|----|----|
| 1 | x | y |
| 2 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 7 |
| 4 | 3 | 10 |
| 5 | 4 | 13 |
| 6 | 5 | 16 |
| 7 | 6 | 19 |
| 8 | 7 | 22 |
| 9 | 8 | 25 |
| 10 | 9 | 28 |
| 11 | 10 | 31 |
| 12 | 11 | 34 |
| 13 | 12 | 37 |

Şekil 3

- Verileri seçip grafik menüsünden grafiğini çiziniz.
- $y = f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu için $f(7)$, $f(100)$ değerlerini bulunuz.
- $f(a) = 37$ ise a değerini bulunuz.
- $A = \{19, 27, 71, 87, 91\}$ için $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.
- $A = \{0, 12, 2, 4, 7, 567, 13, 234, 543\}$ kümesi için $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.

Benzer şekilde yine elektronik tablolama programını kullanarak aşağıda istenenleri yapınız.

- $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = -x + 9$, $y = \frac{2x-1}{5}$ fonksiyonlarının belirlediğiniz tanım kümeleri için görüntü kümelerini bulunuz.

Örnek 18

a pozitif bir tam sayı olmak üzere bir kenar uzunluğu a birim olan bir karenin kenar uzunluğuyla alanı arasındaki ilişkinin bir fonksiyon olup olmayacağını inceleyelim.

Çözüm

| Kenar uzunluğu (br) | ALAN (br ²) |
|---------------------|-------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| ... | ... |
| a | a ² |

Bir kenarının uzunluğu a br olan karenin alanı a^2 br² dir. Burada kenar uzunlukları kümesinin her bir elemanı, alan kümesinde bir ve yalnız bir elemana karşılık gelmektedir.

$$f: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{1, 4, 9, \dots\}$$

$$f(a) = a^2 \text{ olur.}$$

Buradan kenar uzunlukları verilen karelerin kenar uzunluklarıyla alanları arasındaki eşleme fonksiyon belirtir.

İki Fonksiyonun Eşitliği

Fonksiyonların eşitliğini tanımlamadan önce bir örnek üzerinde duralım.

$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ cebirsel ifadesini sadeleştirsek $x + 3$ cebirsel ifadesini elde ederiz.

Şöyle ki,

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x + 3)(\cancel{x - 1})}{(\cancel{x - 1})} = x + 3$$

olur. Ancak $x + 3$ ifadesi x in alacağı bütün gerçekte sayılar için bir gerçekte sayı belirtse de

$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ ifadesi $x = 1$ de tanımsız olmakta ve bu değeri haricindeki x gerçekte sayıları için bir gerçekte sayı olmaktadır. Dolayısıyla, şu soruyu sorabiliriz.

Kuralları $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ ve $g(x) = x + 3$ ile verilen f ve g fonksiyonlarının tanım ve değeri kümeleri ile eşit fonksiyonlar olup olmadıkları hakkında neler söyleyebiliriz?

Bu soruların cevapları fonksiyonun tanımında yer almaktadır. Fonksiyonun tanımı gereği bir tanım ve bir görüntü kümesi vardır. Şimdi verdiğimiz örnekteki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerinin neler olabileceğini bulalım.

$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ ifadesi $x = 1$ de tanımsızdır. Ama x in alacağı diğer gerçekte sayılarda tanımlıdır. Dolayısıyla f fonksiyonunun tanım kümesi 1 haricindeki herhangi bir gerçekte sayıyı içeren bir küme olabilir.

$g(x) = x + 3$ ifadesi herhangi bir değer için tanımlı olduğundan g fonksiyonunun tanım kümesi herhangi bir gerçekte sayıyı içeren bir küme olabilir.

Ayrıca, x gerçekte sayısı 1 den farklı ise $f(x) = g(x)$ olacağına dikkat edelim.

Örneğin, f fonksiyonu $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve g fonksiyonu $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olabilir. Böyle olması durumunda f ve g fonksiyonları farklı fonksiyonlar belirtecektir çünkü, tanım kümeleri farklı olacaktır.

Başka bir seçenek olarak f fonksiyonu $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve g fonksiyonu $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olabilir. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri aynı olduğu gibi yapacakları ilişkilendirmeler de aynı olacaktır. Yani tanım kümesindeki herhangi bir x için $f(x) = g(x)$ olacaktır. Bu nedenle, bu seçenekte f ve g fonksiyonları eşit fonksiyonlar olacaktır.

Fonksiyonların eşit olması için iki önemli hususa dikkat etmemiz gerekir:

1. Fonksiyonların eşit olması için tanım ve görüntü kümelerinin eşit olması
2. Tanım kümesinin her bir elemanı için fonksiyonların görüntülerinin aynı olması

O halde tanımımızı şu şekilde yapabiliriz:

$f: A \rightarrow B$ ve $g: C \rightarrow D$ fonksiyonları verilsin. Eğer

1. $A = C$ (tanım kümelerinin eşitliği)
2. $B = D$ (görüntü kümelerinin eşitliği)
3. Her bir $x \in A = C$ için $f(x) = g(x)$

(tanım kümesindeki elemanlara karşılık gelen görüntünün eşitliği)

şartları sağlanırsa, f ile g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

Örnek19

$A = \{-1, 4\}$, $B = \{-1, 14\}$ olmak üzere,

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2 - 2$ ve $g: A \rightarrow B$, $g(x) = 3x + 2$ ile tanımlanan f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadığını bulalım.

Çözüm

f ve g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri aynıdır. Şimdi bu fonksiyonların yaptığı ilişkilendirmelere bakalım.

$$x = -1 \text{ için } f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

$$x = 4 \text{ için } f(4) = 4^2 - 2 = 14$$

$$x = -1 \text{ için } g(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$$

$$x = 4 \text{ için } g(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

olduğundan $f(-1) = g(-1)$ ve $f(4) = g(4)$, yani tanım kümesindeki her bir elemanın f ve g altındaki görüntüleri eşittir. Bu nedenle bu fonksiyonlar eşittir yani $f = g$ dir.

Örnek20

Aşağıdaki fonksiyonların eşit olup olmadıklarını inceleyelim.

| | | | | | | |
|------|---|---|---|----|----|----|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 11 | 15 |
| f(x) | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 19 |

$$f, g: \{3, 4, 5, 6, 11, 15\} \rightarrow \{7, 8, 9, 10, 15, 19\}, \quad g(x) = x + 4$$

Çözüm

$g(x)$ fonksiyonun değerler tablosunu oluşturduğumuzda $f(x)$ ile aynı değerler tablosu elde edilir. Ayrıca f ve g nin tanım ve değer kümeleri de aynıdır. Bu durumda $f = g$ dir.

Örnek21

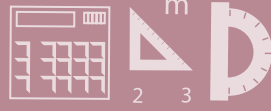
Aşağıda verilen f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını belirleyelim.

$$f: \{1, 3, 5, 6, 8\} \rightarrow \{7, 9, 11, 12, 14, 15\}, \quad f(x) = x + 6$$

$$g: \{1, 3, 5, 6, 9\} \rightarrow \{7, 9, 11, 12, 14, 15\}, \quad g(x) = x + 6$$

Çözüm

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri eşit değildir. Aynı kurala sahip olsalar da f ve g eşit fonksiyonlar değildir. Yani $f \neq g$ dir.



KENDİMİZİ SINAYALIM



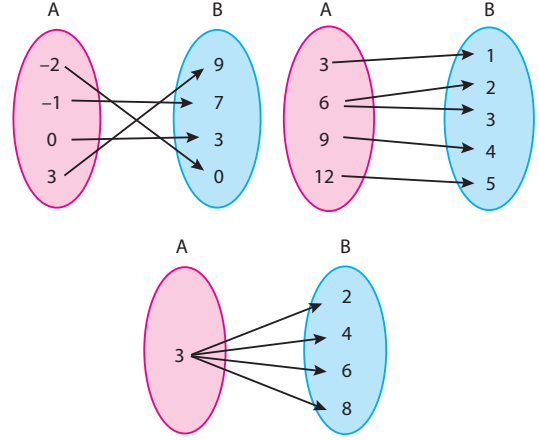
Kavram Yoklama ve Muhakeme

1. Aşağıdaki ifadelerde verilen boşluklara uygun sözcükler yazınız.
 - a. A ve B kümeleri boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A'nın her elemanının, B'nin yalnız bir elemanı ile ilişkilendirilmesine A'dan B'ye bir denir.
 - b. A kümesinden B kümesine tanımlanan bir fonksiyon verilsin. A kümesine bu fonksiyonun B kümesine de denir.
 - c. $f: A \rightarrow B$ olmak üzere $f(A)$ kümesine f fonksiyonunun denir.
 - ç. $f: A \rightarrow B$ ve $y = f(x)$ olarak tanımladığımız fonksiyonumuzda x değerine değişken, y değerine ise x'in aldığı değerlere bağlı olarak değiştiği için değişken denir.

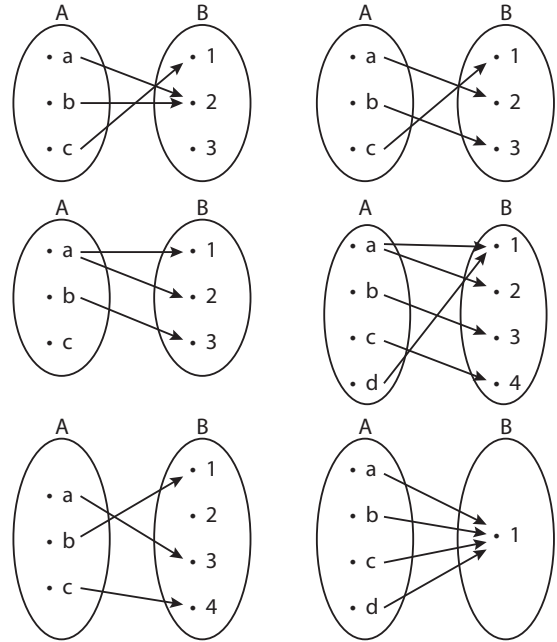
2. Fonksiyon kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız.

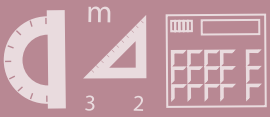
3. Tanım kümesi, değer kümesi, görüntü kümesi kavramlarını açıklayınız.

4. Aşağıdaki kümeler arasındaki eşlemelerin fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayınız.



5. Aşağıda verilen şemalardan kaç tanesinin A'dan B'ye bir fonksiyon olduğunu bulunuz.





KENDİMİZİ SINAYALIM

Alıştırmalar

1. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $f(x) = 7x - 6$ ise bu fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

2. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $A = \{-4, -3, -2, -1\}$ ve $f(x) = 1 - 2x$ ise bu fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

3. $f: \{6, 8, 10, 12\} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu için değerler tablosu

| | | | | |
|------|---|----|----|----|
| x | 6 | 8 | 10 | 12 |
| f(x) | 2 | -3 | 1 | -4 |

olarak verilmiştir. Verilenlere göre $\frac{f(6) - f(8)}{f(10) + f(12)}$ ifadesinin eşiti nedir?

4. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonunun değerler tablosu şu şekildedir.

| | | | | | |
|------|----|---|---|---|---|
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| f(x) | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Verilenlere göre $\frac{f(9) + f(5) - f(7)}{f(3) - f(1)}$ ifadesinin eşiti nedir?

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 3x + 8$ ile verilen f fonksiyonu için $f((2, 6])$ kümesini bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = -2x + 1$ ile verilen f fonksiyonu için $f([1, 4))$ kümesini bulunuz.

7. Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu "Her bir gerçekte sayıyı, 5 fazlasının 3 katına eşliyor." şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, (-5) in ve 7 nin görüntülerini bulunuz.

8. Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu "Her bir doğal sayıyı, sekiz katının 12 fazlasına eşliyor." şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, 3 ün ve 6 nın görüntülerini bulunuz.

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 3x - 6$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

- a. $f(x+1)$ b. $f(7 - 2x)$
c. $f(9x - 6)$ ç. $f(2x^2 + 11)$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

- a. $f(x+1)$ b. $f(3x - 1)$
c. $f(-x)$ d. $f(x^2)$

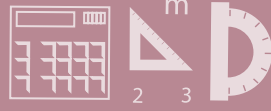
11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2 + 1$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

- a. $f(x+3)$ b. $f(x - 1)$
c. $f(6 - x)$ d. $f(x^2 + 1)$

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2 - 5$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

- a. $f(2x)$ b. $f(1 - x)$
c. $f(4x + 6)$ ç. $f(x^2 - 1)$

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 5x - 4$ ile verilen f fonksiyonu için $f([-3, 9])$ kümesini bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 4x + 2$ fonksiyonu olarak tanımlanıyor.
 $f(3) + f(-2) + f(1) = f(a+2) + 2$ ise a değerini bulunuz.

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonu olarak tanımlanıyor.
 $4 \cdot f(3) + 5 \cdot f(-2) = 3 \cdot f(c+1) - 4$ ise c değerini bulunuz.

16. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x-8) = 3x - 1$ olarak tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri bulunuz

- a. $f(7)$ b. $f(-5)$
c. $f(2)$ ç. $f(-6)$

17. $A = \{2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere,
 $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 3x - 8$
 $g: A \rightarrow B$, $g(x) = 5x - 12$
ile tanımlanan f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadığını bulunuz.

18. $A = \{-6, 3\}$, $B = \{-3, 0, 3, 6, 9\}$ olmak üzere,

$$f: A \rightarrow B, f(x) = x^2 + 4x - 12$$

$$g: A \rightarrow B, g(x) = x + 6$$

ile tanımlanan f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını bulunuz.

19. $A = \{-3, 0, 3\}$, $B = \{-27, -5, 0, 5, 27\}$ olmak üzere,

$$f: A \rightarrow B, f(x) = x^3 \text{ ve}$$

$g: A \rightarrow B, g(x) = 9x$ ile tanımlanan f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını bulunuz.

20. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$ fonksiyonu için aşağıdaki değerleri bulunuz.

- a. $f(3)$ b. $f(100)$ c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$
ç. $f(-5)$ d. $f(\sqrt{2})$ e. $f(p)$

21. Aşağıdaki tablolarda verilen y bağımlı değişkenini x bağımsız değişkeni cinsinden ifade edilebilecek bir kural bulunuz. Bulduğunuz kuralı elektronik tablolama programı yardımıyla oluşturarak kontrol ediniz.

| x | y |
|---|----|
| 1 | 8 |
| 2 | 9 |
| 3 | 10 |
| 4 | 11 |
| 5 | 12 |

I

| x | y |
|---|----|
| 1 | -3 |
| 2 | -2 |
| 3 | -1 |
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |

II

| x | y |
|---|----|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |
| 5 | 10 |

III

| x | y |
|---|----|
| 1 | -2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 4 |
| 4 | 7 |
| 5 | 10 |

IV

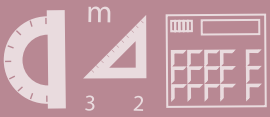
22. Aşağıda tanım kümesi ve kuralı verilen fonksiyonların değer kümeleri gerçek sayılar ise bu fonksiyonların görüntü kümelerini bulunuz.

| Tanım Kümesi | Kural | Görüntü Kümesi |
|---------------------------|-----------------|----------------|
| $A = \{1, 5, 7, 2\}$ | $f(x) = x - 8$ | |
| $B = \{-8, -15, -17, 2\}$ | $f(x) = 6x + 4$ | |

23. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{2}$ fonksiyonu için $\frac{f(3) - f(4)}{5}$ değerini bulunuz.

24. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$ ise $f(a)$, $f(b+1)$, $f(c-2)$, $f(2d)$, $f(3k+1)$ değerlerini bulunuz.

25. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ kümeleri veriliyor. $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizin.



KENDİMİZİ SINAYALIM

26. $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$

fonksiyonlarının eşit olup olmadığını bulunuz.
Nedenini açıklayınız.

27. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=3x-6$ ve $f(a)=6$ ise a değerini bulunuz.

28. $C=\{-1, 0, 1\}$ kümesi veriliyor.
 $m: C \rightarrow C, m(t) = t^3$ ve $n: C \rightarrow C, n(z) = z$ fonksiyonları eşit midir? Neden?

29. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{3} - 4$ fonksiyonu için $f(x+1), f(x-1), f(2x), f(3x-1), f\left(\frac{x}{2}\right), f(x^2)$ değerlerini bulunuz

30. Aşağıdaki tablodaki verilere göre y bağımlı değişkeni ve x bağımsız değişkeni arasındaki ilişki ne olabilir?

| x | y |
|---|----|
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |

31. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \frac{bx+3}{2}$ ve $f(-1)=7$ ise b değerini bulunuz.

32. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \frac{x}{d} + 5$ ve $f(3)=9$ ise d değerini bulunuz.

33. (EĞLENCELİ MATEMATİK) Tüm sınıf arkadaşlarınızla beraber bu oyunu oynayabileceğiniz gibi bir arkadaşınızla da kendi aranızda oynayabilirsiniz. Bu oyunun kuralı çok basit: oyunculardan birisi bir kural belirler ve bu kurala uygun iki sayı söyler; diğer oyuncular bu iki sayı arasındaki kuralı (ilişkiyi) bulmaya çalışırlar. Bu oyun için kağıt ve kalem yeterlidir. Oyunun detaylarını örneklerle anlatalım.

Size iki sayı söyleyeceğim. Bu sayılardan ilkinе bazı matematiksel işlemler uyguladığımda ikinci sayıyı elde ederim. Size, bu matematiksel işlemleri tahmin edene kadar sayı çiftleri vermeye devam edeceğim. Örneğin; (3, 10) – Kuralı bilemezseniz size yeni sayı çiftini vereceğim.

(7, 18) – Kuralı tahmin ettiyseniz (İlk sayının iki katından dört fazlası) emin olmak için siz kuralı söylemeden size bir sayı verip ikinci sayının ne olması gerektiğini soracağım. Eğer bilerseniz kuralı açıklayabilirsiniz. Aksi takdirde oyun devam eder.

Bu oyunu oynadıktan sonra şu sorulara cevap arayınız:

- a. Kuralı bulmak için nasıl bir düşünce yolu izledim?
- b. Sıralı ikililerin birinci bileşenleri ve ikinci bileşenleri nasıl kümeler oluştururlar?
- c. Her kural için verdiğim sayıya karşılık bir başka sayı bulabilir miyim?

3.1.2. Birim, Sabit ve Doğrusal Fonksiyonlar

Başlarken

90 km/sa sabit hızla giden bir tren düşünelim. Bu trenin hızını zamana bağlı olarak veren fonksiyon için neler söyleyebilirsiniz? Aynı trenin aldığı yolu zamana bağlı olarak veren fonksiyon hakkında neler söyleyebilirsiniz



Daha önce bir fonksiyonun yaptığı ilişkilendirmenin bir kural, değerler tablosu veya tanım ve değer kümelerinin Venn şemaları üzerinden verilebildiğini gördük. Ayrıca kümeler konusunda iki kümenin kartezyen çarpımının grafiksel gösterimini öğrendik. Bununla beraber kartezyen düzlemi de öğrenerek cebirsel bir yapı olan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpım kümesinin geometrik bir yapı olan kartezyen düzlemle temsil edilebileceğini öğrendik. Şimdi ise bu temsilden kartezyen çarpımların bazı alt kümeleri için de yararlanarak fonksiyonların grafiksel gösterimini öğreneceğiz.

A ve B boş olmayan iki küme ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Tanım kümesinden aldığımız her bir $x \in A$ ile x in görüntüsü olan $f(x) \in B$ elemanlarından oluşturduğumuz $(x, f(x))$ ikililerinden oluşan kümeye f nin grafik noktaları kümesi deriz ve **Grafik(f)** ile gösteririz. Bu ikililer kümesini ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterebiliriz:

$$\text{Grafik}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y = f(x)\}$$

Dikkat edersek bu kümeyi tanım kümesindeki x ler ile f altındaki görüntülerini birlikte düşünüp ikililer oluşturarak elde ettik. Grafik(f) kümesindeki ikililerin birinci bileşenlerinin kümesi f in tanım kümesini, ikinci bileşenlerinin kümesi ise f nin görüntü kümesini verir. Dolayısıyla bir f fonksiyonunu tanımlamak için Grafik(f) kümesi ile f in değer kümesini vermek yeterlidir.

Bu kümeyle ilgilenmekteki nedenimiz kümenin f fonksiyonunun grafiksel gösteriminde temel bir araç olmasıdır. Şöyle ki,

$$\text{Grafik}(f) \subset A \times B$$

dir. Bu durumda $A \times B$ nin grafiksel gösterimini yaptığımız gibi bu sefer sadece Grafik(f) de bulunan ikileri aynı grafik üzerinde göstereceğiz. Bu da bize f fonksiyonunun grafiğini yani grafiksel gösterimini vermiş olacaktır. Şimdi daha özel bir durumu düşünelim. Eğer $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ ise $A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olduğundan

$$\text{Grafik}(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

olur. Bu durumda f fonksiyonunun grafiği kartezyen düzlemin bir alt kümesi olarak gösterilir ve kartezyen düzleme ait özellikleri kullanarak fonksiyonun grafiği üzerinde incelemeler yapabiliriz.

Neler Öğreneceğiz?

- Bir fonksiyonun grafiksel gösterimini
- Birim fonksiyonu
- Sabit fonksiyonu
- Doğrusal fonksiyonu

Anahtar Terimler

- Fonksiyon grafiği
- Birim fonksiyon
- Sabit fonksiyon
- Doğrusal fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- Grafik (f)
- $I(x) = x$
- $f(x) = c$
- $f(x) = mx + n$

Şimdi fonksiyonların grafiksel gösterimlerine örnekler verelim:

Örnek 1

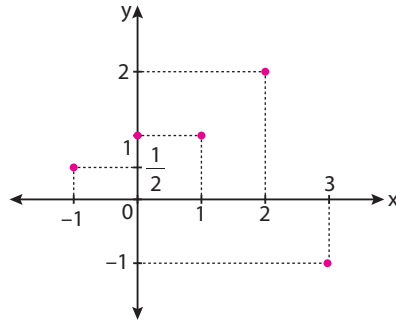
Değer kümesi \mathbb{R} olan bir f fonksiyonu için

Grafik $(f) = \left\{ \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, -1) \right\}$ olarak veriliyor. Buna göre,

- bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulalım.
- Bu fonksiyonun grafiğini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesini A ile gösterelim. Grafik(f) kümesinin ilk bileşenlerinin kümesi $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ olduğundan $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ dır. Benzer şekilde Grafik(f) kümesinin ikinci bileşenlerinin kümesi $\left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ olduğundan f nin görüntü kümesi $f(A) = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ olur.



Tanım kümesini x-ekseninde, değer kümesini y-ekseninde belirterek Grafik(f) kümesinde verilen ikilileri yandaki şekilde gösterebiliriz. Bu bize f fonksiyonunun grafiğini verir.

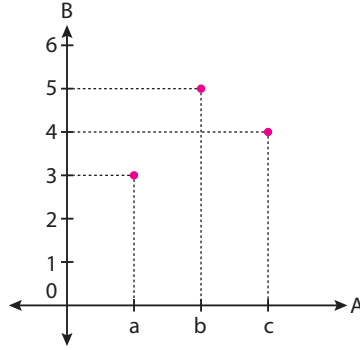
Örnek 2

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri için $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer tablosu şu şekilde veriliyor:

| x | a | b | c |
|------|---|---|---|
| f(x) | 3 | 5 | 4 |

Buna göre f fonksiyonunu grafikte gösterelim.

Çözüm



Örnek 3

$f: A \rightarrow \mathbb{Z}$ ve $f(x) = x^2 - x + 1$ ile verilen fonksiyonun tanım kümesi $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ dir. Buna göre, f fonksiyonunun grafiksel gösterimini yapalım.

Çözüm

Bu fonksiyonun önce görüntü kümesini sonra da Grafik(f) kümesini bulalım.

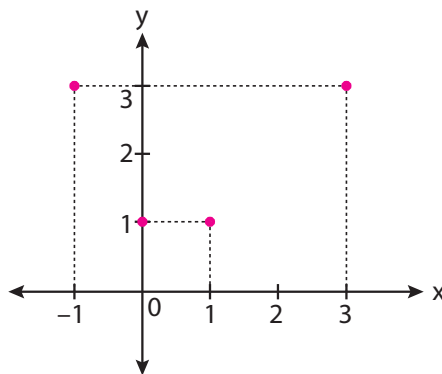
$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$

$$f(0) = (0)^2 - (0) + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^2 - (1) + 1 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 - (2) + 1 = 3$$

Dolayısıyla, görüntü kümesi $f(A) = \{1, 3\}$ ve Grafik(f) = $\{(-1, 3), (0, 1), (1, 1), (2, 3)\}$ olarak bulunur. Bu bilgileri kullanarak fonksiyonun grafiğini şu şekilde gösterebiliriz:



Bunu biliyor muydunuz?

Bazı fransız matematikçilerin oluşturduğu Bourbaki ekolüne göre bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $A \times B$ kümesinin belli özelliklerini sağlayan alt kümesi şeklinde tanımlanmaktadır. Bu yaklaşımı tamamen takip etmiş olsaydık bizim bu kitapta Grafik(f) ile gösterdiğimiz kümeyi de f ile göstermemiz gerekirdi. Bu kitapta "bağıntı" kavramını ele almadığımızdan ve fonksiyon kavramını bağıntı kavramını kullanarak tanımlamadığımızdan dolayı biz birçok kaynakta da geçen Grafik(f) sembolünün kullanımını uygun gördük. Böylece fonksiyon için kullanılan sembole yüklenen farklı anlamlardan dolayı oluşabilecek yanlışların önüne geçmeyi hedefledik.

Birim Fonksiyon

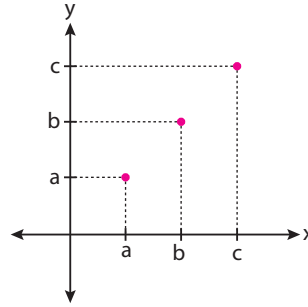
Örnek 4

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri için $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer tablosu şu şekilde veriliyor:

| | | | |
|------|---|---|---|
| x | a | b | c |
| f(x) | a | b | c |

Buna göre f fonksiyonunu grafikte gösterelim.

Çözüm



Bu örnekte tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü de kendisidir. Bu durumun neticesi olarak $A = f(A)$ ve $A \subset B$ olur. Şimdi bu şekildeki özel tip fonksiyonların tanımını yapalım:

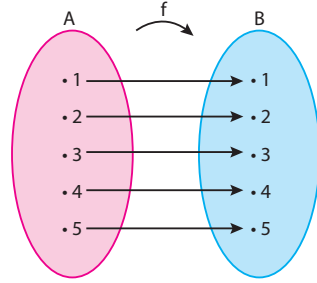
Tanım kümesindeki her değeri kendisiyle eşleyen fonksiyona **birim fonksiyon** denir. Birim fonksiyon genellikle I ile gösterilir ve birim fonksiyonun kuralı $I(x) = x$ olarak belirtilir.

Örnek 5

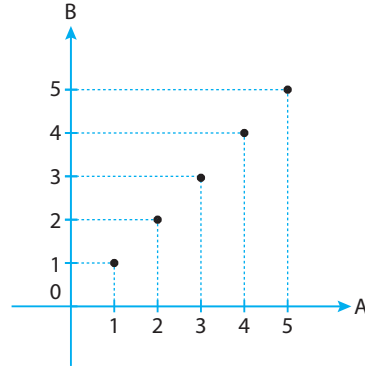
$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = x$ olarak verilen bu birim fonksiyonu şema ve grafikte gösterelim.

Çözüm

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = x$ fonksiyonunun şema gösterimi şu şekildedir:



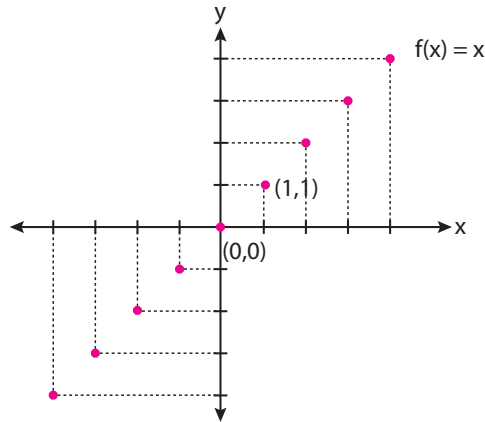
Bu fonksiyonu için $\text{Grafik}(f) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ tir. Bu nedenle bu fonksiyonun grafiksel gösterimi ise aşağıdaki gibidir:



Örnek 6

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olarak verilen birim fonksiyonun tanım kümesini -4 ile 4 arasındaki değerleri için grafiksel gösterimi şu şekildedir:

Çözüm



Anahtar Bilgi

A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x$ ise bu fonksiyona birim fonksiyon denir. Burada $A = f(A) \subset B$ olmaktadır.

Bundan sonraki örneklerimize geçmeden önce doğruların grafiklerinin çizimiyle ilgili bir hatırlatma yapalım:

Herhangi bir a ve b sabitleri ve $x, y \in \mathbb{R}$ için, $y = ax + b$ denklemini bir doğru belirtir. Farklı iki noktadan yalnız ve yalnız bir doğru geçtiğinden, bir doğrunun grafiğini kartezyen düzlemde çizmek için doğrunun üzerinde iki nokta tespit edip bu noktalardan geçen doğruyu düz bir şekilde çizmemiz yeterlidir. Diğer bir ifade ile $y = ax + b$ denklemini sağlayan herhangi iki farklı (x, y) ikilisi bulup bu ikilileri koordinatları kabul eden iki noktayı kartezyen düzlemde belirledikten sonra bu noktaları düz bir çizgiyle birleştirirsek istediğimiz doğru grafiğini elde etmiş oluruz.

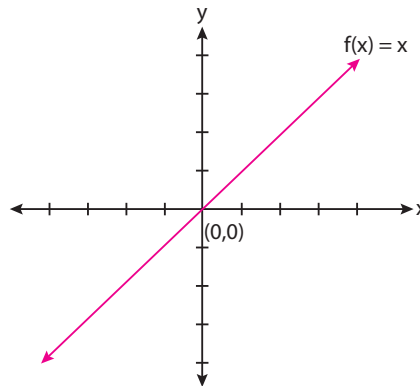
Örnek 7

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ birim fonksiyonunun grafiksel gösterimini yapalım.

Çözüm

Bu fonksiyon herhangi bir gerçekte sayıyı kendisine eşliyor. Bu fonksiyonun grafiğini de önce $\text{grafik}(f)$ kümesini oluşturup bu kümeyi kartezyen düzlemde gösterebiliriz. Ancak görüntüler için y bağımlı değişkenini kullanırsak $y = f(x)$ eşitliğimiz bu fonksiyon için $y = x$ şeklinde olur. $y = x$ ifadesi bir doğru denklemini belirtir. O halde fonksiyonumuzun grafiği bu doğrunun grafiğidir. Bu durumda grafiği çizmek için iki nokta belirleyelim.

$x = 0$ ise $y = 0$ ve de $x = 1$ ise $y = 1$ olacağından doğrumuz $(0, 0)$ noktasından yani orijinden ve $(1, 1)$ noktasından geçer. Bu noktaları kartezyen düzlemde gösterip düz bir şekilde birleştirerek fonksiyonumuzun grafiğini elde etmiş oluruz:



Örnek 8

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (2n - 3)x + m - 2$ ile verilen fonksiyon birim fonksiyon olduğuna göre n ve m değerlerini bulalım.

Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan tanım kümesindeki her değeri kendisiyle eşlemesi gerekir. Yani bütün x gerçekte sayıları için $f(x) = x$, yani $x = (2n - 3)x + m - 2$ olmalıdır. Bu eşitliği $x = 0$ ve $x = 1$ için yazarsak $0 = m - 2$ ve $1 = (2n - 3) + m - 2$ eşitlikleri elde edilir. Birinci eşitlikten $m = 2$ ve bu değerin ikinci eşitlikte yerine yazılmasıyla $1 = 2n - 3$ yani $n = 2$ elde edilir.

Örnek 9

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (a - 4)x^2 + (b + 7)x + c - b$ ile verilen fonksiyon birim fonksiyon olduğuna göre a , b ve c değerlerini bulalım.

Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan bütün x gerçekte sayıları için $f(x) = x$ olmalıdır. Elimizde a , b ve c gibi üç bilinmeyen var ve bu bilinmeyenleri bulmak için eşitlikler elde etmeliyiz:

$x = 0$ için, $f(0) = 0$, buradan $(a - 4)0^2 + (b + 7)0 + c - b = 0$ ve de $b = c$ sonucu elde edilir. Bu durumda fonksiyonumuz $f(x) = (a - 4)x^2 + (b + 7)x$ kuralını sağlar.

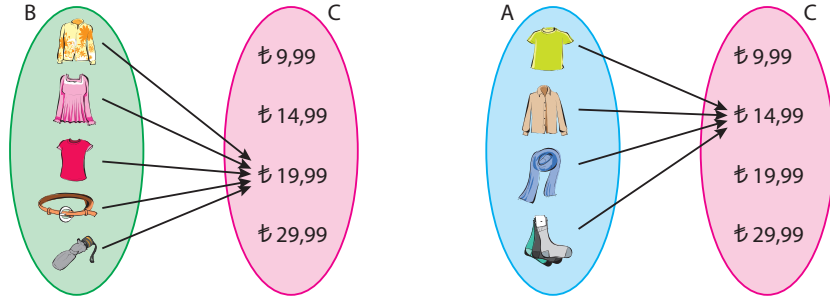
$x = -1$ için $f(-1) = -1$, buradan $(a - 4)(-1)^2 + (b + 7)(-1) = -1$ yani $(a - 4) - (b + 7) = -1$ elde edilir. Benzer şekilde, $x = 1$ için $f(1) = 1$, buradan $(a - 4) + (b + 7) = 1$ elde edilir.

Bulduğumuz bu eşitlikleri taraf tarafa toplayınca $2(a - 4) = 0$, ve de $a = 4$ elde edilir. Bulduğumuz bu değeri eşitliklerimizden birinde yerine yazarak $b + 7 = 1$ ve de $b = -6$ sonucunu elde ederiz. Bu durumda $b = c$ olduğundan $c = -6$ olarak bulunur.

Sabit Fonksiyon

Şimdi iki farklı örnek üzerinde bir sabit fonksiyonun nasıl bir fonksiyon olduğunu gözlemleyip sabit fonksiyonun tanımını vereceğiz.

Ebrar ve Serkan bir mağazadan alışveriş yapmış ve ödeme yapmak için kasaya gitmişlerdir. Serkan kampanyadan her birinin fiyatı 14,99 TL olan sıfır yaka T-shirt, klasik bir gömlek, 3'lü çorap takımı ve dokuma bir şal seçmiştir. Ebrarın aldığı desenli gömlek, T-shirt, bluz, mini şemsiye ve kemerin her birinin fiyatı 19,99 TL dir. Ebrar ve Serkan'ın aldığı ürünler ve fiyatları arasındaki ilişkiyi göstermek için kümeler oluşturup her biri için birer fonksiyon tanımlayalım.



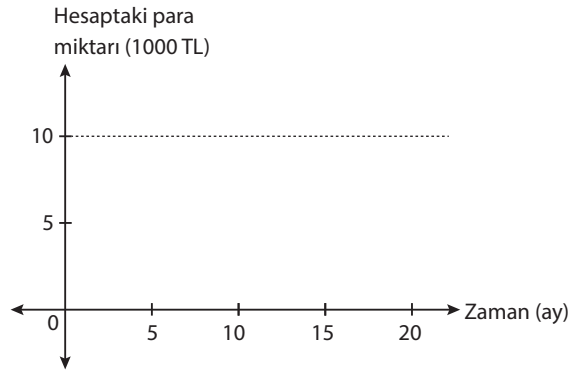
Alışverişlerinde Serkan sadece 14,99 TL lik ürünler satın alırken Ebrar sadece 19,99 luk ürünler almıştır. Bir başka ifadeyle her iki fonksiyondaki tanım kümeleri değer kümesindeki tek bir elemanla eşleşmiştir. Bu durumda her iki fonksiyon için de görüntü kümeleri birer elemanlıdır.

Şimdi başka bir örnek verelim:

10 000 TL paramız olsun ve bu parayı bankada tutmak istediğimizi varsayalım. Parayı bankaya vadesiz hesaptan yatırdığımızı, bu hesap üzerinde hiçbir işlem yapmadığımızı ve bankanın herhangi bir kesinti yapmadığını varsayalım. Bu durumda zamana bağlı olarak hesaptaki paranın miktarını veren tablo şöyle olacaktır:

| | | | | | |
|------------------|----|----|----|-----|----|
| Zaman (Ay) | 1 | 2 | 3 | ... | 20 |
| Bakiye (1000 TL) | 10 | 10 | 10 | ... | 10 |

Tablodaki bu değerlerin grafiksel gösterimi ise şöyledir:



Bu iki örnekteki ortak nokta fonksiyonların görüntü kümelerinin bir elemanlı bir küme olmasıdır. Şimdi bu tür fonksiyonların tanımını yapalım:

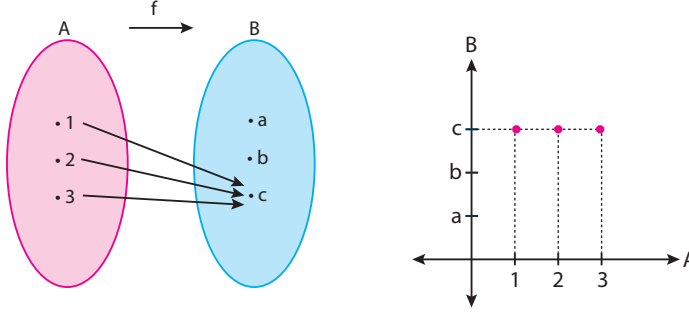
$f : A \rightarrow B$ ile verilen bir f fonksiyonu A kümesinin bütün elemanlarını B kümesinden yalnızca bir eleman ile eşliyorsa bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir. Eşleme yapılan elemanı c ile gösterirsek f sabit fonksiyonunun kuralı $f(x) = c$ şeklindedir.

Tanımdan ve örneklerden de anlaşılacağı gibi sabit bir fonksiyonun görüntü kümesi bir elemanlı olmalıdır ve görüntü kümesi bir elemanlı olan fonksiyonlar sabit fonksiyonlardır.

Örnek 10

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ kümeleri ile $f: A \rightarrow B$ ve $f(A) = \{c\}$ şeklinde bir sabit fonksiyon veriliyor. Bu fonksiyonu küme şemasında ve grafiksel olarak gösterelim.

Çözüm

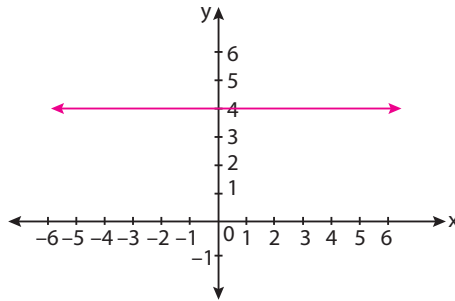


Örnek 11

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 4$ ile verilen fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = 4$ kuralını $y = 4$ şeklinde ele alabiliriz. Bu durumda herhangi bir x değeri için y değerleri daima 4 olacaktır. Bu durumda grafiğimiz şu şekildedir:



İkinci bir yaklaşım olarak hatırlayalım ki, $y = 4$ denkleminde x olmadığından bu denkleme karşılık gelen doğru x -eksenine paralel olacaktır. Bu durumda $(0, 4)$ noktasının doğru üzerinde olduğunu bilmemiz, bu fonksiyonun grafiğini çizmek için yeterlidir.

Anahtar Bilgi



A ve B boş olmayan kümeler ve $c \in B$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$, fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için $f(x) = c$ oluyorsa bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.

Örnek 12

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (m - 2)x + m + 1$ ile verilen f fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Buna göre

- a. m
- b. $f(1250)$

değerini bulalım.

Çözüm

a. f sabit bir fonksiyon olduğundan fonksiyonun kuralı değişkenden bağımsız olmalıdır. Dolayısı ile $f(x)$ ifadesindeki x in katsayısı 0 olacağından $m - 2 = 0$ dır.

İkinci bir yaklaşım olarak, sabit fonksiyon için görüntü tek elemanlı olacağından tanım kümesinden alacağımız herhangi iki değerın görüntüsü de aynıdır. Örneğin, $f(0) = f(1)$ olmalıdır.

$f(0) = m + 1$ ve $f(1) = (m - 2) + m + 1 = 2m - 1$ olduğundan $m + 1 = 2m - 1$ ve de $m = 2$ elde edilir.

b. $m = 2$ olduğundan $f(x) = 3$ tür. Bu nedenle $f(1250) = 3$ olur.

Örnek 13

$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \frac{(m-1)x + 2}{x-2}$ ile verilen f fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise m sayısını ve $f(x)$ ifadesini bulalım.

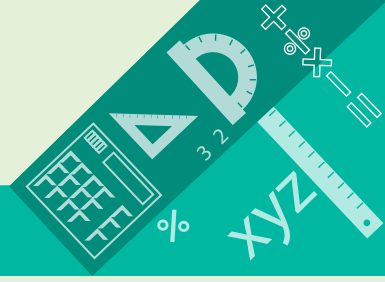
Çözüm

f sabit bir fonksiyon ise tanım kümesindeki her elemanın f altındaki görüntüsü aynıdır. Bu durumda $x=0$ ve $x=1$ için $f(0) = f(1)$ yani

$$\frac{(m-1) \cdot 0 + 2}{0-2} = \frac{(m-1) \cdot 1 + 2}{1-2}$$

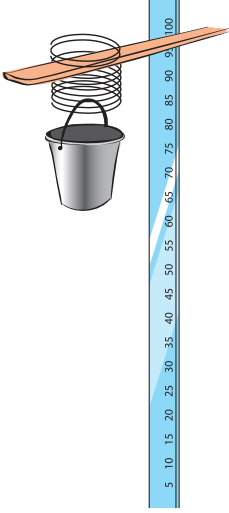
olmalıdır. Buradan $m=0$ elde edilir. Bu durumda $f(x) = \frac{-x+2}{x-2}$ olur. Ancak dikkat edilirse iki fonksiyonun eşitliği konusunda öğrendiğimiz gibi f fonksiyonu ile $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = -1$ ile verilen g fonksiyonu eşit fonksiyonlardır. Dolayısıyla $f(x) = -1$ dir.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında farklı değerler için elde edilen bir grafiğin hangi fonksiyon türüne ait olduğunu inceleyeceğiz.

Araç-Gereçler:



- Cetvel (20–30 cm)
- Yay
- Kalem veya çubuk
- Ufak bir kap (kağıttan yapabilirsiniz)
- Bozuk para

Yandaki gibi bir düzenek kurun.

Adım 1 ►

Kabımıza koyduğumuz bozuk paraya göre kabımızın alt kısmı cetvel üzerinde hangi değeri gösterir?

Adım 2 ►

Bu sorunu cevabını bulabilmek için aşağıdaki işlemleri farklı bozuk para değerleri için tekrar edin.

Adım 3 ►

Bozuk parayı kaba yerleştirin ve kabın alt kısmının cetvel üzerindeki değeri not edin. (Burada kaba eklenen her bozuk para için yayın esnemesinin arttığını varsayıyoruz. Dolayısıyla yay seçimi buna göre yapılmalı.)

Adım 4 ►

Bulduğunuz değerler için grafik çizin.

Adım 5 ►

Ne çeşit bir grafik elde ettiniz?

Adım 6 ►

Grafiğinizin başlangıç noktası neresidir?

Adım 7 ►

Deney yapmadan 3 tane 25 kuruşun kabınızın alt kısmını cetvelin hangi seviyesine getireceğini söyleyin. Cevabınızı ve yönteminizi arkadaşlarınızla tartışınız.

Doğrusal Fonksiyon

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ şeklindeki a ve b sabitleri verilsin. Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı $f(x) = ax + b$ biçiminde ise bu fonksiyona **doğrusal fonksiyon** denir.

Örnek 10

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x)=3x+1$ ile verilen doğrusal fonksiyon verilsin. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesindeki elemanların f altındaki görüntülerini bulalım ve bunları bir tabloda gösterelim.

$f(0)=3 \cdot 0 + 1 = 1$ ve benzer şekilde $f(1)=4$, $f(2)=7$, $f(3)=10$, $f(4)=13$ olur. Dikkat edersek A kümesindeki elemanlar 1 er 1 er artarken f altındaki görüntüleri 3 er 3 er artmakta. Bulduğumuz değerleri tabloda gösterelim:

| | | | | | |
|------|---|---|---|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| f(x) | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |

Örnek 11

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x)=2x+1$ ile verilen doğrusal fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirtelim ve bu fonksiyonun grafiğini çizelim.

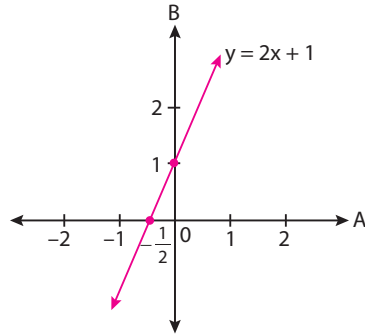
Çözüm

Bu fonksiyonun tanım kümesi \mathbb{R} , yani tüm gerçel sayılardır. Bu fonksiyonun değer kümesi de \mathbb{R} olarak verilmiş. Görüntü kümesinin değer kümesinin bir alt kümesi olduğunu yani $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi değer ve görüntü kümelerinin eşit olup olmadığına yani $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım. Bunun için $\mathbb{R} \subset f(\mathbb{R})$ olmasının yeterli (bunun neden yeterli olduğunu belirtiniz). Dolayısıyla, değer kümesinden aldığımız bir b değerinin tanım kümesinden bir elemanın görüntüsü olup olmadığına bakacağız: $b=f(a)$ ise $b=2a+1$ ve buradan $a=(b-1)/2$ olur ki b bir gerçel sayı olduğundan a da bir gerçel sayı olur. Böylece değer ve görüntü kümelerinin eşit olduğunu sonucuna ulaştık.

Bu fonksiyonun grafiğini çizerken tanım kümesi \mathbb{R} olduğundan tüm x -ekseni tanım kümesini temsil edecektir. Benzer şekilde görüntü ve değer kümeleri \mathbb{R} olduğundan tüm y -ekseni de bu kümeleri temsil edecektir. Ayrıca hatırlayacağımız üzere $y=f(x)$ veya $y=2x+1$ olması bu denklemin grafiğinin bir doğru olduğunu göstermektedir. Daha önce de belirttiğimiz gibi doğru grafiği için iki noktanın bulunması yeterli olacaktır. Bu noktaları tespit etmek için x e değerler verip görüntülerini bulabiliriz. Örneğin,

| | | |
|------|----------------|---|
| x | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| f(x) | 0 | 1 |

$(-1,0)$ ve $(-\frac{1}{2}, 0)$ noktaları grafik üzerinde olacaktır çünkü doğrunun eşitliğini sağlayan x ve y ikililerinden oluşmaktadır. Şimdi bu noktaları grafik üzerinde gösterip bu noktalardan geçen doğruyu çizebiliriz.



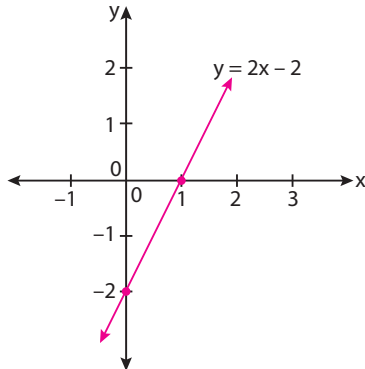
Bu örnekte izlediğimiz yol bütün doğrusal fonksiyonların grafikleri çiziminde uygulanabilir. Benzer şekilde herhangi bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x)=ax+b$ doğrusal fonksiyonu için tanım, değer ve görüntü kümelerinin \mathbb{R} olduğu gösterilebilir.

Örnek 12

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Verilen fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerinin \mathbb{R} olduğunu ve de grafiğini çizmek için grafiğin üzerindeki en az iki noktaya ihtiyacımız olduğunu biliyoruz. Bu noktaların bir önceki örnekte olduğu gibi grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktalar alabiliriz. $y=2x-2$ eşitliğinde $x=0$ için $y=-2$ olur ve bu bize $(0,-2)$ noktasını verir. Benzer şekilde $y=0$ için $0=2x-2$ den $x=1$ olur ve bu bize $(1,0)$ noktasını verir. $(0,-2)$ noktasının grafiğin y-eksenini kestiği nokta ve $(1,0)$ noktasının grafiğin x-eksenini kestiği nokta olduğuna dikkat edelim. Bu durumda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 2$ fonksiyonunun grafiği $(0, -2)$ ve $(1, 0)$ noktalarından geçen bir doğrudur.



Anahtar Bilgi

a ile b birer gerçekte sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, gerçekte sayılar üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu $f(x) = ax + b$ kuralı ile verilirse bu fonksiyon bir doğrusal fonksiyonu belirtir.

Örnek 13

f, \mathbb{R} de tanımlı doğrusal bir fonksiyon olarak veriliyor. $f(2)=2$ ve $f(4)=12$ ise f fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm

f, \mathbb{R} de tanımlı doğrusal bir fonksiyon olduğundan $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

$f(2)=2$ ve $f(4)=12$ olduğundan $f(2) = 2a+b = 2$ olur ve $2a+b = 2$ elde edilir.

Diğer taraftan $f(4) = 4a+b = 12 \Rightarrow 4a+b = 12$ dir. Buradan,

$$-2a - b = -2$$

$$\begin{array}{r} 4a + b = 12 \\ + \\ \hline \end{array} \quad \text{taraf tarafa toplarsak}$$

$$2a = 10 \text{ ve } a=5 \text{ bulunur.}$$

Bulduğumuz $a = 5$ değerini $2a+b = 2$ de yerine yazarsak $2 \cdot 5 + b = 2$ olur ve $b = -8$ olarak bulunur.

Buna göre $f(x)$ doğrusal fonksiyonunun kuralı $f(x) = 5x - 8$ dir.

Örnek 14

f, \mathbb{R} de tanımlı doğrusal bir fonksiyon olarak veriliyor. $f(3) = 9$ ve $f(6) = 15$ ise $f(4)$ değerini bulalım.

Çözüm

$f(x)$ doğrusal bir fonksiyon olduğundan bu fonksiyonun kuralı $f(x) = ax+b$ şeklindedir. Verilenleri kullanarak $9 = f(3) = 3a+b$ ve $15 = f(6) = 6a+b$ elde edilir. Bu durumda

$$3a+b = 9$$

$$6a+b = 15$$

olur. a ve b bilinmeyenlerini bu doğrusal denklem sistemini için çözerek bulabiliriz. Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkardığımızda b bilinmeyenini yok ederek, $3a=6$ ve buradan $a=2$ elde edilir. Bulduğumuz bu değeri ilk eşitlikte yerine yazarsak $3 \cdot 2 + b = 9$ ve de $b=3$ olur.

Buna göre $f(x)$ doğrusal fonksiyonunun kuralı $f(x) = 2x + 3$ olur.

Buradan $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ olarak bulunur.

Örnek 15

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (a - b - 3)x^3 + (2a - b - 7)x^2 + (a - 1)x + (a + b)$ fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon ise bu fonksiyonun kuralını bulalım.

Çözüm**Birinci yol:**

f doğrusal bir fonksiyon olduğundan, sıfırdan farklı bir m ve herhangi bir n sabit gerçekte sayıları için $f(x) = mx + n$ şeklinde olmalıdır. Buradan $f(-1) = n - m$, $f(0) = n$, $f(1) = m + n$ ve $f(2) = 2m + n$ olacaktır. Buradan

$$f(2) - 2f(1) + f(0) = 0 \text{ ve}$$

$$f(-1) + f(1) - 2f(0) = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Diğer taraftan f için bize verilen kuralı kullanırsak

$$f(-1) = -(a - b - 3) + (2a - b - 7) - (a - 1) + (a + b) = a + b - 3$$

$$f(0) = a + b$$

$$f(1) = a - b - 3 + 2a - b - 7 + a - 1 + a + b = 5a - b - 11$$

$$f(2) = (a - b - 3)8 + (2a - b - 7)4 + (a - 1)2 + a + b = 19a - 11b - 54$$

olur. Buradan

$$f(2) - 2f(1) + f(0) = 19a - 11b - 54 - 2(5a - b - 11) + (a + b) = 10a - 8b - 32$$

$$f(-1) + f(1) - 2f(0) = (a + b - 3) + (5a - b - 11) - 2(a + b) = 4a - 2b - 14$$

bulunur.

Bu durumda

$$10a - 8b - 32 = 0$$

$$4a - 2b - 14 = 0$$

doğrusal denklem sistemini elde ederiz. Bu eşitlikleri 2 ye bölüp düzenlersek

$$5a - 4b = 16$$

$$2a - b = 7$$

elde edilir. İkinci denklemi 4 ile çarpıp ilk denklemi çıkartırsak $3a = 12$ ve de $a = 4$ bulunur. Bunu ikinci denklemde yerine yazarsak $8 - b = 7$ ve de $b = 1$ elde edilir. Buradan

$n = f(0) = a + b = 5$ ve $m = f(1) - f(0) = 5a - b - 11 - (a + b) = 4a - 2b - 11 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 11 = 3$ olur. Bu durumda $f(x) = 3x + 5$ olarak bulunur.

Anahtar Bilgi

" $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ " ifadesi yerine " \mathbb{R} de tanımlı f fonksiyonu" ifadesi de kullanılmaktadır.

Bunu biliyor muydunuz?

Gerçek yaşam durumlarında doğrusal fonksiyon örnekleri ile karşılaşabiliriz.

Örneğin 50 km/sa sabit hızla giden bir arabanın aldığı yolun zamana bağlı değişimi,

x: zaman(sa)

y: yol (km)

için $y = 50x$

–cep telefonu operatörlerinin kampanyalarında dakikaya göre ücret tarifeleri. Örneğin,

25 TL ödemeli, dakika sınırı aşınca dakikası 0,12 TL şeklindeki bir tarife

y: ücret (TL)

x: konuşma süresi (dakika)

için $y = 25 + 0,12x$ dir.

İkinci Yol:

f doğrusal bir fonksiyon olduğundan, x^3 ve x^2 nin katsayıları sıfır olmalıdır (bunun nedeni üzerinde düşünüp arkadaşlarınızla tartışınız). Buradan

$$a-b-3 = 0 \quad \text{ise} \quad a-b = 3$$

$2a-b-7 = 0$ ise $2a-b = 7$ olur. Bu denklemlerin çözersek $a=4$ ve $b=1$ olarak bulunur. Buna göre $f(x) = (4-1)x + (4+1) = 3x+5$ olmalıdır.

Örnek12

f, \mathbb{R} de tanımlı doğrusal bir fonksiyon olarak veriliyor. $f(x) + f(x+2) = 9x+18$ ise f fonksiyonunun kuralını belirleyelim.

Çözüm

f doğrusal bir fonksiyon olduğundan $f(x) = ax+b$ şeklindedir. Buradan

$$f(x+2) = a(x+2)+b = ax+2a+b \text{ olur. Bu nedenle}$$

$$2 \cdot f(x) + f(x+2) = 2(ax+b) + ax+2a+b = 3ax+2a+3b \text{ olur. Verilenleri kullanarak}$$

$$3ax+2a+3b = 9x+18$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin herhangi bir x gerçekte sayısı için sağlanacağını biliyoruz. Dolayısıyla buradan sonra a ve b değerlerini iki yolla bulabiliriz.

Birinci yol:

Farklı x değerleri için eşitliği kullanıp a ve b değerlerini bulabiliriz.

$$x = 0 \text{ için } 3a \cdot 0 + 2a + 3b = 9 \cdot 0 + 18 \text{ yani } 2a + 3b = 18 \text{ olur.}$$

$$x = 1 \text{ için } 3a \cdot 1 + 2a + 3b = 9 \cdot 1 + 18 \text{ yani } 5a + 3b = 27 \text{ olur.}$$

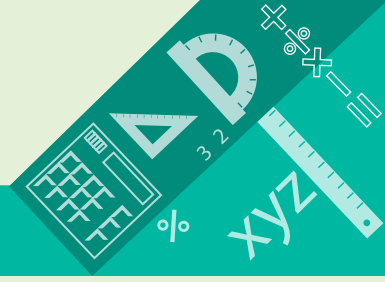
İkinci denklemden birinci denklemi çıkartırsak $3a = 9$ ve de $a = 3$ elde edilir. Bunu ilk eşitlikte kullanırsak $2 \cdot 3 + 3b = 18$ ve de $b = 4$ sonucuna ulaşırız.

İkinci yol:

Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $3ax+2a+3b = 9x+18$ eşitliği sağlandığından $3a = 9$ ve $2a+3b = 18$ olmalıdır (nedeni üzerinde düşünüp arkadaşlarınızla tartışınız). Buradan da $a = 3$ ve $b = 4$ sonucuna ulaşılabiliriz.

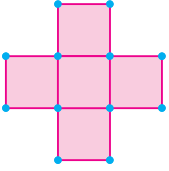
Sonuç olarak $f(x) = 3x + 4$ kuralını elde ederiz.

MATEMATİK ATÖLYESİ

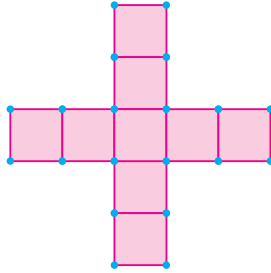


Bu atölye çalışmasında verilen şeklin değişme kuralını ve bu kurala bağlı olarak istenilen herhangi bir adımda şeklin görüntüsünü ve içerdiği kare sayısını hesaplamayı öğreneceğiz.

1. adım



2. adım



İlk iki adımı verilmiş yukarıdaki şekil düzenli bir şekilde değişmektedir.

Adım 1 ►

Birinci adım ve ikinci adım arasındaki farkı bulunuz.

Adım 2 ►

İki adım arasındaki farkı dikkate alırsanız üçüncü adım sizce nasıl olmalıdır?

Adım 3 ►

Birinci, ikinci ve üçüncü adımların her birinde kaç kare bulunmaktadır?

Adım 4 ►

Dördüncü adımdaki kare sayısını bu adımı çizmeden tahmin etmeye çalışın.

Adım 5 ►

Dördüncü adım için tahmininizi bu adımı çizerek kontrol edin.

Adım 6 ►

Yedinci adımda sizce kaç kare olmalıdır?

Adım 7 ►

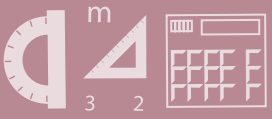
Şekillerin değişim kuralını genel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

Adım 8 ►

Bulduğunuz kuralı diğer arkadaşlarınızla karşılaştırınız ve kuralınızın 10, 20 ve 30. adımlar için kare sayılarını doğru şekilde bulup bulamadığınızı kontrol ediniz. (Bu adımdaki kuralınızı test etmek için GeoGebra gibi bir dinamik geometri yazılımı kullanabilirsiniz).

Adım 9 ►

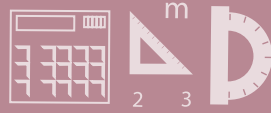
Bu kuralı bir fonksiyon olarak yazmak isterseniz bu fonksiyon ne olacaktır?



KENDİMİZİ SINAYALIM

Kavram Yoklama ve Muhakeme

- Aşağıdaki ifadelerde noktalı olan yerleri doldurunuz.
 - $f: A \rightarrow A$ tanımlanan f fonksiyonunda A kümesinin her elemanını tekrar kendisine eşliyorsa, f fonksiyonuna denir. Birim fonksiyon biçiminde gösterilir.
 - $f: A \rightarrow B$ tanımlanan f fonksiyonunda A kümesinin bütün elemanları, B kümesinin yalnızca bir elemanı ile eşleyen f fonksiyonuna denir.
 - Doğrusal fonksiyonların grafiği kartezyen düzlemde bir dur.
- Aşağıda fonksiyon kavramıyla ilgili bazı bilgiler verilmiştir. Bunlardan doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.
 - (...) Denklemler ve fonksiyonlar kavramsal olarak birbirinden farklıdır.
 - (...) Bazı denklemler aynı zamanda bir fonksiyon belirtir.
 - (...) Fonksiyonlarda bağımlı ve bağımsız değişkenler vardır.
 - (...) Fonksiyonlarda tanım ve değer kümelerinden söz edilirken, denklemlerde çözüm kümesi söz konusudur.
 - (...) Kavramsal olarak denklemler ve fonksiyonlar aynı anlamı ifade ederler.
 - (...) Fonksiyonlar bir dönüşüm tanımlarlar.
- Gerçek sayılar kümesinde tanımlı aşağıdaki ifadelerden hangileri bağımsız ve bağımlı değişken bağlamında bir fonksiyon belirtir? Cevabınızın nedenini açıklayınız.
 - $2x + 3 = -1$
 - $x + 2y = 5$
 - $x^2 + 4x + 3$
 - $y = x^2 + e$
 - $x^2 + y^2 = 4$
 - $g(x) = x^{1/2}$
 - $x = a^y, a \in \mathbb{R}$



KENDİMİZİ SINAYALIM

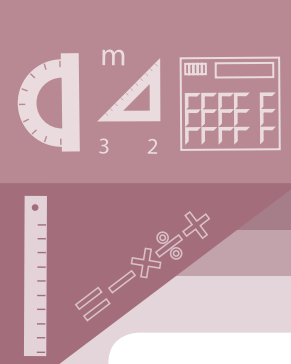
4. Tabloda verilen ilişkilerden hangisi/hangileri fonksiyondur?

| | Tanım bölgesi | İlişki | Değer bölgesi |
|---|--|--------------------------------|---|
| 1 | 2012 yılında tüm illerimizin belediye başkanları | Yılın belediye başkanı seçimi | 2012 yılında tüm illerimizin belediye başkanlarının sırası |
| 2 | 2013 yılında üretilen otomobil markaları | Arabanın markası – satış adedi | 2013 yılında üretilen otomobil markalarının her birinin satış adedi |
| 3 | Türkiye'deki 2012 araba yarışı pilotları | Pilot – kazandığı yarış | 2012'deki tüm araba yarışları |

5. x sütunu tanım, y sütunu ise değer kümesinin elemanlarını göstermek üzere f ve g fonksiyonlarından hangisi doğrusal bir fonksiyon dur? Neden?

| f | | g | |
|---|----|----|----|
| x | y | x | y |
| 1 | 5 | 10 | 1 |
| 2 | 10 | 20 | 3 |
| 3 | 15 | 30 | 7 |
| 4 | 20 | 40 | 13 |
| 5 | 25 | 50 | 21 |
| 6 | 30 | 60 | 31 |
| 7 | 35 | 70 | 43 |
| 8 | 40 | 80 | 57 |

6. Sabit fonksiyon, birim fonksiyon, doğrusal fonksiyon kavramlarını kendi cümlelerinizle açıklayınız.
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ fonksiyonun birim fonksiyon belirtmesi için a ve b değerleri ne olmalıdır?
8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(a-2)x+6$ fonksiyonun sabit fonksiyon belirtmesi için a ne olmalıdır?
9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (n+5)x + n + 6$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre f(1) bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (a-2)x^2 + (b+2)x - a \cdot b$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise $g(2015)$ kaçtır?
11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x + b - 4 \cdot x + 8$ fonksiyonun birim fonksiyon olduğuna göre $2 \cdot a + 3 \cdot b$ değerlerini bulunuz.
12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ve $f(x) = ax + b$ olmak üzere; $f(1) = 9$ ve $f(2) = 17$ olduğuna göre, $f(11)$ kaçtır?
13. Tanımlı olduğu kümede, $f(x) = \frac{k \cdot x - 20}{x - 5}$ sabit fonksiyon ise $k - f(-8)$ kaçtır?
14. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2m-4)x^{3-m}$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?
15. Tanım ve görüntü kümeleri aşağıdaki tablolarla belirtilen fonksiyonların birim, sabit veya doğrusal fonksiyon olarak isimlendiriniz.

| x | y |
|----|----|
| 3 | 12 |
| 8 | 32 |
| 11 | 44 |
| 17 | 68 |
| 21 | 84 |

| x | y |
|----|---|
| 3 | 7 |
| 8 | 7 |
| 11 | 7 |
| 17 | 7 |
| 21 | 7 |

| x | y |
|----|----|
| 3 | 3 |
| 8 | 8 |
| 11 | 11 |
| 17 | 17 |
| 21 | 21 |

16. $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(m-2)x + 3}{2x-6}$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise m sayısı kaçtır?
17. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2a+b-2)x^3 + (3a-b-8)x^2 + (a-5)x + (a-b)$ fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon ise aşağıda istenenleri bulunuz
- a. $f(x)$ fonksiyonunun kuralını b. $f(5)$ c. $f(-8)$ ç. $f(x+1)$
18. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyonu ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olmalıdır. Neden?
19. Bir arabanın aldığı yolla harcadığı benzin arasında doğrusal ilişki vardır. (Örneğin; 10 km gittiğinde 1 lt benzin 20 km gittiğinde 2 lt benzin gibi) arabanın aldığı yolla benzin arasındaki ilişkinin grafiğini çiziniz? Çizdiğiniz grafiğin fonksiyon olması için tanım ve değer kümeleri nasıl olmalıdır? Bu grafiğin denklemini yazınız.

BÖLÜM ÖZETİ

Fonksiyon: A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A'dan B'ye tanımlı fonksiyon** denir ve **$f: A \rightarrow B$** şeklinde gösterilir.

A ve B kümelerinin elemanları arasında yapılan bir ilişkilendirmenin fonksiyon olabilmesi için;

- $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olmalıdır.
- A kümesinde eşlenmeyen eleman olmamalıdır.
- A kümesinin elemanlarından bir tanesi, B kümesinin elemanlarından birden fazlası ile eşlenmemelidir.

Burada **A tanım kümesi**, B ise **değer kümesi** olarak tanımlanır. B kümesinin her elemanının A kümesinin elemanı olması gerekmez. A kümesinin elemanlarının B kümesinden eşlendiği elemanlara **görüntü kümesi** denir. Görüntü kümesi, değer kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. Görüntü kümesi **$f(A)$** ile gösterilir ve ortak özellik yöntemiyle **$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$** şeklinde gösterilir.

$y = f(x)$ olarak tanımladığımız fonksiyonumuzda x değerine **bağımsız değişken**, y değerine ise x'in aldığı değerlere bağlı olarak değiştiği için **bağımlı değişken** denir.



Şemada görüldüğü gibi f fonksiyonu bir makineye de benzetilebilir. Makinenin girdileri olarak tanım kümesindeki her elemanına karşılık değer kümesindeki yalnızca bir elemanı çıktı olarak vermektedir.

Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu ile $a \in A$ ve $b \in B$ için $b = f(a)$ ise

- a'nın f altındaki görüntüsü b dir
- f in a daki değeri b dir
- f fonksiyonu a'yı görüntü kümesinden b ile ilişkilendirmiştir

Eşit fonksiyonlar: $f: A \rightarrow B$ ve $g: C \rightarrow D$ fonksiyonları için

1. Tanım kümeleri eşit olmalıdır.
2. Değer kümeleri eşit olmalıdır.
3. Tanım kümesindeki her x için, $f(x)=g(x)$ olmalıdır.

koşulları sağlanıyorsa f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve **$f = g$** şeklinde gösterilir.

Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için. Tanım kümesinden aldığımız her bir $x \in A$ ile x in görüntüsü olan $f(x) \in B$ elemanlarından oluşturduğumuz $(x, f(x))$ ikililerinden oluşan kümeye f in grafik noktaları kümesi deriz ve **Grafik(f)** ile gösteririz. Bu ikililer kümesini ortak özellik yöntemiyle şu şekilde gösterebiliriz:

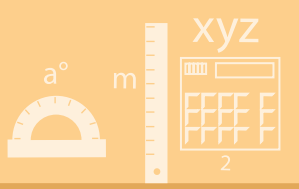
$$\text{Grafik}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(x, y) : x \in A \text{ ve } y = f(x)\}$$

$\text{Grafik}(f) \subset A \times B$ dir. Bu nedenle Grafik(f) kümesini $A \times B$ kümesinin grafiksel gösterimine benzer şekilde grafiksel olarak ifade edebiliriz. Bu f fonksiyonunun grafiksel gösterimini verir.

Tanım kümesindeki her değeri kendisiyle eşleyen fonksiyona **birim fonksiyon** denir. f bir birim fonksiyon ise kuralı $f(x)=x$ şeklindedir.

Tanım kümesindeki her elemanı sabit bir değerle eşleyen fonksiyona **sabit fonksiyon** denir. f bir sabit fonksiyon ve görüntü kümesi $\{c\}$ ise kuralı $f(x) = c$ şeklindedir. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun grafiği $(0, c)$ noktasından geçen ve x-eksenine paralel olan bir doğrudur.

a ve b sabitleri $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ şeklinde verilsin. Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı $f(x) = ax+b$ biçiminde ise bu fonksiyona **doğrusal fonksiyon** denir. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax+b$ doğrusal fonksiyonunun grafiği $(0, b)$ ve $(-b/a, 0)$ noktalarından geçen bir doğrudur. Bu doğru x-eksenini $(-b/a, 0)$ ve y-eksenini de $(0, b)$ noktasında keser.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Uygulama Soruları

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x^2 - 3$ fonksiyonu için

a. $f(-2)$

b. $f(0)$

c. $f(2)$

ç. $f(a+1)$

d. $f(x^2)$

e. $f(x^2+1)$

değerlerini bulunuz.

2. Bir f fonksiyonu "Her bir pozitif tam sayıyı kendisi ile çarpımsal tersinin toplamına götürüyor." şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonu ve $f(4)$ 'ün değerini bulunuz.

3. Bir g fonksiyonu "Her bir negatif gerçekte sayıyı tam sayıyı kendisi ile çarpımsal tersinin toplamına götürüyor." şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonu ve $f(1/4)$ 'ün değerini bulunuz.

4. Bir kişinin deniz seviyesinden yüksekliğin karekökü ile orantılı olarak yatay uzaklığı görebildiğini kabul edelim. Buna göre eğer deniz seviyesinden 25 metre yükseklikte ise 30 kilometreye kadar uzaklığı görebiliyorsa

a. Eğer deniz seviyesinden 64 m yükseklikte ise ne kadar uzağı görebilir?

b. Bir kişinin 24 kilometreye uzaklığı görebilmesi için deniz seviyesinden kaç metre yükseklikte olması gerekir?

5. Bu durumu cebirsel bir fonksiyon olarak ifade ediniz?

6. $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesi, $B = \{-2, 3, 6\}$ olduğuna göre A kümesini bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-5}$

ifadesi bir fonksiyon belirttiğine göre a değeri kaçtır?

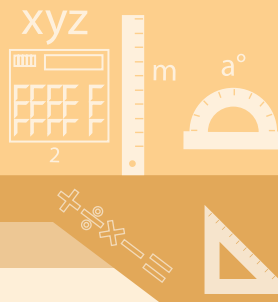
8. $A = \{-1, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ olmak üzere,

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2 - 2$ ve $g: A \rightarrow B$, $g(x) = x - 2$ ile tanımlanan f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadığını bulunuz.

9. Aşağıda verilen f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını belirleyiniz.

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $f(x) = 2x + 1$

$g: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $g(x) = 2x + 1$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

10. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x - 2$ olsun.

f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını belirleyiniz.

11. $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ kümeleri veriliyor.

$g: A \rightarrow B, g(t) = t^3 - t + 1$ ise g fonksiyonu sabit bir fonksiyon mudur? Neden?

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (4a - 8)x + a + 6$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre $f(19)$ değerini bulunuz.

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a-7)x^2 + (a-b)x + (3a+2b)$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(20)$ değerini bulunuz.

14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$f(x) = (3a-9)x^3 + (a-b)x^2 - (a+2c)x + (a+b-c)$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(8)$ değerini bulunuz.

15. Tanımlı olduğu kümede, $f(x) = \frac{4x+8}{x+n}$ sabit fonksiyon ise $n+f(1)$ kaçtır? Bulunuz.

16. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$f(x) = \frac{6x-a}{5}$ fonksiyonu için $f(2) = 3$ ise a sayısını bulunuz.

17. $C = \{0, 1, 2\}$ ve $D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor.

$g: C \rightarrow D, g(x) = 1 - x$ ve $h: C \rightarrow D, h(x) = x - 1$ fonksiyonları eşit midir? Neden?

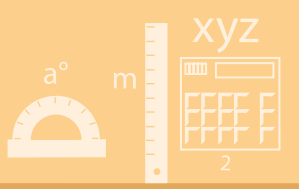
18. f doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f(2) = 3, f(4) = 4$ ise $f(2023)$ değerini bulunuz.

19. $f(x) = (2a + 6)x + b - 11$ fonksiyonun birim fonksiyon olduğuna göre $a + b$ değerlerini bulunuz.

20. $f(x) = (m + 5)x^2 + (n + 8)x + n - k + 2$ fonksiyonun birim fonksiyon olduğuna göre $m + n + k$ değerlerini bulunuz.

21. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



3. 1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

BÖLÜM DEĞERLENDİRME

22. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

23. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (4a + 2b - 10)x^3 + (8a - 4b - 12)x^2 + (a + 4)x + (b)$
fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon ise aşağıda istenenleri bulunuz.

- | | |
|-----------------|----------------------|
| a. $f(x)$ | b. $f(2)$ |
| c. $f(x + 2)$ | ç. $f(x^2)$ |
| d. $f(x^2 - 2)$ | e. $f(x^2 - 2x + 1)$ |

24. f gerçekte sayılarda tanımlı doğrusal bir fonksiyondur.
 $f(1) = 5$ ve $f(3) = 1$ ise $f(19)$ değerini bulunuz.

25. f gerçekte sayılarda tanımlı doğrusal bir fonksiyondur.
 $f(2) = 9$ ve $f(4) = 19$ ise $f(x)$ kuralını bulunuz.
 $f(x - 8)$ 'i bulunuz.

26. f ; gerçekte sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyondur. $3 \cdot f(x) + f(2x) = 10x + 20$ ise $f(x)$ fonksiyonun kuralını belirleyiniz.

27. Gerçekte sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = ax + b$ doğrusal, $g(x) = (3 - a)x + 4$ sabit fonksiyonlardır.
 $g(3) = f(5)$ ise $f(7)$ kaçtır?

Araştırma Soruları

1. f bir doğrusal fonksiyon ise $f(x - y) = f(x) - f(y)$ midir? Açıklayınız.

2. $f(x) = mx + n$ doğrusal fonksiyonunun $m \neq 0$ durumunda neden bir kökü vardır? Açıklayınız.

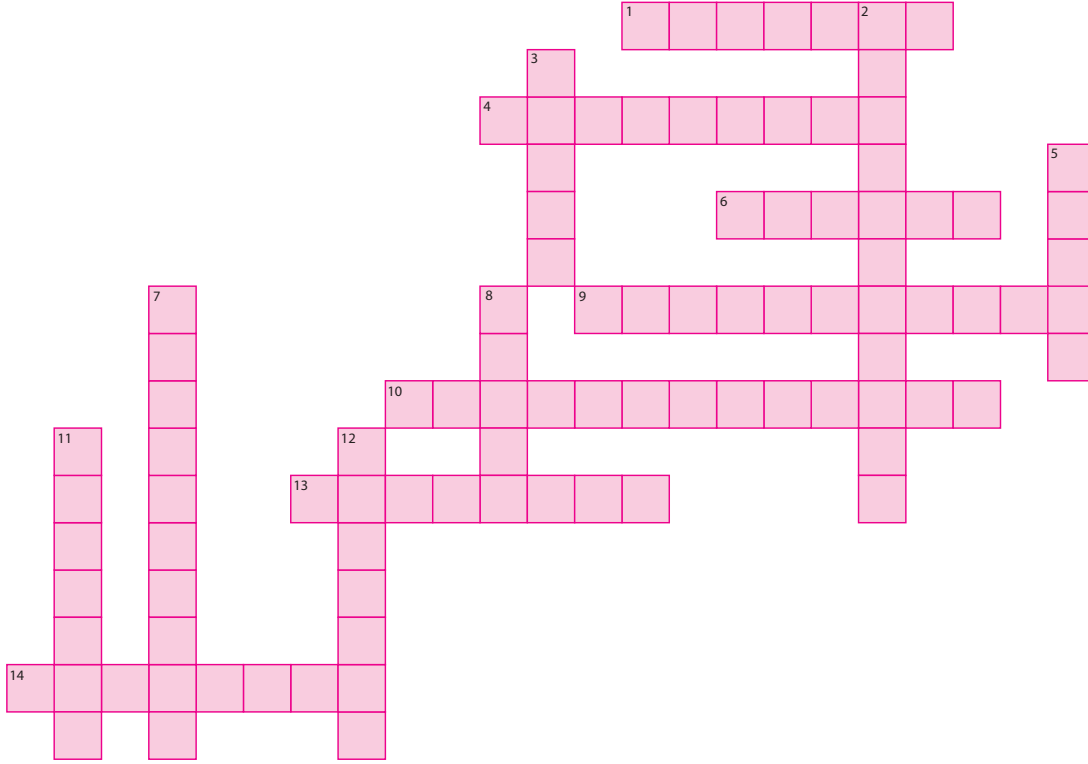
3. Aynı doğru üzerinde yer alan üç noktadan geçen bir grafik her zaman doğrusal bir fonksiyonun grafiği midir? Neden?



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

Eğlenceli Matematik soruları

1. Aşağıdaki bulmacada boş yerleri uygun şekilde doldurunuz.

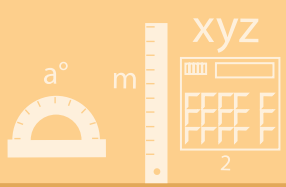


SAĞDAN SOLA

1. $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralında y'ye verilen ad.
4. A ve B kümeleri boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A'nın her elemanının B'nin yalnız bir elemana eşlenmesi
6. A kümesinin her bir ögesi
9. A kümesinden B kümesine tanımlanan bir fonksiyonda B kümesine verilen ad
10. A kümesinden B kümesine tanımlanan fonksiyonda $f(A)$ kümesine verilen ad
13. $y = f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonumuzda x değişkenine verilen ad
14. $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlara verilen ad

SOLDAN SAĞA

2. A kümesinden B kümesine tanımlanan bir fonksiyonda A kümesine verilen ad
3. Doğrusal fonksiyon grafiğine verilen ad
5. A kümesinin bütün elemanları, B kümesinin yalnızca bir elemanı ile eşleyen f fonksiyona verilen ad
7. Fonksiyonların grafik üzerinde x-eksenine paralel çizilen doğrularla bire-bir ve örten olduğunu inceleme testine verilen ad
8. A kümesinin her elemanını tekrar kendisine eşleyen fonksiyonuna verilen ad
11. $f(x) = ax^2$ biçiminde verilen fonksiyonların grafiğine verilen ad
12. $y = f(x)$ olarak tanımladığımız fonksiyonumuzda y değişkenine verilen ad.



3. 1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

BÖLÜM DEĞERLENDİRME

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | U | C | E | Y | Q | D | J | U | R | U | L | Y | W | V | B | I | R | I | M | H | S | Z | N | V |
| O | X | C | C | V | H | V | X | N | H | X | O | Q | I | Y | R | S | K | A | U | N | W | N | Y | X |
| H | T | D | C | I | D | L | G | E | F | K | T | N | L | H | F | Z | U | M | H | T | E | O | G | F |
| X | F | R | C | X | E | L | O | S | I | A | Y | T | J | W | X | U | A | D | Y | C | O | Y | C | W |
| T | T | H | R | M | Ğ | V | L | B | U | S | N | E | Z | B | B | A | Ğ | I | M | L | I | I | M | N |
| O | A | L | E | W | E | L | M | U | A | Q | J | C | I | D | M | A | X | L | K | P | G | S | G | N |
| Z | N | M | L | F | R | A | I | R | K | R | E | I | S | L | D | L | W | Y | X | O | E | K | C | S |
| O | I | C | E | O | K | S | O | Ğ | U | Z | A | I | M | S | F | H | N | B | U | W | C | N | N | E |
| V | M | S | M | C | Ü | U | C | O | W | C | D | P | I | O | O | J | H | B | U | H | G | O | B | T |
| P | K | M | A | T | M | R | Y | D | J | W | M | O | Ğ | H | T | S | T | A | O | T | G | F | I | V |
| O | Ü | R | N | K | E | Ğ | G | R | I | A | Y | C | A | U | L | I | R | A | D | T | Y | R | Y | U |
| P | M | P | W | A | S | O | H | J | K | J | O | L | B | H | I | E | B | V | S | Y | I | G | T | O |
| M | E | T | S | V | I | D | O | B | R | N | A | K | Z | M | K | D | D | A | R | Y | X | A | O | H |
| J | S | U | E | G | Ö | R | Ü | N | T | Ü | K | Ü | M | E | S | İ | H | K | S | F | U | E | I | B |
| K | I | H | R | F | Ü | F | V | J | D | J | N | Z | U | C | Y | A | T | A | Y | D | O | Ğ | R | U |
| U | B | Y | D | J | T | T | B | T | M | X | B | T | M | N | N | O | G | D | K | J | W | X | R | P |
| W | S | G | P | A | M | K | I | X | Q | K | Z | E | Ü | W | M | U | J | H | Y | I | I | O | H | I |

Aşağıda harfleri karışık olarak verilen kavramları düzeltiniz ve yukarıdaki tabloda bu kavramları bulunuz.
(Örneğin NİNOSKYFO: FONKSİYON)

| | | | |
|------------|---------------|------------|------------|
| NİNOSKYFO | AENEML | KÜTSMIENAM | EĞİÜEKMSDR |
| ÖTGRÜÜN | NÜGKSÜMÖIRTEÜ | MZSBAİĞİ | MIAİĞLB |
| IMBIR | AITBS | RASUDLOĞ | AOBARLP |
| YDARYTAOUĞ | ĞRDUO | | |

1. Aşağıda istenenleri yapınız.

- Aklınızdan bir sayı tutunuz.
- Bu sayıya ardışığı olan sayıyı ekleyiniz.
- Bulduğunuz sayıya 9 ekleyiniz.
- Çıkan sayıyı 2 ye bölünüz.
- Bulduğunuz bu sayıdan da ilk başta tuttuğunuz sayıyı çıkarınız.
- Sonuç kaç çıktı?

Farklı tam sayı değerleri için bu adımları tekrar ediniz. Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

Tuttuğunuz sayı ile çıkan sonuç arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz. Bu ilişki bir hangi fonksiyon türüne örnek olabilir? Neden?

Ünite

3

FONKSİYONLAR

Bölüm 3.2.

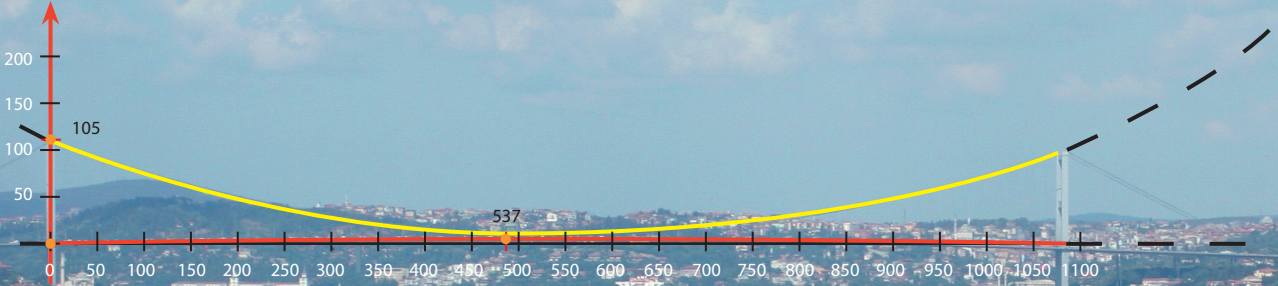
Fonksiyonların Grafikleri

Bu Bölümde Neler

Öğreneceğiz?

- Fonksiyonların grafiğini okumayı ve yorumlamayı
- $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) biçimindeki fonksiyonların grafiklerini

- Doğrusal fonksiyonların grafikleriyle ilgili uygulamaları
- $y = f(x)$ fonksiyonun grafiği ile $f(x) = 0$ denkleminin köklerinin ilişkisi
- Parçalı tanımlı şekilde verilen fonksiyonları ve grafiklerini
- Bire bir fonksiyonları ve örten fonksiyonları



Neden Öğreneceğiz?

Matematikte birçok bilgi için farklı temsil biçimleri kullanılır. Bu sayede, problem çözümlerinde matematiksel temsiller arasından uygun olanları seçmek, uygulamak ve aralarında dönüşümler yapmak; matematiksel, fiziksel, toplumsal olayları yorumlamak ve modellemek için temsiller kullanmak mümkün olmaktadır. Bu çerçevede fonksiyonların özellikle de farklı temsil ve gösterimlerinin anlaşılması önemlidir. Bir fonksiyonun grafiksel gösterimi, fonksiyon hakkındaki birçok bilgiyi görsel ve anlaşılması kolay bir şekilde sunduğu gibi, cebir ile geometriyi bir arada kullanmamıza imkan verir.

Diğer taraftan, günlük hayatımızdaki bazı verilerin kolay anlaşılmasını sağlamak ve akılda kalıcılığını artırmak için bu verilerin sunumunu sayısal ve sözel ifade etme, şekillere dökme gibi yöntemler yardımıyla yaparız. Örneğin, bir işyeri veya şirket sahibi aylık kar zarar durumlarını geçmişle de kıyaslayarak görmek için görsel sunumlar isteyebilir. Fonksiyon grafikleri bu gibi birçok durum için etkin bir sunum yöntemidir.

Boğaziçi Köprüsü'nün temeli 20 Şubat 1970 tarihinde atılmış ve 29 Ekim 1973 tarihinde hizmete açılmıştır. Köprü'nün kule yüksekliği yaklaşık olarak 105 metre, ara açıklığı ise 1074 metredir. Köprü'nün sağlam durmasını sağlayan çelik halatların pozisyonu bir fonksiyonla ifade edilebilir: $f(x) = \frac{92}{537}x^2 - \frac{184}{537}x + 105$

Köprüye dikkatli bakacak olursanız yol kısmı da yere paralel değildir. Bunun amacı köprü'nün direncini artırmak ve daha sağlam olmasını sağlamaktır. Köprü'nün yol kısmının pozisyonu da bir fonksiyon grafiği şeklinde olup $g(x) = -\frac{9}{537^2}x^2 + \frac{18}{537}x$ fonksiyonu ile ifade edilebilir.

HAZIR MIYIZ?

1. Kartezyen düzlemde x-ekseni üzerinde orijinden önce sağa 5 birim, sonra aşağı yönde 2 birim ilerlendiği zaman gelinen noktanın koordinatları (5,-2) olmaktadır. Benzer şekilde,

a. Orijinden y eksenini boyunca 2 birim yukarı çıktıktan sonra 3 birim sağa A noktasına

b. Orijinden y eksenini boyunca 2 birim aşağı indikten sonra 3 birim sağa B noktasına

c. Orijinden x eksenini boyunca 3 birim sola gittikten sonra 3 birim yukarı C noktasına

ç. Orijinden x eksenini boyunca 2 birim sola gittikten sonra 2 birim aşağı D noktasına ulaşılmaktadır.

Buna göre A, B, C ve D noktalarının koordinatlarını kartezyen düzlemde gösteriniz.

2. Kartezyen düzlemdeki bir A noktasından 2 birim sağa 3 birim aşağı yönde ilerlenildiğinde (0,0) noktasına geliniyor. Buna göre A noktasının koordinatları nedir?

3. (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6) ve (5, 7) noktalarını Kartezyen düzlemde gösteriniz. Bu noktaların dizilişi ile ilgili neler söylenebilir?

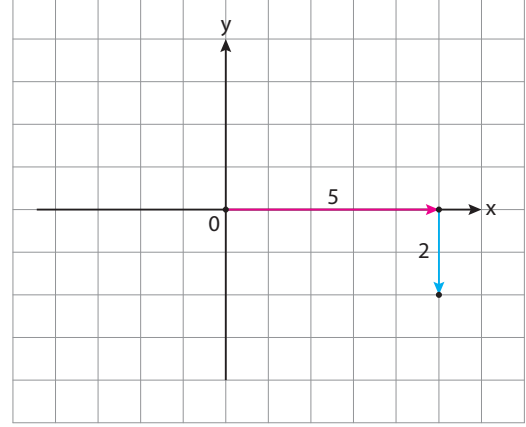
4. Herhangi bir fonksiyonun grafiğini alarak bu grafiği x-eksenine dikey doğrularla tarayınız. Çizdiğiniz her bir dikey doğru fonksiyon grafiğini kaç noktada kesti?

5. Herhangi bir fonksiyonun grafiğini alarak bu grafiği x-eksenine paralel doğrularla tarayınız. Çizdiğiniz her bir paralel doğru fonksiyon grafiğini kaç noktada kesti?

6. $x^2 = 4$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

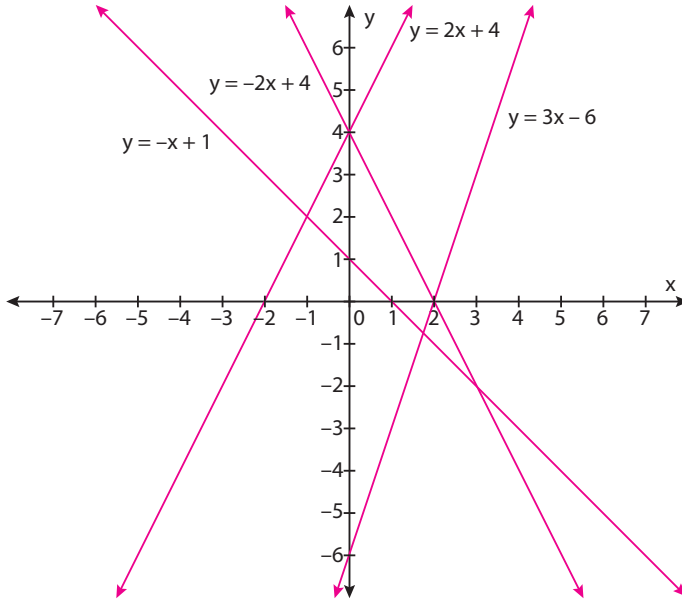
7. $x^2 + 4x + 4 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

8. $f(x) = x - 4$ fonksiyonunun grafiğinin x-eksenini kestiği nokta ile $x - 4 = 0$ denkleminin kökünü karşılaştırınız.



HAZIR MIYIZ?

9. \mathbb{R} de tanımlı f fonksiyonu $f(x) = 2x - 9$ ile veriliyor. Bu fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimini bulunuz.
10. $f(x) = x + 3$ fonksiyonun grafiğini $x < -1$ ve $g(x) = -x + 1$ fonksiyonunun grafiğini $x > -1$ için çiziniz. Bu grafikleri aynı kartezyen düzlemde gösteriniz.
11. Aşağıda verilen doğrusal denklemlerin grafiklerini çiziniz.
- a. $y = x - 1$ b. $y = 2x - 1$ c. $y = x + 2$
12. $y = 3 - x$ denklemi için $x \in \{1, 2, 5, 8\}$ ise y değerlerinin kümesini yazınız.
13. $y = 3x + 1$ denklemi için $y \in [1, 10]$ ise x hangi aralıkta değerler alabilir?
14. Aşağıda grafiği verilen doğruların eğimlerini bulunuz.



Neler Öğreneceğiz?

- Dikey doğru testini
- fonksiyonların grafiğinden
 - tanım ve görüntü kümelerini
 - tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsünü
 - görüntü kümesindeki bir elemanın ters görüntülerini
 - tanım kümesinin bir alt kümesinin görüntüsünü
 - görüntü kümesinin bir alt kümesinin ters görüntüsünü bulmayı

Anahtar Terimler

- Fonksiyonun grafiği
- Tanım kümesinin alt kümesinin görüntüsü
- Değer kümesinin alt kümesinin ters görüntüsü
- Dikey doğru testi

Sembol ve Gösterimler

- $f : A \rightarrow B$ ve
- $K \subset A$ için $f(K)$

3.2.1. Fonksiyon Grafiklerini Okuma ve Yorumlama

Başlarken:

Yandaki grafikte, ülkemizdeki nüfus artış hızının yıllara göre binde kaç azaldığını (değiştiğini) görüyoruz. Bu grafikten ne gibi çıkarımlar yapabiliriz? Örneğin, şu sorulara cevap bulabilir miyiz?

Verilen bir yıldaki nüfus artış hızını başka bir yıldaki nüfus artış hızıyla kıyaslayabilir miyiz?

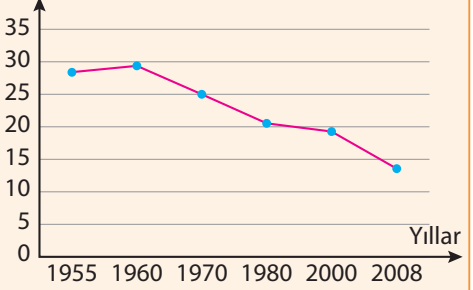
1955 ile 2008 yılları arasında nüfus artış hızının en fazla olduğu yıl hangi yıldır?

Nüfus artış hızının azalıp artma bakımından seyri nasıldır?

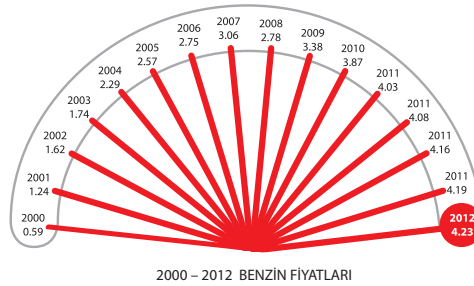
Bu örnekte olduğu gibi verilerin grafiksel sunumu sizce ne gibi faydalar sağlamaktadır?

Benzer şekilde gazete ve dergilerin ekonomi sayfalarına baktığımızda borsa, enflasyon gibi birçok konuda grafiklerin sıklıkla kullanıldığını görürüz.

Nüfus artış hızı (binde)



Karmaşık verileri daha iyi analiz edebilmek için verileri görsel hale getirmek iyi bir çözümdür. Fonksiyon grafiklerinin kullanımı verileri görsel hale getirip anlaşılmasını kolaylaştırdığı gibi fonksiyonların özelliklerini kullanarak eldeki verilerden yeni bilgilere ulaşmamıza da imkan sağlar.

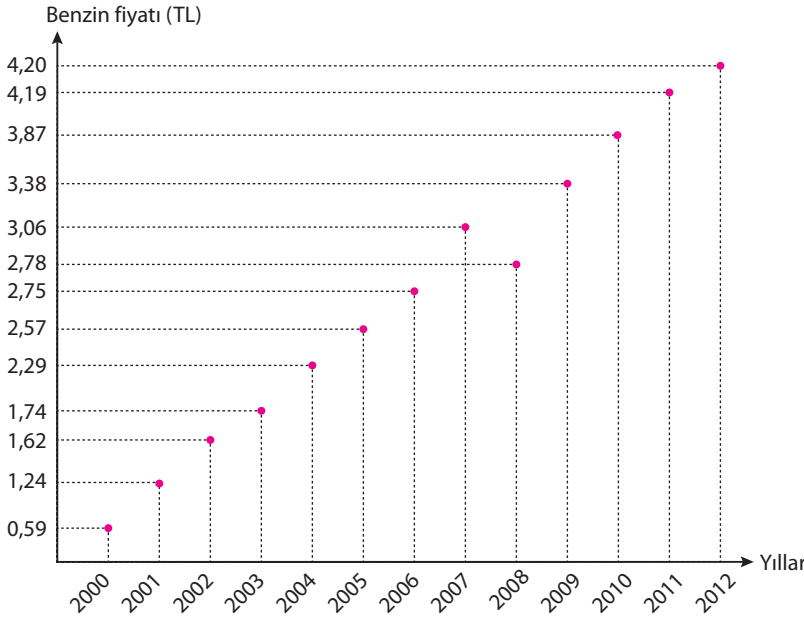


Fonksiyon grafiklerinin yorumlarına geçmeden önce çizimlerini örneklerle hatırlatalım.

Ülkemizdeki 2000 ve 2012 yıllarına ait benzin fiyatları yanda verilmiştir. Bu değerleri tablo ve grafik yardımıyla gösterelim.

| Yıl | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Fiyat | 0,59 | 1,24 | 1,62 | 1,74 | 2,29 | 2,57 | 2,75 | 3,06 | 2,78 | 3,38 | 3,87 | 4,19 | 4,20 |

Tablodaki değerleri (yıl, fiyat) sıralı ikilisi olarak x - y koordinat sistemi üzerinde gösterelim.



Grafiğe bakarak kolay bir şekilde yıllar geçtikçe benzin fiyatlarının nasıl değiştiğini görebiliriz. Örneğin, benzin fiyatlarının genel eğilimi yıllar geçtikçe artmasıdır. Fakat 2008 yılında fiyatların iniş eğiliminde olduğunu görmekteyiz.

Örnek 1

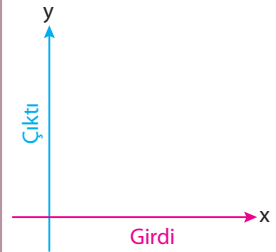
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x + 1$ ile verilen bir doğrusal fonksiyon olsun.

$A = \{-3, -2, 1, 2, 4\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 5\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre

- Tanım kümesinin bir alt kümesi olan A kümesindeki elemanların f altındaki görüntülerini bulalım.
- Görüntü kümesinin bir alt kümesi olan B kümesindeki elemanların, tanım kümesindeki hangi elemanların f altındaki görüntüleri olduğunu bulalım.
- Bu doğrusal fonksiyonun grafiğini, grafiğin x ve y eksenlerini kestiği iki noktayı kullanarak çizelim.
- Çizdiğiniz grafik üzerinde koordinatları, A kümesindeki elemanlar ve bu elemanların f altındaki görüntüleri olan noktaları gösterelim.

Anahtar Bilgi

$y = f(x)$ fonksiyonunda girdiler x ekseninde çıktılar y ekseninde gösterilir.



Çözüm

- a. f in A kümesinin elemanlarındaki değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} f(-3) &= -3 + 1 = -2, & f(-2) &= -2 + 1 = -1, & f(1) &= 1 + 1 = 2, \\ f(2) &= 2 + 1 = 3 & f(4) &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

- b. Öncelikle f nin tanım kümesi \mathbb{R} dir.

Bu durumda, görüntüsü -1 olan $a \in \mathbb{R}$ şeklindeki a değerini bulalım.

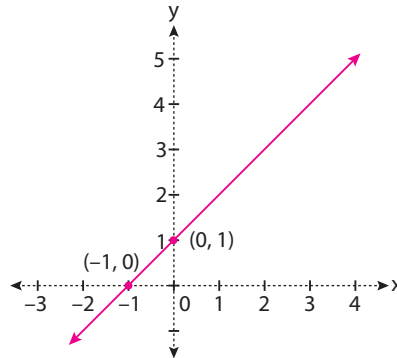
$f(a) = -1$ den $a + 1 = -1$ ve de $a = -2$ bulunur. Bu durumda görüntüsü -1 olan tanım kümesinin elemanı -2 dir. Bu durum, “ -1 in f altındaki ters görüntüsü -2 ” dir şeklinde de ifade edilmektedir.

Benzer şekilde, $f(b) = 0$ ise $b + 1 = 0$ ve $b = -1$; $f(c) = 1$ ise $c + 1 = 1$ ve $c = 0$; $f(d) = 5$ ise $d + 1 = 5$ ve $d = 4$ olur. Bu durumda $0, 1$ ve 5 sırasıyla $-1, 0$ ve 4 ün f altındaki görüntüleridir.

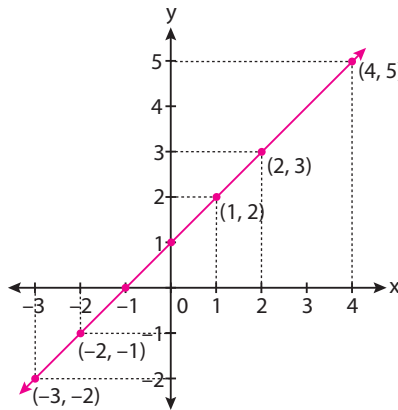
- c. f nin grafiği, $y = x + 1$ denklemiyle belirtilen doğrudur. Bu doğrunun x eksenini kestiği noktanın y bileşeni 0 olacağından, $0 = x + 1$ eşitliğinden $x = -1$, bulunur. Bu nedenle, $(-1, 0)$ noktası grafiğin x eksenini kestiği noktadır.

y eksenine grafiğin kesişme noktasında x bileşeni 0 olacağından $y = 0 + 1$ ve de $y = 1$ olur. Dolayısıyla, $(0, 1)$ noktası grafiğin y eksenini kestiği noktadır.

Böylece f in grafiği $(-1, 0)$ ve $(0, 1)$ noktalarından geçen doğrunun grafiği olarak şu şekildedir:



- d. A kümesinde bulunan elemanların f altındaki görüntülerini bulmuştuk. Bunlara karşılık gelen noktaların koordinatları $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$ dir. Bu noktaların x ve y bileşenleri fonksiyonun kuralı olan $y = f(x)$ yani $y = x + 1$ eşitliğini sağladığından bu noktalar f nin grafiği üzerindedir ve şu şekilde grafikte gösterilirler:



Doğrusal fonksiyon için yaptığımız bu işlemlerde herhangi bir fonksiyon için doğru olan şu bilgiyi kullandık:

Bir (a, b) sıralı ikilisini oluşturan bileşenler bir f fonksiyonunun kuralı olan $y = f(x)$ eşitliğini $b = f(a)$ şeklinde sağlarsa koordinatları (a, b) olan nokta f fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

Bunun tersi de doğrudur. Şöyle ki, eğer $y = f(x)$ ile verilen fonksiyonun grafiği üzerindeki bir noktanın koordinatları (a, b) ise a ile b arasında $b = f(a)$ ilişkisi vardır.

Hatırlayacağımız gibi, a tanım kümesinden bir eleman ve $b = f(a)$ ise b görüntü kümesine ait bir eleman olmalıdır. Bu durumda **b , a nın f altındaki görüntüsüdür** veya **f nin a daki değeri b dir** deriz.

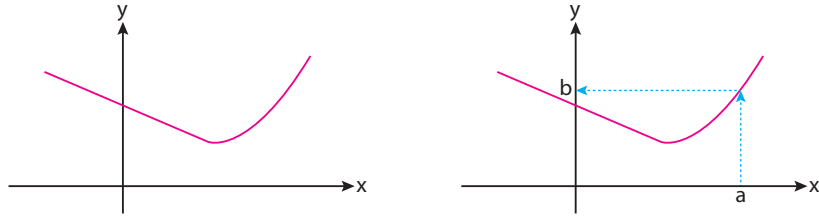
b görüntü kümesinden bir eleman ise $b = f(a)$ eşitliğini sağlayan ve tanım kümesinin elemanı olan bir a vardır. Ancak, $b = f(a)$ eşitliğini sağlayan a değerleri birden fazla olabilir ve hepsinin tanım kümesinde bir eleman olma zorunluluğu yoktur.

b değer kümesinden bir eleman, $b = f(a)$ ve a tanım kümesinin bir elemanı ise b nin f altındaki bir **ters görüntüsü** a dır deriz.

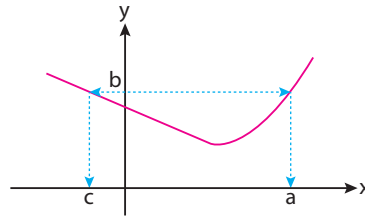
Şu ana kadar bir fonksiyonun tanım kümesini, görüntü kümesini ve tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerini bulmayı, fonksiyonun değerler tablosunu veya fonksiyonun kuralını kullanarak öğrendik. Şimdi ise fonksiyonun grafiğini kullanarak da bunların bulunabileceğini göreceğiz. Önce belirttiğimiz ilişkileri, fonksiyonun grafiği, tanım kümesi ve görüntü kümesi açısından yeni bir açıklamayla tekrar edip detaylandıralım.

f fonksiyonunun grafiği üzerindeki bir noktadan x eksenine çizdiğimiz dik doğrunun x eksenini kestiği noktanın x bileşeni, f in tanım kümesinin elemanıdır. Benzer şekilde fonksiyonun grafiği üzerinden alınan bir noktadan y eksenine çizdiğimiz dik doğrunun y eksenini kestiği noktanın y bileşeni, f in değer kümesinin elemanıdır. Bu işlemi fonksiyonun grafiği üzerindeki her bir nokta için yaparak, fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulabiliriz.

Bir fonksiyonun grafiği verildiğinde tanım kümesindeki herhangi bir a değerinin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü bulabiliriz. Bunun için x ekseninde a değeri ile belirtilen noktayı buluruz. Bu noktadan x -eksenine dik bir doğru çizerek bu doğrunun fonksiyonun grafiğini kestiği noktayı buluruz. Grafik üzerinde bulduğumuz bu noktadan y eksenine dik bir doğru çizeriz. Bu doğru aynı zamanda da x eksenine paraleldir. Bu doğrunun y eksenini kestiği noktaya karşılık gelen b değeri, a nın f altındaki görüntüsü olur. Örneğin bu işlemler bir grafik üzerinde aşağıdaki gibi belirtilebilir:

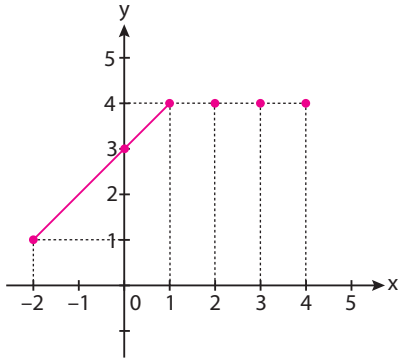


Diğer taraftan, bir fonksiyonun grafiği verildiğinde değer kümesindeki herhangi bir b değerinin varsa bu fonksiyon altındaki ters görüntülerini bulabiliriz. Bunun için y ekseninde b değeri ile belirtilen noktayı buluruz. Bu noktadan y -eksenine dik bir doğru çizerek bu doğrunun fonksiyonun grafiğini kestiği noktaları buluruz. Bu noktalar en az bir tanedir. Grafik üzerinde bulduğumuz bu noktalardan x eksenine dik doğrular çizeriz. Bu doğrular aynı zamanda da y eksenine paraleldir. Bu doğruların x eksenini kestiği noktalara karşılık gelen değerler, b nin f altındaki ters görüntüleridir. Örneğin, aşağıdaki grafik üzerindeki b için bunları yaparsak b nin ters görüntüleri a ve c olur ve şu şekilde gösterilebilir:



Örnek 2

g fonksiyonunun grafiği şu şekildedir:

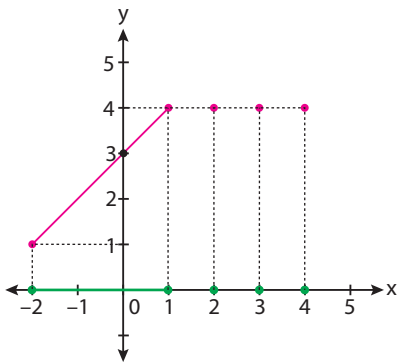


Buna göre, bu fonksiyonun

- Tanım kümesini
- Görüntü kümesini
- Tanım kümesindeki -2 , 0 ve 3 ün g altındaki görüntülerini
- Görüntü kümesindeki 1 , 3 ve 4 ün g altındaki ters görüntülerini bulalım.

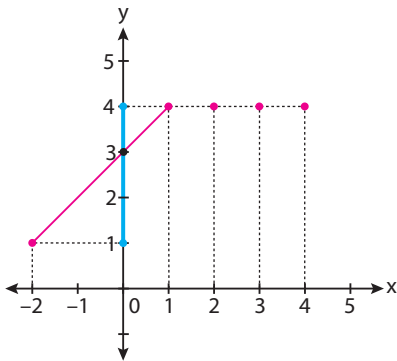
Çözüm

a.



Fonksiyonun grafiği üzerindeki her bir noktadan x eksenine çizdiğimiz dik doğrular x eksenini tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelen noktalarda kesecektir. Bu dik doğruların x eksenini kestiği noktalar yandaki grafikte yeşil ile gösterilmiştir. O halde g nin tanım kümesi $[-2, 1] \cup \{2, 3, 4\}$ olur.

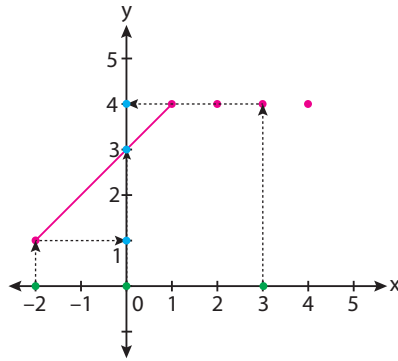
b.



Fonksiyonun grafiğinin her bir noktasından y eksenine dik doğrular çizdiğimizde bu doğruların y eksenini kestiği noktalara karşılık gelen değerler görüntü kümesini verecektir. Bu noktalar yandaki grafikte mavi ile gösterilmiştir. Dolayısıyla g nin görüntü kümesi $[1, 4]$ olarak bulunur.

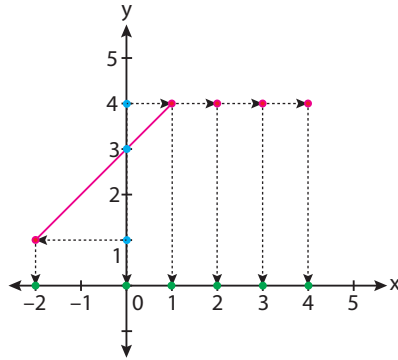
Bu durumda fonksiyonumuz $g : [-2, 1] \cup \{2, 3, 4\} \rightarrow B$ şeklinde olacaktır. Burada B kümesi g nin değer kümesi ve $g([-2, 1] \cup \{2, 3, 4\}) = [1, 4]$ kümesi de g nin görüntü kümesidir. Grafikteki bilgilerden B hakkında söyleyebileceğimiz tek şey $[1, 4] \subset B$ olduğudur.

c.



x ekseninde $-2, 0$ ve 3 noktalarını bulup bu noktalardan geçen ve x eksenine dik olan doğrular g nin grafiğini yandaki şekilde belirtilen $(-2, 1), (0, 3)$ ve $(3, 4)$ noktalarında keser. Bu noktalardan y eksenine çizdiğimiz dik doğrular da y eksenini yine yandaki şekilde belirtilen noktalarda kesecektir. Bu nedenle $-2, 0$ ve 3 ün g altındaki görüntüleri sırasıyla $1, 3$ ve 4 tür. Yani $g(-2) = 1, g(0) = 3$ ve $g(3) = 4$ tür.

ç.



y ekseninde $1, 3$ ve 4 noktalarını bulalım. Bu noktalardan x eksenine paralel doğrular çizelim. Bu doğruların g nin grafiğini kestiği noktalar yandaki şekilde belirtilen noktalarda keser. Bu noktalardan x eksenine çizdiğimiz dik doğrular da x eksenini yine yandaki şekilde görüldüğü gibi $-2, 0, 1, 2, 3, 4$ noktalarında kesecektir.

Bu nedenle

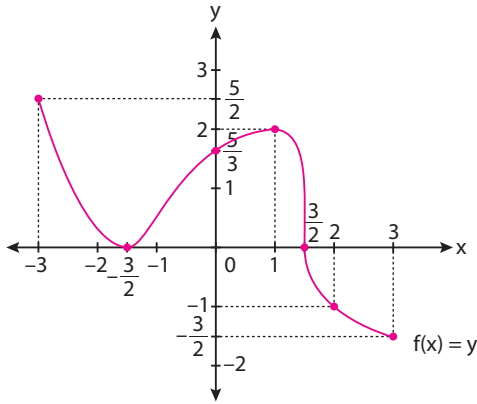
1 in g altındaki ters görüntüsü -2 , yani $g(-2) = 1$,

3 ün g altındaki ters görüntüsü 0 , yani $g(0) = 3$

4 ün g altındaki ters görüntüleri $1, 2, 3$ ve 4 tür. Yani $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 4$ tür. 4 ün birden fazla ters görüntüsünün olduğuna dikkat edelim.

Örnek 13

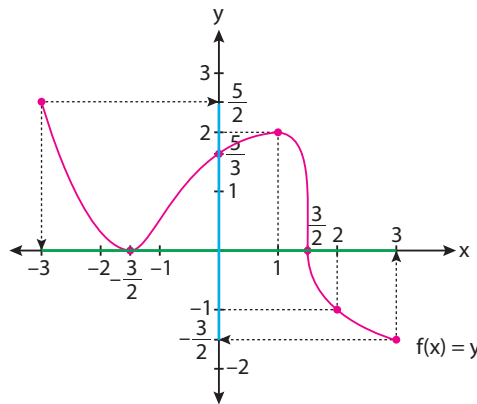
f fonksiyonunun grafiği şekilde gibidir. Buna göre;



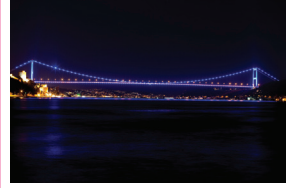
- f in tanım ve görüntü kümelerini bulalım.
- f in tanım kümesinden alınan $-3, -\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2$ ve 3 'ün f altındaki görüntülerini bulalım.
- Görüntü kümesindeki elemanlardan hangilerinin f altındaki ters görüntüsünün tanım kümesinden birer, ikişer veya üçer elemandan oluştuğunu bulalım.
- $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$ ve $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ aralıklarında yer alan elemanların f altındaki görüntülerinin oluşturdukları kümeleri bulalım.

Çözüm

- Tanım kümesini grafikten x eksenine çizdiğimiz dik doğrularla aşağıdaki grafikte yeşille belirtildiği gibi $[-3, 3]$ şeklinde buluruz. Görüntü kümesini grafikten y eksenine çizdiğimiz dik doğrularla aşağıdaki şekilde maviyle belirtildiği gibi $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ şeklinde buluruz.



Bunu biliyor muydunuz?



Kule ayakları arasındaki orta açıklığı 1090 metre ve temelden itibaren kule yüksekliği 111 metre olan Fatih Sultan Mehmet Köprüsü 3 Temmuz 1988 de işletmeye açıldı. Bir kuleden x metre uzakta halatların yüksekliğini yaklaşık olarak hesaplamak için, kuralı

$$h(x) = \frac{110}{542}(x - 542)^2 + 5$$

olan gerçek sayılarda tanımlı h fonksiyonundan yararlanabiliriz.

b. $-3, \frac{-3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2$ ve 3 noktalarının f altındaki görüntüleri sırasıyla

$$\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{3}, 2, 0, -1 \text{ ve } \frac{-3}{2} \text{ dir.}$$

c. $y = 2$ doğrusu grafiği iki noktada kesmektedir ki bunlardan birinin koordinatları $(1, 2)$ dir. Benzer şekilde $y = 0$ doğrusu yani x eksenini, grafiği iki noktada kesmektedir ki bu noktaların koordinatları $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ve $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ dir. Bu nedenle, görüntü kümesindeki 0 ve 2 nin f altındaki ters görüntüleri ikiye elemandır.

y ekseninde 0 ile 2 nin arasında yer alan herhangi bir yerden x eksenine paralel bir doğru çizersek grafiği üç noktada keser. Bu nedenle, görüntü kümesindeki elemanlardan $(0, 2)$ aralığında olanların f altındaki ters görüntüleri üçer elemandır.

Görüntü kümesindeki diğer elemanların, yani $\left[\frac{-3}{2}, 0\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$ kümesindeki elemanların f altındaki ters görüntüleri birer tanedir.

ç. Tanım kümesinde olup $\left[\frac{-3}{2}, 0\right]$ aralığında yer alan elemanların görüntülerinin oluşturduğu küme $\left[0, \frac{5}{3}\right]$ tür. Benzer şekilde $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ aralığında yer alan elemanların görüntülerinin oluşturduğu küme $[0, 2]$ dir.

Şimdi görüntü olan elemanlar ile ters görüntü olan elemanların oluşturduğu kümeler için kullanacağımız sembolik gösterimleri tanımlayalım.

A ve B kümeleri ile $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Herhangi bir C ve D kümeleri $C \subset A$ ve $D \subset f(A)$ olsun. Bu durumda tanım kümesinin bir alt kümesi olan C kümesindeki elemanların f altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye kısaca **C nin f altındaki görüntüsü** denir ve **$f(C)$** ile gösterilir. Bu küme ortak özellik yöntemiyle

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

şeklinde belirtilir.

Benzer şekilde görüntü kümesinin bir alt kümesi olan D kümesindeki elemanların f altındaki ters görüntülerinin oluşturduğu kümeye D kümesinin f altındaki ters görüntüsü deriz ve bu kümeyi ortak özellik yöntemiyle

$$D \text{ nin } f \text{ altındaki ters görüntüsü} = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

şeklinde gösteririz.

Örnek 4

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonu ile $c < d$ ve $n < m$ şartlarını taşıyan c, d, n, m gerçekte sayıları için

- a. $[c, d]$ nin f altındaki görüntüsü
 - b. $[n, m]$ nin f altındaki ters görüntüsü
- kümelerini bulalım.

Çözüm

Burada olduğu gibi herhangi bir f doğrusal fonksiyonunun grafiğine bakacak olursak, f doğrusal fonksiyonu x eksenindeki bir kapalı (açık) aralıktaki elemanları y eksenindeki bir kapalı (açık) aralıktaki elemanlarla eşlemektedir. f in grafiğinin bu eşlemeye karşılık gelen kısmı ise bir doğru parçasıdır. Bu doğru parçasının uç noktalarının koordinatlarını, kapalı aralıkların uç noktaları ve f altındaki görüntüleri oluşturmaktadır. Bu nedenle çözüme aşağıdaki gibi devam edebiliriz.

- a. $[c, d]$ nin f altındaki görüntüsü $f([c, d])$ dir. $f(c) = ac + b$ ve $f(d) = ad + b$ dir. Burada, $a > 0$ iken $f(c) < f(d)$ olduğundan, $f([c, d]) = [f(c), f(d)] = [ac + b, ad + b]$ olacaktır.

Eğer $a < 0$ ise $f(c) > f(d)$ olduğundan $f([c, d]) = [f(d), f(c)] = [ad + b, ac + b]$

İkinci bir yol olarak, $a > 0$ iken $f([c, d]) \subset [f(c), f(d)]$ ve $[f(c), f(d)] \subset f([c, d])$ olduğu gösterilerek $f([c, d])$ ve $[f(c), f(d)]$ kümelerinin eşitliği gösterilebilir. $a < 0$ iken de benzer bir yol izlenebilir.

Grafikteki ilgili doğru parçasının uç noktaları ise $(c, ac + b)$ ve $(d, ad + b)$ noktalarıdır.

- b. Görüntü kümesinde yer alan n ve m elemanlarının f altındaki ters görüntüleri sırasıyla u ve v olsun. Bu durumda $f(u) = n$ ve $f(v) = m$ dir. Buradan $au + b = n$ ve

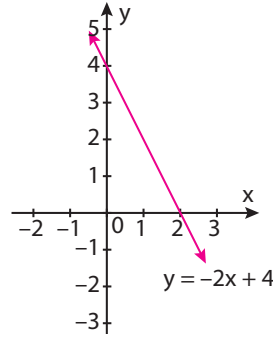
$av + b = m$ olur. Dolayısıyla, $u = \frac{(n - b)}{a}$, $v = \frac{(m - b)}{a}$ olarak bulunur. Bu du-

rumda, $[n, m]$ nin f altındaki ters görüntüsü $a > 0$ iken $\left[\frac{(n - b)}{a}, \frac{(m - b)}{a} \right]$ ve $a < 0$

iken $\left[\frac{(m - b)}{a}, \frac{(n - b)}{a} \right]$ aralığıdır. Grafikteki ilgili doğru parçasının uç noktaları

ise $\left(\frac{n - b}{a}, n \right)$ ve $\left(\frac{m - b}{a}, m \right)$ noktalarıdır.

Örnek 5



Yanda g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

- Fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini bulalım.
- Tanım kümesinin bir alt kümesi olan $(1, 2]$ ün g altındaki görüntüsünü bulalım.
- Görüntü kümesinin bir alt kümesi olan $[2, 4]$ ün g altındaki ters görüntüsünü bulalım.

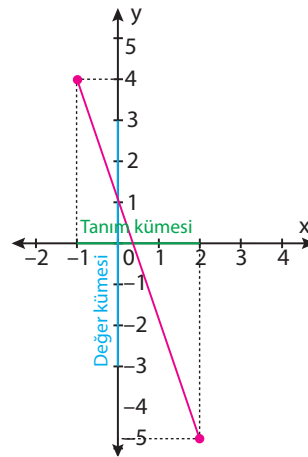
Çözüm

- Tanım kümesinin \mathbb{R} olduğu grafikten anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, görüntü kümesinin \mathbb{R} olduğu grafikten anlaşılmaktadır. Bu durumda değer kümesi de görüntü kümesine eşit olarak \mathbb{R} olacaktır.
- $(1, 2]$ nin g altındaki görüntüsü $g((1, 2])$ dir. Ayrıca, $g(1) = 2$ ve $g(2) = 0$ dir. Dolayısıyla, bir önceki örnekteki benzer olarak $g((1, 2]) = [g(2), g(1)) = [0, 2)$ olur.
- $[0, 4]$ ün g altındaki ters görüntüsü $[0, 2]$ dir.

Örnek 6

$h : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı $h(x) = -3x + 1$ olarak veriliyor. Bu fonksiyonun görüntü kümesini bulalım ve grafiğini çizelim.

Çözüm



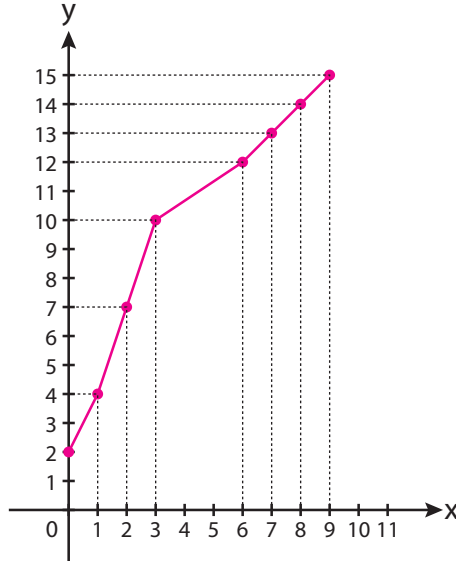
Bu fonksiyonun tanım kümesi $[-1, 2]$ ve değer kümesi de \mathbb{R} olarak verilmiştir.

Bu fonksiyonun grafiğini çizmek için doğrusal fonksiyonların çiziminde izlediğimiz yoldan faydalanabiliriz. Çünkü h nin tanım kümesi \mathbb{R} olsaydı bir doğrusal fonksiyon olurdu ve doğrusal fonksiyonların bir önceki örnekte belirtilen özelliklerini h için de kullanabiliriz.

O halde h nin grafiği, $[-1, 2]$ aralığındaki elemanları $[h(-1), h(2)]$ yani $[-5, 4]$ aralığındaki elemanlarla eşlemektedir. Diğer bir ifadeyle, h nin görüntü kümesi $[-5, 4]$ tür. Ayrıca h nin grafiği, uç noktaları $(-1, 4)$ ve $(2, -5)$ olan doğru parçasıdır. Bu bilgiler doğrultusunda h fonksiyonunun grafiği yandaki şekildedir.

Örnek 7

Bir fidanın dikildiği andan itibaren yıllara göre büyüme grafiğinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.



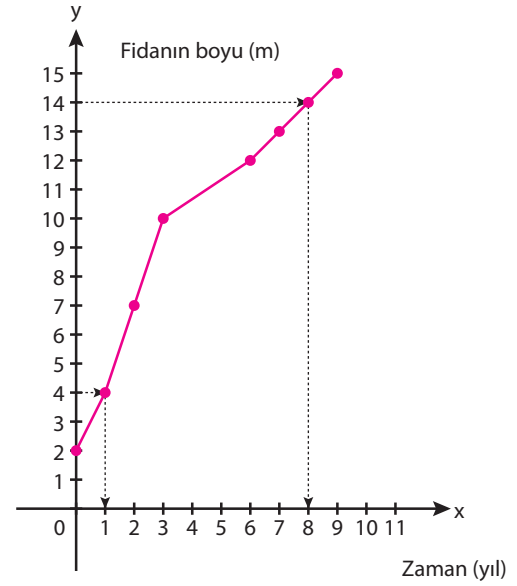
Buna göre;

- 3, 6 ve 7. yıllarda fidanın boyunu bulalım.
- Kaçıncı yılda fidanın boyunun 4 metre ve kaçınıcı yılda 14 metre olduğunu bulalım.
- Fidanın boyunun 4 metreden 14 metreye çıkana kadar geçen zaman aralığını grafikte zamanın belirtildiği eksen üzerinde gösterelim.
- Fidanın boyu 4 metre iken kaç yıl sonra fidanın boyu 14 metre olduğunu bulalım.

Çözüm

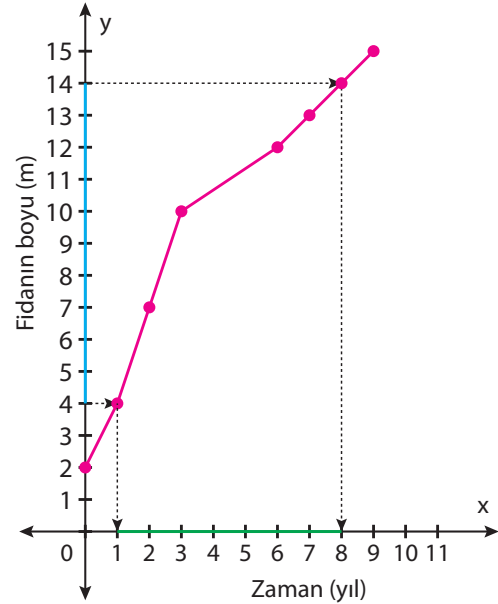
- Grafiği bir f fonksiyonunun grafiği olarak düşünelim. Örneğin, verilen grafik, $f: [0, 9] \rightarrow [2, 15]$ şeklinde bir fonksiyonun grafiği olarak düşünülebilir. Bu durumda 3, 6, 7. yıllardaki fidanın boyu sırasıyla $f(3)$, $f(6)$, $f(7)$ değerleridir. Grafikten $f(3) = 10$, $f(6) = 12$, $f(7) = 13$ olduğu görülmektedir. Öyleyse fidanın boyu 3. yılda 10 metre, 6. yılda 12 metre, 7. yılda 13 metre olur.

- b.** Fidanın boyunun 4 ve 14 metre olduğu yıllar $f(x) = 4$ ve $f(t) = 14$ eşitliğini sağlayan x ve t değerleridir. Diğer bir ifadeyle bu değerler, f in görüntü kümesindeki 4 ve 14 elemanlarının f altındaki ters görüntüdür. Ters görüntüleri bulmak için grafik üzerinde yapacağımız işlem yandaki grafik üzerinde şekilde belirtilmiştir.

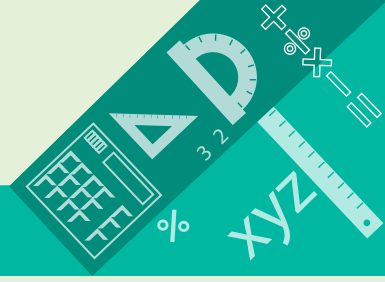


Böylece, 4 ün ters görüntüsü 1, 14 ün ters görüntüsü 8 olduğundan fidanın boyunun 4 metre olduğu yıl 1. yıldır. Benzer şekilde fidanın boyunun 14 metre olduğu yıl 8. yıl olur.

- c.** Fidanın boyunun 4 m den 14 m ye çıktığı süreci grafik üzerinde yandaki gibi belirtebiliriz. Boydaki değişim aralığını dikey eksende mavi ve buna karşılık gelen zaman aralığını da yatay eksende yeşil ile gösterdik.
- Bu soruyu f fonksiyonu için şu şekilde de ifade edebiliriz: f in görüntü kümesinin bir alt kümesi olan $[4,14]$ aralığının f altındaki ters görüntüsü nedir? Grafikten de anlaşılacağı üzere bu soruya cevabımız $[1, 8]$ şeklindedir.



- ç.** Zaman aralığındaki değişim süresi $8-1 = 7$ yıldır. Diğer bir ifadeyle, fidanın boyu 4 metre iken 7 yıl sonra fidanın boyu 14 metre olur.



Bu atölye çalışmasında bir fonksiyonun tanım ve değer kümesi değiştiğinde grafiğinde oluşan değişiklikleri inceleyeceğiz.

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyon kuralı veriliyor. Buna göre bu fonksiyonun;

Adım 1 ►

Tanım kümesi $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ değer kümesi $B = \{-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olacak şekilde grafiğini çiziniz.

Adım 2 ►

Tanım kümesi $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ değer kümesi $B = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4, 5\}$ olacak şekilde grafiğini çiziniz.

Adım 3 ►

Tanım ve değer kümesi doğal sayılar olacak şekilde grafiğini çiziniz.

Adım 4 ►

Tanım ve değer kümesi tamsayılar olacak şekilde grafiğini çiziniz.

Adım 5 ►

Tanım kümesi tamsayılar değer kümesi reel sayılar olacak şekilde grafiğini çiziniz.

Çizdiğiniz bu grafiklerden yola çıkarak;

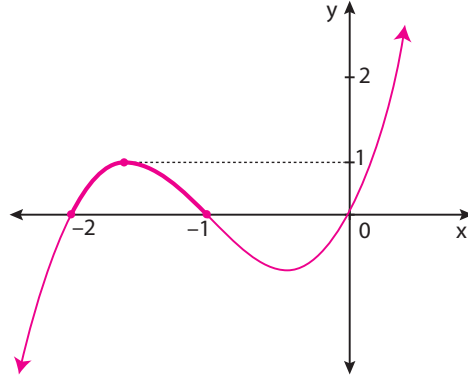
Adım 6 ►

Değer kümesindeki değişimin grafiği nasıl etkilediğini belirtiniz.

Adım 7 ►

Tanım kümesindeki değişimin grafiği nasıl etkilediğini belirtiniz.

Örnek 8

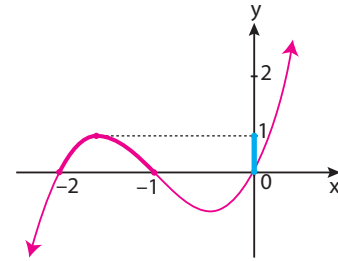
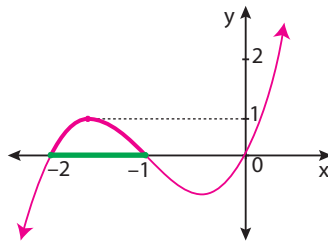


Yandaki grafiğe göre aşağıda istenenleri yapalım.

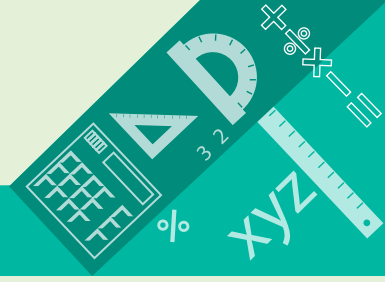
- Grafiği verilen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulalım.
- Grafiğin koyu kısmı grafiği olan fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulalım.

Çözüm

- Tanım ve değer kümeleri gerçekte sayılar kümesi olabilir.
- Grafikte mavi çizgiyle verilen kısmın üzerindeki noktalara karşılık gelen x -eksenindeki değerler $[-2, -1]$ aralığındadır. Yine grafikteki bu noktalara karşılık gelen y -eksenindeki değerler $[0, 1]$ aralığındadır. Dolayısıyla grafikte belirtilen kısım, tanım kümesindeki $[-2, -1]$ aralığındaki elemanların görüntü kümesindeki $[0, 1]$ elemanları ile ilişkilendirilmesi ile elde edilmiştir.

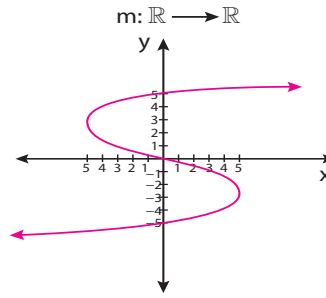
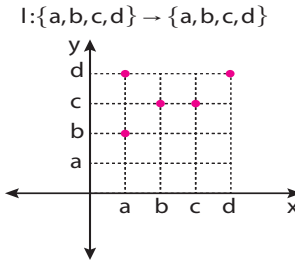
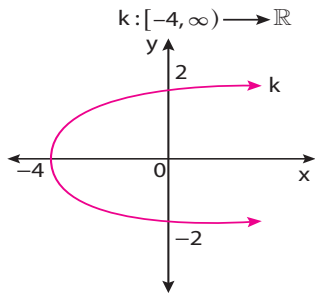
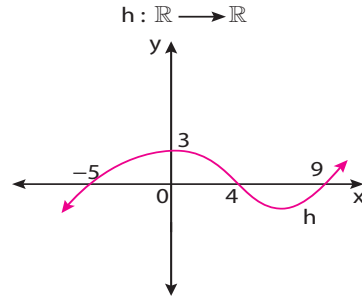
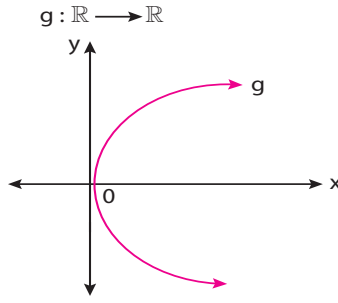
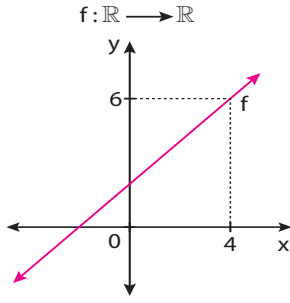


MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında verilen bir grafiğin fonksiyon grafiği olup olmadığını belirlemeye çalışacağız.

Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Adım 1 ►

Her bir grafik için tanım ve değer kümelerini belirleyiniz.

Adım 2 ►

Her bir grafikte grafiğe dikey doğrular (y-eksenine paralel doğrular) çiziniz.

Adım 3 ►

Çizdiğiniz her bir dikey doğrunun grafiği kestiği nokta/noktalar ile x-eksenini kestiği noktayı işaretleyiniz.

Adım 4 ►

Grafiğe çizilen dikey doğruların x-eksenini kestiği noktaların tanım kümesinin elemanları olduğunu düşünerek tanım kümesinden bir eleman değer kümesinden kaç elemanla eşleştiğini verilen grafikler için belirleyiniz.

Adım 5 ►

Elde ettiğiniz sonuca göre yukarıdaki grafiklerden hangileri fonksiyon grafiğidir?

Bunu biliyor muydunuz?



Bir bilgisayar klavyesindeki her bir tuşun bir görevi (bir fonksiyonu) vardır. Belirli bir harfi veya karakteri yazmak için o tuşa basarız. Bir tuş birden fazla karakteri yazmak için kullanılmaz. Zaten bundan dolayı da bazı karakter ve sembollerin yazılması için birkaç tuş kombinasyonu kullanılarak yeni tuşlar elde edilmiştir.

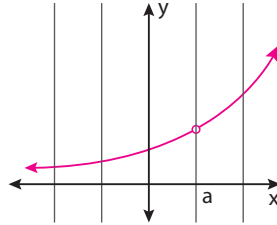
f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ kümesinden $B \subset \mathbb{R}$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Fonksiyonların grafiksel gösterimleri ile ilgili açıklamalarımızdan anlaşılacağı üzere, koordinatları f in yaptığı ilişkilendirmelerle belirlenen ikililer olan noktaların kartezyen düzlemde gösterilmesi f in grafiğini vermektedir. Bu nedenle, daha önce de belirttiğimiz gibi f in grafiği $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olmaktadır. Şimdi bunun tersinin doğru olup olmadığını düşünelim:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin herhangi bir alt kümesi, bir fonksiyonun grafiği şeklinde düşünülebilir mi?

Bu soruya, fonksiyon grafikleriyle ilgili bazı bilgileri hatırlatarak ve bazı örnekleri göz önünde bulundurarak cevap arayalım. Bir fonksiyon grafiğinin üzerindeki noktalardan x eksenine dik doğrular (dikey doğrular) çizildiğinde bu doğruların x -eksenini kestiği noktaların x bileşenleri tanım kümesinin elemanlarıdır. Diğer taraftan, x ekseninde olup tanım kümesinde yer alan bir elemana karşılık gelen bir noktadan geçen ve x eksenine dik olan bir doğru çizdiğimizde, bu doğru fonksiyonun grafiğini mutlaka bir noktada kesmeli ve birden fazla noktada da kesmemelidir.

Bahsettiğimiz durumlara birer örnek verelim:

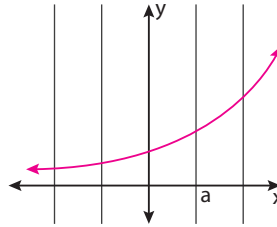
1.



x -eksenini $x = a$ noktasında kesen dikey doğru, verilen grafiği kesmiyorsa bu grafik tanım kümesinde a yı eleman olarak bulunduran bir fonksiyona ait olamaz. Çünkü, a değerine karşılık değer kümesinde a ile eşlenen bir eleman olmayacaktır; bu da fonksiyon olma kuralına aykırıdır. Grafiğin, bu tür a elemanlarını dışlayarak oluşturduğumuz tanım

kümesine sahip bir fonksiyon grafiği olabileceği ayrıca düşünülmelidir.

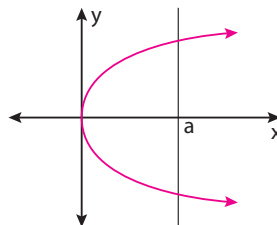
2.



x eksenini $x = a$ noktasında kesen dikey doğru grafiği bir noktada kesiyor olsun. Bu durumda tanım kümesindeki a değeri, değer kümesinden bir elemanla eşlenmiştir. Eğer x ekseninde belirlediğimiz bir tanım kümesine karşılık gelen noktalardan çizilen tüm dikey doğrular grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden yalnız bir elemanla

eşlenmiş demektir. Öyleyse bu durumda, grafik belirlediğimiz tanım kümesine sahip bir fonksiyonun grafiğidir.

3.

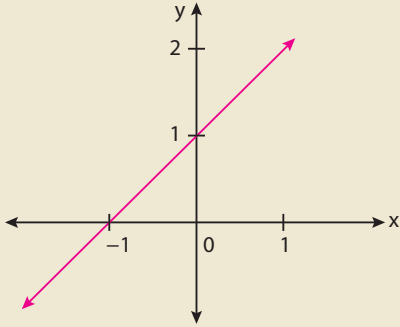


x -eksenini $x = a$ noktasında kesen doğru grafiği birden fazla noktada kesiyorsa, bu grafik tanım kümesinde a yı eleman olarak bulunduran bir fonksiyona ait olamaz. Çünkü, a elemanı değer kümesinden birden fazla elemanla eşlenmiştir, bu da fonksiyon olma kuralına aykırıdır. Bu durumda grafik herhangi bir fonksiyon grafiği olamaz.

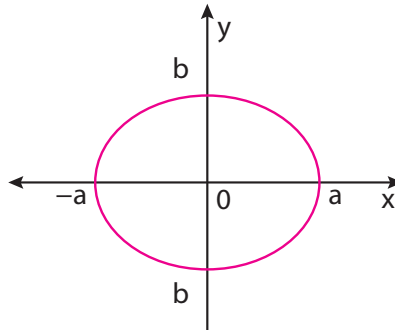
Örnek 9

Aşağıdaki seçeneklerdeki grafiklerin, tanımlandıkları kümelerde bir fonksiyonun grafiği olup olmayacağını bulunuz.

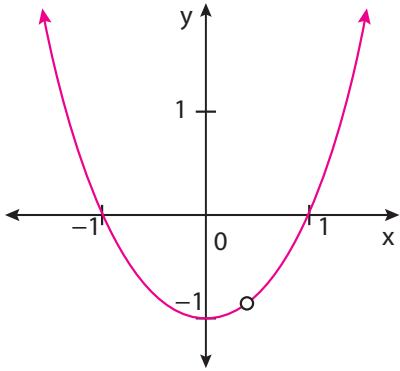
a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



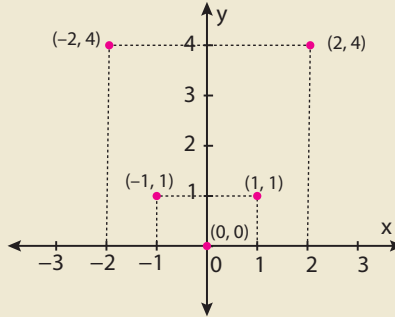
b. $f: [-a, a] \rightarrow [-b, b]$



c. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

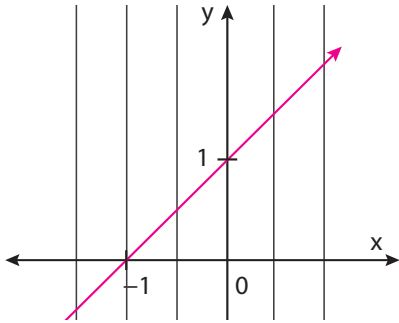


d. $h: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$



Çözüm

a.



Grafikte x eksenini boyunca çizilen her dikey doğru grafiği yalnız bir noktada kestiğinden verilen tanım kümesi olan \mathbb{R} deki her eleman değer kümesinden yalnız bir elemanla eşleşmiştir. Bu yüzden bu grafik $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonun grafiği olabilir.

Dikkat



Verilerin grafiksel gösterimi her zaman bir fonksiyon grafiği şeklinde değildir. Benzer şekilde çizdiğimiz bir grafik her zaman bir fonksiyon grafiği olmayabilir.

Anahtar Bilgi

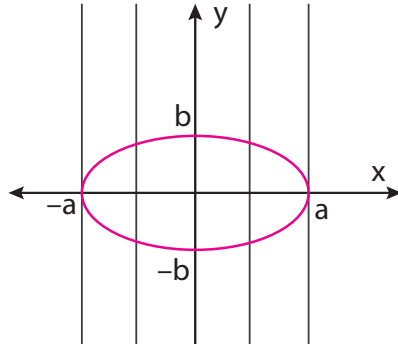
Bir grafiğe dikey doğrular çizerek bir grafiğin fonksiyon grafiği olup olmadığını anlama yöntemine **dikey doğru testi** denir.

Dikey eksen değer kümesi, yatay eksen tanım kümesi olmak üzere grafiği kesecek şekilde çizilen dikey doğrular;

- grafiği her zaman birer noktada kesiyorsa grafik fonksiyon grafiğidir.

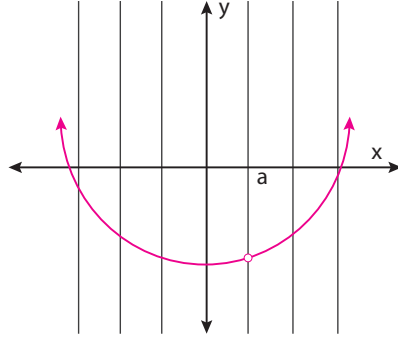
- grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik fonksiyon grafiği değildir.

b.



x eksenindeki $[a, b]$ aralığında çizilen her dikey doğru verilen grafiği iki noktada kesmektedir. Bu yüzden bu grafik, önerilen $f: [-a, a] \rightarrow [-b, b]$ şeklindeki bir fonksiyonun grafiği olamayacağı gibi, başka tür bir fonksiyonun da grafiği olamaz.

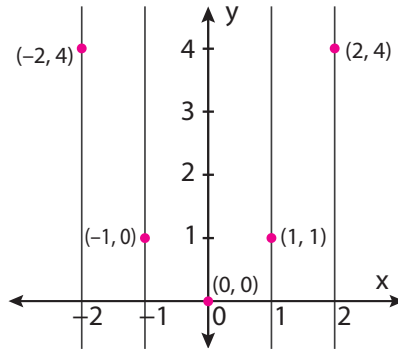
c.



x eksenindeki dikey doğrulardan $x = a$ haricindekiler grafiği bir noktada kesmiştir. Sadece a noktasında fonksiyonun değeri yoktur. Önerilen fonksiyon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde ve tanım kümesi \mathbb{R} olduğundan, verilen grafik f gibi bir fonksiyonun grafiği değildir.

Ancak, bu verilen grafiğin $g: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyonun grafiği olabileceğine dikkat edelim.

ç.

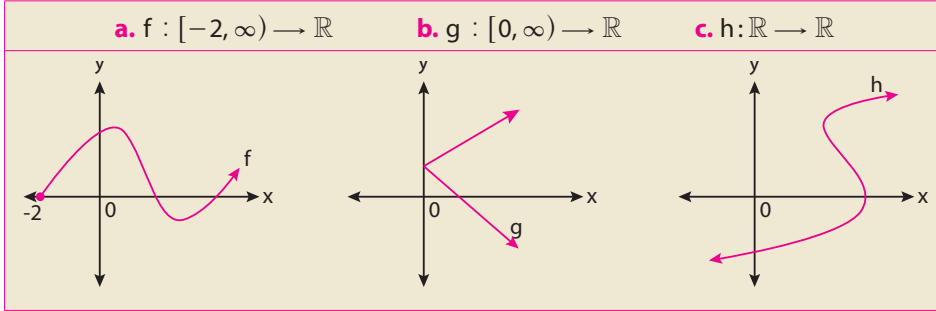


Tanım kümesindeki her noktadan geçecek şekilde dik doğrular çizdiğimizde bu doğrular grafiği yalnızca bir noktada keser. Bu durumda verilen grafik $h: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ fonksiyonunun grafiğidir. Benzer şekilde, $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset B$ için $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow B$ şeklindeki bir fonksiyonun da grafiği olabilir.

Ancak verilen grafik, $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \subset A \subset \mathbb{R}$ ve $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \neq A$ şeklindeki bir A kümesi için $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir fonksiyonun grafiği değildir.

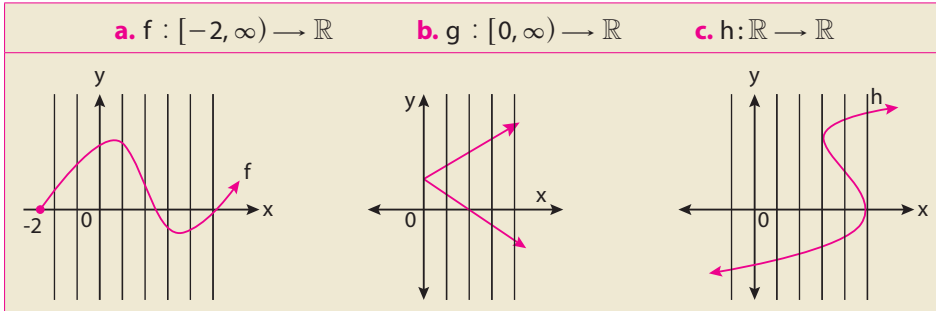
Örnek 10

Aşağıda verilen grafiklerin, belirtilen türde bir fonksiyonun grafiği olup olmayacağını bulunuz.



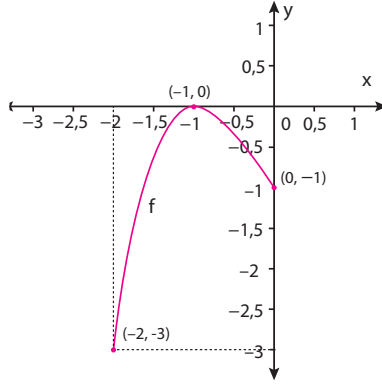
Çözüm

Dikey doğru testini, belirtilen fonksiyonların tanım kümelerini dikkate alarak verilen grafiklerde uygulayalım.



- a.** Verilen grafik $f : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonun grafiğidir. Çünkü, $[-2, \infty)$ aralığındaki dikey doğrular verilen grafiği hep birer noktada kesmektedir.
- b.** Verilen grafik $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonun grafiği olmadığı gibi $y = f(x)$ şeklindeki herhangi başka bir f fonksiyonunun da grafiği değildir. Çünkü tanım kümesi olan $(0, \infty)$ aralığındaki her hangi bir dikey doğru grafiği iki noktada kesmektedir.
- c.** Verilen grafik $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonun grafiği olmadığı gibi $y = f(x)$ şeklindeki herhangi başka bir f fonksiyonunun da grafiği değildir. Çünkü bazı dikey doğrular grafiği iki noktada kesmektedir.

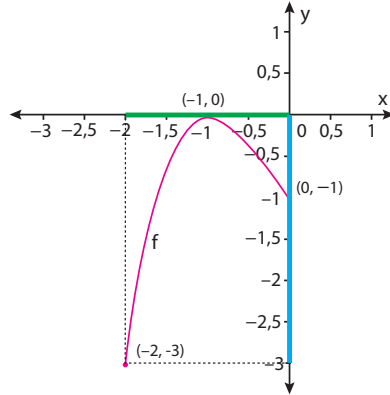
Örnek 11



f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

- f in tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
- $f\left[-\frac{13}{10}, 0\right]$ ifadesinin eşitini bulunuz.
- $[-3, 0]$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

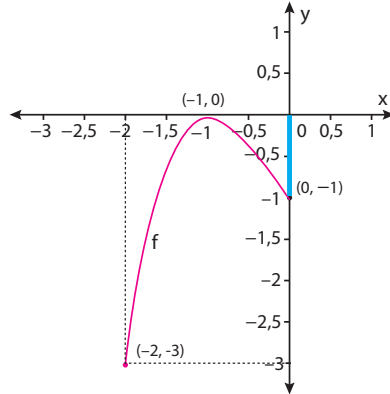
Çözüm



- Aşağıdaki şekilde grafiğin tanım kümesi x ekseninde yeşil doğru parçası ile görüntü kümesi de y ekseninde mavi doğru parçası ile gösterilmiştir. Dolayısıyla tanım kümesi $[-2, 0]$, görüntü kümesi ise $[-3, 0]$ dır.

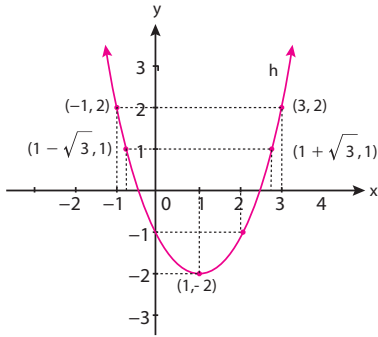
- Öncelikle $[-\frac{13}{10}, 0]$ ile $[-1, 0]$ aralıklarının f altındaki görüntülerinin aynı olduğuna dikkat edelim. $[-1, 0]$ in f altındaki görüntüsü yandaki grafikte mavi doğru parçası ile gösterilmiştir. Dolayısıyla,

$$f\left[-\frac{13}{10}, 0\right] = f([-1, 0]) = [-1, 0] \text{ dır.}$$



- f nin görüntü kümesinin $[-3, 0]$ aralığı olduğunu bulmuştuk. Herhangi bir fonksiyonda, görüntü kümesinin fonksiyon altındaki ters görüntüsü tanım kümesidir. Ayrıca, bu fonksiyonun tanım kümesi $[-2, 0]$ olarak bulunmuştur. Dolayısıyla $[-3, 0]$ in f altındaki ters görüntüsü $[-2, 0]$ dır.

Örnek 12

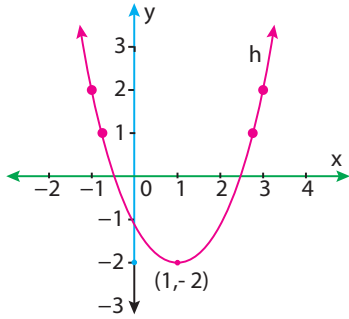


Bir h fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

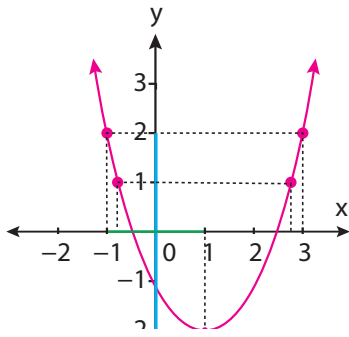
Buna göre,

- h nin tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
- $[-1, 1]$ in h altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $(-1, 3]$ ün in h altındaki görüntüsünü bulunuz.
- 0 'ın h altındaki görüntüsünü ve 2 'nin h altındaki ters görüntüsünü bulunuz.
- $[-1, 1]$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

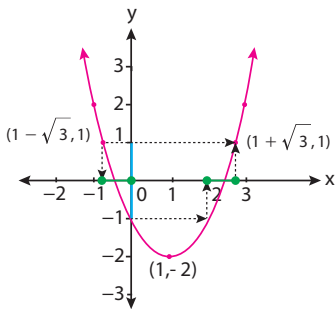
Çözüm



- h fonksiyonunun grafiğinde tanım kümesi yeşil doğru, görüntü kümesi de mavi yarı doğru ile belirtilmiştir. Dolayısıyla h nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve görüntü kümesi $[-2, \infty)$ dur.



- h fonksiyonunun grafiğinde belirtilen mavi doğru parçası $h([-1, 1])$ dir. Dolayısıyla, $h([-1, 1]) = [-2, 2]$ dir.



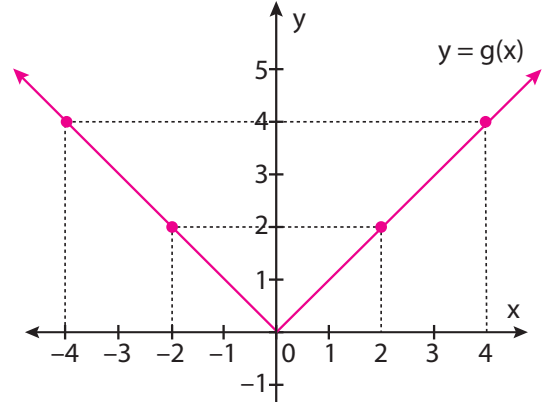
- Benzer şekilde verilen grafikten anlaşılabacağı üzere $h((-1, 3]) = [-2, 2]$ dir.

- Verilen grafikten $h(0) = -1$, $h(-1) = h(3) = 2$ olduğu görülür. Bu durumda, 0 nin görüntüsü -1 'dir. 2 nin ters görüntüleri -1 ve 3 'tür.
- $[-1, 1]$ kümesinin h altındaki ters görüntüsü yandaki grafikte yeşil doğru parçalarıyla belirlenmiştir. Dolayısıyla, cevap $[1 - \sqrt{3}, 0] \cup [2, 1 + \sqrt{3}]$ dir.

Örnek 13

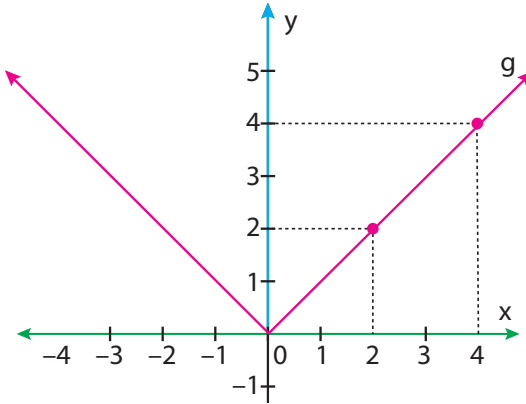
g fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre,

- g nin tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
- $[2, 4]$ in g altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

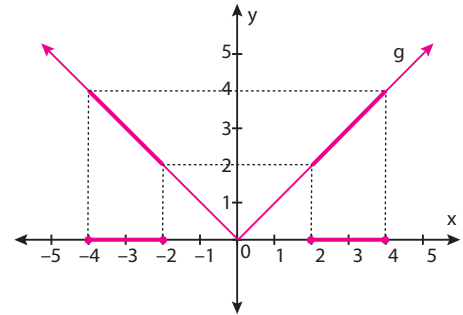
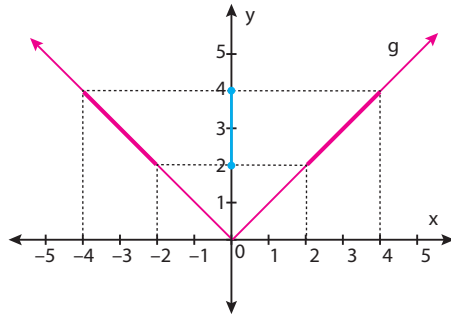


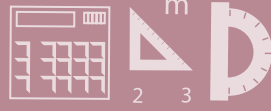
Çözüm

- g nin tanım kümesi \mathbb{R} ve görüntü kümesi $[0, \infty)$ dur.



- Aşağıda belirtilen grafiklerden anlaşılacağı üzere $[2, 4]$ ün g altındaki ters görüntüsü $[-4, -2] \cup [2, 4]$ tür.





KENDİMİZİ SINAYALIM

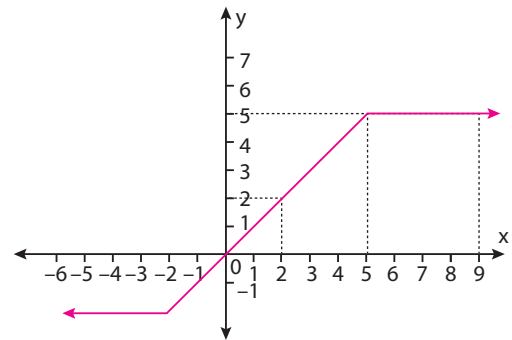


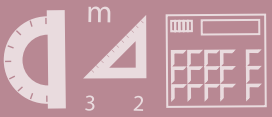
Kavram Yoklama ve Muhakeme

1. Aşağıda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.
 - a. Bir fonksiyonun grafiğinde girdiler ekseninde çıktılar ise ekseninde gösterilir.
 - b. Bir fonksiyonun kartezyen düzlemde gösterilmesi ne gösterim denir.
 - c. Fonksiyonun grafiğinin girdilerinin kümesine çıktılarının kümesine kümesi denir.
2. Aşağıdaki verilen olaylarla ilgili grafiklerin hangisi/ hangileri bir fonksiyon belirtmez.
 - a. Bir bardağa bir musluktan su doldurulurken bardaktaki su yüksekliğinin zamana bağlı değişimi.
 - b. Bir maçtaki atılan gol sayısının zamana bağlı değişimi.
 - c. Bir çaydanlık su ısıtıldığında suyun sıcaklığının zamana bağlı değişimi.
 - ç. Bir şehirdeki insanları sahip oldukları kredi kartlarına eşleme ilişkisi.

Uygulama Soruları

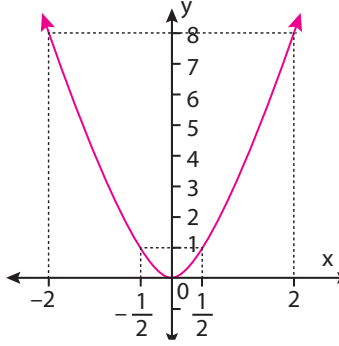
1. $A = \{1, 3, 4\}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı $f(x) = 2x + 4$ olduğuna göre, $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.
2. $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4 - 2x$ fonksiyonu için $g(A) = [-4, 2]$ ise A kümesini bulunuz.
3. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Buna göre, $[2, 9]$ kümesinin f altındaki görüntü kümesi nedir?



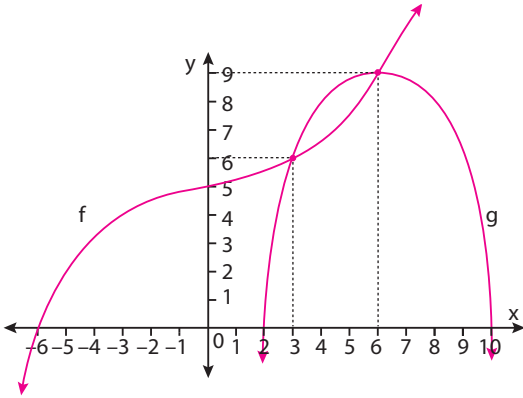


KENDİMİZİ SINAYALIM

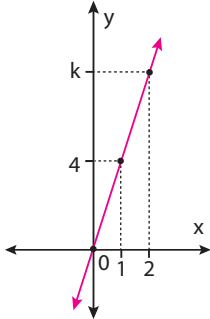
4. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı aşağıda grafiği verilen fonksiyon için $B = [1, 8]$ kümesinin ters görüntü kümesi nedir?



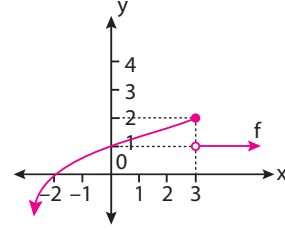
5. Aşağıdaki grafikler f ve g fonksiyonlarının grafikleri olduğuna göre $\frac{g(6) - f(0)}{f(6) - f(3)}$ değeri kaçtır?



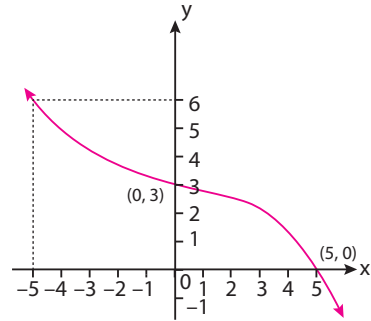
6. Bir doğrusal fonksiyon grafiği aşağıdaki gibidir. Bu grafikte verilen k değeri kaçtır?



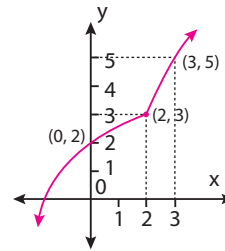
7. f fonksiyonunun verilen grafiğine göre $f(3) + f(0) - f(-2)$ değeri kaçtır?

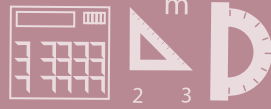


8. Bir f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. $f(a) = 6$, $f(b) = 3$, $f(c) = 0$ ise $a + b - c$ değeri kaçtır?



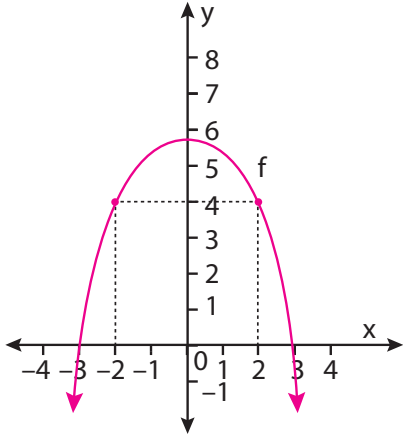
9. Şekilde bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(0) = a$, $f(a) = b$ ve $f(b) = c$ ise c kaçtır?





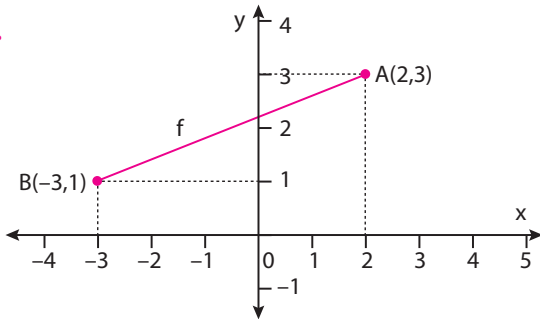
KENDİMİZİ SINAYALIM

10. Grafiği verilen f fonksiyon için $f(x-1)=4$ ise x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

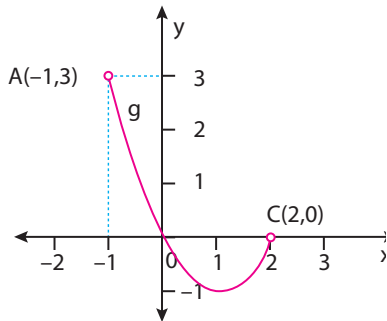


11. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz.

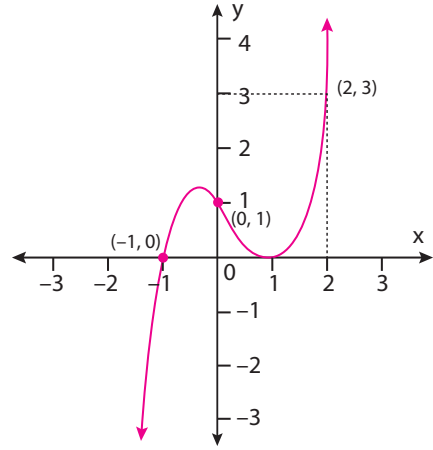
a.



b.

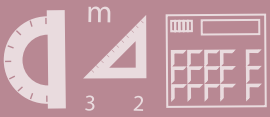


12.



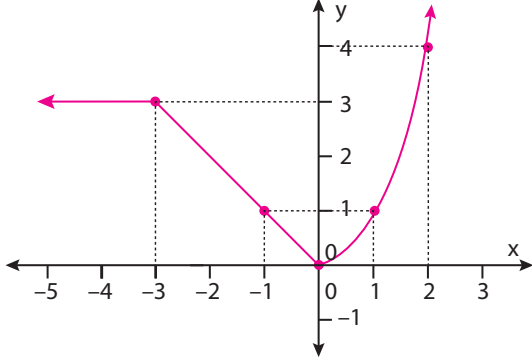
Yukarıda bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

- f in tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
- $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $B = \{0, 1, 3\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.
- $B = \{0, 3\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

13.



Yukarıda bir g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

- g nin tanım ve değer kümelerini bulunuz.
- $A = \{-5, -4, -1, 0, 1, 2\}$ kümesinin g altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ kümesinin g altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ kümesinin g altındaki ters görüntüsünü bulunuz.
- $B = \{0, 1, 3, 4\}$ kümesinin g altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

14. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı $f(x) = \frac{-2}{3}x + 0,25$ ile veriliyor.

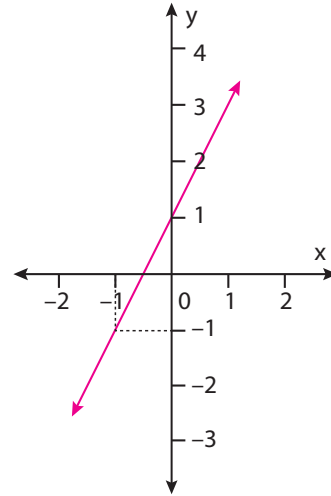
- f fonksiyonunun değerler tablosunu oluşturunuz.
- f fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Tanım, değer ve görüntü kümelerini grafik üzerinde gösteriniz.

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x - 7$ fonksiyonu veriliyor.

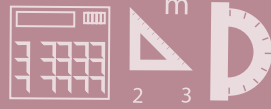
- f fonksiyonun grafiğini çiziniz.
- $[0, 5]$ aralığının f altındaki görüntüsünü bulunuz ve grafikte gösteriniz.
- Görüntüsü -19 olan elemanın f altındaki ters görüntüsünü bulup grafikte gösteriniz.

16.



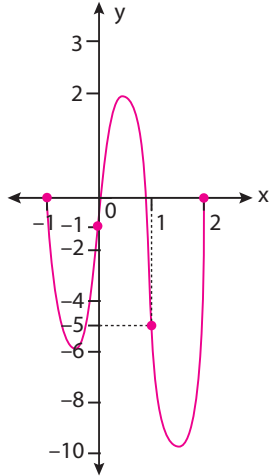
Grafiği verilen f fonksiyonu için;

- tanım, değer ve görüntü kümelerini bulunuz.
- $x = 0$ ve $x = -1$ elemanlarının f altındaki görüntülerini bulunuz.
- $y = 1$ ve $y = -1$ çıktılarının f altındaki ters görüntülerini bulunuz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

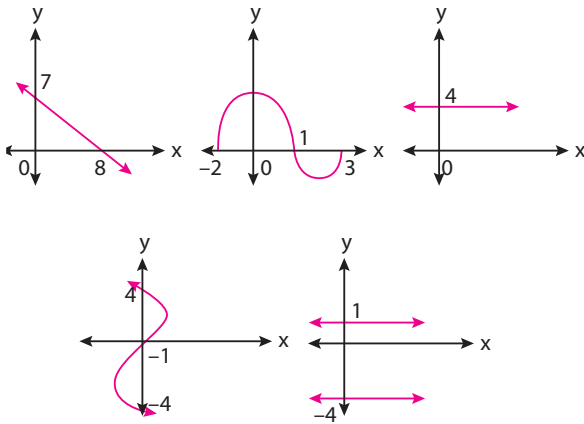
17.



Grafiği verilen fonksiyon için;

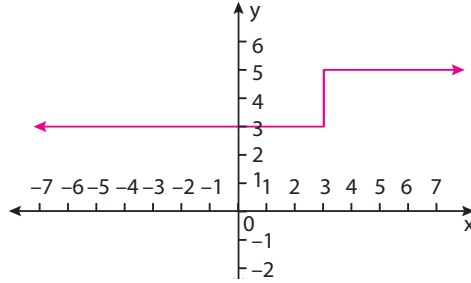
- $x=-1, x=0, x=1$ ve $x=2$ elemanlarının bu fonksiyon altındaki görüntülerini bulunuz.
- $y=-1, y=0$ ve $y=5$ çıktılarının bu fonksiyon altındaki ters görüntülerini bulunuz.

18. Aşağıdaki verilen grafiklerin $y = f(x)$ şeklinde bir fonksiyon grafiği olup olmadığını bulunuz.

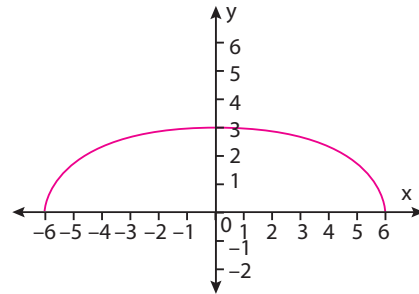


19. Aşağıdaki grafiklerin hangileri bir fonksiyon grafiği olabilir? Nedenini açıklayınız.

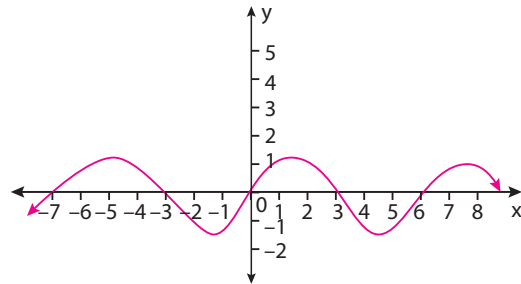
a.

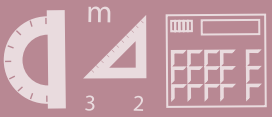


b.



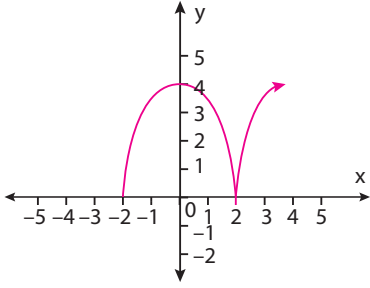
c.



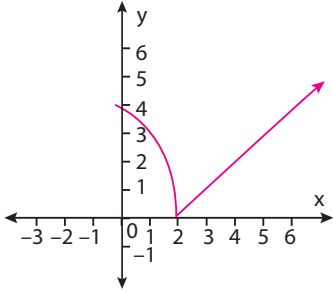


KENDİMİZİ SINAYALIM

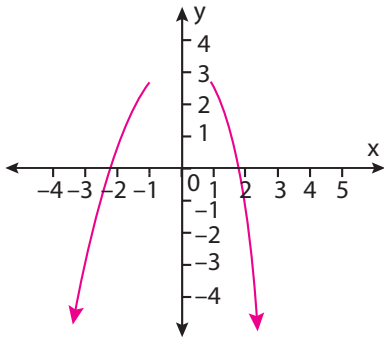
ç.



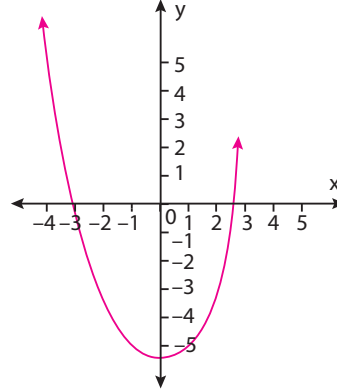
d.



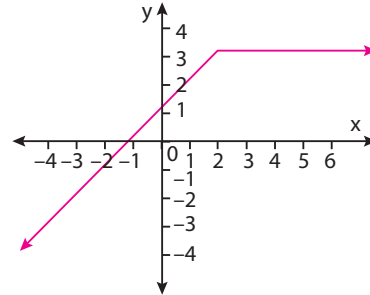
e.



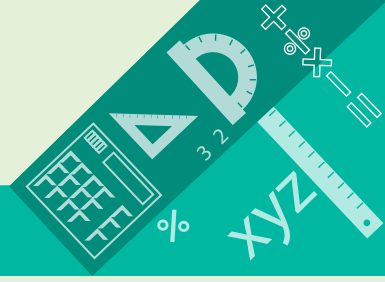
f.



g.



MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasının amacı, $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) biçimindeki fonksiyonların davranışlarının bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak incelenmesidir.

Araç-Gereçler: Elektronik tablolama, grafik hesap makinesi, bilgisayar cebir sistemi, dinamik matematik/geometri yazılımı vb. grafik çizimi yapılabilen bir araç/yazılım

Adım 1 ►

Grafik çizimi yapabilen bir araç/yazılım kullanarak; $n = 2, 4, 6, 8, 10$ değerleri için $y = x^n$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Adım 2 ►

$n = 2, 4, 6, 8, 10$ değerleri için $y = x^n$ fonksiyonlarının grafiklerini farklı renklerde aynı koordinat düzlemi üzerinde çiziniz. Bu tür grafiklerin ortak özellikleri için neler söylenebilir? Açıklayınız.

Adım 3 ►

$n = -2, -4, -6, -8, -10$ değerleri için $y = x^n$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı eksen üzerinde çiziniz. Bu tür grafiklerin ortak özellikleri için neler söylenebilir? Açıklayınız.

Adım 4 ►

n nin çift bir negatif veya pozitif tamsayı olması durumunda $y = x^n$ şeklindeki fonksiyonların grafiklerinin nasıl değiştiğini açıklayınız.

Adım 5 ►

$n = 1, 3, 5, 7, 9$ değerleri için $y = x^n$ fonksiyonlarının grafiklerini farklı renklerde aynı koordinat düzlemi üzerinde çizdirin. Bu tür grafiklerin ortak özellikleri için neler söylenebilir? Açıklayınız.

Adım 6 ►

$n = -1, -3, -5, -7, -9$ değerleri için $y = x^n$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzlemi üzerinde çizdirin. Bu tür grafiklerin ortak özellikleri için neler söylenebilir? Açıklayınız.

Adım 7 ►

n nin çift olmayan bir negatif veya pozitif tamsayı olması durumunda $y = x^n$ şeklindeki fonksiyonların grafiklerinin nasıl değiştiğini açıklayınız.

Adım 8 ►

n nin tek veya çift bir pozitif tamsayı olması durumunda $y = x^n$ şeklindeki fonksiyonların görüntü kümelerinin nasıl değiştiğini açıklayınız.

Yukarıdaki adımları, örneğin, bir dinamik matematik/geometri yazılımı olan GeoGebra kullanarak aşağıdaki şekilde yapabilirsiniz (Geogebra yazılımını <http://www.geogebra.org> veya <http://www.geogebra.org> adreslerinden ücretsiz indirebilir ve kullanabilirsiniz.)

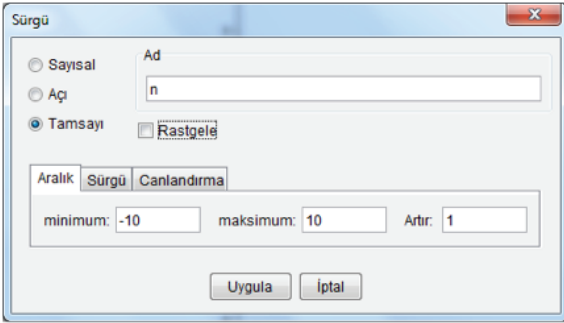
Geogebra kurulu bir bilgisayarda, geogebra'yı açalım. Öncelikle bir sürgü oluşturalım:

Araç çubuğundan **Sürgü** aracını



seçin ve ekranın neresinde sürgüyü oluşturmak istiyorsanız oraya farelinizin sol tuşu ile tıklayın.

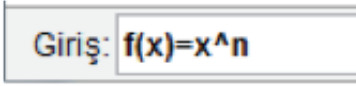
Karşınıza **Sürgü** aracı ile ilgili özelliklerin olduğu bir pencere gelecektir:



Program sürgüye ilk değer olarak a ismini vermektedir. Sürgünün adını n olarak değiştirelim. Ayrıca sürgünün minimum ve maksimum değerleri ve artış miktarını da yukarıdaki şekilde görüntülediği gibi belirledikten sonra **Uygula** tuşuna basınız.

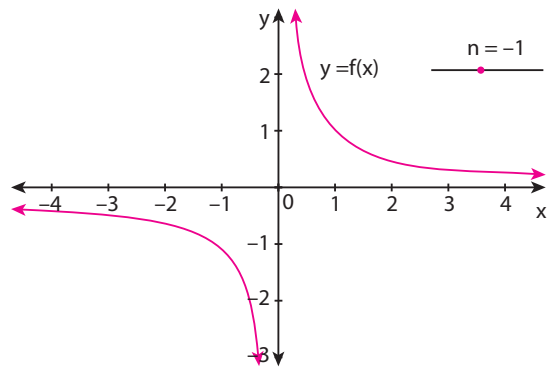
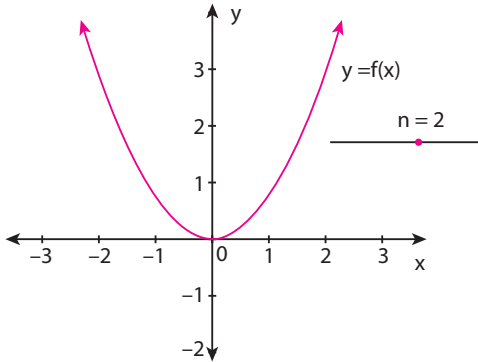
Ekranda beliren sürgüyü hareket ettirdiğinizde n değeri de belirlediğiniz aralıkta belirlediğiniz artış miktarı ile değişecektir.

GeoGebra ekranının sol alt köşesindeki **Giriş** ekranını kullanarak fonksiyonumuzu tanımlayacağız.



^ sembolü üst anlamına gelip x^n ifadesi matematiksel olarak x^n anlamına gelmektedir. Fonksiyonu girdikten sonra klavyeden **Enter/Return** tuşuna basıldığında fonksiyon n sürgüsüne bağlı olarak oluşacaktır.

Şimdi n değerini değiştirerek fonksiyonun nasıl değiştiğini gözlemleyiniz. Aşağıda $n = -1$ ve $n = 2$ değerleri için oluşan grafiğe yer verilmiştir.



3.2.2. $f(x) = x^n$ Biçimindeki Fonksiyonların Grafikleri

Başlarken

Bazı fonksiyonların grafiklerine veya benzerlerine mimaride, teknolojik araçlarda ve doğada rastlanmaktadır. Örneğin, fotoğraflarda görülen uzay araştırmalarında kullanılan radyo teleskopun/antenin, asma köprülerin ve kıvrımlı bir nehrin şeklini $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerini kullanarak ifade edebiliriz.

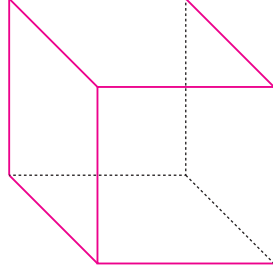
Ele aldığımız bir şeklin fonksiyon grafiği olarak modellenebilmesinin faydaları sizce neler olabilir?



x br



x br



Bir kenar uzunluğu x br olan bir karenin alanını kenar uzunluğuna bağlı olarak değişen ve $A(x)$ ile belirtilen bir çokluk olarak düşündüğümüzde

$$A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ ve } A(x) = x^2$$

şeklinde bir fonksiyonla

karşılaşırız. Benzer şekilde, bir kenar uzunluğu x br olan bir küpün hacmini kenar uzunluğuna bağlı olarak değişen ve $V(x)$ ile belirtilen bir çokluk olarak düşündüğümüzde $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $V(x) = x^3$ şeklinde bir fonksiyon elde ederiz. Bu fonksiyonların grafikleri kare ve küpte kenar uzunluk değiştiğinde alan ve hacmin değişimini daha iyi görmemizi sağlar. Dikkat edersek bu cebirsel kurallara sahip fonksiyonların 0 da ve negatif gerçel sayılarda da tanımlanabileceğini görebiliriz. Bu fonksiyonlar birçok durum için temel örnek niteliğindedir. Bu fonksiyonların grafiklerini bilmemiz bir gereklilik olduğu gibi, bunlardan daha karmaşık kurala sahip fonksiyonların grafiklerinin anlaşılmasında bir avantajdır.

Neler Öğreneceğiz?

- $f(x) = x^n$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerini

Anahtar Terimler

- Fonksiyon grafiği

Sembol ve Gösterimler

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

Anahtar Bilgi

$f(x) = x^n$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri çizilirken;

1. Fonksiyona ait bir değerler tablosu oluşturulur.
2. Fonksiyonun grafiği üzerinde yer alan ve koordinatları değerler tablosu ile verilen noktalar kartezyen düzlemde gösterilir.
3. Düzlemde gösterilen noktalardan geçen bir eğri kabaca çizilir.
4. Bu işlem nokta sayısını artırarak tekrar edilirse hata payı daha az olan bir grafik elde edilmiş olur.
5. Çoğu durumda grafiğin genel yapısı göreceli olarak az sayıda noktanın grafiksel gösterimi yapılarak tespit edilebilmektedir.

Bu kısımda göreceğimiz fonksiyonlar, n negatif bir tam sayı iken $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve n nin diğer tam sayı durumları için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki olup aşağıdaki cebirsel kurallara sahip fonksiyonlardır:

$$n = 0 \text{ için } f(x) = 1$$

$$n = -1 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x} \quad n = 1 \text{ için } f(x) = x$$

$$n = -2 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad n = 2 \text{ için } f(x) = x^2$$

$$n = -3 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x^3} \quad n = 3 \text{ için } f(x) = x^3$$

\vdots

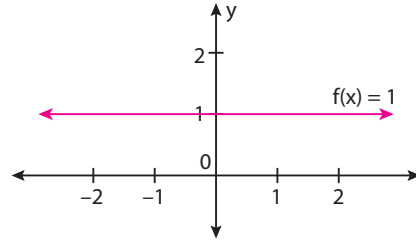
\vdots

Bunlar kısaca $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ şeklinde de ifade edilebilir. Şimdi n nin bazı değerleri için bu tür fonksiyonların grafiklerini, fonksiyona ait değerler tablosu, yani fonksiyonun grafiği üzerindeki bazı noktaların koordinatlarını bularak çizmeye çalışalım.

Örnek 1

$n = 0$ için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm



$n = 0$ için $f(x) = x^n = x^0 = 1$ olacağından, f fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. Daha önce gördüğümüz gibi bu fonksiyonun grafiği y ekseninde 1 den geçen ve x eksenine paralel olan bir doğrudur.

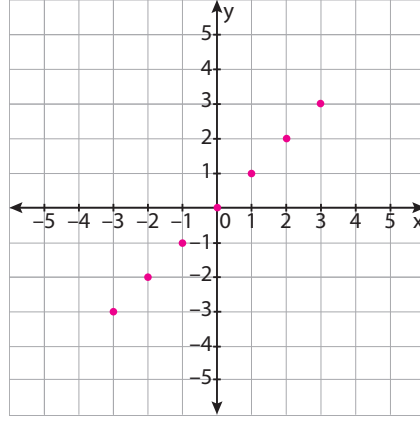
Örnek 2

$n = 1$ için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

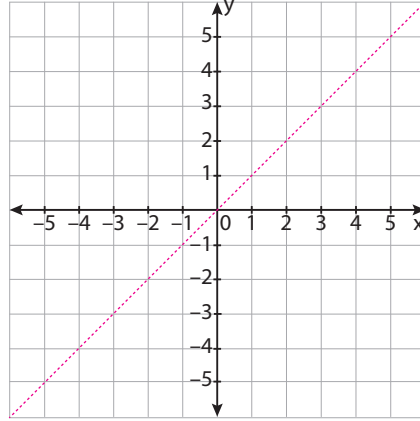
$n = 1$ için $f(x) = x^n = x^1 = x$ olacağından f fonksiyonu bir birim fonksiyondur. Yine daha önce ele aldığımız gibi bu fonksiyonun grafiği $(0,0)$ orijin ve $(1,1)$ noktalarından geçen bir doğrudur. Şimdi bu doğrunun grafiğini hemen çizmek yerine, bundan sonraki örneklerde kullanacağımız bir yöntemi anlatmak için ikiden fazla nokta kullanarak çizelim. Önce grafik üzerindeki bazı noktaların koordinatlarını belirlemek için fonksiyona ait bir değerler tablosu oluşturalım. Sonra bu noktaları kartezyen düzlemde gösterelim.

| x | y |
|---------------------|-----|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| -1 | -1 |
| -2 | -2 |
| -3 | -3 |
| ... | ... |
| $x(\in \mathbb{R})$ | x |



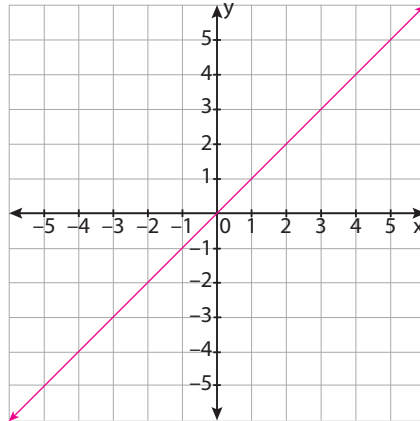
1. Grafiksel Gösterim

Grafikte gösterilen noktaların doğrusal olduğunu gözlemleyebiliyoruz. Ama fonksiyon grafiğimiz olan doğruyu tam olarak elde etmiş değiliz. Şimdi yaptığımız işlemleri, grafik üzerinde yer alan daha fazla noktayı belirleyerek tekrar edelim. Bu durumda grafik 2. Grafiksel Gösterimdeki gibi olacaktır.



2. Grafiksel Gösterim

Bu grafik elde etmek istediğimiz doğru grafiğine daha çok benziyor değil mi? Bu işlemleri her seferinde artırarak devam ettiğimizde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonunu 3. Grafiksel Gösterimdeki grafiğe daha çok yaklaştığımız olacağız.



3. Grafiksel Gösterim

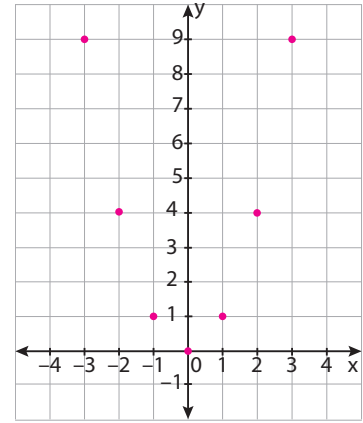
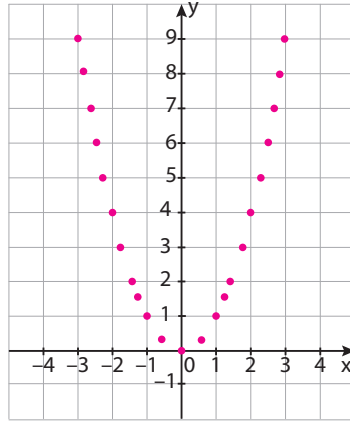
Örnek 3

$n = 2$ için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

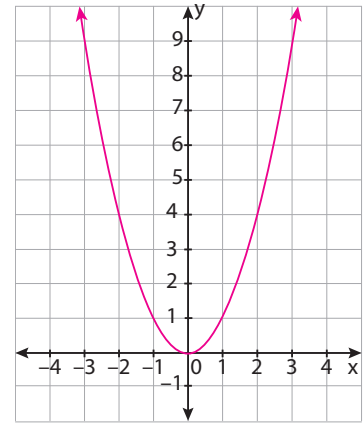
$n = 2$ için $f(x) = x^n = x^2$ dir. Bu fonksiyona ait bir değerler tablosu ve bu değerlere karşılık gelen noktaların grafiksel gösterimi şu şekildedir:

| x | y |
|----|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| -1 | 1 |
| -2 | 4 |
| -3 | 9 |



Bu fonksiyon tanım kümesindeki her elemanı, kendisinin karesiyle eşlenmektedir. Dolayısıyla grafik üzerindeki noktaların ordinatları, apsilerden daha hızlı büyümektedir. Ayrıca tanım kümesindeki her eleman hiçbir zaman negatif bir sayı ile eşlenmemektedir.

Benzer şekilde grafik üzerindeki nokta sayısını arttırsak bu durumda grafik yandaki gibi olacaktır.



Yaptığımız işlemlere nokta sayısını artırarak devam ettiğimizde ve tanım kümesinin tüm gerçekteki sayılar olduğu düşünüldüğünde;

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin yandaki gibi olacağı anlaşılabacaktır.

Şimdi başka bir fonksiyonun grafiğini aynı yöntemle elde edelim.

Örnek 4

$n = 3$ için $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

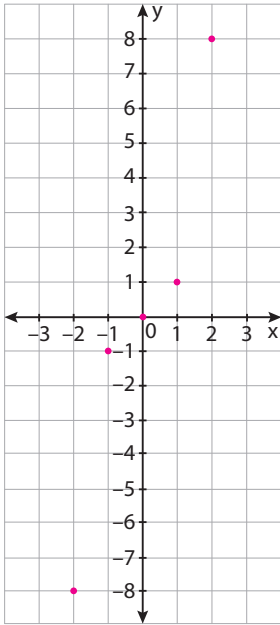
Çözüm

$n = 3$ için $f(x) = x^n = x^3$ olur. Bu fonksiyon için bir değerler tablosu ve buna karşılık gelen noktaların grafiği 1. Grafiksel gösterimdeki gibi olacaktır.

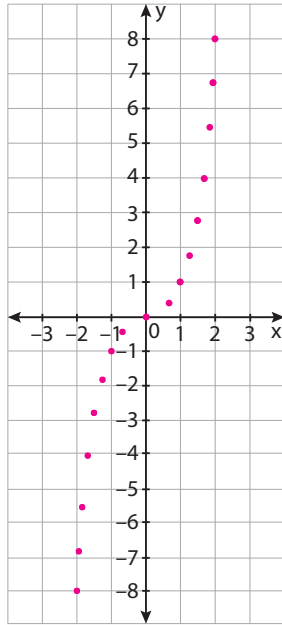
| x | y = f(x) |
|----|----------|
| -2 | -8 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunda tanım kümesindeki her eleman değer kümesinden kendisinin küpüyle eşlenmektedir. Dolayısıyla grafiğin üzerindeki noktaların koordinatlarının apsislere göre büyümesi daha önce incelediğimiz $f(x) = x^2$ fonksiyonundakinden çok daha hızlıdır. Değerler tablosuna yeni değerler eklediğimizde, yani grafiksel gösterimini yaptığımız noktası sayısını arttırdığımızda grafik 2. Grafiksel Gösterimdeki gibi olacaktır.

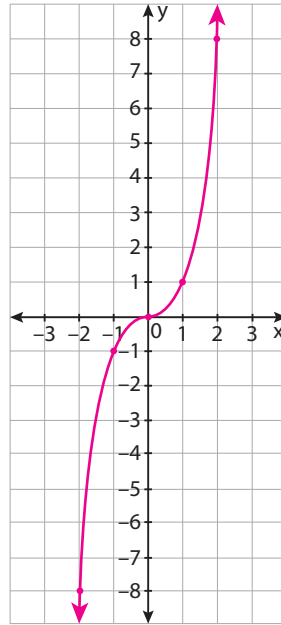
Fonksiyonun tanım kümesinin tüm gerçek sayılar olduğu düşünüldüğünde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği 3. Grafiksel gösterimdeki gibi olacaktır.



1. Grafiksel Gösterim



2. Grafiksel Gösterim



3. Grafiksel Gösterim

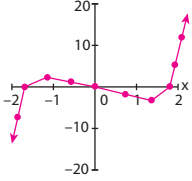
Bunu biliyor muydunuz?

Bilgisayar cebir sistemleri ile dinamik matematik/geometri yazılımları fonksiyon grafiklerinin çizimini yaparken, temelde bizim bu kısımda uyguladığımız yöntemle benzer metodları kullanırlar. Şöyle ki, çizilecek grafik üzerinde belli sayıda noktayı belirli aralıklardan seçer, bu noktaları grafik üzerinde gösterir ve bu noktaları ikiye ikiye birleştiren doğrular çizerler. Nokta seçimlerini ise burada belirtmeyeceğimiz matematiksel bilgi ve teknikleri kullanarak akıllı bir şekilde yaparlar.

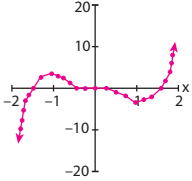
Örneğin

$$f: \left[-\frac{22}{10}, \frac{22}{10}\right] \rightarrow [-20, 20] \text{ ve}$$

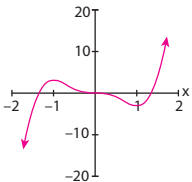
$f(x) = x^5 - 3x^3$ ile verilen fonksiyonun grafiğini Mathematica programında grafiğin 10 noktasını kullanarak çizdirirsek



grafiğin 25 noktasını kullanarak çizdirirsek



grafiğin nokta sayısı seçimini belirtmeden çizdirirsek



grafiklerini elde ederiz

Örnek 5

$n = -1$ için: $\mathbb{R} - 0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

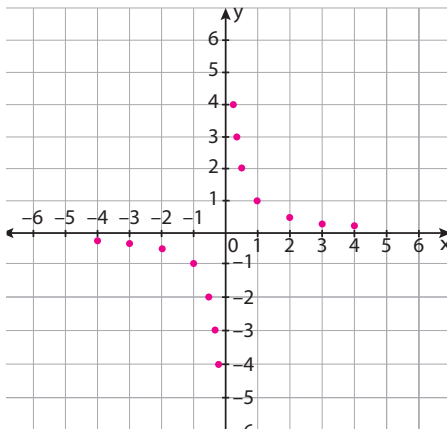
$n = -1$ için $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ dir. Bazı x değerleri için f fonksiyonunun aldığı değerler tablosu şu şekildedir:

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|----------------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---|---------------|---------------|---------------|
| $y = f(x)$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -3 | -4 | 4 | 3 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

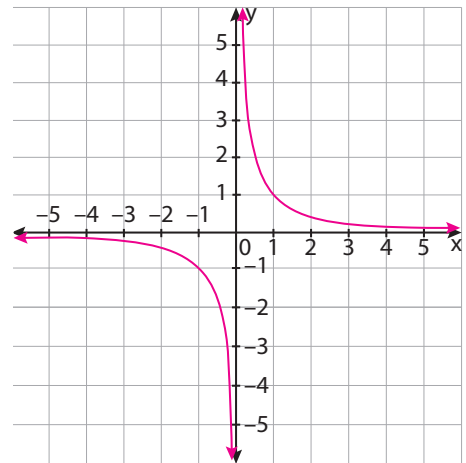
Tablodaki değerler incelendiğinde;

- $(-1,0)$ aralığında x değerleri sıfıra yaklaştıkça fonksiyonun değeri (y) negatif değerler olarak küçülmektedir ve x değeri sıfıra yaklaştıkça y değerleri daha da küçülmektedir.
- $(0,1)$ aralığında x değerleri sıfıra yaklaştıkça fonksiyonun değerleri (y) pozitif değerler olarak büyümektedir ve x değeri sıfıra yaklaştıkça y değerleri daha da büyümektedir.
- x değerleri negatif değerlerle küçüldükçe veya pozitif değerlerle büyüdükçe fonksiyonun değerleri (y) 0'a yaklaşmaktadır.

Şimdi koordinatları tabloda verilen (x,y) ikilileri olan noktaları grafik üzerinde gösterelim:

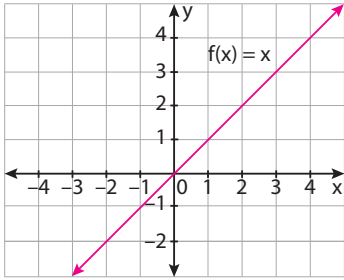


Tanım kümesi olan sıfır hariç tüm gerçel sayılar düşünüldüğünde $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin şöyle olacağını görebiliriz:

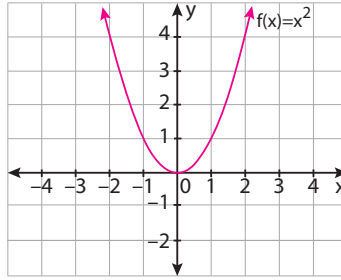


Şu ana kadar bu kısımda gördüğümüz fonksiyon grafiklerini bir arada görelim:

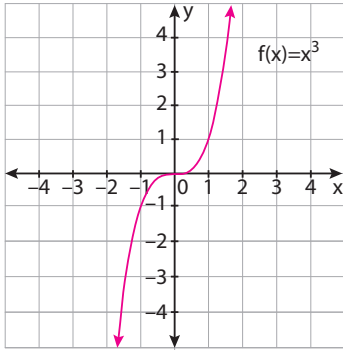
$n \in \{1, 2, 3, -1\}$ için $f(x) = x^n$ in grafikleri



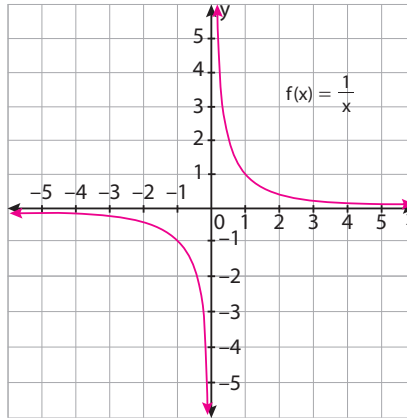
$y=f(x)=x^n, n=1$



$y=f(x)=x^n, n=2$

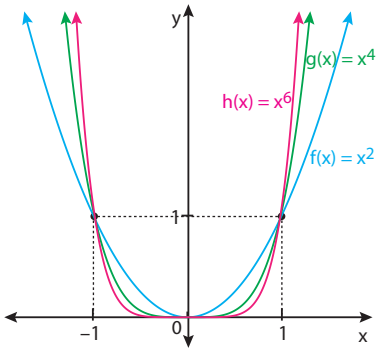


$y=f(x)=x^n, n=3$



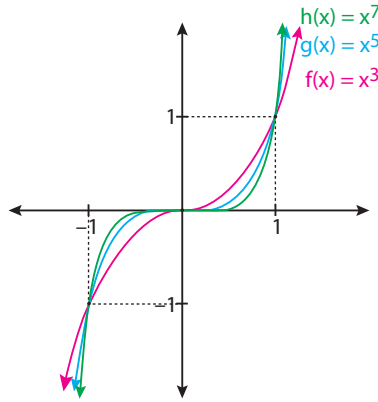
$y=f(x)=x^n, n=-1$

Benzer işlemler $n = 2, 4, 6$ için de izlendiğinde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiği $n = 2, 4, 6$ için şu şekilde elde edilecektir:



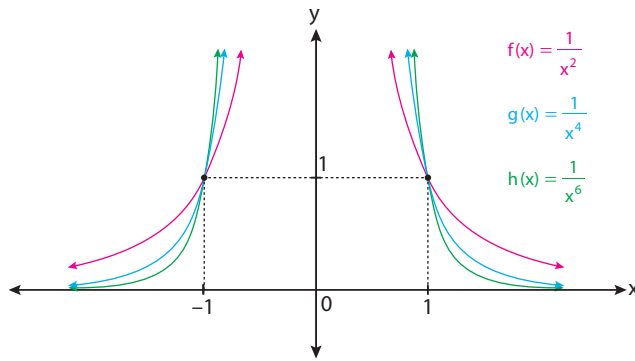
Bu grafiklerde n değerleri bir pozitif çift tamsayı olarak alınmıştır. Bu grafiklerde şu bilgileri gözlemleyebiliriz: $y = x^n$ nin grafiğinin kolları y -eksenine göre simetriktir. n değeri büyüdükçe $-1 < x < 1$ iken $y = x^n$ in grafiğinin kolları y -ekseninden uzaklaşırken, $x > 1$ ve $x < -1$ iken fonksiyonun değerleri çok daha hızlı büyüdüğünden grafiğin kolları y -eksenine yaklaşır.

Yine, benzer işlemler $n = 3, 5, 7$ için de izlendiğinde, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğinin $n = 3, 5, 7$ değerleri için şu şekilde olduğu görülecektir:

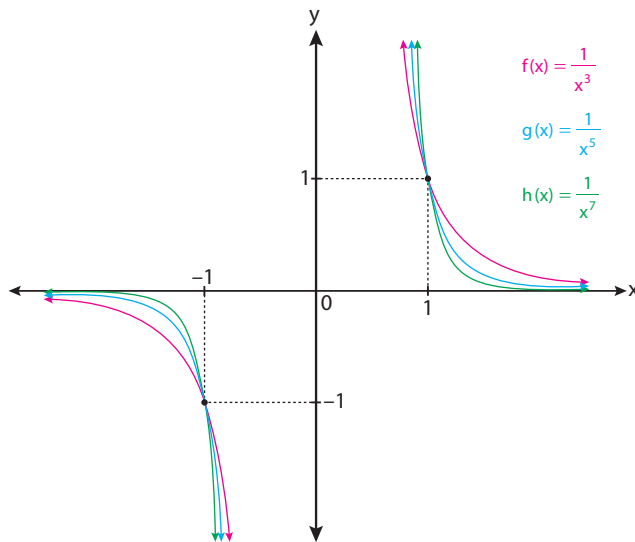


Bu grafiklerde n değerleri bir pozitif tek tamsayı olarak alınmıştır. Bu grafiklerde şu bilgileri gözlemleyebiliriz: $y = x^n$ in grafiğinin kolları orijine göre simetriktir. n değeri büyüdükçe $-1 < x < 1$ iken $y = x^n$ in grafiğinin kolları y -ekseninden uzaklaşırken, $x > 1$ ve $x < -1$ iken fonksiyonun değerleri çok daha hızlı büyüdüğünden grafiğin kolları y -eksenine yaklaşıyor.

En son yaptığımız işlemler n nin negatif değerleriyle tekrarlandığında elde edeceğimiz grafikleri görelim:



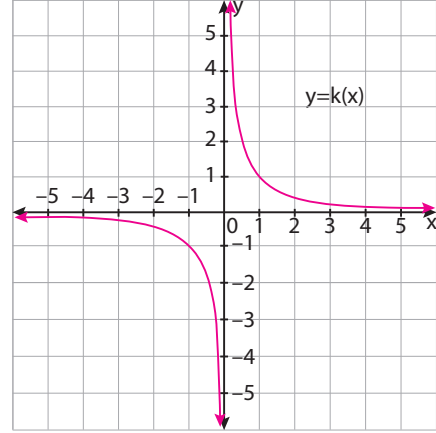
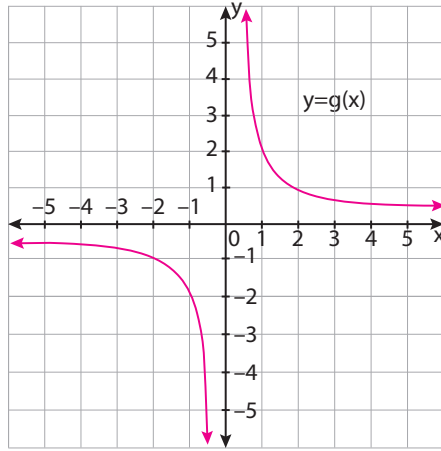
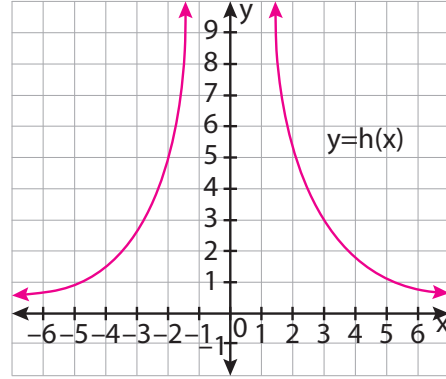
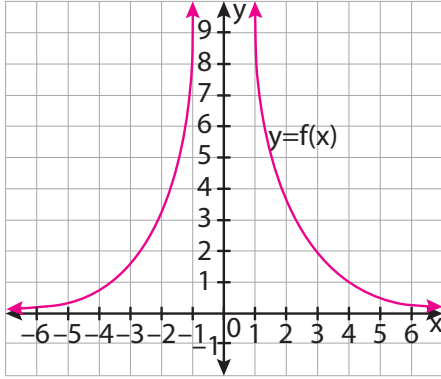
$n = -2, -4, -6$ için $f: \mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R}, f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğinin bir negatif çift tamsayı olmak üzere, $y = x^n$ in grafiğinin kolları y -eksenine göre simetriktir.



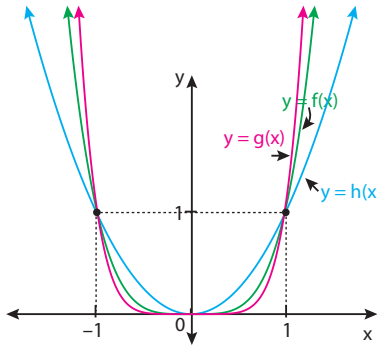
$n = -3, -5, -7$ için $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiğinin bir negatif tek tamsayı olmak üzere, $y = x^n$ in grafiğinin kolları orijine göre simetriktir.

KENDİMİZİ SINAYALIM

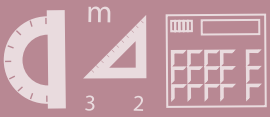
1. $f, g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^n$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Bu grafikleri benzerliklerine göre sınıflandırınız. Bu sınıflandırmayı nasıl yaptığınızı açıklayınız.



2.



Grafikleri verilen f, g ve h fonksiyonlarının kuralı $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$ şeklindedir. Buna göre, bu fonksiyonları, kurallarındaki n değerinin büyüklüğüne göre sıralayınız.



KENDİMİZİ SINAYALIM

3. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=x$ fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a. $f(-5)$, $f(1)$, $f(5)$ değerlerini bulunuz.
- b. $f(a) = -4$, $f(b) = 9$, $f(c) = -1$ eşitliklerini sağlayan a , b ve c değerlerini bulunuz.
- c. f fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olan $[1, 4]$ kümesinin fonksiyon altındaki görüntüsünü bulunuz.
- ç. f fonksiyonunun değer kümesinin bir alt kümesi olan $[-2, 6]$ kümesinin fonksiyon altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

4. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $g(x) = x^2$ fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a. $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ değerlerini bulunuz.
- b. $g(a) = -2$, $g(b) = 0$, $g(c) = 1$ eşitliklerini sağlayan varsa a , b ve c değerlerini bulunuz.
- c. g fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olan $[-1, 4]$ kümesinin fonksiyon altındaki görüntüsünü bulunuz.
- ç. g fonksiyonunun değer kümesinin bir alt kümesi olan $[1, 9]$ kümesinin fonksiyon altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

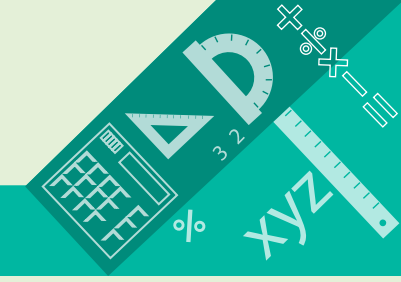
5. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $h(x) = x^3$ fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a. $h(-1)$, $h(0)$, $h(2)$ değerlerini bulunuz.
- b. $h(a) = -8$, $h(b) = 1$, $h(c) = 27$ eşitliklerini sağlayan a , b ve c değerlerini bulunuz.
- c. h fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olan $[-2, 2]$ kümesinin fonksiyon altındaki görüntüsünü bulunuz.
- ç. h fonksiyonunun değer kümesinin bir alt kümesi olan $[-1, 8]$ kümesinin fonksiyon altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonun;

- a. $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ değerlerini bulunuz.
- b. $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ eşitliklerini sağlayan varsa a ve b değerlerini bulunuz.
- c. f fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olan $[1, 2]$ kümesinin fonksiyon altındaki görüntüsünü bulunuz.
- ç. f fonksiyonunun değer kümesinin bir alt kümesi olan $[-2, -1]$ kümesinin fonksiyon altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında grafik çizme özelliği bulunan bir dinamik matematik/geometri yazılımı yardımıyla doğrusal fonksiyonlarda bağımlı değişkenin değişim hızı ile fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.



Araç ve Gereçler: Grafik çizme özelliği bulunan bir dinamik matematik/geometri yazılımı

Adım 1 ►

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = 2x + n$ olmak üzere; $n = -2, -1, 0, 1, 2$ değerleri için g doğrusal fonksiyonunun grafiğini (aynı kartezyen düzlemde) çiziniz. Grafiklerde nelerin değiştiğini nelerin sabit kaldığını inceleyiniz.

Adım 2 ►

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere n 'nin farklı değerleri için $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = 2x + n$ ile verilen fonksiyonun grafiğinin nasıl değiştiğini açıklayınız.

Adım 3 ►

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $h(x) = mx + 1$ olmak üzere; $m = -2, -1, 0, 1, 2$ değerleri için doğrusal bir fonksiyon olan h nin grafiğini (aynı kartezyen düzlemde) çiziniz. Grafiklerde nelerin değiştiğini nelerin sabit kaldığını inceleyiniz.

Adım 4 ►

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere m 'nin farklı değerleri için $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $h(x) = mx + 1$ ile verilen fonksiyonun grafiğinin nasıl değiştiğini açıklayınız.

Adım 5 ►

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $y = f(x) = mx + n$ şeklindeki bir doğrusal fonksiyon için m ve n sabitlerini değiştirmenin fonksiyonun grafiğine nasıl bir etki yaptığını açıklayınız.

Adım 6 ►

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $y = f(x) = mx + n$ fonksiyonu veriliyor. m ve n sabitleri için birer değer seçerek (örneğin $m = -2$, $n = 1$) bu fonksiyona ait bir değerler tablosu oluşturunuz. Örneğin,

| | | | |
|----------|----------|----------|-----|
| x | 1 | a | ... |
| $y=f(x)$ | $f(1)=?$ | $f(a)=?$ | ... |

Oluşturduğunuz tablodaki değerleri kullanarak ardışık iki y değeri farkının bunlara karşılık gelen x değerleri farkına oranını belirleyiniz. Örneğin, $\frac{f(a) - f(1)}{a - 1}$

Bulduğunuz oranlarla belirlediğiniz m değeri arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

Belirlediğiniz m değeri için farklı n değerleri alarak benzer oranlar oluşturunuz. Elde ettiğiniz oranlar ile m değeri arasındaki ilişkinin n değerlerinden nasıl etkilendiğini açıklayınız.

Adım 7 ►

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $y = f(x) = mx + n$ fonksiyonunun grafiği ile $mx + n = 0$ denkleminin çözüm kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

Neler Öğreneceğiz?

- Ortalama değişim oranını (hızı)
- Doğrusal fonksiyonlar ve değişim oranını (hızı)

Anahtar Terimler

- Doğrusal fonksiyon
- Değişim oranı (hızı)
- Ortalama değişim oranı (hızı)
- Sabit değişim oranı (hızı)

Sembol ve Gösterimler

- $f(x) = ax + b$

3.2.3. Doğrusal Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

Başlarken:

Günlük hayattaki birçok durumda iki nicelik arasındaki ilişkiler bir doğrusal fonksiyonla modellenebilir. Bu tür modeller, ilişkileri anlama, olayları analiz etme ve tahminlerde bulunmada sıklıkla kullanılır.

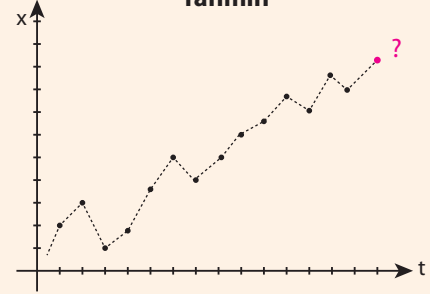
Örneğin, bir GSM şirketinin STANDART HAT abonelerinin aylık fatura tutarlarını t dakika konuşma için;

$$F(t) = 5,95 + 0,16 \cdot t$$

fonksiyonuna göre hesapladığını varsayalım. Bu fonksiyonun grafiği nasıl bir grafiştir? Bu fonksiyonun tanım kümesi nedir? Fonksiyonun kuralındaki 5,95 ne anlama gelmektedir? Fonksiyonun kuralındaki 0,16 değerinin anlamı nedir? Fatura tutarı 34,75 TL olan bir abone kaç dakika konuşmuştur?

Bu ve benzeri soruların cevaplarını daha iyi verebilmek için doğrusal fonksiyonların grafiklerini daha detaylı inceleyip uygulamalarına yer vereceğiz.

Tahmin



Değişim Oranı (Hızı)

Dünya Bankası Dünya Gelişim Göstergelerine göre Türkiye ve Almanya'nın 2000 ve 2011 yıllarına ait nüfusları tabloda gösterilmektedir.

| Yıllar Ülkeler | 2000 | 2011 |
|-------------------|------------|------------|
| Almanya | 82 211 508 | 81 797 673 |
| Türkiye | 63 627 862 | 73 639 596 |



Kaynak: <http://data.worldbank.org>

Buna göre 2000-2011 yılları arasında her iki ülkenin nüfuslarındaki değişimi bularak yorumlayalım.

2000'den 2011'e kadar geçen 11 yıllık süreçte Almanya'nın nüfusundaki değişim $81797673 - 82211508 = -413835$ kişi;

Türkiye'ninki ise $73639596 - 63627862 = 10011734$ kişidir. Ancak bu bilgiler bize nüfusun ne kadar hızlı bir şekilde arttığı veya azaldığını söylememektedir. Bu değerleri 2000 ve 2011 arasındaki zaman farkına bölerek yıllık bazda ortalama değişimi bulalım:

$$\text{Almanya: } \frac{\text{nüfustaki değişim}}{\text{zamandaki değişim}} = \frac{-413835}{11} \approx -37621 \text{ kişi/yıl}$$

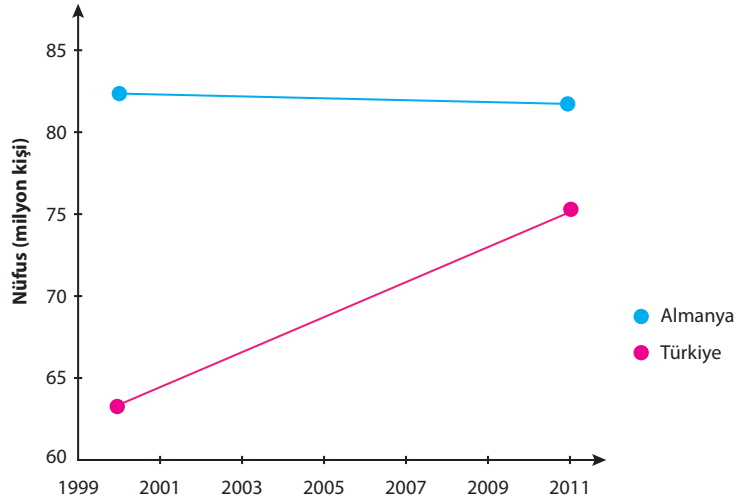
Buna göre 2000-2011 yılları arasındaki 11 yıllık süreçte Almanya'nın nüfusu her yıl ortalama 37 621 kişi azalmıştır.

$$\text{Türkiye: } \frac{\text{nüfustaki değişim}}{\text{zamandaki değişim}} = \frac{10011734}{11} \approx 910158 \text{ kişi/yıl}$$

Buna göre 2000-2011 yılları arasındaki 11 yıllık süreçte Türkiye'nin nüfusu, yılda ortalama 910 158 kişi artmıştır.

Yukarıdaki örnekte iki değişken vardır; zaman ve nüfus. Buradaki ortalama değişme oranı (hızı), nüfusun zamana bağlı olarak ne kadar bir hızla değiştiğini göstermektedir.

Her iki ülkenin verilerini nokta çiftleri olarak grafikte gösterip bu noktaları birer doğru ile birleştirelim.



2000-2011 yılları arasında nüfus artışı veya azalışının ortalama olarak bu oranda (hızda) olduğunu varsayarak, aradaki yıllar için nüfus miktarlarını yaklaşık olarak bulabiliriz. Bunun için, ilgili doğruların denklemlerini (x yıl, y nüfus) kullanabiliriz. Ancak, 2000-2011 aralığının herhangi bir parçasında ve bu aralığın dışında kalan geçmiş veya gelecek yıllar için nüfus artış oranları bilinmediğinden yaptığımız varsayım bize doğru sonuçlar vermeyebilir.

Anahtar Bilgi

Doğrusal fonksiyonlarda değişim oranı (hızı) sabit olup, fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimine eşittir. Diğer bir ifadeyle,

$$y = f(x) = mx + b$$

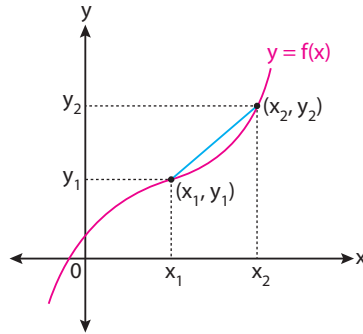
fonksiyonu için değişim oranı (hızı) m değeridir.

Değişim oranı (hızı) veya ortalama değişim oranı (hızı) bir niceliğin değerindeki değişiminin başka bir nicelikteki değişime kıyasla ortalama ne kadar olacağını gösteren bir orandır.

x bağımsız, y de x e bağımlı bir değişken olmak üzere, bu değişkenlere ait (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) değerleri verilsin. (x_1, y_1) değerlerinden (x_2, y_2) değerlerine geçişte yaşanan

$$\text{değişim oranı (hızı)} = \frac{\text{y değerlerindeki değişim}}{\text{x değerlerindeki değişim}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2)$$

şeklinde ifade edilir.



Bir doğru üzerinde alınacak herhangi iki nokta çifti için değişim oranı aynı olacaktır. Bu nedenle, hatırlayacağınız gibi bir doğrunun eğimi, doğru üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki dikey değişimin yatay değişime oranı olarak tanımlanmaktaydı. Dikkat edilirse yukarıda tanımladığımız (x_1, y_1) değerlerinden (x_2, y_2) değerlerine geçişte yaşanan (ortalama) değişim oranı (hızı) ile (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ile belirtilen noktalardan geçen doğrunun eğimi aynı değerdir.

$y = f(x) = mx + b$ şeklindeki bir doğrusal fonksiyonun değişim oranı (hızı), bu fonksiyonun grafiği üzerinden alınacak herhangi iki nokta çifti için olan değişim oranıdır, yani bu fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimidir. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim.

Örnek 1

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$ ve $k(x) = x - 3$ fonksiyonlarının değişim oranlarını (hızını) bularak yorumlayalım.

Çözüm

Verilen fonksiyonların değişim oranlarını (hızını) bulmak için öncelikle bu fonksiyonların bazı gerçek sayılarda aldığı değerleri bulalım. Örneğin, f , g , h ve k fonksiyonlarının $x = -5, -1, 0, 2, 3, 7$ için aldığı değerler aşağıda verilen tablolardaki gibidir. Bu tablolarda ardışık sıradaki iki x değeri farkı, x değerindeki değişimi; bunlara karşılık gelen y değerleri farkı da fonksiyonun değerindeki değişimi göstermektedir. Bu iki farkın oranı ise fonksiyonun değişim oranını (hızını) göstermektedir.

| x | $f(x)$ | x değerindeki değişim $(x_2 - x_1)$ | $f(x)$ değerindeki değişim $f(x_2) - f(x_1)$ | Değişim oranı (hızı) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|-----|--------|--|---|---|
| -5 | -4 | | | |
| -1 | 0 | $-1 - (-5) = 4$ | $0 - (-4) = 4$ | $4/4 = 1$ |
| 0 | 1 | $0 - (-1) = 1$ | $1 - 0 = 1$ | $1/1 = 1$ |
| 2 | 3 | $2 - 0 = 2$ | $3 - 1 = 2$ | $2/2 = 1$ |
| 3 | 4 | $3 - 2 = 1$ | $4 - 3 = 1$ | $1/1 = 1$ |
| 7 | 8 | $7 - 3 = 4$ | $8 - 4 = 4$ | $4/4 = 1$ |

| x | g(x) | x değerindeki değişim ($x_2 - x_1$) | g(x) değerindeki de- ğişim $g(x_2) - g(x_1)$ | Değişim oranı (hızı) $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|----|------|---|--|---|
| -5 | 11 | | | |
| -1 | 3 | $-1 - (-5) = 4$ | $3 - 11 = -8$ | $-8/4 = -2$ |
| 0 | 1 | $0 - (-1) = 1$ | $1 - 3 = -2$ | $-2/1 = -2$ |
| 2 | -3 | $2 - 0 = 2$ | $-3 - 1 = -4$ | $-4/2 = -2$ |
| 3 | -5 | $3 - 2 = 1$ | $-5 - (-3) = -2$ | $-2/1 = -2$ |
| 7 | -13 | $7 - 3 = 4$ | $-13 - (-5) = -8$ | $-8/4 = -2$ |

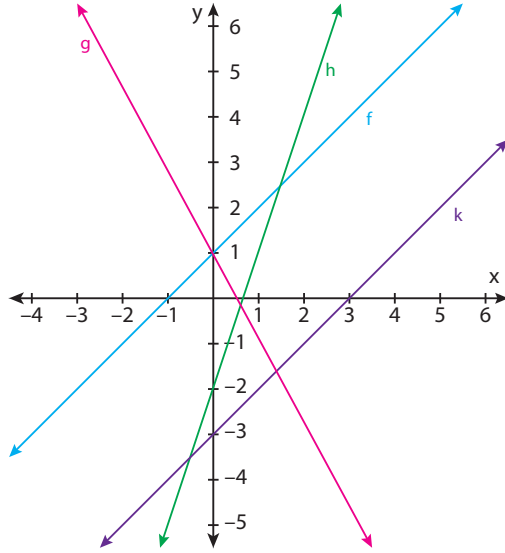
| x | h(x) | x değerindeki değişim ($x_2 - x_1$) | h(x) değerindeki de- ğişim $h(x_2) - h(x_1)$ | Değişim oranı (hızı) $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|----|------|---|--|---|
| -5 | -17 | | | |
| -1 | -5 | $-1 - (-5) = 4$ | $-5 - (-17) = 12$ | $12/4 = 3$ |
| 0 | -2 | $0 - (-1) = 1$ | $-2 - (-5) = 3$ | $3/1 = 3$ |
| 2 | 4 | $2 - 0 = 2$ | $4 - (-2) = 6$ | $6/2 = 3$ |
| 3 | 7 | $3 - 2 = 1$ | $7 - 4 = 3$ | $3/1 = 3$ |
| 7 | 19 | $7 - 3 = 4$ | $19 - 7 = 12$ | $12/4 = 3$ |

| x | k(x) | x değerindeki değişim ($x_2 - x_1$) | k(x) değerindeki de- ğişim $k(x_2) - k(x_1)$ | Değişim oranı (hızı) $\frac{k(x_2) - k(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|----|------|---|--|---|
| -5 | -8 | | | |
| -1 | -4 | $-1 - (-5) = 4$ | $-4 - (-8) = 4$ | $4/4 = 1$ |
| 0 | -3 | $0 - (-1) = 1$ | $-3 - (-4) = 1$ | $1/1 = 1$ |
| 2 | -1 | $2 - 0 = 2$ | $-1 - (-3) = 2$ | $2/2 = 1$ |
| 3 | 0 | $3 - 2 = 1$ | $0 - (-1) = 1$ | $1/1 = 1$ |
| 7 | 4 | $7 - 3 = 4$ | $4 - 0 = 4$ | $4/4 = 1$ |

$f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$ ve $k(x) = x - 3$ fonksiyonları için bu fonksiyonların değişim oranları (hızı) sabit değerler olup sırasıyla 1, -2, 3 ve 1 dir. Tablolarda değişimler ardışık iki x değeri ve fonksiyonun bunlara karşılık gelen ardışık değerleri için hesaplanmıştır. Ancak, ardışık olmayan (herhangi iki) x değeri ve fonksiyonun bunlara karşılık gelen değerleri için de hesaplansaydı değişen bir şey olmazdı. Örneğin $x = -5$ ve $x = 3$ için $f(-5) = -4$ ve $f(3) = 4$ olduğundan, f fonksiyonu için değişim oranı (hızı)

$$\frac{f(3) - f(-5)}{3 - (-5)} = \frac{4 - (-4)}{3 + 5} = \frac{8}{8} = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Dikkat edilirse bu doğrusal fonksiyonların değişim oranları (hızı) grafikleri birer doğru olan bu fonksiyonların eğimidir. Bu durumu fonksiyonların grafikleri üzerinde de gözlemleyebiliriz.



Görüldüğü gibi kuralları farklı olan f ve k fonksiyonlarının değişim oranları (hızları) aynıdır. Bu durum, her iki fonksiyonun grafiklerinin birbirine paralel yani eğimleri aynı olan iki doğru olmasından da açıkça görülmektedir.

Eğimin değerinin pozitif veya negatif olması değişim oranının yönünü göstermektedir. Pozitif eğim değerleri değişimin artış; negatif eğim değerleri de değişimin azalış (düşüş) şeklinde olduğunu göstermektedir. Eğimin mutlak değeri arttıkça/azaldıkça değişim oranı (hızı) da artacak/azalacaktır.

Örnekler üzerinde gözlemlediklerimizin herhangi bir doğrusal fonksiyon için de geçerli olduğunu gösterelim.

Örnek 2

m ve n birer gerçel sayı ve $m \neq 0$ olmak üzere, f fonksiyonu $f(x) = mx + n$ ile verilen bir doğrusal fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun değişim oranının (hızının) sabit olduğunu gösterelim.

Anahtar Bilgi

Bir doğrusal fonksiyonda mutlak değerce büyük eğim daha büyük bir değişim oranı (hızı) demektir. Eğimin pozitif bir sayı olması artışı, negatif bir sayı olması azalmayı (düşüşü) gösterir.

Çözüm

Verilen f fonksiyonunun grafiği üzerinde yer alan iki farklı nokta alalım. Bu noktaların koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olsun. Noktalar farklı olduğundan $x_1 \neq x_2$ olacağına dikkat edelim. Bu durumda $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ olacaktır. Diğer taraftan $f(x_1) = mx_1 + n$ ve $f(x_2) = mx_2 + n$ dir. Bu durumda (x_1, y_1) değerlerinden (x_2, y_2) değerlerine geçişte yaşanan

$$\begin{aligned} \text{Değişim oranı} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{mx_2 + n - (mx_1 + n)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= m \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bulduğumuz sonuç x_1, x_2, y_1 ve y_2 değerlerinden herhangi birini içermemektedir. Dolayısıyla, f doğrusal fonksiyonunun grafiği üzerindeki herhangi iki nokta için elde edeceğimiz değişim oranı aynı olacaktır. Diğer taraftan, bu değişim oranı fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğimidir. Bu nedenle yaptıklarımız, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = mx + n$ ile verilen fonksiyonun grafiği olan doğrunun eğiminin m değeri olduğunu göstermektedir.

Örnek 3

Aşağıdaki tabloda bazı değerleri verilen f ve g fonksiyonlarından hangisinin bir doğrusal fonksiyon olabileceğini inceleyelim.

| x | $y = f(x)$ | x | $y = g(x)$ |
|-----|------------|-----|------------|
| -3 | 6 | -7 | 36 |
| 0 | 3 | -1 | -12 |
| 4 | -1 | 0 | -13 |
| 7 | -4 | 2 | -9 |
| 15 | -12 | 3 | -4 |
| 50 | -47 | 5 | 12 |

Çözüm

f ve g fonksiyonlarında ardışık x ve y değerlerindeki değişim ve bunların oranlarını inceleyelim.

| x | $f(x)$ | x değerindeki değişim ($x_2 - x_1$) | $f(x)$ değerindeki değişim ($f(x_2) - f(x_1)$) | Değişim oranı (hızı) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|-----|--------|--|---|---|
| -3 | 6 | | | |
| 0 | 3 | $0 - (-3) = 3$ | $3 - 6 = -3$ | $-3/3 = -1$ |
| 4 | -1 | $4 - 0 = 4$ | $-1 - 3 = -4$ | $-4/4 = -1$ |
| 7 | -4 | $7 - 4 = 3$ | $-4 - (-1) = -3$ | $-3/3 = -1$ |
| 15 | -12 | $15 - 7 = 8$ | $-12 - (-4) = -8$ | $-8/8 = -1$ |
| 50 | -47 | $50 - 15 = 35$ | $-47 - (-12) = -35$ | $-35/35 = -1$ |

| x | $g(x)$ | x değerindeki değişim ($x_2 - x_1$) | $g(x)$ değerindeki değişim ($g(x_2) - g(x_1)$) | Değişim oranı (hızı) $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$ |
|-----|--------|--|---|---|
| -7 | 36 | | | |
| -1 | -12 | $-1 - (-7) = 6$ | $-12 - 36 = -48$ | $-48/6 = -8$ |
| 0 | -13 | $0 - (-1) = 1$ | $-13 - (-12) = -1$ | $-1/1 = -1$ |
| 2 | -9 | $2 - 0 = 2$ | $-9 - (-13) = 4$ | $4/2 = 2$ |
| 3 | -4 | $3 - 2 = 1$ | $-4 - (-9) = 5$ | $5/1 = 5$ |
| 5 | 12 | $5 - 3 = 2$ | $12 - (-4) = 16$ | $16/2 = 8$ |

Görüldüğü gibi f fonksiyonu için değişim oranı (hızı) sabit iken, g fonksiyonu için sabit bir değişim oranından (hızından) bahsetmek mümkün değildir. Bu durumda f fonksiyonu bir doğrusal fonksiyon olabilir ancak g fonksiyonu bir doğrusal fonksiyon olamaz.

f fonksiyonunun bir doğrusal fonksiyon olduğunu düşünelim. Bu durumda, bu fonksiyon $y = f(x) = mx + b$ şeklindedir. Değişim oranı (hızı) bu fonksiyonun eğimi olacağından $m = -1$ olmalıdır. Bu durumda $y = f(x) = -x + b$ yazılabilir. Verilen $(x, f(x))$ değer çiftlerinden herhangi biri fonksiyonun kuralını sağlamalıdır. Bu durumda, örneğin $(0, 3)$ için

$$3 = -1 \cdot 0 + b$$

$$3 = b$$

bulunur. O halde f fonksiyonunun kuralı $y = f(x) = -x + 3$ olmalıdır.

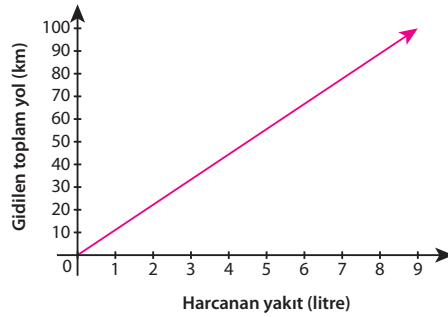
Örnek 4

Verilen ifadelerdeki bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyerek verilen durumdaki değişim oranını yorumlayalım ve grafiksel olarak gösterelim. Bunu aşağıdaki her bir şık için ayrı ayrı yapalım.

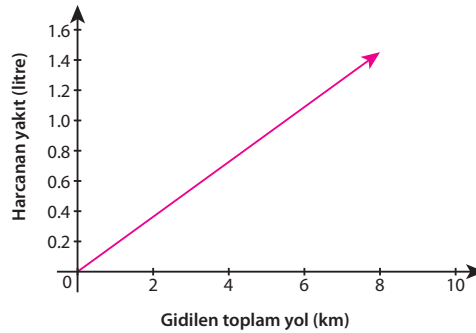
- a. Bir otomobilin şehir içi ortalama yakıt tüketimi 11,2 km/L dir.
- b. y tüketilen yakıt miktarını (litre) ve x alınan yolu (km) göstermek üzere $y = 0,18x$
- c. M fatura tutarı (TL) ve t konuşma süresini (dk) göstermek üzere $M = 0,3t + 7$

Çözüm

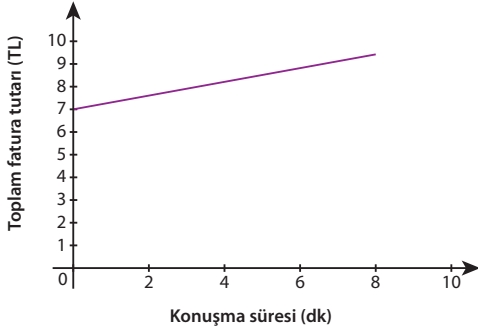
- a. Tüketilen yakıt miktarı bağımsız değişken, gidilen yol bağımlı değişkendir. Değişim oranı (hızı) 11,2 km/L dir. Bunun anlamı tüketilen her 1 litre yakıtla 11,2 km yol gidilebileceğidir.



- b. Alınan yol (x km) bağımsız değişken, tüketilen benzin (y litre) bağımlı değişkendir. Değişim oranı (hızı) 0,18'dir. Bu ise girdi değerindeki 1 birimlik artışın çıktı değerinde 0,18 birimlik artışa neden olacağı anlamına gelir. Diğer bir deyişle gidilen her km yol için 0,18 litre benzin tüketilmesi gerektiği anlamına gelmektedir.

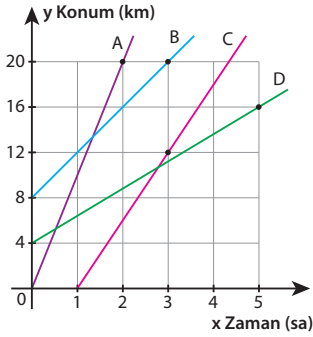


- c. Konuşma süresi (t dk) bağımsız değişken, fatura tutarı (M TL) bağımlı değişkendir. Değişim oranı 0,3'tür. Bu ise girdi değerindeki 1 birimlik artışın, çıktı değerinde 0,3 birim artışa neden olacağı anlamına gelir. Diğer bir deyişle her 1 dakika konuşma, fatura tutarında 0,3 TL artışa neden olacaktır.



Örnek 5

Aşağıda A, B, C ve D koşucularının konum-zaman grafiği verilmiştir. Buna göre koşucuların konumlarının zamana bağlı değişimini bularak yorumlayalım.



Çözüm

Koşucuların konumlarının zamana bağlı değişim oranı (hızı) koşucuların hızlarıyla (km/sa) ilişkilidir. Zamana bağlı konumlar birer doğru ile gösterildiğinden koşucuların konumlarının zamana bağlı değişim oranı (hızı) bu doğruların eğimi olacaktır. Buna göre

A koşucusuna ait doğrunun eğimi,

$$m_A = \frac{20 - 0}{2 - 0} = 10 \text{ km/sa}$$

B koşucusuna ait doğrunun eğimi,

$$m_B = \frac{20 - 8}{3 - 0} = 4 \text{ km/sa}$$

C koşucusuna ait doğrunun eğimi,

$$m_C = \frac{12 - 0}{3 - 1} = 6 \text{ km/sa}$$

D koşucusuna ait doğrunun eğimi,

$$m_D = \frac{16 - 4}{5 - 0} = 2,4 \text{ km/sa bulunur.}$$

Bu durumda koşucuların en hızlıdan yavaşa doğru sıralaması A, C, B, D biçiminde olur.

Örnek 4

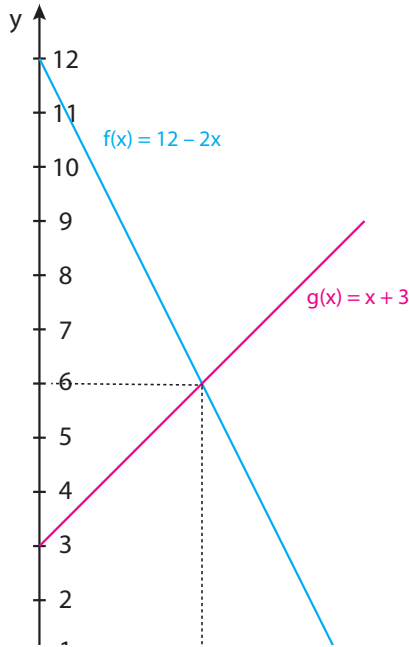
Bir firmanın zamana (x yıl) bağlı gelir (milyon TL) fonksiyonu f, gider fonksiyonu g dir. $f(x) = 12 - 2x$ ve $g(x) = x + 3$, $0 \leq x \leq 6$

verildiğine göre aşağıda istenenleri yapalım.

- f ve g fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzleminde çiziniz.
- Gelir ve giderin eşit olduğu zamanı ve eşitlik anındaki miktarını bulunuz.
- Kâr edilen ve zarar edilen bölgeleri ve en büyük kârı belirleyiniz.

Çözüm

- a. Grafikte f ve g fonksiyonlarının sadece $[0,6]$ aralığında çizildiğine dikkat ediniz.



- b. Gelir ve giderin eşit olduğu x değeri grafikte de görüldüğü gibi iki doğrunun kesişim noktası olan $(3, 6)$ noktasıdır. Bunu cebirsel olarak da bulabiliriz. İki denklemin eşit olduğu noktayı bulmak için denklemleri birlikte çözelim.

$$f(x) = g(x)$$

$$12 - 2x = x + 3$$

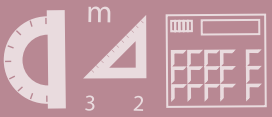
$$x = 3 \text{ bulunur.}$$

$x = 3$ için gider fonksiyonunun (g nin) değeri $y = x + 3 \Rightarrow y = 3 + 3 = 6$ dır. Diğer bir deyişle gelir ve gider 3. yılda eşit olup 6 milyon TL'dir.

- c. Kâr edilen bölgeler, gelirin (f değerlerinin) giderden (g değerlerinden) daha fazla olduğu bölgelerdir. f fonksiyonu $[0, 3]$ arasında azalarak 12 den 6 ya düşmüştür. Bu noktadan sonra f fonksiyonunun aldığı değerler g fonksiyonunkilerden daha küçüktür. O halde kâr edilen bölge $[0, 3]$ aralığı zarar edilen bölge ise $[3, 6]$ aralığıdır.

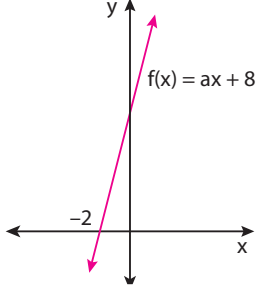
Şirketin kârı $x = 0$ değerinden itibaren hep azalmakta ve $x = 3$ değerinden sonra zarara dönüşmektedir. Bu durumda en büyük kâr $x = 0$ noktasında olur.

$$f(0) - g(0) = 12 - 3 = 9 \text{ milyon TL}$$



KENDİMİZİ SINAYALIM

1. Aşağıda gerçekte sayılarda tanımlı $f(x) = ax + 8$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. Buna göre a kaçtır?

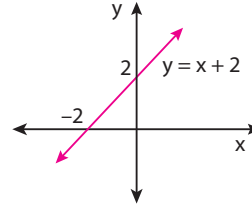


2. Aşağıda denklemleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz:

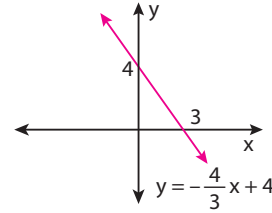
- a. $y = 2x - 1$ b. $y = \frac{x}{3} + 1$ c. $2x - 3y = 6$
ç. $x = 3$ d. $y = 1$

3. Aşağıda grafikleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

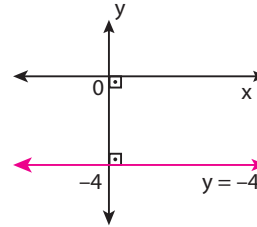
a.



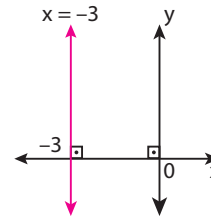
b.



c.

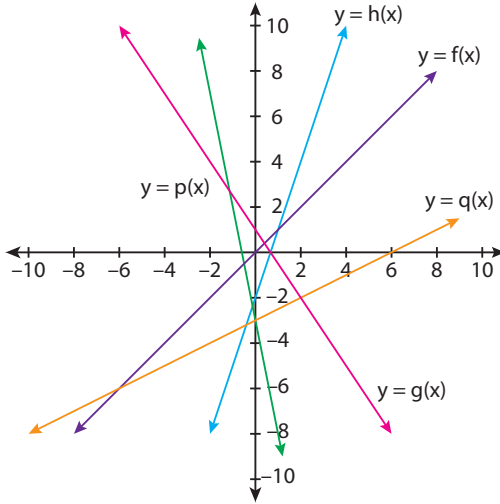


ç.



KENDİMİZİ SINAYALIM

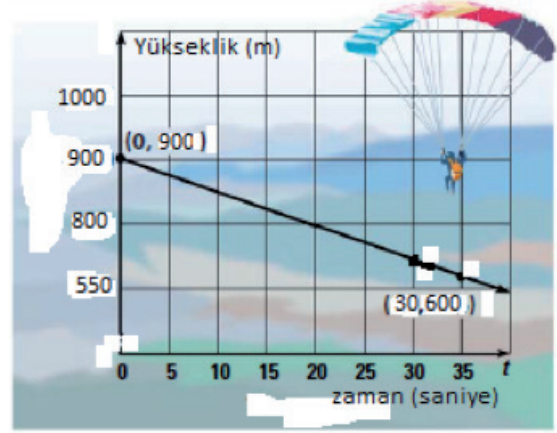
4. Şekilde grafikleri verilen f , g , h , p , q fonksiyonlarının değişim oranlarını (hızlarını) küçükten büyüğe doğru sıralayınız.



5. Aşağıdaki doğrusal fonksiyonların hangisinin değişim oranı (hızı) en büyüktür?

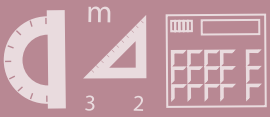
- a. $f(x) = x - 4$ b. $g(x) = -3x - 4$
 c. $h(x) = 2x + 4$ ç. $k(x) = \frac{2}{3}x + 2$
 d. $t(x) = -x + 4$

6.



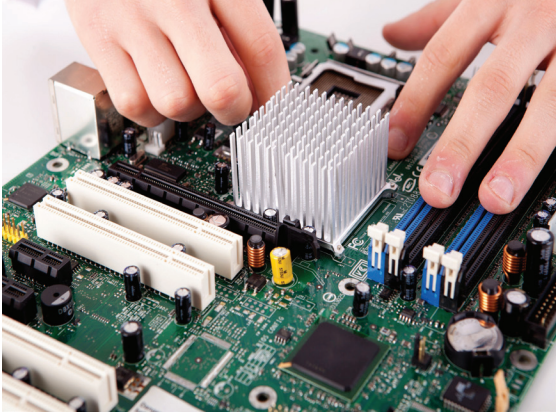
Paraşütle atlayan bir kişinin düşme hızı 900 metre yüksekliğe geldiğinde sabitleniyor. Bu andan sonraki 30. saniyede yerden yüksekliği 600 metre olduğuna göre;

- a. Yükseklikteki ortalama değişim oranını (hızını) bu-
 larak, yorumlayınız.
 b. Bu kişinin 900. metreden itibaren, zamana bağlı yük-
 seklik değişimini bir fonksiyon olarak ifade ediniz.
 c. b şıkında bulduğunuz fonksiyonun grafiğinin eği-
 mi kaçtır?
 ç. Bu kişi 900 metre yükseklikte olduğu andan kaç sa-
 niye sonra yere ulaşır?



KENDİMİZİ SINAYALIM

7.



Bilgisayar üreten bir firmanın günlük giderini üretilen bilgisayar sayısına bağlı bir fonksiyon olarak düşünelim. Bu fonksiyonun bir doğrusal fonksiyon olduğunu varsayalım. Firmanın, günlük 2000 TL sabit gideri varsa ve bir günde 10 bilgisayar üretirse, o günkü toplam gideri 11000 TL oluyor. Firmanın günde x adet bilgisayar üretmesi durumunda günlük toplam giderini $g(x)$ ile gösterelim. Buna göre;

- g fonksiyonunu bulunuz.
- Günde 15 bilgisayar üretilmesi durumunda toplam gider nedir?
- $0 \leq x \leq 10$ için gider fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

3.2.4. $y = f(x)$ Fonksiyonunun Grafiği ile $f(x) = 0$ Denklemi Arasındaki İlişki

Başlarken

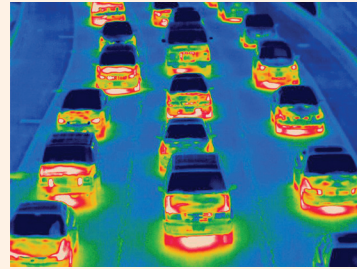
Alışageldiğimiz yollardan çözümüne ulaşmakta zorluk çektiğimiz birçok problemi farklı zemin ve koşullarda ele almamız, problem hakkında yeni bilgilere ulaşmamıza imkan verebilir. Örneğin, görülebilir ışığın yanında diğer ışınları da algılayabilen teleskoplar yardımıyla birçok keşifler yapılmaktadır. İlk resimdeki nebula bunlardan biridir. Benzer şekilde, ısıya duyarlı kameralar kullanırsak çıplak gözle algılayamadığımız birçok şeyi karanlıkta bile olsa fark edebiliyoruz.

Matematiksel birçok problemin çözümünde, problemi farklı tarzlarda ifade ederek veya problemin denk olduğu problemleri tespit ederek matematiğin farklı alanlarına ait bilgi, yöntem ve tekniklerden faydalanırız. Bu nedenle, konular arasında geçiş yapmamıza imkan veren yaklaşımlar çok önemlidir.

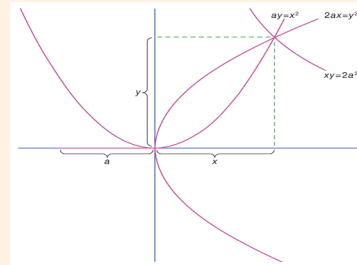
Cebire ait bir konu olarak sunmaya başladığımız fonksiyonların kartezyen düzlemde (koordinat sisteminde) grafiklerini çizmekle, fonksiyonlarla ilgili problem çözümlerinde geometrik bilgi ve yöntemlerimizi kullanma imkanına kavuşuyoruz. Bunun bir örneği olarak, bu kısımda denklem ve denklem sistemlerinin çözümlerinde fonksiyon grafiklerinin ve grafiklerin birbirleriyle kesişmelerinin nasıl kullanılabileceğini öğreneceğiz.



Rosette Nebula (Chadwell 49)



Hareket halindeki bir grup arabanın termal kamera altındaki görüntüsü



Neler Öğreneceğiz?

- Bir fonksiyonun sıfırı
- Fonksiyonların grafiklerinin kesişim noktalarının cebirsel ve geometrik yorumu

Anahtar Terimler

- Bir denklemin kökü
- Bir fonksiyonun sıfırı

Sembol ve Gösterimler

- $y = f(x)$
- $y = f(x) = 0$

$y = f(x)$ fonksiyonu, bir şirketin zamana (x) bağlı olarak mali durumunu (y) gösterebilir. Bu fonksiyonun grafiğinde

- grafiğin x ekseninin üzerinde olduğu yerler şirketin kâr ettiği zamanları
- grafiğin x ekseninin altında olduğu yerler şirketin zarar ettiği zamanları
- grafiğin x eksenini kestiği yerler ise şirketin ne kâr ne de zarar ettiği zamanları göstermektedir.

Çünkü, bu durumda

Anahtar Bilgi

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği için;

- x ekseninin altında kalan kısımda $f(x) < 0$
- x ekseninin yukarısında kalan kısımda $f(x) > 0$
- x ekseninde kalan kısımda ise $f(x) = 0$ olur.

Anahtar Bilgi

Bir denklemin kökü, denklemin sağlayan (doğrulan) değerlerdir.

- y değeri pozitif ise şirket kâr etmektedir.
- y değeri negatif ise şirket zarar etmektedir.
- y değeri sıfır ise şirket ne kâr ne de zarar etmektedir.

Burada şirketin ne kâr ne de zararda olduğunu temsil eden $y=f(x)=0$ değeri fonksiyonun grafiksel gösteriminde grafiğin x eksenini kestiği noktadır.

Bu kısımda, herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğiyle $f(x)=0$ denklemi arasındaki ilişkiyi ele alacağız. Böylece bu ilişkiyi kullanarak denklem çözümlerinde grafik yorumlamalarından yararlanacağız.

Fonksiyonların Sıfırları

Bir denklemin çözümü olan denklemin kökleri, denklemin sağlayan (doğrulan) değerlerdir.

Örneğin, $2x - 5 = 0$ gibi bir doğrusal denklemde x yerine $\frac{5}{2}$ değerini yazdığımızda bu değer denklemin sağladığı görebiliriz. Bu nedenle $\frac{5}{2}$ değeri denklemin bir köküdür.

Gerçekten de bu denklemin kökünü

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

şeklinde bulabiliriz. Şimdi $y = 2x - 5$ eşitliğini iki bilinmeyenli doğrusal bir denklem olarak ele alalım. Dikkat edersek bu denklemde y değerini 0 alırsak ilk denklemimiz olan $0 = 2x - 5$ i elde ediyoruz.

Diğer taraftan x ve y bilinmeyenlerini bağımlı ve bağımsız değişkenler olarak ele aldığımızda $y = 2x - 5$ eşitliği $f(x) = 2x - 5$ doğrusal fonksiyonuyla yakından ilişkili olmaktadır. Şöyle ki, $y = 2x - 5$ denklemini sağlayan (x, y) şeklindeki ikililer, $f(x) = 2x - 5$ doğrusal fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların koordinatlarıdır.

Şimdi şu soruyu düşünelim: $2x - 5 = 0$ denkleminin kökü ile $f(x) = 2x - 5$ doğrusal fonksiyonunun grafiği arasında nasıl bir ilişki vardır?

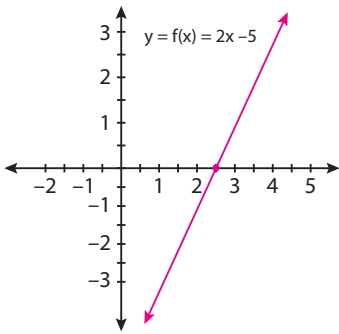
Hatırlayacağımız gibi koordinatları (x, 0) şeklinde olan bir nokta x ekseninde ve x eksenindeki herhangi bir noktanın da koordinatları (x,0) şeklindedir. Bu nedenle, koordinatları (x, 0) şeklinde olan bütün noktalar, x eksenini verecektir.

Dikkat edilirse koordinatları (x, 0) olan noktalar, $y = 0$ denkleminin iki bilinmeyenli (x ve y bilinmeyenleri) bir denklem olarak ele alındığındaki çözümlerine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla x eksenini, $y = 0$ doğrusal denklemiyle ifade edilebilir.

Benzer şekilde (gerekçelerini açıklayınız), y eksenini, x = 0 doğrusal denklemiyle ifade edilebilir.

Şimdi, $2x - 5 = 0$ denkleminin kökü ile $f(x) = 2x - 5$ doğrusal fonksiyonunun grafiği arasında nasıl bir ilişki olduğunu bu bilgiler ışığında bulmaya çalışalım.

$2x - 5 = 0$ denkleminin kökü, $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeridir. $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri ise f fonksiyonunun grafiği üzerinde olup ordinatı 0 olan noktanın apsisi. Bu nokta ise $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x eksenini kesiştiği noktadır. Dolayısıyla aradığımız ilişkiyi kısaca şu şekilde belirtebiliriz: $2x - 5 = 0$ denkleminin kökü, $f(x) = 2x - 5$ doğrusal fonksiyonuna ait grafiğin x eksenini kestiği yerdir. Şimdi $f(x) = 2x - 5$ fonksiyonunun grafiğini inceleyelim.



Görüldüğü gibi grafiğin x-eksenini kestiği nokta $2x - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesi (kökü) olan 2,5 yani $\frac{5}{2}$ 'dir.

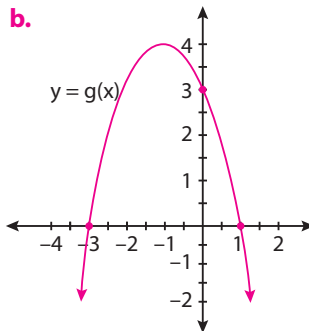
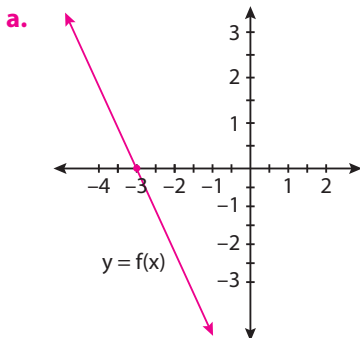
Bu örnekte gözlemlediğimiz durum genelde de geçerlidir. Şöyle ki, herhangi bir denklemin kökünü ilişkili fonksiyonun grafiğini kullanarak da bulabiliriz.

$a \in \mathbb{R}$ için $f(a) = 0$ oluyorsa a sayısına **f fonksiyonunun sıfırı** denir. Diğer bir ifadeyle, bir f fonksiyonun sıfırları $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir. Bu durumda f fonksiyonun sıfırları fonksiyonun grafiğinin x-eksenini kestiği noktalar.

Örneğin, $mx + n = 0$ doğrusal denkleminin kökü $f(x) = mx + n$ doğrusal fonksiyonunun sıfır.

Örnek 1

Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların sıfırlarını bulalım.



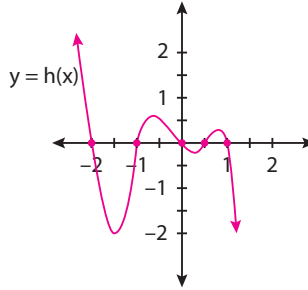
Anahtar Bilgi

$a \in \mathbb{R}$ için $f(a) = 0$ oluyorsa a sayısına **f fonksiyonunun sıfırı** denir.

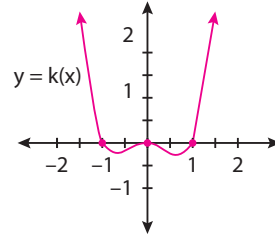
Anahtar Bilgi

Bir f fonksiyonunun grafiği $y = f(x)$ denkleminin grafiğidir. Grafiğin (varsa), x -eksenini kestiği noktalar $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesidir. Grafik x -eksenini hiçbir noktada kesmiyorsa $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılarda çözüm kümesi boş kümedir.

c.



d.



Çözüm

- a.** f fonksiyonunun grafiği x -eksenini $(-3, 0)$ noktasında kestiği için $x = -3$ değeri f fonksiyonunun sıfırıdır. Diğer bir ifadeyle $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi tür.
- b.** g fonksiyonunun grafiği x -eksenini $(-3, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarında kestiği için $x = -3$ ve $x = 1$ değerleri g fonksiyonunun sıfırlarıdır. Diğer bir ifadeyle $g(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-3, 1\}$ dir.
- c.** h fonksiyonunun grafiği x -eksenini $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarında kestiği için $x = -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ değerleri h fonksiyonunun sıfırlarıdır. Diğer bir ifadeyle $h(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ dir.
- d.** k fonksiyonunun grafiği x -eksenini $(-1, 0)$, $(0, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarında kestiği için $x = -1, 0, 1$ değerleri k fonksiyonunun sıfırlarıdır. Diğer bir ifadeyle $k(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-1, 0, 1\}$ dir.

Bir f fonksiyonun sıfırları için kullandığımız akıl yürütmeyi genişleterek $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) denkleminin çözüm kümesini f fonksiyonun grafiği üzerinden bulabiliriz. Şöyle ki,

$$f(x) = a$$

denkleminin çözüm kümesi

$$y = f(x)$$

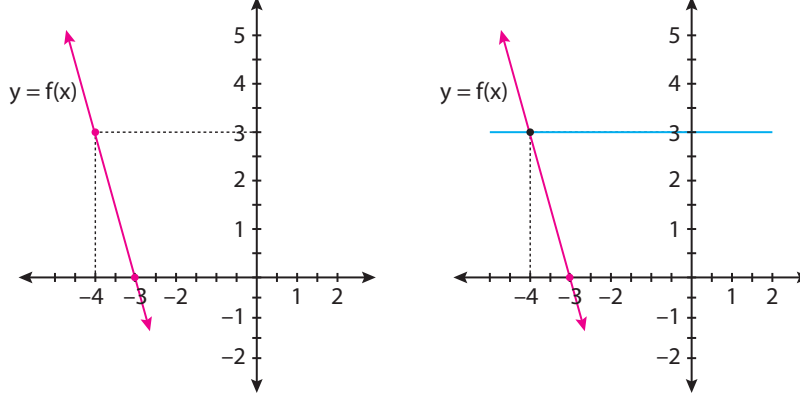
$$y = a$$

denklemleri sağlayan x değerleridir. Diğer bir ifadeyle,

$$f(x) = a$$

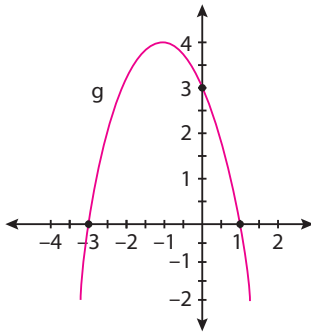
denkleminin çözüm kümesi f fonksiyonunun grafiği ile y eksenini a da kesen yatay doğrunun kesiştiği noktanın apsisi.

Örneğin aşağıda grafiği verilen f fonksiyonu için $f(x) = 3$ denkleminin çözüm kümesi $y = f(x)$ fonksiyonun grafiğinin $y = 3$ doğrusu ile kesişiminin apsisi olacaktır.



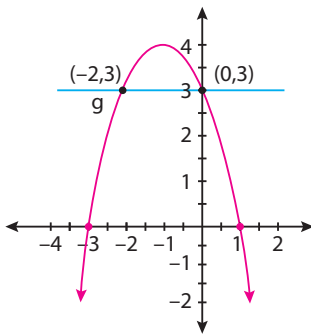
Bu durumda $f(x) = 3$ denkleminin çözüm kümesi $\{-4\}$ tür.

Örnek 2



g fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $g(x) = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm



g fonksiyonun grafiği ile $y = 3$ doğrusunun kesişimi $(-2, 3)$ ve $(0, 3)$ noktalarıdır. Dolayısıyla $g(x) = 3$ denkleminin çözümü $x \in \{-2, 0\}$ dir.

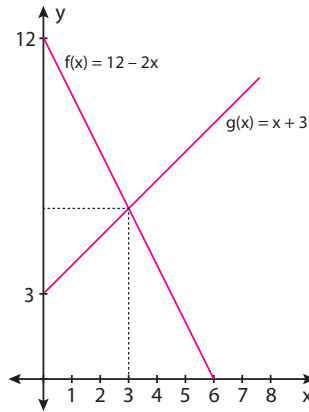
Örnek 3

Bir firmanın zamana (x yıl) bağlı gelir (milyon TL) fonksiyonu f , gider fonksiyonu g dir. $0 \leq x \leq 6$ için $f(x) = 12 - 2x$ ve $g(x) = x + 3$ olarak verildiğine göre aşağıda istenenleri yapalım.

- f ve g fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim.
- Gelir ve giderin eşit olduğu zamanı ve bu andaki geliri bulalım.
- Kâr edilen ve zarar edilen bölgeler ile en büyük kârı belirleyelim.

Çözüm

a.



Grafikte f ve g fonksiyonlarının sadece $[0,6]$ aralığında çizildiğine dikkat ediniz.

- Gelir ve giderin eşit olduğu x değeri grafikte de görüldüğü gibi iki doğrunun kesim noktası olan $(3, 6)$ noktasıdır. Bunu cebirsel olarak da bulabiliriz. İki denklemin eşit olduğu noktayı bulmak için denklemleri birlikte çözelim.

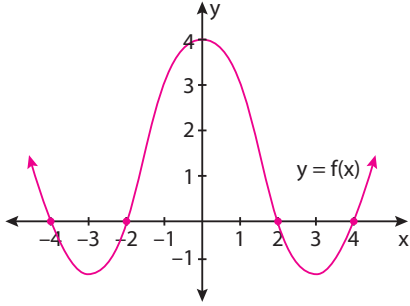
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Rightarrow 12 - 2x = x + 3 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

bulunur. $x = 3$ için gider fonksiyonunun değeri $g(3) = 3 + 3 = 6$ dir. Böylelikle gelir ve gider 3. yılda eşit olup 6 milyon TL'dir.

- Kâr edilen bölgeler, gelirin (f değerlerinin) giderden (g değerlerinden) daha fazla olduğu bölgelerdir. f fonksiyonu $[0, 3)$ arasında azalarak 12 den 6 ya düşmüştür. Bu noktadan sonra f fonksiyonunun aldığı değerler g fonksiyonunkilerden daha küçüktür. O halde kâr edilen bölge $[0, 3)$ aralığı zarar edilen bölge ise $(3, 6]$ aralığıdır.

Şirketin kârı $x = 0$ değerinden itibaren hep azalmakta ve $x = 3$ değerinden sonra durum zarara dönüşmektedir. Bu nedenle, en büyük kâr $x = 0$ noktasında $f(0) - g(0) = 12 - 3 = 9$ milyon TL olur.

Örnek 4



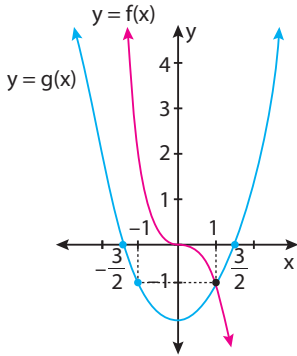
Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)=0$ denkleminin kökleri toplamını bulalım.

Çözüm

$f(x) = 0$ denkleminin kökleri $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalardır. Bu durumda verilen f fonksiyonunun grafiği x eksenini $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ ve $x = 4$ noktalarında kesmektedir. Buradan $f(x) = 0$ denkleminin kökleri toplamı

$$(-4) + (-2) + 2 + 4 = 0 \text{ olur.}$$

Örnek 5



Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre;

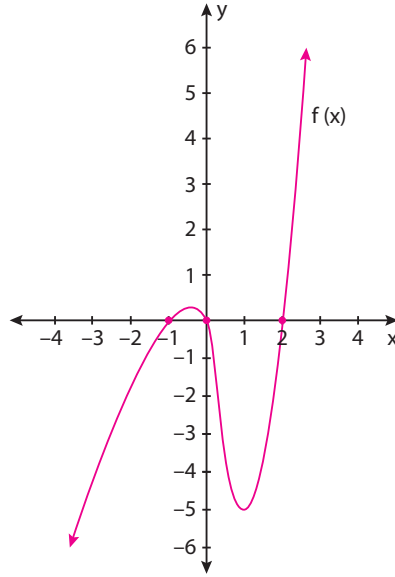
- I. f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.
- II. g fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.
- III. $f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

Çözüm

- I. f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği nokta olan $x=0$ değeri f fonksiyonunun sıfırıdır.
- II. g fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar olan $x = -\frac{3}{2}$ ve $x = \frac{3}{2}$ değerleri g fonksiyonunun sıfırlarıdır.

$f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlayan x değeri f ve g fonksiyonlarının grafiklerinin kesiştiği noktanın apsidir. Bu durumda istenilen cevap $x = 1$ dir.

Örnek 6

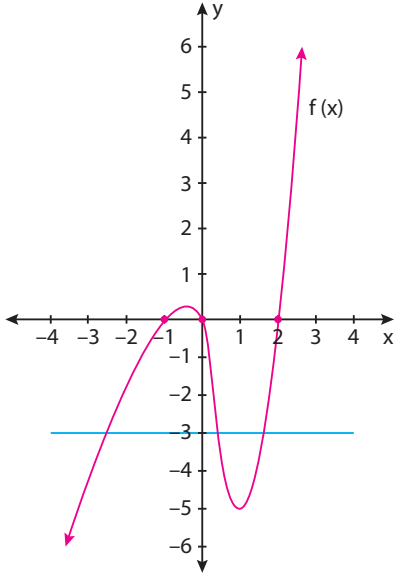


Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x$ ile veriliyor. Bu fonksiyonun grafiği şekildeki gibidir. x değerleri -1 den küçük ve 2 den büyük değerler aldıkça grafiğin x ekseninden uzaklaştığı bilinmektedir. Buna göre f fonksiyonunun grafiğini kullanarak

- $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.
- $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = -3$ denkleminin kaç tane gerçek sayı çözümü olduğunu bulalım.
- $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = 3$ denkleminin kaç tane gerçek sayı çözümü olduğunu ve varsa bu çözümün veya çözümlerin hangi ardışık iki tam sayı(lar) arasında olduğunu bulalım.

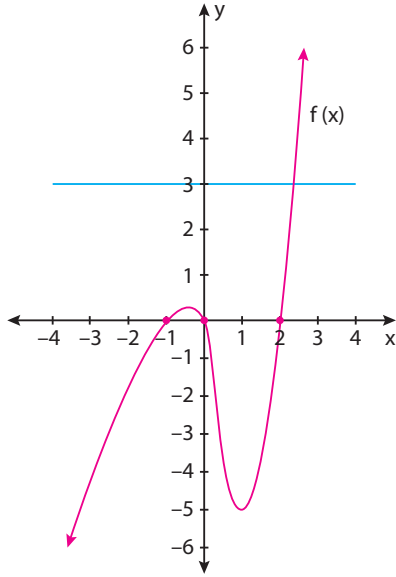
Çözüm

- Verilen denklem $f(x) = 0$ dir. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde, grafiğin x eksenini kestiği noktalar $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 2$ olduğundan bu denklemin çözüm kümesi $\{-1, 0, 2\}$ dir.
- Dikkat edilirse $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = -3$ denklemi $y = f(x)$, $y = -3$ denklem sisteminin çözümünden elde edilecek olan x değerleridir. Bunun grafiksel anlamı f fonksiyonu ile $y = -3$ doğrusunun kesişim noktalarının apsiseridir. Verilen grafiği y eksenini -3 te kesen bir yatay doğru çizdiğimizde bu yatay doğrunun grafiği üç noktada kestiği görülecektir. Dolayısıyla, verilen denklemin de üç gerçek sayı çözümü olacaktır.



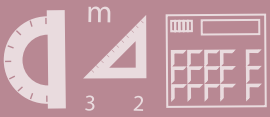
Dikkat edilirse verilen denklemin çözümleri -3 ün f altındaki ters görüntüleridir.

c.



Benzer şekilde grafiği üzerinde y eksenini 3 te kesen bir yatay doğru çizersek bu yatay doğrunun verilen fonksiyon grafiğini sadece bir noktada kestiği görülecektir. Ayrıca bu kesişim noktasının apsisinin 2 ile 3 arasında olduğu grafikten görülmektedir.

Bu nedenle $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = 3$ denkleminin sadece bir gerçekte sayı çözümü olup bu çözüm de $(2, 3)$ aralığındadır.

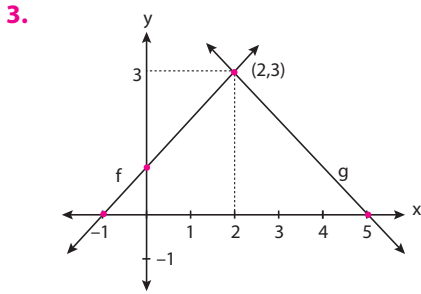


KENDİMİZİ SINAYALIM

1. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 5x - 4$ ile $g(x) = 3x + 4$ fonksiyonlarının grafiklerinin kesiştiği noktayı bulunuz.

2. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini ilgili fonksiyonların grafiklerini kullanarak bulunuz.

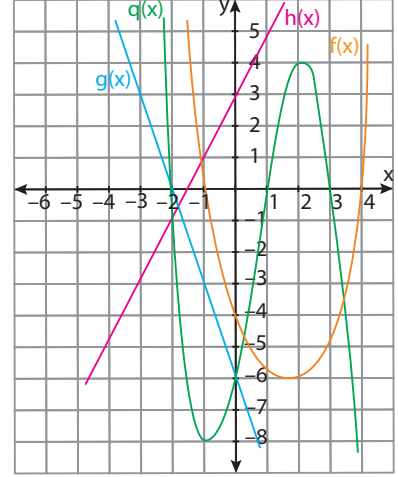
a. $\begin{cases} -3x - y = 6 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$



Grafikte verilenlere göre f ve g fonksiyonlarının denklemlerini bulunuz.

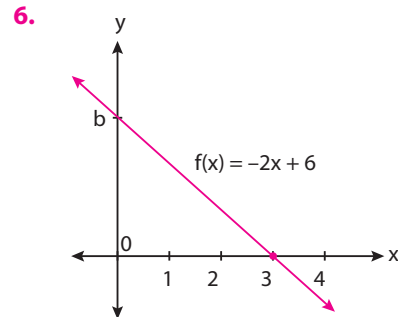
4. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlar için

- a. $f(x) = 0$
b. $g(x) = 0$
c. $h(x) = 0$
ç. $q(x) = 0$
d. $h(x) = 3$
e. $g(x) = -4$



denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz

5. $x^2 + 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerini bir grafik çizim aracından/yazılımından yararlanarak bulunuz.



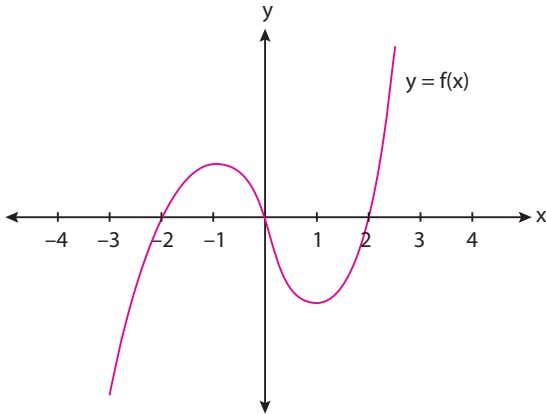
Grafikte verilenlere göre b değeri kaçtır?

KENDİMİZİ SINAYALIM

7. Aşağıdaki denklemleri verilen doğruların eksenleri kesitgi noktaları bulunuz.

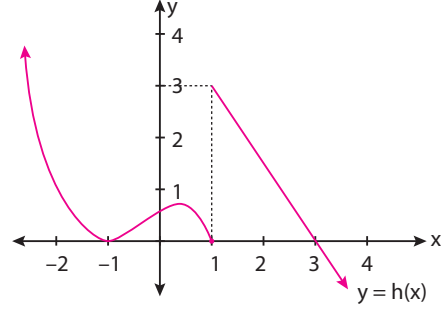
- a. $y = 2x - 1$
- b. $y = \frac{x}{3} + 1$
- c. $2x - 3y = 6$
- ç. $x = 3$
- d. $y = 1$

8.



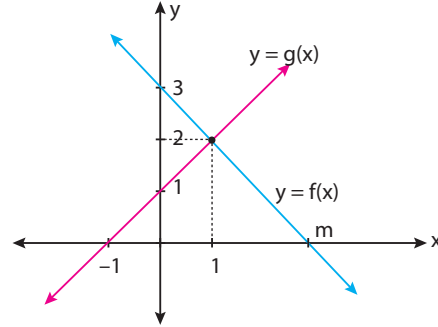
Grafiği verilen f fonksiyonunun grafiği x – eksenini c noktasında kesiyor ve $f(c^2) = 0$ ise c kaçtır?

9.

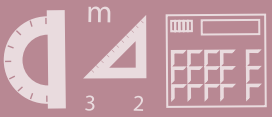


Grafiği verilen h fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz?

10.

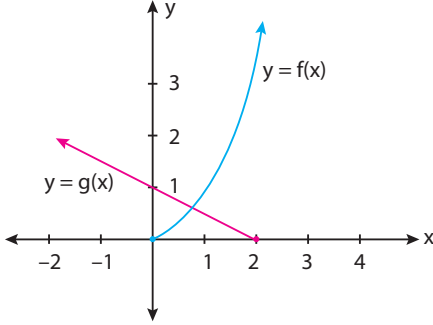


f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. f fonksiyonunun grafiğinin x – eksenini kestiği nokta m dir. m nin g fonksiyonu altındaki ters görüntüsü nedir?



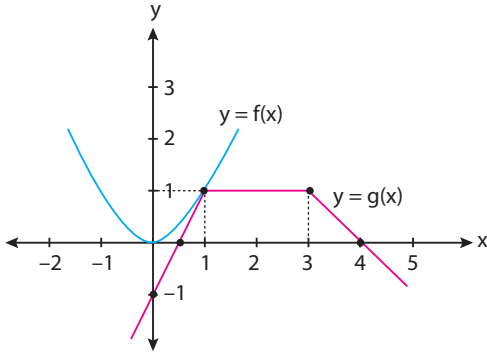
KENDİMİZİ SINAYALIM

11.

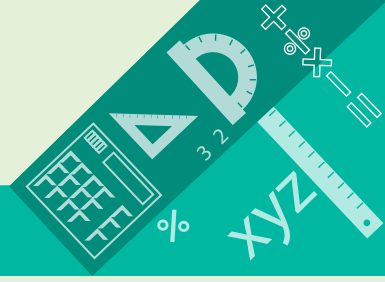


f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $f(a) = 0$ ve $g(b) = 0$ ise $a + b$ kaçtır?

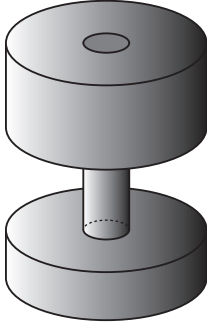
12.



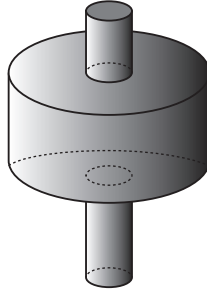
Grafiği verilen f ve g fonksiyonlarının ters görüntülerinin eşit olduğu değer a ise $g(a+2)$ in değeri kaçtır?



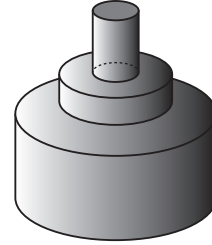
Bu atölye çalışmasının amacı, birden fazla kuralla tanımlanan fonksiyonları bir örnek üzerinde incelemektedir.



a



b



c

Şekilde verilen a, b ve c depoları üst üste konulmuş dik silindir şeklindeki bölümlerden oluşmaktadır. Bu depolar boş iken, musluklardan sabit hızla akan su ile doldurulmaktadır.

Adım 1 ►

Her bir depo için, depo içindeki suyun yüksekliğini zamana bağlı olarak gösteren fonksiyonların grafiğini çizin.

Adım 2 ►

Depolarda suyun yüksekliğinin nasıl değiştiğini çizdiğiniz grafikleri kullanarak açıklayınız. Bu grafikleri karşılaştırarak, birim zamanda suyun yüksekliğinin en hızlı değiştiği depoyu tespit ediniz? Cevabınızın gerekçelerini açıklayınız.

Adım 3 ►

Her bir depo için, depo içindeki suyun hacmini zamana bağlı olarak gösteren fonksiyonların grafiğini çizin.

Adım 4 ►

Depolarda suyun hacminin nasıl değiştiğini çizdiğiniz grafikleri kullanarak açıklayınız. Bu grafikleri karşılaştırarak, birim zamanda suyun hacminin en hızlı değiştiği depoyu tespit ediniz? Cevabınızın gerekçelerini açıklayınız.

Neler Öğreneceğiz?

- Parçalı tanımlı fonksiyonu
- Bir parçalı tanımlı fonksiyonun grafiğini

Anahtar Bilgi

- Parçalı tanımlı fonksiyon
- Mutlak değer fonksiyonu
- Mutlak değerli fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- $y = |x|$
- $y = |g(x)|$
- $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq a \\ h(x), & a < x < b \\ k(x), & x \geq b \end{cases}$

3.2.5. Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar ve Grafikleri

Başlarken

Havanın tamamen güneşli, parçalı bulutlu veya devamlı yağmurlu olduğu günler olabileceği gibi bir gün içinde sırasıyla dört mevsimi de yaşayabiliriz.

Benzer şekilde, bir duruma tek düze bir tarif yeterli olabileceği gibi birden çok tarife ihtiyaç da duyulabilir. Bu, fonksiyonlar için de geçerlidir. Tanım kümesinin belli bir bölümü için verilen ilişkilendirme kuralı, tanım kümesinin diğer kısımları için geçerli olmayabilir. Yani bir fonksiyonun yaptığı ilişkilendirmeyi tarif etmek için birden fazla cebirsel kurala ihtiyaç duyulabilir.

Örneğin, piyasa ekonomisinde, arz-talep dengesi içinde bir malın fiyatındaki değişimler sıkça karşılaşılan durumlardır. Şöyle ki, bir malın fiyatı bir süre doğrusal olarak artıp, daha sonra 3 hafta boyunca sabit kalabilir ve sonrasında tekrar doğrusal olarak artmaya devam edebilir.

Buna göre bu malın fiyatının zamana bağlı değişimini gösteren fonksiyon nasıl bir fonksiyondur? Bu fonksiyonun grafiğini çizmek istersek nasıl bir grafik elde ederiz?



Yaptığı ilişkilendirmenin belirtilmesinde birden fazla kurala ihtiyaç duyulan fonksiyon kullanımını gerektiren bazı örnekler üzerinde duralım.

Örnek 1



Bir motosiklet yarışçısının antrenmanlarında önce belli bir hıza ulaştığını ve bundan sonra turlarını saymaya başladığını düşünelim. Bu motosikletlinin birinci tur başındaki hızının 100 km/sa. ve motor maksimum hızına ulaşana kadar her tur sonundaki hızının o tur başındaki hızından 28 km/sa. fazla olduğunu varsayalım. Buna göre aşağıda istenenleri yapalım.

- Bu motosikletlinin ilk 4 tur sonundaki hızlarını bulup bir tabloda gösteriniz.
- Hız ile tur sayısı arasında bulduğunuz tablo değerlerine uyan bir kural bulunuz.
(c, ç ve d seçeneklerinde bundan sonraki sorularda motosikletlinin turlar sayılmaya başladıktan sonraki herhangi bir andaki hareketinin bulduğunuz kurala uygun olduğunu ve motorun maksimum hızının 296 km/sa olduğunu varsayınız.)
- İlk olarak kaçinci tur sonunda bu motosikletlinin hızı 238 km/sa'den fazla olur?
- Kaçinci turda maksimum hıza ulaşır?
- Motosikletlinin tur- hız grafiğini çiziniz.

Çözüm

- Hızının (V), tur sayısına (t) bağlı olarak fonksiyonumuzu oluşturmaya çalışalım. Burada V'nin t. tur sonundaki hızı gösterdiğine göre, bu durumu t'ye bağlı V(t) fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Verilenleri bu gösterime uygun olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$V(0) = 100$ ve motor maksimum hızına ulaşana kadar $V(t + 1) = V(t) + 28$ olacaktır.

Buradan, $V(1) = V(0) + 28 = 100 + 28 = 128$, $V(2) = V(1) + 28 = 128 + 28 = 156$ bulunur. Benzer şekilde aşağıdaki tablodaki değerleri elde ederiz:

| t | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| V(t) | $100 + 28 = 128$ | $128 + 28 = 156$ | $156 + 28 = 184$ | $184 + 28 = 212$ |

- İlk tur başlangıç hızı 100 km/sa ve her turda da motosikletlinin hızını 28 km/sa arttırdığı biliyoruz. Tablodaki değerleri de kullanarak motor maksimum hızına ulaşana kadar

$$V(t) = 100 + 28 \cdot t$$

motor maksimum hızına ulaştıktan sonra da

$$V(t) = \text{maksimum hız}$$

olarak fonksiyonumuzu yazabiliriz.

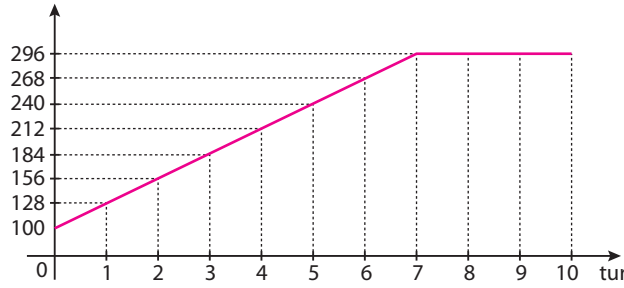
Bunu biliyor muydunuz?



Kenan Sofuoğlu (1984-)

Kenan Sofuoğlu, Türk motorsporları tarihinin en başarılı sporcusu olarak anılmaktadır. 2007, 2010 ve 2012 yıllarında Dünya Supersport şampiyonasını kazanan Sofuoğlu'nun başarısının sırrı, azimle hedeflerine yönelik sıkı çalışmasıdır.

- c. $V(t) > 238$ olmalıdır. $238 < 296$ olduğundan $100 + 28t > 238$ eşitsizliğini elde ederiz ve buradan $28t > 138$ olur ve $t > 4,9$ olup motosikletlinin 5. turda hızı 238 km/sa ten fazla olmaya başlar.
- ç. $V(t) \leq 296$ olmasını istiyoruz. Bu durumda $100 + 28t \leq 296$, buradan $28t \leq 196$ ve de $t \leq 7$ elde edilir. Bu nedenle, motosikletlinin 7 tur sonunda hızı 296 km/sa olarak sabitlenir.
- d. t değeri 0 ile 7 arasında iken $V(t) = 100 + 28t$ doğrusal fonksiyonunun; t değeri 7 den büyük olduğunda ise $V(t) = 296$ sabit fonksiyonunun grafiğini çizeceğiz. Bu durumda grafik aşağıdaki gibi çizilir.



Hız fonksiyonu $V(t)$ için elde ettiklerimizi tekrar şu şekilde ifade edebiliriz:

$$t \in [0, 7) \text{ için } V(t) = 28t + 100,$$

$$t \in [7, \infty) \text{ için } V(t) = 296 \text{ dir.}$$

Dikkat edersek $V(t)$ fonksiyonunun kuralını tarif etmek için birden fazla koşula ihtiyaç duyduk. Şimdi, bu örnekte karşılaştığımız durumlara benzer fonksiyonları tanımlayalım.

Tanım kümesinin ayrık altkümelerinde farklı kurallarla tanımlı olan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** veya kısaca **parçalı fonksiyonlar** denir.

Örnek 2

$$g: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2,$$

$$h: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 1,$$

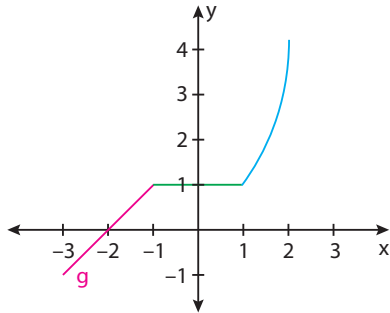
$$k: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = x^2$$

fonksiyonları verilsin. Buna göre

- a. g , h ve k nın her birinin grafiklerini farklı renkler kullanarak, aynı kartezyen düzlemde çizelim.
- b. g , h ve k fonksiyonlarının grafiklerinin birleşiminden oluşan grafiği, tek bir fonksiyonun grafiği şeklinde nasıl ifade edebileceğimizi açıklayalım.

Çözüm

a.



g fonksiyonunun grafiğini kırmızı, h fonksiyonunun grafiğini yeşil ve k fonksiyonunun grafiğini de mavi renkle göstereyim. Daha önce öğrendiğimiz fonksiyon grafiklerinin çizimleri hakkındaki bilgilerimizi kullanarak şekildeki grafiği elde ederiz.

- b. Dikkat edecek olursak verilen 3 fonksiyonun grafiklerinin birleşimi olan grafiği, tüm gerçekte sayılarda tanımlı tek bir fonksiyonun grafiği olarak düşünülebilir. Şekildeki bütünleştirilmiş grafik üzerinde dikey doğru testi uygulandığında bunun bir fonksiyon grafiği olduğu anlaşılacaktır.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralını parçalı olarak şu şekilde tanımlayalım:

$$x \in (-\infty, -1) \text{ ise } f(x) = g(x),$$

$$x \in [-1, 1) \text{ ise } f(x) = h(x),$$

$$x \in [1, \infty) \text{ ise } f(x) = k(x).$$

Bu durumda, f fonksiyonu aradığımız fonksiyondur. Parçalı tanımlı verilen f fonksiyonunun kuralını aşağıdaki gibi bir gösterimle ifade edebiliriz.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & -\infty < x < -1 \\ h(x), & -1 \leq x < 1 \\ k(x), & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Bu gösterimde, g, h ve k fonksiyonları için verilen cebirsel kuralları kullanırsak

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -\infty < x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

elde edilir. Bu gösterim ise şu şekilde okunur:

x değerleri, $-\infty < x < -1$ şartını sağlarsa $f(x) = x + 2$ kuralı uygulanmalıdır.

x değerleri, $-1 \leq x < 1$ şartını sağlarsa $f(x) = 1$ kuralı geçerlidir.

$1 \leq x < \infty$ şartını sağlayan x ler için ise $f(x) = x^2$ kuralı uygulanmalıdır. Örneğin,

$f(0) = 1$ olur, çünkü $-1 \leq 0 < 1$ şartı sağlanır,

$f(-4) = -4 + 2 = -2$ olur çünkü, $-\infty < -4 < -1$ şartı sağlanmaktadır,

$f(5) = 5^2 = 25$ dir çünkü, $1 \leq 5 < \infty$ olduğunu biliyoruz.

Örnek 3

Bir otoparkın ücret tarifiesi aşağıdaki gibidir.

| Park Süresi (saat) | Ücret |
|-----------------------|-------|
| $0 < t \leq 1$ | 1.00 |
| $1 < t \leq 2$ | 3.00 |
| $2 < t \leq 4$ | 6.50 |
| $4 < t \leq 6$ | 10.00 |
| $6 < t \leq 12$ | 12.00 |



Buna göre park ücretinin, parkta kalma süresine bağlı grafiğini çizelim.

Çözüm

t saat bir aracın otoparkta kaldığı süreyi göstermek üzere, aracın ödeyeceği ücret $g(t)$ TL olsun. g fonksiyonunun tanım kümesi bu otoparkın izin verdiği park süreleri kümesidir. Park edilen bir araç en fazla 12 saat kalabildiğinden g nin tanım kümesi $(0, 12]$ aralığıdır.

Verilen bilgilere göre, bir kişi aracını park ettikten sonra

- Bir saat içinde alırsa 1 TL ödeme yapmalıdır, yani $t \in (0, 1]$ için $g(t) = 1$ dir
- 1 saatten fazla olmak üzere 2 saat içinde alırsa 3 TL ödeme yapmalıdır, yani $t \in (1, 2]$ için $g(t) = 3$ tür.
- 2 saatten fazla olmak üzere 4 saat içinde alırsa 6,5 TL ödeme yapmalıdır, yani $t \in (2, 4]$ için $g(t) = 6,5$ tir.
- 4 saatten fazla olmak üzere 6 saat içinde alırsa 10 TL ödeme yapmalıdır, yani $t \in (4, 6]$ için $g(t) = 10$ dur.
- 6 saatten fazla olmak üzere 12 saat içinde alırsa 12 TL ödeme yapmalıdır, yani $t \in (6, 12]$ için $g(t) = 12$ dir.

Yukarıda g fonksiyonunun kuralının nasıl olacağını, olabilecek farklı durumlar için açıkladık. Ancak bu açıklamalarımızın aynısını aşağıdaki gibi bir gösterim tercihi yaparak daha kısa bir şekilde ifade edebiliriz.

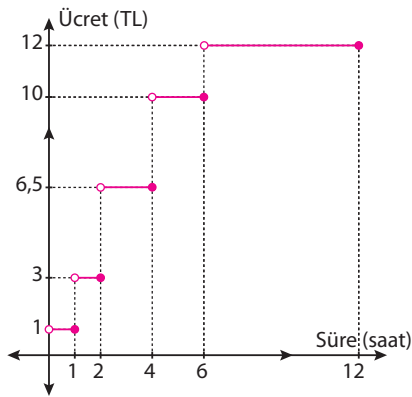
$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \text{ ise} \\ 3, & 1 < t \leq 2 \text{ ise} \\ 6,5, & 2 < t \leq 4 \text{ ise} \\ 10, & 4 < t \leq 6 \text{ ise} \\ 12, & 6 < t \leq 12 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu gösterimde önce g fonksiyonunun alacağı değerleri sonra da bu değerlerin hangi koşul altında geçerli olduğunu belirtiriz. Bu gösterimi okurken ise koşullardan başlarız.

Örneğin, t değeri 2 ile 4 arasında veya 4'e eşitse $g(t) = 6,5$ dir deriz. Burada, g fonksiyonunun kuralını kısım kısım vermiş oluyoruz. Dolayısıyla g bir parçalı tanımlı fonksiyondur.

Bu örnekte g fonksiyonun görüntü kümesi, ödenecek tüm olası ücret miktarlarının oluşturduğu küme olan $\{1, 3, 6,5, 10, 12\}$ dir.

Verilenlere göre g fonksiyonunun grafiğini çizmek için



$(0, 1]$ aralığında $y = 1$,

$(1, 2]$ aralığında $y = 3$,

$(2, 4]$ aralığında $y = 6,5$,

$(4, 6]$ aralığında $y = 10$,

$(6, 12]$ aralığında $y = 12$

doğrularını çizmeliyiz. Böylece g fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi elde edilir.

Örnek 4

Tanım kümesi tüm gerçel sayılar olan bir f fonksiyonu parçalı tanımlı olarak aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & -\infty < x < -5 \\ \frac{x+1}{x^2+1}, & -5 \leq x < 0 \\ 2x + 4, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Buna göre aşağıda verilenleri bulalım.

- a. $f(-5)$ b. $f(-10)$ c. $f(x^2)$

Çözüm

a. $f(-5) = \frac{-5+1}{(-5)^2+1} = -\frac{4}{25+1} = -\frac{2}{13}$

b. $f(-10) = 3(-10) - 2 = -32$

c. Herhangi bir x gerçel sayısı için $x^2 \geq 0$ olduğundan, $f(x^2) = 2x^2 + 4$ olarak bulunur.

Örnek 5

Bir postanede mektup ve kargo göndermek için alınan gönderinin kütlesine bağlı olarak belirlenen ücret tarifiesi aşağıda verilmiştir.

Mektup Gönderme Tarifiesi:



20 Grama kadar: 1 TL

20 Gramdan 50 grama kadar: 1,5 TL

50 Gramdan 100 grama kadar: 2 TL

100 Gramdan 250 grama kadar: 2,5 TL

250 gram ve üstü: Her 100 g için 50 kr.

Bu tarifeye uygun bir fonksiyon oluşturarak bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulalım. Ayrıca bu fonksiyonun kuralını yazalım ve grafiğini çizelim.

Çözüm

x gönderinin gram cinsinden kütlesi olmak üzere gönderme ücreti $g(x)$ TL olsun.

g fonksiyonunun tanım kümesi pozitif gerçel sayılar yani $(0, \infty)$ dir. Bu fonksiyonun görüntü kümesi ise alınabilecek ücretlerdir, yani 1 TL ve 1 TL den itibaren 50 kr. ekleyerek elde edeceğimiz tüm sayılardır. Bu durumda görüntü kümesini ortak özellik yöntemiyle şu şekilde belirtebiliriz:

$$\left\{ \frac{k}{2} : k \geq 2 \text{ ve } k \text{ bir pozitif tam sayı} \right\}$$

Verilen bilgiler doğrultusunda g fonksiyonunun kuralı parçalı tanımlı olarak şu şekildedir:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 20 \text{ için} \\ 1,5, & 20 \leq x < 50 \text{ için} \\ 2, & 50 \leq x < 100 \text{ için} \\ 2,5, & 100 \leq x < 250 \text{ için} \\ 3, & 250 \leq x < 350 \text{ için} \\ 3,5, & 350 \leq x < 450 \text{ için} \\ \vdots & \end{cases}$$

Buna göre

$$x \in (0, 20) \Rightarrow y = g(x) = 1$$

$$x \in [20, 50) \Rightarrow y = g(x) = 1,5$$

$$x \in [50, 100) \Rightarrow y = g(x) = 2$$

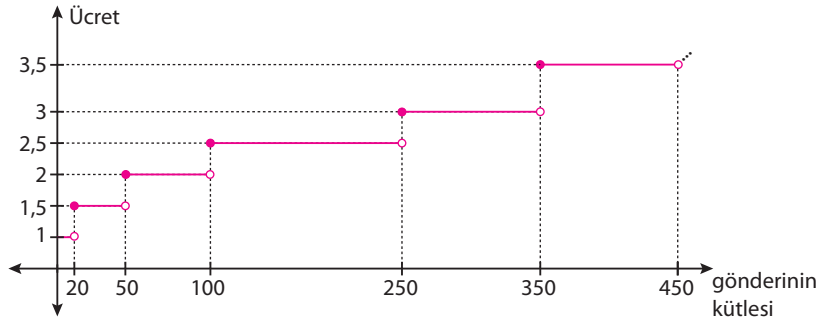
$$x \in [100, 250) \Rightarrow y = g(x) = 2,5$$

$$x \in [250, 350) \Rightarrow y = g(x) = 3$$

$$x \in [350, 450) \Rightarrow y = g(x) = 3,5$$

...

Bu durumda g fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.

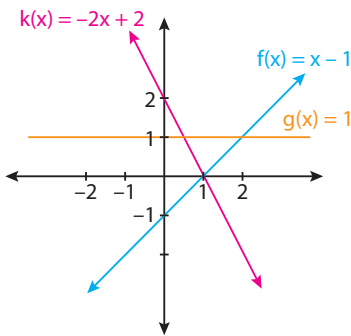


Örnek 6

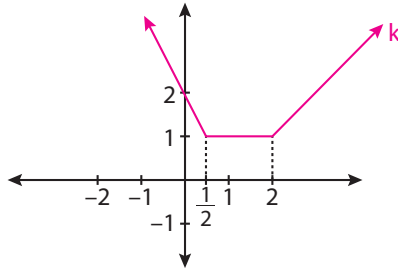
$$k(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 2 \text{ ise} \\ x - 1, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

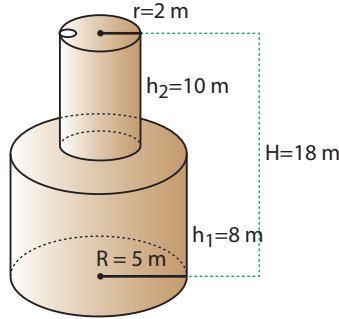
Çözüm



Verilen k fonksiyonu, tanım kümesinin belli aralıklarında farklı kurallarla tanımlanmaktadır. Bu nedenle şekilde verilen f , g ve h fonksiyonlarının grafiklerini sırasıyla x ekseninde $(-\infty, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, 2)$ ve $[2, \infty)$ aralıklarıyla sınırlandırdığımızda k fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.



Örnek 7

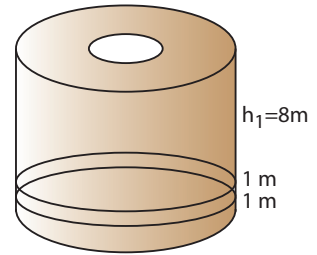


Yanda verilen üst üste iki dik silindir şeklindeki bölümden oluşan boş depo sabit miktarda su akıtan bir musluk ile doldurulmaktadır. Altteki silindirin taban yarıçapı 5 metre ve yüksekliği 8 metredir. Üstteki silindirin ise taban yarıçapı 2 metre, yüksekliği 10 metredir. Buna göre aşağıda istenenleri yapalım. (π yerine 3 alınız)

- Altteki silindirde suyun hacminin yüksekliğe bağlı olarak değişim oranı (hızı) nedir?
- Üstteki silindirde suyun hacminin yüksekliğe bağlı değişim oranı (hızı) nedir?
- Deponun tamamı için suyun hacminin yüksekliğe bağlı değişimini gösteren fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm

- Suyun hacminin yüksekliğe bağlı değişimini bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Bu fonksiyonda hacim bağımlı değişken, yükseklik ise bağımsız değişkendir. Burada hacim ile yükseklik birlikte değişmektedir.



Öncelikle yüksekliği 1'er birim artırarak hacmin aldığı değerleri bulalım.

| | Yüksekli k(h) | Hacim ($V = \pi r^2 h$) | |
|-----|------------------|------------------------------|-------------------|
| 1 m | 0 | 0 | 75 m ³ |
| | 1 | 75 | |
| 1 m | 2 | 150 | 75 m ³ |
| | 3 | 225 | |
| | 4 | 300 | |
| | 8 | 600 | |

Tabloda görüldüğü üzere suyun yüksekliğindeki her 1 metre artışına karşılık, hacim 75 m³ artmaktadır. Yani değişimde 1'e 75 bir oran vardır. Yükseklik 1 metreden 2 metreye çıktığında hacimdeki değişim oranını (hızını)

$$\frac{V_2 - V_1}{2 - 1} = \frac{150 - 75}{1} = 75 \text{ m}^3/\text{m}$$

olarak hesaplayabiliriz.

Yani suyun yüksekliği 1 birim arttığında hacim bunun 75 katı kadar artmaktadır. Değişim oranı sabit olduğu için istenen fonksiyon bir doğrusal fonksiyondur. Bu durumda alttaki silindir bölüm için aranan doğrusal fonksiyonun eğimi 75 olmalıdır.

Şimdi değişim oranını, değişim oranının sabit olduğu bilgisini kullanmadan ikinci bir yoldan hesaplayalım. Bunun için belli yükseklik değerleri yerine genel olarak aldığımız (h, V) ve değerleri için hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\frac{V_2 - V_1}{h_2 - h_1} &= \frac{\pi r^2 h_2 - \pi r^2 h_1}{h_2 - h_1} \\ &= \frac{\pi r^2 (h_2 - h_1)}{h_2 - h_1} \\ &= \pi r^2 \\ &= 3 \cdot 5^2 \text{ m}^2 \\ &= 75 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Dikkat edilirse burada $\frac{V_2 - V_1}{h_2 - h_1} = \pi r^2$ olduğunu gözlemledik.

Dolayısıyla verilen şartlar altında silindirdeki suyun hacminin yüksekliğe bağlı değişim oranı sadece silindirin yarı çapına bağlıdır.

b. 1. Yol:

(a) seçeneğinde alttaki silindir için yaptığımız işlemi üstteki silindir bölüm için yapalım.

| | Yüksekli k(h) | Hacim ($V = \pi r^2 h$) | |
|-----|------------------|------------------------------|-------------------|
| 1 m | 8 | 600 | 12 m ³ |
| | 9 | 624 | |
| 1 m | 10 | 636 | 12 m ³ |
| | 12 | 648 | |
| | | | |
| | 18 | 720 | |

Tabloda görüldüğü üzere yüksekliğin her 1 metre artışına karşılık hacim 12 m³ artmaktadır. Örneğin, suyun 8 ve 10 metre yükseklikte olduğu durumlara karşılık gelen hacim değerleri sırasıyla 600 m³ ve 624 m³ tür. Bu aralıktaki değişim oranı,

$$\frac{624 - 600}{10 - 8} = \frac{24}{2} = 12 \text{ m}^3/\text{m}$$

olarak hesaplanır. Başka aralıklar için bu işlemin sonucu aynı olacaktır. Değişim oranı burada da sabit olduğu için istenen fonksiyon bir doğrusal fonksiyondur. Bu durumda üstteki silindir bölüm için aranan doğrusal fonksiyonun eğimi 12 olmalıdır.

Anahtar Bilgi

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ ise} \\ x, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu mutlak değer fonksiyonu olarak bilinir. Mutlak değerli ifade içeren fonksiyonlar parçalı tanımlı fonksiyonlara örnektir.

2. Yol:

(a) da bulduklarımızdan dolayı değişim oranı

$$\pi r^2 = 3 \cdot 2^2 m^2 = 12 m^2 \text{ dir.}$$

(c) Suyun hacminin yüksekliğe bağlı değişimi alttaki ve üstteki bölümler için eğimleri sırasıyla 75 ve 12 olan birer doğrusal fonksiyonla gösterilebilir. (a) ve (b) de bulduklarımız değişim oranlarıydı.

Altta silindir bölme için yazılacak fonksiyonda x yükseklik (m), $f(x)$ de bu yükseklikteki suyun hacmini (m^3) göstermek üzere,

$$f(x) = 75x + c$$

olmalıdır. Suyun yüksekliği 0 olduğunda hacim 0'dır. Bu durumda

$$f(0) = 75 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

bulunur. O halde, alttaki silindir bölme yüksekliğe bağlı hacim fonksiyonu,

$$0 \leq x < 8 \text{ için } f(x) = 75x$$

bulunur. Üstteki silindir bölme için eğimin 12 olduğunu bulmuştuk. O halde suyun yüksekliğine bağlı hacmini gösteren fonksiyon,

$$g(x) = 12x + k$$

olmalıdır. Burada k değeri bulmak için bilinen değerlerden yararlanabiliriz.

$g(x) = 12x + k$ fonksiyonu üstteki silindire ait olduğu için, suyun yüksekliği 8 metreden büyük, deponun boyu olan (iki bölmenin toplam yüksekliği) 18 metreden küçük olduğu durum için geçerlidir. Yükseklik 8 olduğunda hacmin $600 m^3$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

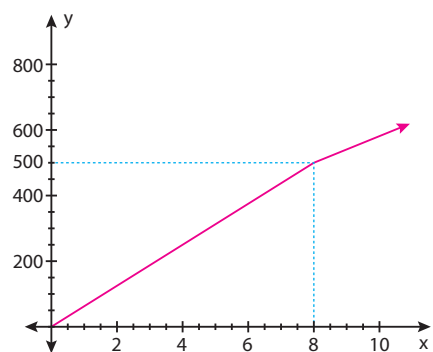
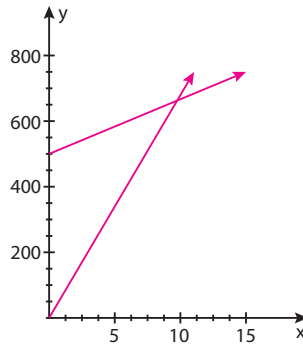
$$g(8) = 12 \cdot 8 + k = 600 \Rightarrow k = 504$$

bulunur. O halde $8 < x \leq 18$ için $g(x) = 12x + 504$ olur.

Bu durumda deponun tamamı için suyun yüksekliğe bağlı hacim fonksiyonu $v(x)$ aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$v(x) = \begin{cases} 75x & , \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ ise} \\ 12x + 504 & , \quad 8 < x \leq 18 \text{ ise} \end{cases}$$

Parçalı tanımlı $v(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi çizebiliriz.



Örnek 8

Gerçek sayılarda tanımlı $y = f(x) = |x|$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm

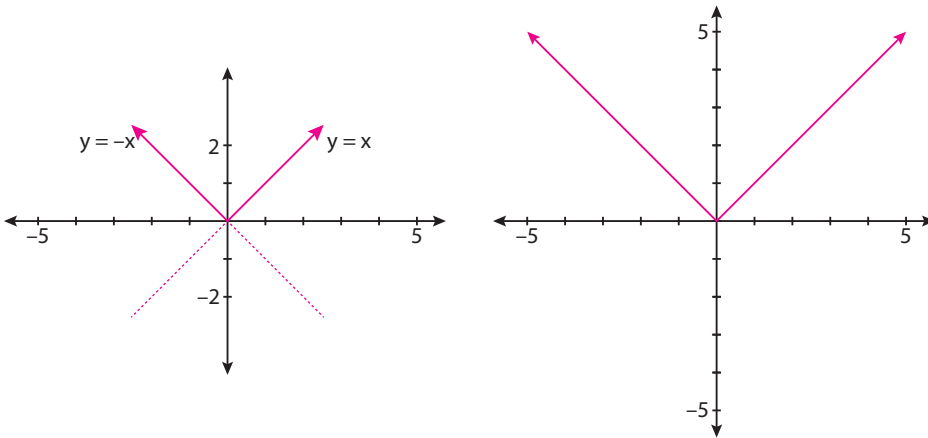
Öncelikle pozitif x değerleri için $|x| = x$, negatif x değerleri için $|x| = -x$ ve de $|0| = 0$ olduğundan $y = |x|$ mutlak değer fonksiyonunu parçalı tanımlı fonksiyonlar için kullandığımız gösterim yoluyla ifade edebiliriz:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ için} \\ 0, & x = 0 \text{ için} \\ x, & x > 0 \text{ için} \end{cases}$$

Son iki koşulu birleştirdikten sonra koşul sıralarını yeniden düzenleyerek şu şekilde de gösterebiliriz:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Dolayısıyla, $y = f(x) = |x|$ in grafiği $x < 0$ için $y = -x$ ve $x \geq 0$ iken $y = x$ doğrularının grafiklerinin ilgili kısımlarıdır.



Grafikten de görüldüğü gibi $f(x) = |x|$ fonksiyonunun tanım kümesinin dikey doğru testinden \mathbb{R} , görüntü kümesinin ise yatay doğru testinden $[0, \infty)$ olduğu anlaşılacaktır.

Anahtar Bilgi

Mutlak değerli fonksiyonların grafikleri çizilirken mutlak değer içindeki ifadenin grafiği çizilir. Daha sonra grafiğin x -ekseninin altında kalan kısmının x -eksenine göre simetriği alınır. Böylece istenilen mutlak değerli ifade içeren grafik çizilmiş olur. Örneğin,

$$f(x) = |g(x)| \text{ ifadesi}$$

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & g(x) \geq 0 \\ -g(x), & g(x) < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde yazılabilir.

Anahtar Bilgi

Kuralında mutlak değerli ifade içeren bir f fonksiyonunun grafiği çizilirken, mutlak değerli ifadeyi 0 (sıfır) yapan değerlerin **kritik değerler**dir. Tanım kümesi bu kritik değerlere göre parçalanarak fonksiyonun ilgili aralıklardaki kuralı fonksiyonunun o bölgelerde negatif ve pozitif olmasına göre grafiği çizilir.

Örnek 9

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |4 - x|$ fonksiyonunun kuralını parçalı tanımlı olarak ifade edip grafiğini çizelim.

Çözüm

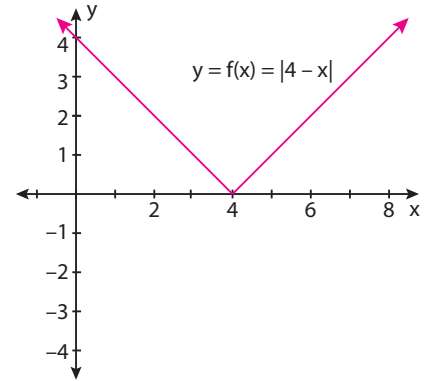
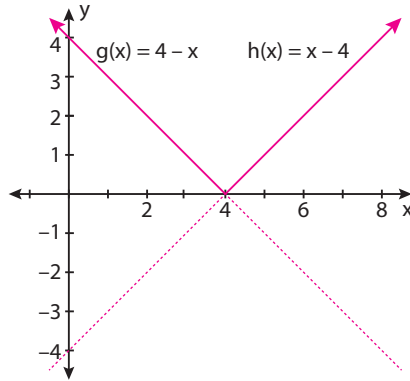
Mutlak değer tanımı gereği

$$x \geq 4 \text{ iken } |4 - x| = -(4 - x) = x - 4$$

$$x < 4 \text{ iken } |4 - x| = 4 - x \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} f(x) = |4 - x| &= \begin{cases} -(4 - x), & x \geq 4 \text{ ise} \\ 4 - x, & x < 4 \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 - x, & x \geq 4 \text{ ise} \\ x - 4, & x < 4 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

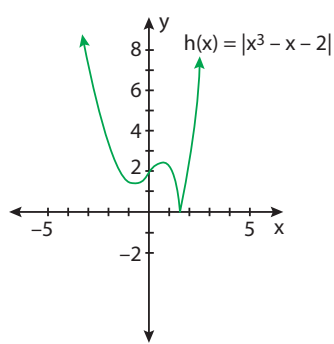
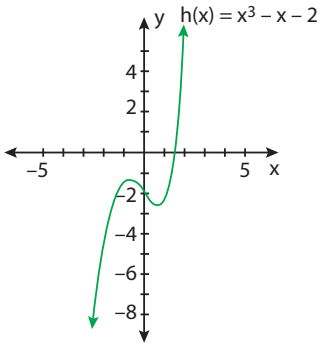
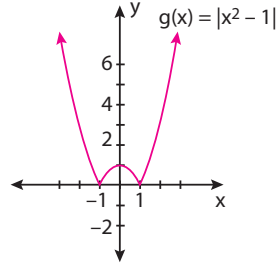
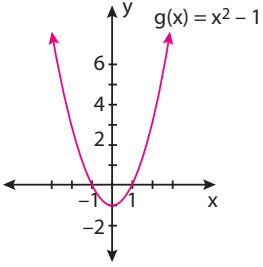
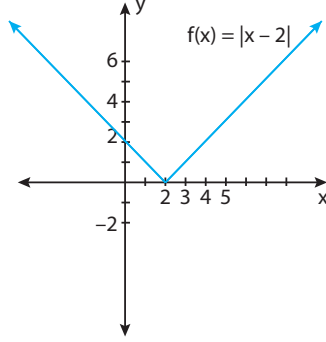
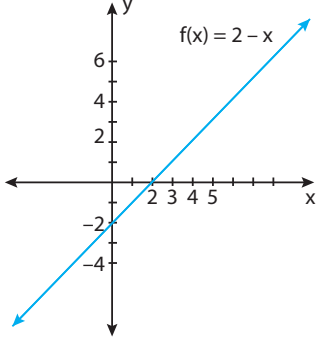
f fonksiyonunun grafiğini elde etmek için, $y = 4 - x$ fonksiyonunun grafiği çizilip, grafiğin $x < 4$ için olan kısmı; $y = x - 4$ fonksiyonunun grafiğini $x > 4$ için olan kısmı alınarak birleştirilir. Bu şekilde elde ettiğimiz grafik şudur:



Dikkat edilirse $f(x) = |4 - x|$ in grafiğini elde etmek için $y = 4 - x$ doğrusunun grafiği çizilir. x -ekseninin üstünde kalan kısmın tamamı, x -ekseninin altında kalan kısmın (yani fonksiyonun negatif değer aldığı kısmın) ise x -eksenine göre simetriği alınır. Bu alınan grafikler f fonksiyonunun grafiğini oluşturur. Bu örnek üzerinde yaptığımız gözlemi şu şekilde genelleleyebiliriz:

Mutlak değerli fonksiyonların grafikleri çizilirken mutlak değer içindeki ifadeyi kural olarak alan fonksiyonun grafiği çizilir. Daha sonra grafiğin x -ekseninin üstünde olan kısımlar alınır. x -ekseninin altında kalan kısımlar varsa bu kısımların da x -eksenine göre simetriği alınır. Böylece istenilen mutlak değerli ifade içeren grafik çizilmiş olur.

Aşağıdaki örneklerde $y = f(x)$ in grafiğinden $y = |f(x)|$ in grafiğinin nasıl elde edildiğini inceleyiniz:



Örnek 10

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = |x - 2| + x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

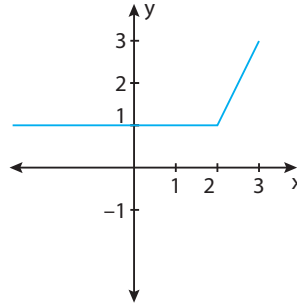
$x \geq 2$ için $x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$ olduğundan $f(x) = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$ dir.

$x < 2$ için $x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$ olduğundan $f(x) = -(x - 2) + x - 1 = 1$ dir.

Bu durumda f fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 2 \\ 1, & x < 2 \end{cases}$$

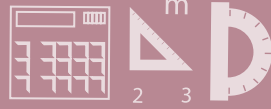
Buna göre f fonksiyonunun grafiği, aşağıda gösterildiği gibi $x \geq 2$ için $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun grafiği $x < 2$ için $f(x) = 3$ fonksiyonunun grafiği olmalıdır.



Grafikten de görüldüğü gibi f fonksiyonu, kuralında bulunan mutlak değerli ifadeyi 0 (sıfır) yapan değerlerin sağında ve solunda farklı cebirsel ifadelerle temsil edilmektedir.

Parçalı tanımlı verilen bir fonksiyonda, tanım kümesinden olup fonksiyonun kuralının değişiklik gösterdiği yerlere fonksiyonun **kritik değerleri** denir.

$y = |f(x)|$ şeklindeki parçalı tanımlı fonksiyonlar için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan yerler bu parçalı tanımlı fonksiyonun kritik noktaları olacaktır. Örneğin, gerçekte sayılarda tanımlı $f(x) = |2x - 6|$ fonksiyonunun kritik noktası, $2x - 6 = 0$ dan $x = 3$ olarak bulunur.



KENDİMİZİ SINAYALIM

1. Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

c. $h(x) = |x + 1|$

2. Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $k(x) = |3 - 2x|$

b. $n(x) = |x + 1|$

c. $m(x) = |x + 1| - 2$

ç. $t(x) = \left| \frac{x - 2}{4} \right|$

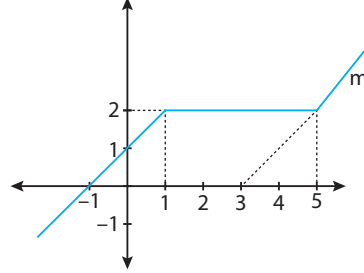
3. Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$

b. $g(x) = |2 - x| - |x + 1|$

c. $g(x) = |x| + |1 - x|$

4.



$$m(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 5 \\ x - b, & x > 5 \end{cases} \text{ fonksiyonunun grafiği}$$

şekilde gösterilmektedir? Buna göre a ve b değerlerini bulunuz.

5.

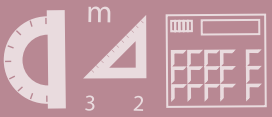


Bir yüzme havuzunun giriş ücreti bir saate kadar

25 TL, bir saatten sonraki her yarım saat için 10 TL'dir. Bu durumda;

a. Havuzda yüzmeye giden iki arkadaşın havuzu kullanacakları zamana (saat) göre ödeyeceği toplam ücreti (TL) gösteren bir fonksiyon yazınız.

b. a) seçeneğinde bulduğunuz fonksiyonun grafiğini çiziniz.



KENDİMİZİ SINAYALIM

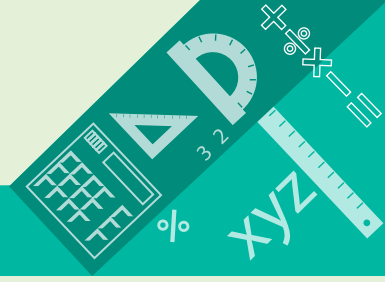
6.



Bir GSM şirketi kullanıcılarına aylık 25 TL sabit ücret karşılığı her yöne 250 dakika konuşma hakkı veren bir tarife sunmaktadır. Bu tarifeye göre 250 dakika aşımı halinde, ilave her dakika konuşma için 33 kuruş ücretlendirme yapılmaktadır. Bu durumda;

- Ayda ortalama 550 dakika konuşan bir kişinin bu tarifeye göre ne kadar ücret ödeyeceğini bulunuz.
- Konuşma süresine (dakika) bağlı ödenecek ücreti gösteren bir fonksiyon bulunuz.
- Üstte bulduğunuz fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlayınız.
- Aynı GSM şirketi farklı bir tarifeye göre aylık sabit ücreti 5 TL ve dakika ücreti 10 kuruş olan bir paket sunmaktadır. Her iki tarifeadaki ücretlendirmeleri karşılaştırarak, bu tarifelerin müşteriler için hangi durumlarda daha karlı olduğunu açıklayınız.

MATEMATİK ATÖLYESİ



Bu atölye çalışmasında tanım kümesindeki elemanların değer kümesindeki farklı elemanlarla ilişkilendirildiği fonksiyonları inceleyeceğiz

Adım 1 ►

Her ilin farklı bir plaka kodu olduğunu trafikte gözlemlemiştinizdir. Aşağıda verilen haritada her ilin ismi ve plaka numarası görülmektedir. Bulunduğunuz coğrafi bölgedeki illerin kümesini A, bu illerin plaka kodlarının kümesini B ile gösteriniz.



| | | | |
|---------------|---------------|--------------|--------------|
| 01 Adana | 22 Edirne | 43 Kütahya | 64 Uşak |
| 02 Adıyaman | 23 Elazığ | 44 Malatya | 65 Van |
| 03 Afyon | 24 Erzincan | 45 Manisa | 66 Yozgat |
| 04 Ağrı | 25 Erzurum | 46 K. Maraş | 67 Zonguldak |
| 05 Amasya | 26 Eskişehir | 47 Mardin | 68 Aksaray |
| 06 Ankara | 27 Gaziantep | 48 Muğla | 69 Bayburt |
| 07 Antalya | 28 Giresun | 49 Muş | 70 Karaman |
| 08 Artvin | 29 Gümüşhane | 50 Nevşehir | 71 Kırıkkale |
| 09 Aydın | 30 Hakkari | 51 Niğde | 72 Batman |
| 10 Balıkesir | 31 Hatay | 52 Ordu | 73 Şırnak |
| 11 Bilecik | 32 Isparta | 53 Rize | 74 Bartın |
| 12 Bingöl | 33 İçel | 54 Sakarya | 75 Ardahan |
| 13 Bitlis | 34 İstanbul | 55 Samsun | 76 Iğdır |
| 14 Bolu | 35 İzmir | 56 Siirt | 77 Yalova |
| 15 Burdur | 36 Kars | 57 Sinop | 78 Karabük |
| 16 Bursa | 37 Kastamonu | 58 Sivas | 79 Kilis |
| 17 Çanakkale | 38 Kayseri | 59 Tekirdağ | 80 Osmaniye |
| 18 Çankırı | 39 Kırklareli | 60 Tokat | 81 Düzce |
| 19 Çorum | 40 Kırşehir | 61 Trabzon | |
| 20 Denizli | 41 Kocaeli | 62 Tunceli | |
| 21 Diyarbakır | 42 Konya | 63 Şanlıurfa | |

Adım 2 ►

A ve B kümelerini Venn şeması ile göstererek il ve plaka kodlarını eşleyiniz.

Adım 3 ►

A kümesindeki şehirlerden B kümesinden aynı plaka koduyla eşleşen var mı? Cevabınızı nedenleriyle açıklayınız.

Adım 4 ►

Bu kümelerin elemanları arasında yapılan ilişkilendirmenin neden bir fonksiyon olduğunu açıklayınız.

Adım 5 ►

Bu fonksiyonun A kümesindeki her bir elemanı B kümesindeki farklı elemanlara eşleyip eşlemediğini belirtiniz. Görüntü kümesinden aldığınız elemanların bu fonksiyon altında kaçar tane ters görüntüsü olmaktadır.

Neler Öğreneceğiz?

- Bire bir fonksiyonu
- Örtten fonksiyonu
- Yatay doğru testi

Terimler

- Bire bir fonksiyon
- Örtten fonksiyon
- Yatay doğru testi

Sembol ve Gösterimler

- 1 – 1

3.2.6. Bire Bir ve Örtten Fonksiyonlar

Başlarken

Marketlerde satılan her ürün çeşidinin bir barkodu vardır. Herhangi bir ürün çeşidinin fiyatını barkod okuyucu yardımıyla öğrenebiliriz. Her ürün çeşidine bir barkod numarası verilmesinin sağladığı birçok kolaylıklar vardır.

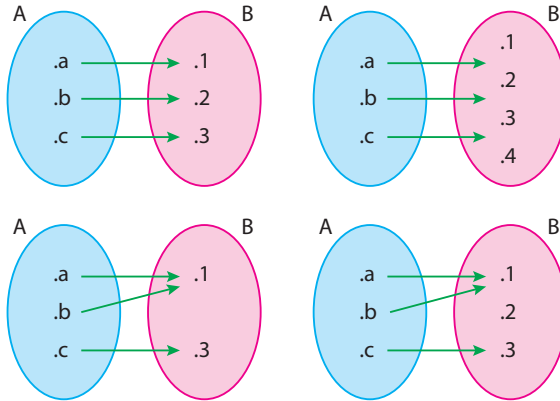
Bir marketteki ürün çeşitlerini barkodlarına eşleyen fonksiyonu düşünelim.

- Bir ürüne barkod verilirken nelere dikkat edilmelidir?
- Bunlar ele aldığımız fonksiyon için ne anlama gelmektedir?

Bu örnekteki benzer fonksiyonların incelenmesinde bire bir fonksiyon kavramıyla karşılaşırız. Diğer önemli bir özellik de bir fonksiyonun örtten olup olmadığıdır. Bu kısımda, oldukça işlevsel olan fonksiyonların bire bir, örtten ve hem bire bir hem örtten olma durumlarını inceleyeceğiz.



Bire Bir Fonksiyon



Fonksiyon konusuna girişte, bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanı, değer kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleştirdiğini vurgulamıştık. Örneğin, A kümesinden B kümesine tanımlanan yandaki ilişkiler birer fonksiyon belirtmektedir.

Buna göre,

- İlk satırdaki fonksiyonların tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinde farklı bir elemanla eşleşmiştir.
- İkinci satırdaki fonksiyonların tanım kümesinin bazı elemanları değer kümesinde aynı elemanla eşleşmiştir. Şöyle ki, her iki fonksiyonda da tanım kümesinin a ve b elemanları değer kümesindeki 1 elemanı ile eşleşmiştir.

Şimdi bu örneklerde gözlemlediğimiz fonksiyon özelliklerine yönelik bir tanım yapalım:

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü diğer elemanların görüntülerinden farklı ise o fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir. Bu tanımı daha net ifade etmek için bire bir olma kavramının cebirsel olarak ne anlama geldiğini belirtelim:

Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verildiğinde, herhangi $a \in A$ ve $b \in A$ için

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna **bire bir fonksiyon** denir. Bu tanımı şu şekilde de ifade edebiliriz: herhangi $a \in A$ ve $b \in A$ için

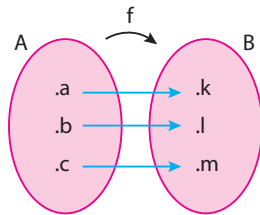
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu **bire bir fonksiyon**dur.

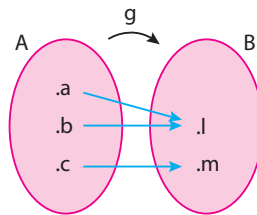
Bir f fonksiyonunun bire bir olma durumu " f fonksiyonu 1-1 dir." şeklinde ifade edilebilir.

Bu üç tanım birbirine denk olmakla beraber, verilen bir fonksiyonun bire bir olduğunu göstereceksek üçüncü tanım daha kullanışlıdır. Diğer taraftan, verilen bir fonksiyonun bire bir olmadığını göstereceksek genellikle ikinci tanım daha kullanışlıdır. Girişte verilen örnekteki, bir marketteki ürün çeşidini barkodlarına eşleyen fonksiyon, bire bir fonksiyondur.

Aşağıda şekilde verilen f fonksiyonu bire bir bir fonksiyondur. Ancak g fonksiyonu bire bir değildir.



f bire bir dir.



g bire bir değildir.

Çünkü f fonksiyonunda A kümesindeki her eleman B kümesinden farklı bir elemanla eşleşmiştir. g fonksiyonunda ise A kümesinin a ve b elemanları B kümesinin aynı elemanı ile eşleşmiştir.

Anahtar Bilgi

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu bire bir ise, A kümesinden alınan herhangi iki farklı elemanın görüntüleri aynı olamaz.

Anahtar Bilgi

Her $a, b \in A$ ve $f: A \rightarrow B$, $f(a) = f(b)$ olması sadece $a = b$ durumunda gerçekleşiyorsa f fonksiyonuna **bire bir fonksiyon** denir.

Anahtar Bilgi

Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(a) = f(b)$ olup $a \neq b$ olan iki $a, b \in A$ bulunabilirse, f fonksiyonu bire bir fonksiyon değildir.

Örnek 1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

a ve b gibi iki gerçekte sayı için $f(a) = 2a$ ve $f(b) = 2b$ olur. $f(a) = f(b)$ olduğunda a ve b değerleri arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow 2a = 2b$$

$$\Rightarrow a = b \text{ olur.}$$

Böylece, her $a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a) = f(b)$ olması durumunda $a = b$ olduğunu göstermiş olduk. Bu nedenle f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

Tanım kümesinden alacağımız herhangi iki farklı elemanın değer kümesinde aynı elemanla eşleştiğini gösterebilirsek fonksiyonun bire bir olmadığını söyleyebiliriz. Aksi durumda ise fonksiyon bire bir olacaktır.

Örnek 2

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm**1. Yol:**

a ve b gibi iki gerçekte sayı için $f(a) = a^2$ ve $f(b) = b^2$ olur. $f(a) = f(b)$ olduğunda a ve b değerleri arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow a = b \text{ veya } a = -b \text{ olur.}$$

Bu durumda $f(a) = f(b)$ olması için $a \neq b$ de olabilir. Öyleyse $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonu bire bir fonksiyon değildir.

2. Yol:

2 ve -2 birer gerçık sayı olduğundan f fonksiyonunun kümesinin elemanıdır.

$f(2) = 4 = f(-2)$ dir. Fakat $2 \neq -2$ olduğundan f fonksiyonu bire bir değildir.

Siz de, tanım kümesini pozitif gerçık sayılar alarak çözümde izlediğimiz basamakların ve sonucun nasıl değişeceğini açıklayınız. Böylece $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulmuş olacaksınız.

Örnek 3

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını cebirsel olarak gösterelim.

Çözüm

a ve b gibi iki gerçık sayı için $f(a) = a^3$ ve $f(b) = b^3$ olur. $f(a) = f(b)$ olduğunda a ve b değerleri arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$$

Böylece $f(a) = f(b)$ ise $a = b$ olduğunu göstermiş olduk. Bu durumda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

Örnek 4

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 - 1$ fonksiyonunun bire bir olma durumunu inceleyelim.

Çözüm

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(a) = f(b)$ olsun. $f(a) = 3a^3 - 1$ ve $f(b) = 3b^3 - 1$ olduğundan

$$3a^3 - 1 = 3b^3 - 1 \Rightarrow 3a^3 = 3b^3 \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$$

Bu nedenle f fonksiyonu bire birdir.

Örnek 5

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 1|$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm**1. Yol:**

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(a) = f(b)$ olsun. $f(x) = |x + 1|$ olduğundan

$f(a) = |a + 1|$ ve $f(b) = |b + 1|$ dir. Dolayısıyla,

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow |a + 1| = |b + 1| \text{ dir. Buradan}$$

$$a + 1 = b + 1 \text{ veya } a + 1 = -(b + 1)$$

$$\Rightarrow a = b \text{ veya } a + 1 = -b - 1 \Rightarrow a = b - 2$$

elde edilir. Bu nedenle, f fonksiyonu bire bir değildir.

2. Yol:

f fonksiyonunun tanım kümesi \mathbb{R} dir. -2 ve 0 gerçekteki sayıları için,

$$f(-2) = |-2 + 1| = |-1| = 1 \text{ ve } f(0) = |0 + 1| = |1| = 1$$

olur. Fakat $-2 \neq 0$ olduğu için f fonksiyonu bire bir değildir.

Bir fonksiyonun bire bir olup olmadığını, yukarıdaki örneklerde kullandığımız cebirsel yaklaşımla tespit edebileceğimiz gibi fonksiyonun grafiğinden yararlanarak da belirleyebiliriz.

Bir fonksiyonun grafiği verildiğinde tanım kümesindeki herhangi bir a değerinin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü bulabildiğimizi belirtmiştik: a noktasından x -eksenine dik bir doğru çizilirse bu doğrunun grafiği kestiği noktanın ordinatı olan b değeri, a nın f altındaki görüntüsüdür.

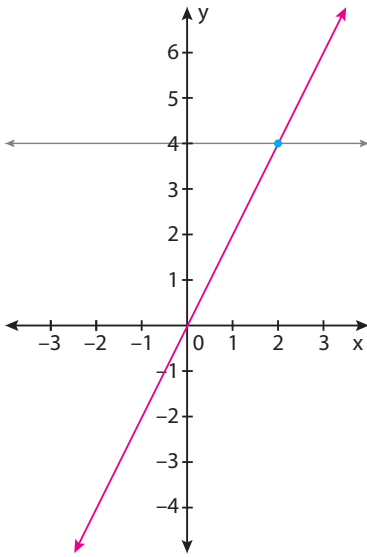
Eğer tanım kümesindeki birden fazla eleman için x -ekseninden çizilen dik doğrunun grafiği kestiği noktanın ordinatı aynı ise bu fonksiyon bire bir değildir. Çünkü bu durumda tanım kümesindeki birden fazla elemanın görüntüsü aynı olacaktır.

Örnek 6

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ fonksiyonunun bire bir olduğunu fonksiyonun grafiğini kullanarak belirleyelim.

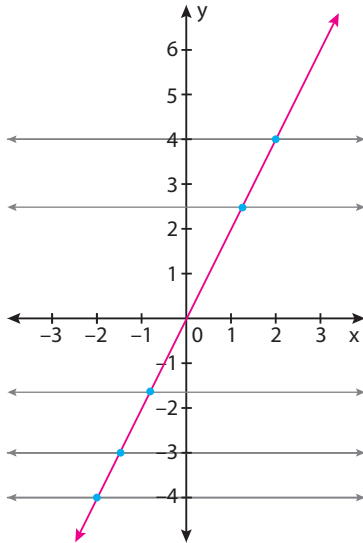
Çözüm

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ fonksiyonunun grafiğini çizdikten sonra f altında görüntüleri aynı olan gerçek sayılar olup olmadığını fonksiyonun grafiğini kullanarak belirleyelim.



Örneğin, f altında görüntüsü 4 olan kaç tane x değeri olduğunu bulmak için $y = 4$ noktasından yatay bir doğru çizelim.

Bu yatay doğru, grafiği yalnız $(2, 4)$ noktasında kesmektedir. Bu durumda görüntüsü 4 olan sadece bir nokta vardır o da $x = 2$ 'dir.



Farklı y değerleri için de yatay doğrular çizdiğimizde, her yatay doğrunun grafiği sadece bir noktada kestiğini görebiliriz. Bu da bize f fonksiyonunun bire bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.

Yandaki örnekte detaylandırdığımız yöntemle yatay doğru testi denilmektedir.

Anahtar Bilgi



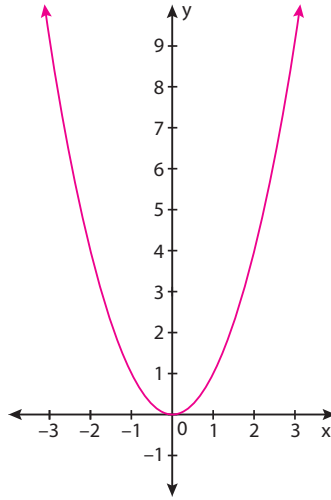
Bir fonksiyonun görüntü kümesinden x -eksenine paralel olarak çizilen doğrulardan en az biri fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kesiyorsa bu fonksiyon 1-1 değildir.

Bir fonksiyonun grafiği üzerinde, x-eksenine paralel çizilen her doğru grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa grafik 1-1 fonksiyon grafiğidir. Bu grafiği birden fazla noktada kesen en az bir yatay doğru varsa bu fonksiyon 1-1 değildir. Bu yöntem **yatay doğru testi** adı verilir.

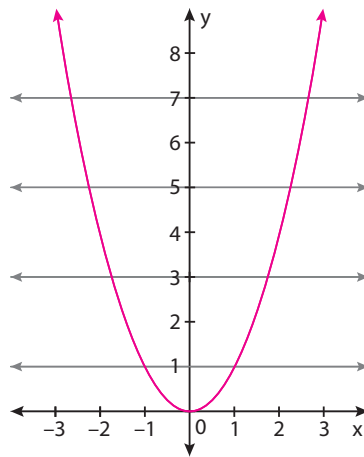
Verilen bir fonksiyon grafiği üzerinde yatay doğru testini uygulayarak fonksiyonun bire bir olup olmadığını örneklerle inceleyelim.

Örnek 7

Şekilde grafiği verilen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun 1 – 1 olup olmadığını inceleyelim.



Çözüm

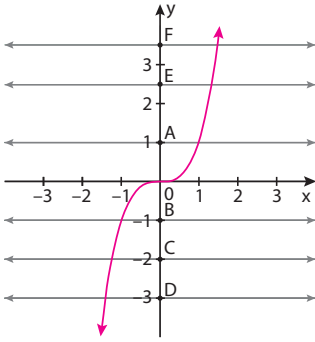


Grafikte yatay doğru testi uyguladığımızda, yatay doğrulardan grafiği iki noktada kesenler olduğunu görmekteyiz.

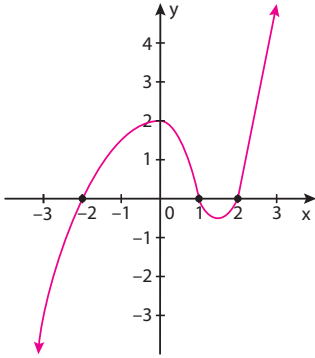
Bu durumda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2$ fonksiyonu bire bir değildir.

Örnek 8

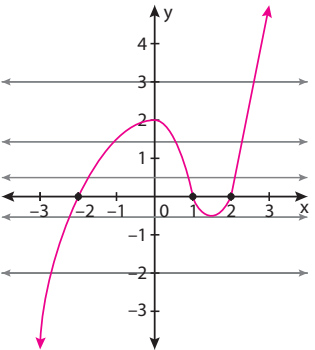
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^3$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını yatay doğru testi yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

Fonksiyonun grafiğinde yatay doğru testini uyguladığımızda, her yatay doğrunun grafiği yalnızca bir noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^3$ fonksiyonu bire birdir.

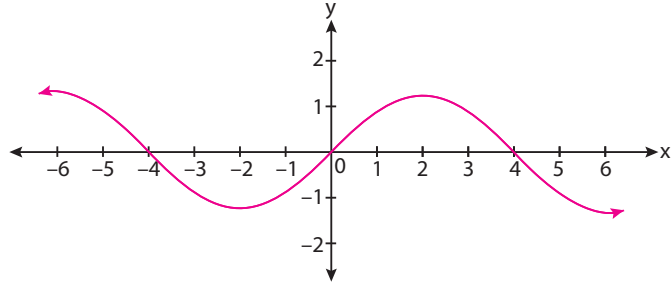
Örnek 9

Grafiği verilen fonksiyonun bire bir olup olmadığını yatay doğru testi kullanarak belirleyelim.

Çözüm

Grafik üzerinde çizilen yatay doğrulardan bazıları grafiği birden fazla noktada kesmektedir. Örneğin, $y = 0$ doğrusu grafiği x in -2 , 1 ve 2 değerlerinde kesmektedir. Bu durumda f fonksiyonu bire bir değildir.

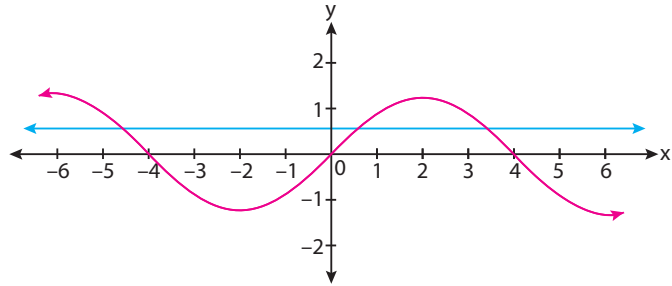
Örnek 10



Grafiği verilen fonksiyonun bire bir olup olmadığını yatay doğru testi kullanarak belirleyelim.

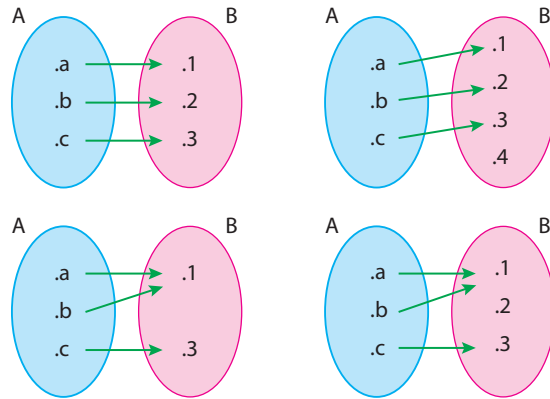
Çözüm

Grafik üzerinde çizdiğimiz yatay doğru, grafiği birden fazla noktada kesebilmektedir. Bu durumda f fonksiyonu bire bir değildir.



Örten Fonksiyon

Bire bir fonksiyona girişte verdiğimiz örneği tekrar ele alalım.



Buna göre,

- İlk sütundaki fonksiyonların değer kümeleri ile görüntü kümeleri birbirine eşittir.
- İkinci sütundaki fonksiyonların değer kümeleri ile görüntü kümeleri birbirine eşit değildir.

Benzer şekilde, $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve $f(x) = 2x$ fonksiyonunun değer kümesi ile görüntü kümesini karşılaştıralım. Önce fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$, $f(4) = 2 \cdot 4 = 8$, $f(5) = 2 \cdot 5 = 10$ olduğundan $f(A) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ olup bu küme f in görüntü kümesidir. Diğer taraftan f in değer kümesi $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dir. Bu durumda $f(A) \neq B$ olup görüntü kümesi değer kümesine eşit değildir.

Eğer bir fonksiyonun değer kümesindeki her eleman, tanım kümesinden en az bir eleman ile eşleşmiş ise bu fonksiyon **örten fonksiyon**dur.

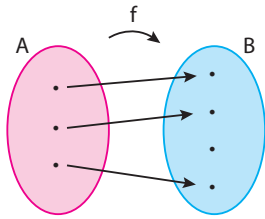
Bir başka ifadeyle, bir fonksiyonun görüntü kümesi ile değer kümesi birbirine eşitse fonksiyon **örten**dir.

Şimdi bu tanımları cebirsel olarak ifade edelim:

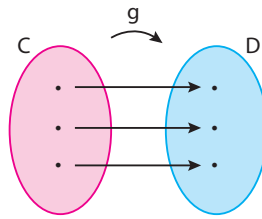
$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A) = B$ ise f **örten**dir.

Bu tanımları aşağıdaki gibi belirtmek yaygın ve kullanışlıdır:

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ varsa f **örten bir fonksiyon**dur.



f örten değildir.
Çünkü $f(A) \neq B$ dir.



g örtendir.
Çünkü $g(A) = B$ dir.

Örnek 1

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $f(x) = 2x$ fonksiyonunun örten olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

$f(A) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ olup $f(A) = B$ olduğundan f fonksiyonu örtendir.

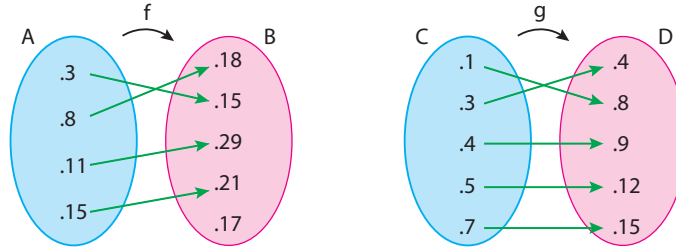
Anahtar Bilgi

$f: A \rightarrow B$, $f(A) = B$ ise f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir.

Başka bir ifadeyle, her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa f fonksiyonu örten fonksiyondur.

Örnek 2

Aşağıda verilen fonksiyonların örten olup olmadıklarını inceleyelim.

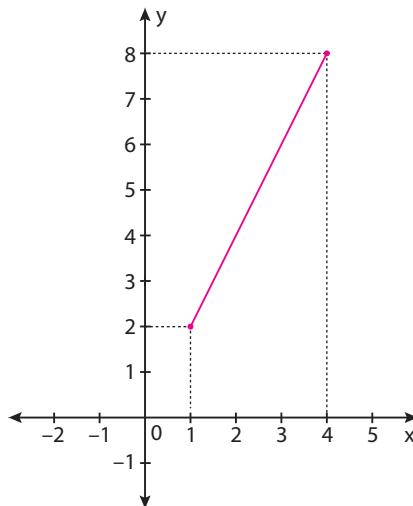


Çözüm

f fonksiyonun görüntü kümesi $f(A) = \{18, 15, 29, 21\}$ ve değer kümesi $B = \{18, 15, 29, 21, 17\}$ dir. Bu durumda, $f(A) \neq B$ olduğundan f bir örten fonksiyon değildir. g fonksiyonunun görüntü kümesi $g(C) = \{4, 8, 9, 12, 15\}$ ve değer kümesi $D = \{4, 8, 9, 12, 15\}$ dir. $g(C) = D$ olduğundan g bir örten fonksiyondur.

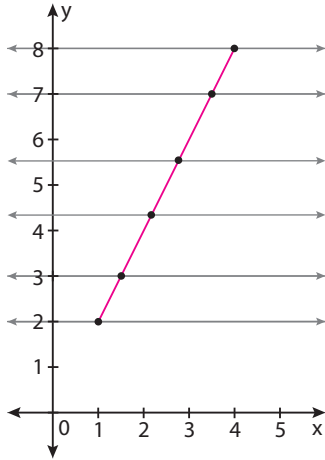
Bir fonksiyonun bire bir olma durumunu incelemek için kullandığımız yatay doğru testini fonksiyonun örten olma durumunu incelemek için de kullanabiliriz. Şöyle ki, değer kümesinin elemanlarından çizilen her yatay doğru fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon **örten fonksiyon**dur.

Örnek 3



Bir $f: [1, 4] \rightarrow [2, 8]$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir. Bu fonksiyonun örten olup olmadığını yatay doğru testi ile inceleyelim.

Çözüm



Fonksiyonun tanım ve değer kümeleri şekilde kırmızı renklerle gösterilmiştir. Yatay doğru testi uygulandığında, değer kümesindeki her elemanın f fonksiyonu altında bir ters görüntüsünün olduğu görülecektir. Bu nedenle, bu fonksiyon örtendir.

Sizce, $g: [1, 4] \rightarrow [0, 10]$ fonksiyonu bu örnekteki aynı grafikte verilirse örtten olur mu? Neden?

Örnek 4

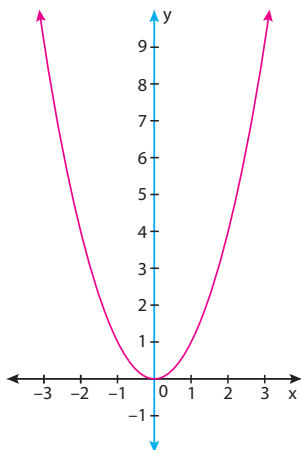
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun örtten olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm

1. Yol: Fonksiyonun cebirsel kuralını kullanarak.

Fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri tüm gerçekteki sayılar olarak verilmiş. Amacımız, her $b \in \mathbb{R}$ için $b = f(a)$, yani $b = a^2$ şartını sağlayan bir $a \in \mathbb{R}$ olup olmadığını belirlemektir. Eğer $b = -1$ alırsak, $-1 = a^2$ eşitliğini sağlayan bir gerçekteki sayı olmadığından, f fonksiyonu örtten olma şartını sağlamaz, yani örtten değildir.

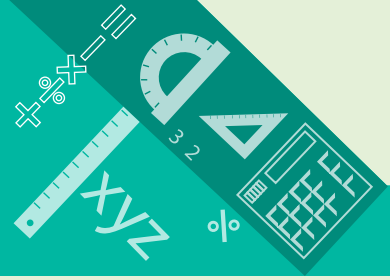
2. Yol: Fonksiyonun grafiğini kullanarak.



f fonksiyonunun grafiğini çizmeyi daha önce öğrenmiştik. Çizdiğimiz grafikte fonksiyonun değer kümesi mavi renkle belirtilmiştir. Grafik incelendiğinde değer kümesindeki negatif değerlerle eşlenen x değerlerinin olmadığı görülmektedir.

Bu durumda f fonksiyonu örtten değildir.

Sizce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ fonksiyonu örtten bir fonksiyon mudur? Neden?



MATEMATİK ATÖLYESİ

Bu atölye çalışmasında, dinamik matematik/geometri yazılımları kullanarak grafikleri çizilen fonksiyonların 1-1 veya örten olup olmadıklarını yatay doğru testi yardımıyla inceleyeceğiz.

Araç ve Gereçler: Elektronik tablolar, grafik hesap makinesi, dinamik geometri/matematik yazılımı vb. grafik çizimi yapılabilen bir araç/yazılım.

Adım 1 ►

Grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik/geometri yazılımı kullanarak gerçekte tanımlı $y = f(x) = 4x - 1$ grafiğini çizin.

Adım 2 ►

y-eksenine dik (veya x-eksenine paralel) doğrular çizerek yatay doğru testi uygulayınız ve fonksiyonun

- bire bir fonksiyon
- örten fonksiyon

olup olmadığını belirleyiniz.

Adım 3 ►

Gerçekte tanımlı

- $y = h(x) = -3x + 2$,
- $y = g(x) = 6x$,
- $y = t(x) = x^2 - 5$,
- $y = F(x) = x^3$,
- $y = G(x) = 2^x$,
- $y = H(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

funksiyonlarının grafiklerini çizdirerek her bir fonksiyonun

- bire bir fonksiyon
- örten fonksiyon

olup olmadığını belirleyiniz.

Adım 4 ►

Hem 1-1, hem de örten olan fonksiyonların grafiklerinin ortak özelliklerini açıklayınız.

Örnek 5

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun 1-1 ve örten olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

f fonksiyonunun bire bir olması için, her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b$ için $f(a) \neq f(b)$ olmalıdır.

$f(a) = 2a + 1$ ve $f(b) = 2b + 1$ olduğundan, $2a + 1 \neq 2b + 1$ olması $a \neq b$ anlamına gelmektedir. Bu nedenle, f fonksiyonu 1-1'dir.

f fonksiyonunun örten olması için, her $b \in \mathbb{R}$ için $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan en az bir $a \in \mathbb{R}$ bulunabilmelidir. Verilen fonksiyon için $f(a) = 2a + 1$ olduğundan, amacımız, her $b \in \mathbb{R}$ için $2a + 1 = b$ eşitliğini sağlayan bir a gerçekte sayısının var olup olmadığını bulmaktır.

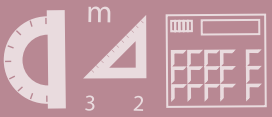
$b \in \mathbb{R}$ iken $2a + 1 = b$ ise $a = \frac{b-1}{2} \in \mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla f fonksiyonu örtendir.

Bu durumda, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu hem 1-1 hem de örtendir.

Sizce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu örten bir fonksiyon mudur? 1-1 bir fonksiyon mudur? Neden?

$f: A \rightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonu hem bire bir hem de örten fonksiyon ise f fonksiyonuna, **bire bir ve örten fonksiyon** denir.

Sizce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyon mudur? Neden?



KENDİMİZİ SINAYALIM

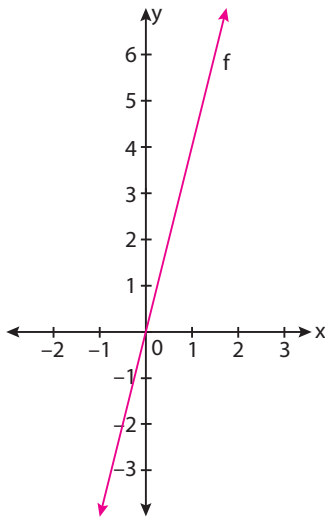
Kavrama ve Muhakeme Soruları

- Aşağıdaki kavramları kendi cümlelerinizle açıklayınız.
 - Bire bir fonksiyon
 - Örten fonksiyon
 - Yatay doğru testi
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonu bire bir midir? Cevabınızı fonksiyonun grafiğini çizmeden açıklayınız.
- $f: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{8, 12, 16, 20\}$, $f(x) = 4x$ fonksiyonu örten midir? Cevabınızın nedenini açıklayınız.

Alıştırımlar

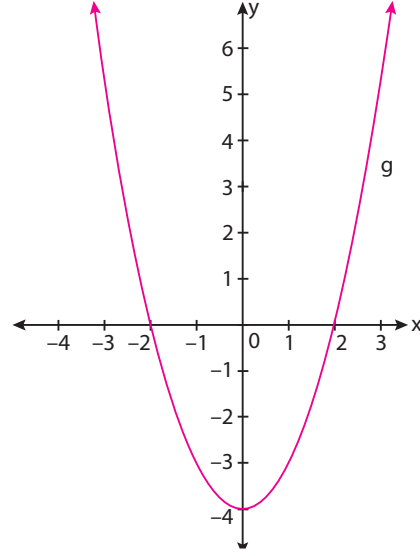
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizerek 1-1 ve örten olduğunu yatay doğru testi yardımıyla gösteriniz.
- Yatay doğru testini kullanarak aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanımlı oldukları kümelerde
Bire bir
Örten
Bire bir ve örten olup olmadıklarını belirleyiniz.

a.



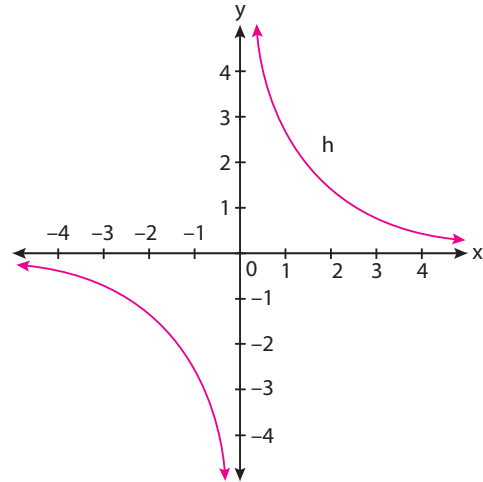
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b.



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

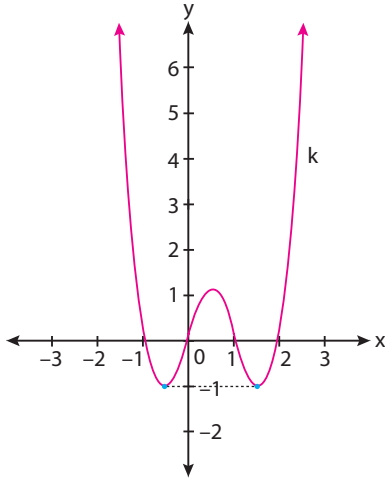
c.



$h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

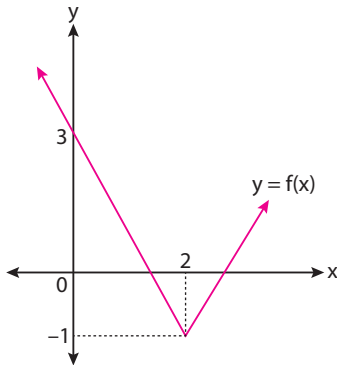
KENDİMİZİ SINAYALIM

Ç.



$k: \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty)$

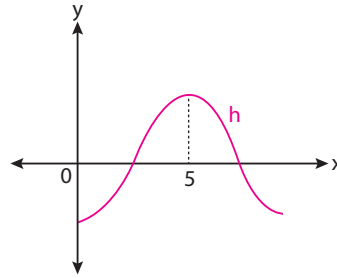
3. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonun grafiği veriliyor.



Yatay doğru testini kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- f fonksiyonu 1-1 ve örten midir?
- $g: [0, 2] \rightarrow [-1, 3], g(x) = f(x)$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu 1-1 ve örten midir?

4. Gerçek sayılarda tanımlı h fonksiyonun grafiği veriliyor.



Yatay doğru testini kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- h fonksiyonu 1-1 ve örten midir?
- $g: (0, 5) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = h(x)$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu 1-1 ve örten midir?

5. Bir dinamik geometri yazılımı kullanarak gerçekte sayılarda tanımlı

$$F(x) = -x + 1$$

$$G(x) = x^2 - 3$$

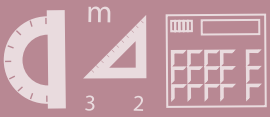
$$H(x) = x^3 + 1$$

$$f(x) = 3^x$$

$$h(x) = x^3 - 3x$$

funksiyonlarının grafiklerini çizdiriniz. Yatay doğru testini kullanarak bu fonksiyonların 1-1 ve örten olup olmadıklarını belirleyiniz.

- $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun 1-1 ve örten olup olmadığını cebirsel olarak gösteriniz.
- Aşağıdaki fonksiyonları; bire bir ve örten, bire bir ama örten değil, bire bir değil ama örten, hem bire bir değil hem örten değil şeklinde sınıflandırınız:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$



KENDİMİZİ SINAYALIM

- ii. $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = 2$
- iii. $h: \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, h(a) = 2, h(b) = 1$
- iv. $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = x^5$
- v. $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = |x|$
- vi. $m: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, m(x) = x$
- vii. $n: \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty), n(x) = 2 - x$
- viii. $o: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), o(x) = x^2$

Uygulama ve Problem Çözme

1. EĞLENCELİ MATEMATİK



Eskiden takvim günümüzdeki kadar yaygın değildi. Özellikle köylerde ancak önemli bazı olaylara göre zaman belirlenirdi. O yüzden özellikle Ramazan'da günleri şaşırmamak için bazı usuller uygulanırdı. Nasreddin Hoca da zamanı belirlemek için bir çömlek alır bir yığın ufak taş toplar.

Akşam olduğu zaman bu taşlardan bir tanesini çömleğe atardı. Ramazan'ın kaç olduğunu öğrenmek isteyince çömlekteki taşları sayardı. Hoca'nın bu usulünü bilen bir arkadaşı Hoca'ya küçük bir

şaka yapmak ister. Bir gün gizlice Hoca'nın taşları büyüklüğünde bir avuç taşı çömleğe boşaltır. Sonra doğruca Hoca'nın yanına gider ve sorar:

— Hocam, bugün Ramazan'ın yirmi dördü mü, yirmi beşi mi? Arkadaşlarla bir karara varamadık. Bana Hoca'ya git danış. O bilir, dediler.

Hoca:

— Olur, şu bizim çömleğe bir bakalım, der. Hoca, çömleğin yanına gider. İçindeki taşları saymak için boşaltır. Hayretler içinde kalır. Taşları sayar, tam 124 tane taş vardır. Kendi kendine:

— Allah Allah! Hiç böyle şey olmaz!

diye söylenir. Soru soran adamın yanına geri gelir:

— Bugün Ramazan'ın altmış ikisi der.

Adam:

— Aman Hocam! Hiç böyle şey olur mu? Hiç ay altmış iki çeker mi?

Hoca:

— Sen gene şükret, ben insafılı davrandım da yarısını söyledim. Benim çömleğin hesabına kalsaydı bugün ramazanın yüz yirmi dördü idi, der.

Nasrettin hocanın eşleme hesabı doğru olsaydı yani ramazanın her bir gününe karşılık çömleğe bir taş atılmış olsaydı bu durum aşağıdaki fonksiyon türlerinden hangilerine örnek olurdu?

- I. Bire bir fonksiyon
- II. Örten fonksiyon
- III. Bire bir ve örten fonksiyon

BÖLÜM ÖZETİ

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesi yatay eksen, değer kümesi de dikey eksen gösterilir.

Bir (a, b) sıralı ikilisini oluşturan bileşenler bir f fonksiyonunun kuralı olan $y = f(x)$ eşitliğini $b = f(a)$ şeklinde sağlarsa, koordinatları (a, b) olan nokta f fonksiyonunun grafiği üzerindedir. Bunun tersi de doğrudur: $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki bir noktanın koordinatları (a, b) ise a ile b arasında $b = f(a)$ ilişkisi vardır. Değer kümesinin bir elemanı olan b ile tanım kümesinin bir elemanı olan a arasında $b = f(a)$ ilişkisi varsa, b nin f altındaki bir ters görüntüsü a dır deriz.

A ve B kümeleri ile $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Herhangi bir C ve D kümeleri $C \subset A$ ve $D \subset f(A)$ olsun. Bu durumda tanım kümesinin bir alt kümesi olan C kümesindeki elemanların f altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye kısaca C nin f altındaki görüntüsü denir ve $f(C)$ ile gösterilir. Bu küme ortak özellik yöntemiyle şu şekilde belirtilir:

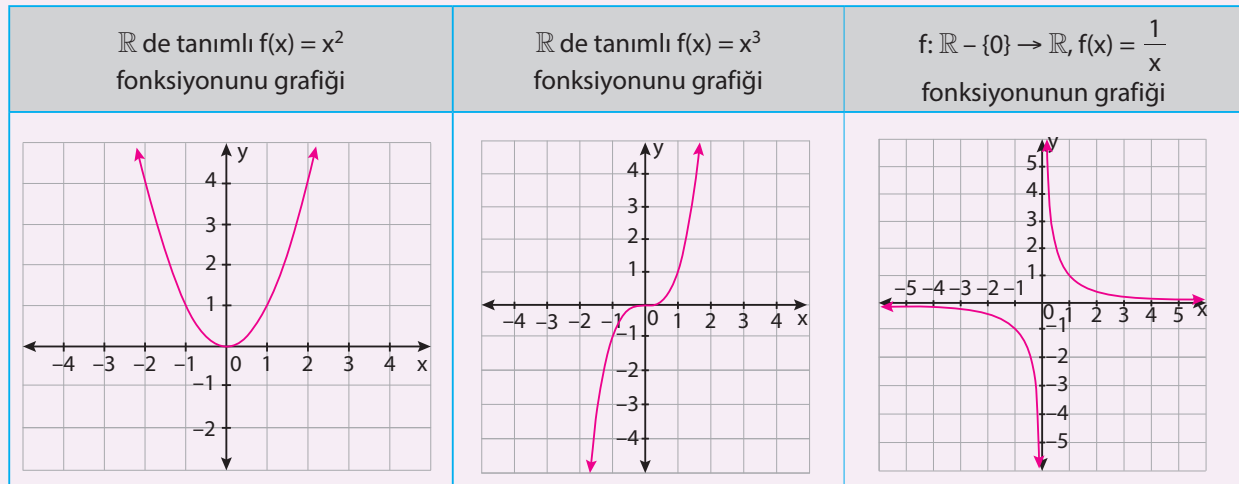
$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

Görüntü kümesinin bir alt kümesi olan D kümesindeki elemanların f altındaki ters görüntülerinin oluşturduğu kümeye, D kümesinin f altındaki ters görüntüsü denir ve bu küme ortak özellik yöntemiyle şu şekilde belirtilir:

$$D \text{ nin } f \text{ altındaki ters görüntüsü} = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

Bir grafik fonksiyon grafiği ise, yatay eksen, gösterilen tanım kümesinin elemanlarından geçen dikey doğrular grafiği birer noktada keser. Herhangi bir dikey doğru grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik fonksiyon grafiği değildir. Bu şekilde verilen grafiğin bir fonksiyona ait olup olmadığını anlama yöntemine dikey doğru testi denir.

$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) biçimindeki fonksiyonların grafikleri çizilirken önce değer tablosu oluşturulur. Değer tablosundaki veriler koordinat düzleminde işaretlenir ve bu noktalar birleştirilerek grafik çizilir. Örneğin,



x bağımsız, y de x e bağımlı bir değişken olmak üzere, bu değişkenlere ait (x_1, x_2) ve (x_2, y_2) değerleri verilsin. (x_1, x_2) değerlerinden (x_2, y_2) değerlerine geçişte yaşanan

$$\text{değişim oranı (hızı)} = \frac{\text{y değerlerindeki değişim}}{\text{x değerlerindeki değişim}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

şeklinde ifade edilir.

$y = f(x) = mx + b$ şeklindeki bir doğrusal fonksiyonun değişim oranı (hızı) sabittir ve bu değer bu fonksiyonla belirtilen doğrunun eğimi olan m değeridir.

Bir f fonksiyonu için, $a \in \mathbb{R}$ iken $f(x) = 0$ oluyorsa a gerçekte sayısına f fonksiyonunun sıfırı denir. Diğer bir ifadeyle, bir f fonksiyonun sıfırları $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir. Bu durumda, f fonksiyonun sıfırları fonksiyonun grafiğinin x -eksenini kestiği noktalardır.

x eksenini, $y = 0$ doğrusal denklemiyle; y eksenini de $x = 0$ doğrusal denklemiyle ifade edilir.

Bir f fonksiyonu ve $b \in \mathbb{R}$ için $f(x) = b$ denkleminin çözüm kümesi, f fonksiyonunun grafiği ile y eksenini b de kesen yatay doğrunun kesiştiği noktaların apsilerinden oluşur.

Tanım kümesinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallarla tanımlı olan fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyonlar veya kısaca parçalı fonksiyonlar denir.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ ise} \\ x, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu mutlak değer fonksiyonudur ve grafiği şekildeki gibidir:

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü diğer elemanların görüntülerinden farklı ise o fonksiyona bire bir fonksiyon (veya 1-1) denir. Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu bire bir ise şu şartları sağlar:

$$\text{herhangi } a \in A \text{ ve } b \in A \text{ için } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$\text{herhangi } a \in A \text{ ve } b \in A \text{ için } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Bir fonksiyonun değer kümesindeki her eleman, tanım kümesinden en az bir eleman ile eşleşmiş ise bu fonksiyon örten fonksiyondur. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu örten ise aşağıdaki şartları sağlar:

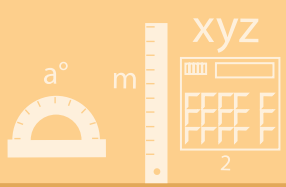
$$f(A) = B \text{ dir.}$$

- Her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ vardır.
- $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonu hem bire bir hem de örten fonksiyon ise f fonksiyonuna, bire bir ve örten fonksiyon denir.

Bir fonksiyonun grafiği üzerinde, x -eksenine paralel çizilen her yatay doğru grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa grafik 1-1 fonksiyon grafiğidir. Grafiği birden fazla noktada kesen en az bir yatay doğru varsa bu fonksiyon 1-1 değildir.

Değer kümesinin elemanlarından çizilen her yatay doğru fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon örten fonksiyondur.

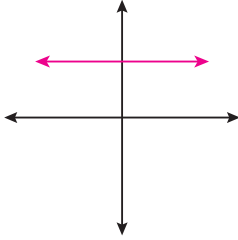
Bu şekilde bir fonksiyonun grafiğini kullanarak fonksiyonun 1-1 olma ve örten olma durumlarını tespit etme yöntemine yatay doğru testi denir.



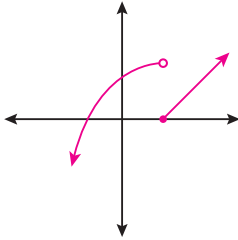
BÖLÜM DEĞERLENDİRME

6. Aşağıda verilen grafiklerden hangileri gerçekte tanımlı bir fonksiyona ait olabilir?

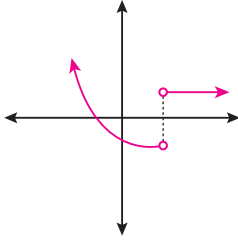
a.



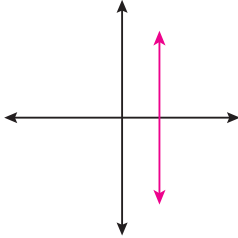
b.



c.



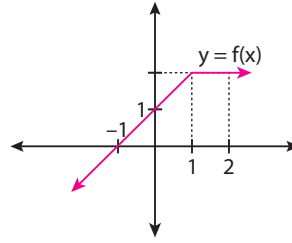
ç.



7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ fonksiyonu için $f(4) = 5$, $f(2) = 1$ olduğuna göre $m + n$ kaçtır?

8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ fonksiyonu için $f(1) = 7$, $f(8) = 35$ olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

9.



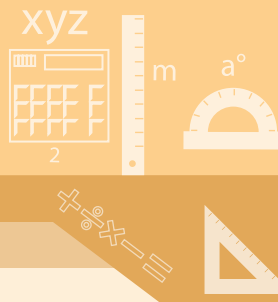
Grafiği verilen f fonksiyonu için $\frac{f(1) + f(2)}{f(3)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

10. Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ girdi değerleri için değerler tablosu oluşturarak grafiklerini çizin. Bu fonksiyonların grafiklerini bir grafik çizim yazılımı/aracı ile çizdirip bunları kendi çizimleriniz ile karşılaştırınız.

- | | |
|-----------------------|------------------------------|
| a. $f(x) = 4$ | b. $g(x) = -4x$ |
| c. $h(x) = 3x + 0,3$ | ç. $k(x) = -\frac{x}{2} - 4$ |
| d. $l(x) = 0,25x + 1$ | e. $m(x) = x^2$ |
| f. $n(x) = 3x^2$ | g. $o(x) = \frac{2}{x} + 1$ |
| ğ. $p(x) = x^2 - 9$ | h. $t(x) = 0,5x^2 - 1$ |

11. Aşağıdaki doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizerek değişim oranlarını (hızını) belirtiniz.

- | | | |
|---------------------------|------------------|----------------------------------|
| a. $y = x + 1$ | b. $y = -2x$ | c. $y = 3x + 5$ |
| ç. $y = \frac{3}{4}x + 2$ | d. $y = -8$ | e. $y = 7$ |
| f. $y = -4x + 1$ | g. $y = -x$ | ğ. $y = \frac{3}{4} - x$ |
| h. $y = 0 \cdot 2 + x$ | ı. $y = -4 + 7x$ | i. $y = -0 \cdot 3x - 0 \cdot 4$ |

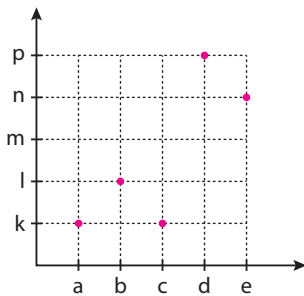


BÖLÜM DEĞERLENDİRME

12. Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerinin bazı değerleri için değerler tablosu yaparak grafiklerini çizin. Bu fonksiyonların grafiklerini bir grafik çizim yazılımı/aracı ile çizdirip bunları kendi çizimleriniz ile karşılaştırınız.

- a. $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2$
- b. $g: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -3x$
- c. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3x - \frac{1}{2}$
- ç. $k: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = -\frac{x}{2} - 4$
- d. $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = -0,25x - 1$
- e. $m: [-5, 3] \rightarrow \mathbb{R}, m(x) = x^2$
- f. $n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 12], n(x) = 3x^2$
- g. $o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, o(x) = \frac{2}{x+1}$
- ğ. $p: [-6, 4] \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2 - 16$
- h. $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = 0,5x^2 - 1$
- ı. $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s(x) = 2x^3$
- i. $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b(x) = x^3 - 2$

13.

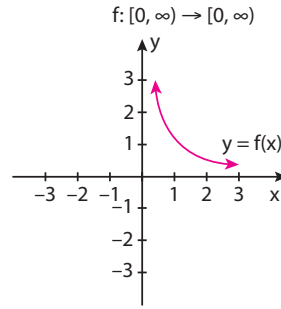


Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre;

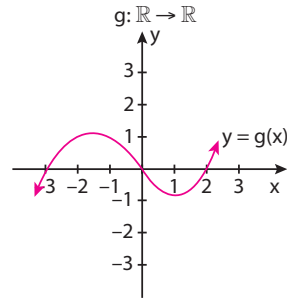
- a. $f(a), f(b), f(e)$ değerlerini bulunuz.
- b. $f(x) = m$ ise x kaçtır?

14. Aşağıdaki fonksiyonların bire-bir ve/veya örten olup olmadığını inceleyiniz.

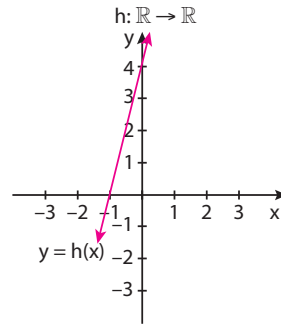
a.



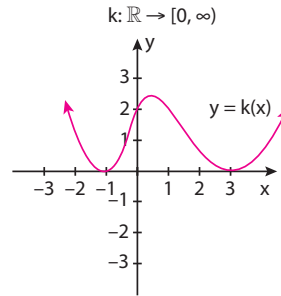
b.

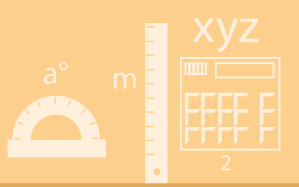


c.



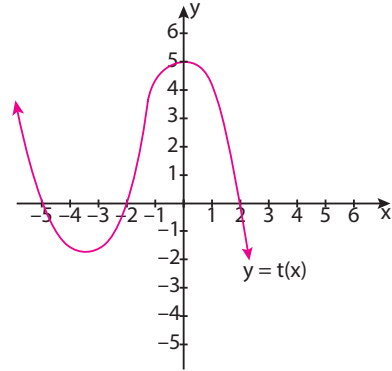
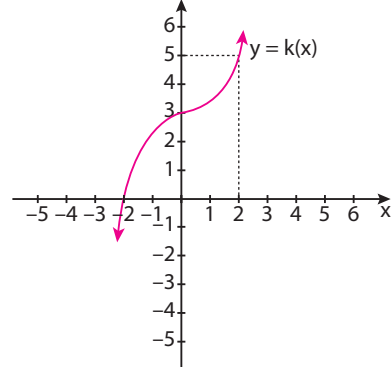
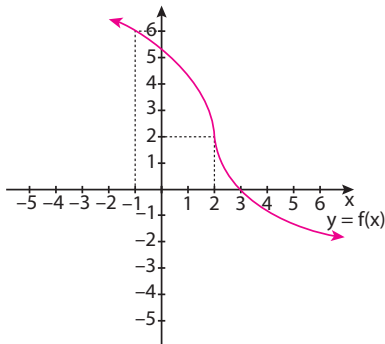
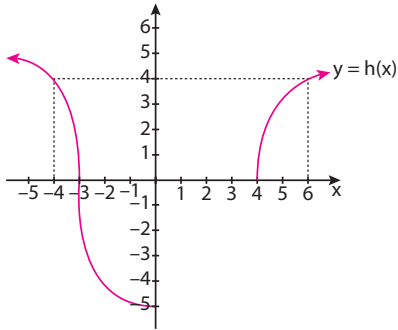
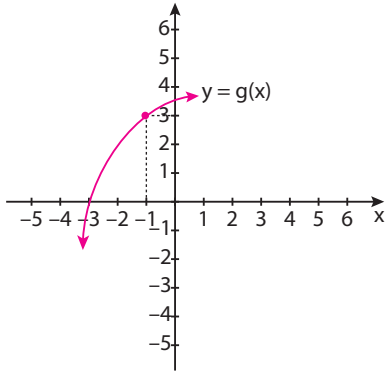
ç.





BÖLÜM DEĞERLENDİRME

15. Aşağıda gerçekte sayılarda tanımlı g, h, f, k ve t fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

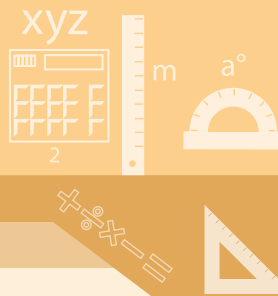


Buna göre aşağıdaki denklemlerin çözüm kümele-
rini bulunuz.

- a. $g(x) = 0$ b. $h(x) = 0$ c. $f(x) = 0$
ç. $k(x) = 0$ d. $t(x) = 0$ e. $h(x) = 4$
f. $f(x) = 2$ g. $k(x) = 5$ h. $k(x) = 5$
ı. $h(x) = -5$

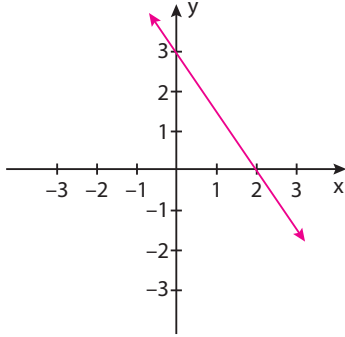
16. Gerçekte sayılarda tanımlı $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x > 2 \\ 2 - x, & x \leq 2 \end{cases}$

fonsiyonu için $f(-2) + f(4) + f(2)$ değerini bulunuz.



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

17.



Şekilde grafiği verilen fonksiyonun denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 3x + 2$ B) $f(x) = -3x - 5$
 C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$ D) $y = -\frac{3}{2}$
 E) $3x + 2y - 6 = 0$

18. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ ve $f(x) = 2x + 1$ ile verilen fonksiyon örten bir fonksiyondur. Buna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-3, -1, 1, 2\}$ B) $\{-1, 0, 1, 2\}$ C) $\{-2, -1, 0, 3\}$
 D) $\{-3, -1, 1, 3\}$ E) $\{-3, 0, 1, 3\}$

19. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = -3x + 5$ fonksiyonu veriliyor. $f((0, 3])$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-7, -5)$ B) $(-4, 5)$ C) $[-4, 5)$
 D) $[2, 7)$ E) $(-4, 5]$

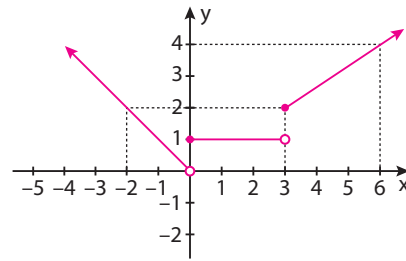
20. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu, $f(x) = -x^2 - 1$ kuralıyla tanımlanıyor. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olduğuna göre, $f(A)$ kümesinin elemanları toplamı kaçtır?

- A) -15 B) -16 C) 15
 D) 16 E) -14

21. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ ve $f(A) = [8, 15]$ olduğuna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-4, 2] \cup [-5, 3]$ B) $[-5, -4] \cup [2, 3]$
 C) $[-5, -4]$ D) $[2, 3]$
 E) $[2, 3] \cup [-5, \infty)$

22.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

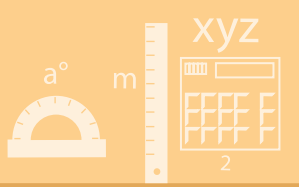
$$A) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \quad \text{ise} \\ 1, & 0 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ \frac{2}{3}x, & x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$B) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \quad \text{ise} \\ 1, & 0 < x < 3 \quad \text{ise} \\ \frac{2}{3}x, & x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$C) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \quad \text{ise} \\ x, & 0 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ \frac{2}{3}x, & x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

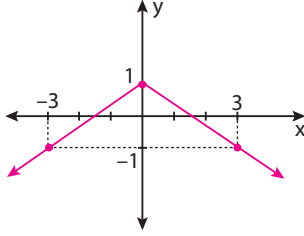
$$D) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \quad \text{ise} \\ 1, & 0 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ 2x, & x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$E) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \quad \text{ise} \\ -x, & 0 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ \frac{2}{3}x, & x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

23.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = \begin{cases} -2, & -5 < x < 0 \text{ ise} \\ |x| - 2, & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ x + 6, & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} 2, & -5 < x < -2 \text{ ise} \\ |x| - 2, & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ -x + 6, & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 2, & -5 < x < 0 \text{ ise} \\ x - 2, & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ x + 6, & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} 2, & -5 < x < 0 \text{ ise} \\ |x| - 1, & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ x + 6, & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} -2, & -5 < x < 2 \text{ ise} \\ |x| - 2, & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ x + 6, & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

24. Gerçek sayılarda tanımlanan aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $y = |-8x|$ b. $y = \left|x - \frac{1}{3}\right|$

c. $y = |x + 2| - 2$ ç. $y = |x - 1| - 1$

d. $y = 2|x + 2| - 2$ e. $y = |x + 2| + |x|$

25. Gerçek sayılarda tanımlanan aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -2 \text{ ise} \\ 3, & -2 < x \leq 1 \text{ ise} \\ -x^2, & 1 < x \text{ ise} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ ise} \\ 1, & 0 \leq x < 3 \text{ ise} \\ \frac{2x}{3}, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

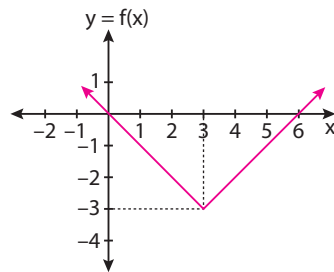
c. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 0 \text{ ise} \\ x^2 - 2, & 0 \leq x < -2 \text{ ise} \\ -3x + 4, & x < -2 \text{ ise} \end{cases}$

ç. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \geq 1 \text{ ise} \\ x, & -1 < x \leq 1 \text{ ise} \\ -3, & 1 > x \text{ ise} \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -5 \text{ ise} \\ 3x + 1, & -5 < x \leq 1 \text{ ise} \\ -3, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} 5x - 7, & x < 3 \text{ ise} \\ 3x^2 - 5, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

26.

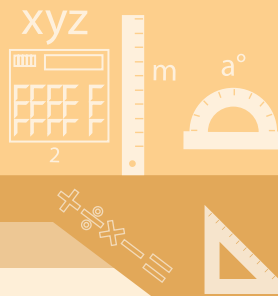


Şekilde grafiği verilen ve gerçek sayılarda tanımlı olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = |x - 3| - 3$ B) $f(x) = |x - 3| + 3$

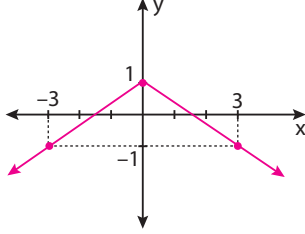
C) $f(x) = |x + 3| - 3$ D) $f(x) = -4 - |x - 3|$

E) $f(x) = |x - 4| - 3$



BÖLÜM DEĞERLENDİRME

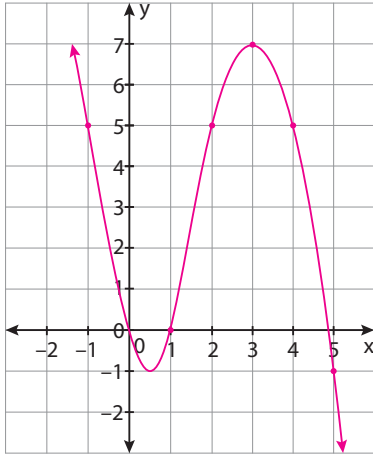
27.



Şekilde grafiği verilen ve gerçekte sayılarda tanımlı olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(x) = -2\left|\frac{x}{3}\right| - 1$ B) $f(x) = -2\left|\frac{x}{2}\right| - 1$
 C) $f(x) = -2\left|\frac{x}{3}\right| + 1$ D) $f(x) = -3\left|\frac{x}{2}\right| - 1$
 E) $f(x) = 2\left|\frac{x}{3}\right| - 1$

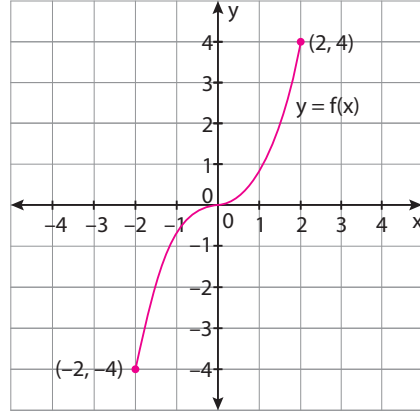
28.



Bir f fonksiyonunun grafiği şekilde gibidir.

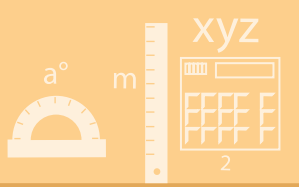
- a. $f((0, 2])$ kümesi nedir?
 b. $A = \{-1, 2, 3\}$ kümesinin f altındaki görüntüsü nedir?
 c. $[1, 3]$ kümesinin f altındaki görüntüsü nedir?
 ç. $[-1, 5]$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü nedir?

29.



Bir f fonksiyonun grafiği şekilde gibidir.

- a. Bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.
 b. $A = \{-1, 0, 1\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü bulunuz.
 c. $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü bulunuz.
 ç. $f(C) = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.
 d. $f(D) = \{0, 1, -4\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

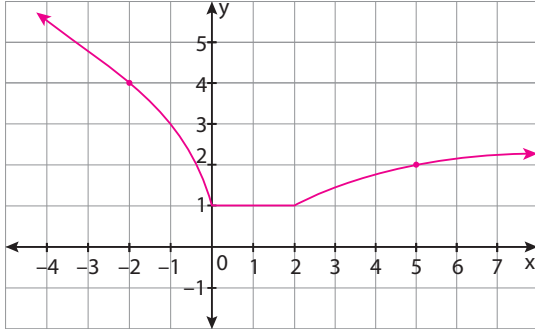


BÖLÜM DEĞERLENDİRME

30. Denizlerdeki su basıncı derinlere inildikçe artar. Öyle ki; her 10 metrede basınç, yaklaşık olarak santimetre kareye 1 kilogram kadarlık artış gösterir. Buna göre x derinlik olmak üzere, x derinlikteki su basıncı $f(x)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu verilsin. Buna göre;

- 10 ar metrelik aralıklarla, 10 metreden 100 metreye kadar olan derinlik-su basıncı tablosunu yapınız.
- $f(x)$ in cebirsel ifadesini yazınız.
- 0-100 metre derinlik aralığı için derinlik (m) – su basıncı (kg/cm^2) grafiğini çiziniz.

31.



Bir f fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.

- $f([-2, 5])$ kümesi nedir?
- $(0, 5)$ aralığının f altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $[0, 1]$ aralığının f altındaki görüntüsünü bulunuz.
- $[1, 3]$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.
- 1 'in f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

32. 3 TL ile açılan bir taksimetre ilk 5 km de, her 100 m için 30 kr, 5 km den sonra her 100 m için 20 kr ücret yazmaktadır. Gidilen yol km cinsinden x ile gösterildiğinde, bu taksimetrenin ücret tarifesini veren $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

33. Sıcaklık ölçü birimlerinden Fahrenheit derece ($^{\circ}\text{F}$) ile Santigrat derece ($^{\circ}\text{C}$) derece arasında

$$^{\circ}\text{F} = 1,8 ^{\circ}\text{C} + 32$$

ilişkisi vardır. Buna göre;

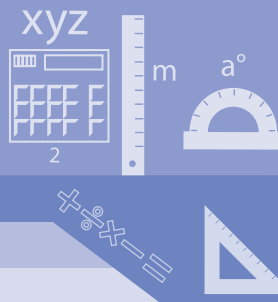
a. Tabloyu doldurunuz.

| | | | | | | |
|--------------------|-----|---|----|----|----|-----|
| $^{\circ}\text{C}$ | -10 | 0 | 10 | 24 | 37 | 100 |
| $^{\circ}\text{F}$ | | | | | | |

b. Fahrenheit derece ($^{\circ}\text{F}$) ile Celcius derece ($^{\circ}\text{C}$) ilişkisini grafiksel olarak gösteriniz.

Araştırma Soruları

- Günlük hayattan fonksiyon olarak nitelendirilebilecek örnek durumlar bulunuz. Buna göre;
 - Bu fonksiyonların girdilerini ve çıktılarını bulunuz.
 - Bu fonksiyonların grafiklerini kabaca çiziniz.
- Değişim oranı sabit olmayan bir fonksiyon doğrusal bir fonksiyon olabilir mi? Açıklayınız.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

1. Aşağıda sözel olarak verilmiş x ve y arasındaki ilişkileri cebirsel olarak ifade ediniz.

- a. y çıktısı x girdisinin 2 katıdır.
- b. x girdisi y çıktısının yarısından 1 eksiktir.
- c. y çıktısı x girdisinin karesinin 3 eksiklidir.
- ç. x girdisi y çıktısının karekökünün 1 fazlasıdır.

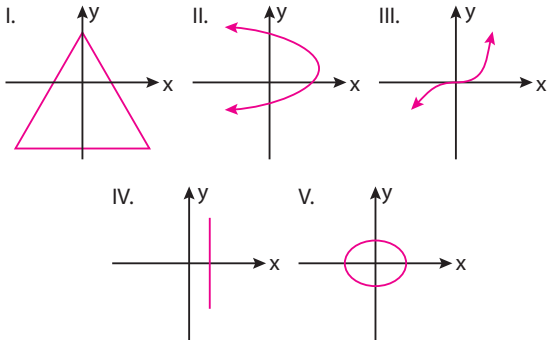
2. Aşağıda cebirsel olarak verilmiş x ve y arasındaki ilişkileri sözel olarak ifade ediniz.

- a. $y = x$ b. $y = 2$ c. $y = 2x - 3$
- ç. $y = x^2$ d. $y = x^3$ e. $y = |x|$

3. $f: [1, 3] \rightarrow [-2, 4]$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre;

- a. f fonksiyonunun tanım, değer ve görüntü kümelerini bulunuz.
- b. f in grafiği üzerinde yer alan bazı noktaların koordinatlarını tablo ile gösterip, grafiğini çiziniz.
- c. Görüntü kümesindeki $-1, 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3$ elemanlarının ters görüntülerini bulunuz.

4. Aşağıdaki grafiklerden hangileri bir fonksiyona aittir. Cevabınızı nedenleriyle açıklayınız.



5. Gerçek sayılarda tanımlı olan aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a. $f(x) = 5x - 2$ b. $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$
- c. $h(x) = \frac{x+1}{2}$ ç. $k(x) = 1 - 2x$

- 6. I. $y = 2x$ tir.
- II. Ödeyeceğimiz para aldığımız kalemelerin sayısına bağlıdır.
- III. Kalem sayısı değiştikçe ödenecek para da değişir.

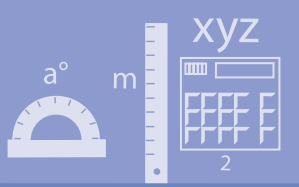
Her birinin fiyatı 2 TL olan kalemlerden x tane aldığımızda ödeyeceğimiz paraya y diyelim. Buna göre yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

7. Aşağıdakilerden hangileri bir fonksiyondur?

- I. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$
- II. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$
- III. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x^2$
- IV. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$
- V. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = \frac{3x+2}{2}$

8. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri bir fonksiyon grafiği belirtir?

- I. Hareketsizken harekete başlayan ve düzgün hızlanan otomobilin 0-10 saniye arasındaki konum-zaman grafiği
- II. Hareketli iken düzgün hızlanan otomobilin hızlanma süresince konum-zaman grafiği
- III. Hareketli iken düzgün hızlanan otomobilin hızlanma süresince hız-zaman grafiği



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{3}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

- a. $f(-1)$ b. $f(0)$ c. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ç. $f(2)$ d. $f(2\sqrt{5})$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

- a. $f(-6)$ b. $f(-2)$ c. $f\left(\frac{1}{4}\right)$ d. $f(2)$ e. $f(2\sqrt{5})$

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşiti bulunuz.

- a. $f(x+1)$ b. $f(x-1)$ c. $f(2x)$
ç. $f(3x-1)$ d. $f\left(\frac{x}{2}\right)$ e. $f(x^2)$

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+2)^2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

- a. $f(-1)$
b. $f(\sqrt{2}-2)$
c. f fonksiyonunun görüntü kümesi

13.

| x | f(x) |
|----|------|
| 3 | 11 |
| 7 | 9 |
| 11 | 3 |
| 9 | 11 |
| 16 | 9 |

Yanda bir f fonksiyonunun değerler tablosu verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

- a. $f(7)$
b. $f(11)$
c. $f(x) = 9$ eşitliğini sağlayan x değerleri.

14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$ fonksiyonu veriliyor. $f(2a-1) = 6$ ise a değerini bulunuz.

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - n$ fonksiyonu veriliyor. $f(3) = 11$ ise n değerini bulunuz.

16. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} - c$ ve $f(8) = 9$ ise c değerini bulunuz.

17. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 2$ olarak veriliyor. $f(n) = g(3n)$ ise n kaçtır?



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-t}{3}$ ve $f(2) = 4$ ise t değerini bulunuz.

19. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x f(x-1) + 1$ ve $f(4) = 10$ ise $f(1)$ değerini bulunuz.

20. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = f(x-1) + 1$ ve $f(4) = 10$ ise $f(1)$ değerini bulunuz.

21. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x f(x+1)$ ve $f(3) = 32$ ise $f(5)$ değerini bulunuz.

22. $f: [-2, 2] - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

23. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre;

- a. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- b. $(2, 10)$ aralığının f altındaki görüntüsünü bulunuz.

24. Gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = x^2$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olan $[-1, 3]$ kümesinin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü bulunuz.

25. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını yatay doğru testi ile gösteriniz.

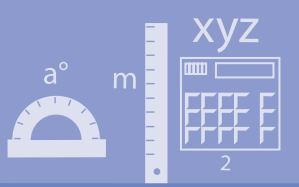
26. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+, f(x) = x^2$ fonksiyonunun örten bir fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

27. Bir arabanın aldığı yolla harcadığı benzin arasında doğrusal bir ilişki olduğunu varsayalım. Eğer bu araba 10 km gittiğinde 1 lt benzin, 20 km gittiğinde 2 lt benzin harcıyorsa;

- a. Arabanın aldığı yolla, harcadığı benzin arasındaki ilişkinin grafiğini çiziniz?
- b. Harcanan benzin miktarını, alınan yola bağlı olarak ifade eden fonksiyonun kuralını bulunuz.

28. Bir fabrikanın günlük gideri ile bu fabrikada üretilen ürün sayısı arasında doğrusal bir ilişki olduğu bilinmektedir. Fabrikanın, günlük 3000 TL sabit gideri varsa ve eğer bir günde 20 ürün üretilirse, o günkü toplam gideri 15000 TL olmaktadır. Fabrikanın x ürün ürettiği bir güne ait toplam giderini $f(x)$ ile gösterelim. Buna göre;

- a. $f(x)$ in cebirsel eşitini bulunuz.
- b. 30 ürünün üretildiği bir gün için toplam gider nedir?
- c. Gider fonksiyonun $2 \leq x \leq 8$ şartını sağlayan x değerleri için grafiğini çiziniz.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

- 29.** Tuncay 2 saat boyunca ortalama 8 km/sa hızla bisiklet sürüyor. Tuncay'ın t zamanda aldığı yolu veren fonksiyon $d(t) = 8t$ dir. Buna göre;
- a.** Tuncay'ın bu aktivitesinin ilk 15 dakikasında aldığı yolla, bu aktivitesinin jerjanti bir 15 dakikasında aldığı yolu kıyaslayınız. Bulduğunuz sonucu nasıl açıklarsınız?
- b.** $d(m) = 6$ km ise m kaç dakikadır?
- 30.** $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer bir $a \in A$ için $f(a) = a$ oluyorsa f in a da bir sabit noktası vardır denir. Buna göre;
- a.** $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun varsa sabit noktasını bulunuz.
- b.** Herhangi bir doğrusal fonksiyonun sabit noktası var mıdır? Varsa kaç tanedir?
- 31.** Aşağıdaki fonksiyonları bire bir olma ve örten olma durumlarına göre sınıflandırınız.
- i.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$
- ii.** $g: \mathbb{R} \rightarrow \{2\}, f(x) = 2$
- iii.** $h: \{m, n\} \rightarrow \{2, 4, 6\}, h(m) = 2, h(n) = 4$
- iv.** $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^5$
- v.** $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow |x|$
- vi.** $m: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow -|x|$
- vii.** $n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \rightarrow |x|$

- 32.** Aşağıdaki fonksiyonları bire bir olma ve örten olma durumlarına göre sınıflandırınız.

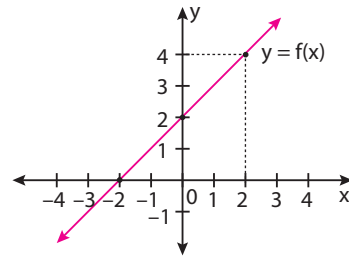
- a.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$
- b.** $g: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty), g(x) = x^2 + 1$
- c.** $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 + 1$
- ç.** $m: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty), m(x) = x^2 + 1$

- 33.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(2x + 1) = 4x - 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

- a.** $f(7)$ **b.** $f(8)$
- c.** $f(3a)$ **ç.** $f(5x)$

- 34.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f\left(\frac{x^3 + 1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x^3 + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x^3 + 1}{\sqrt{3}}$ ise
- a.** $f(5) = ?$ **b.** $f(3a) = ?$

35.

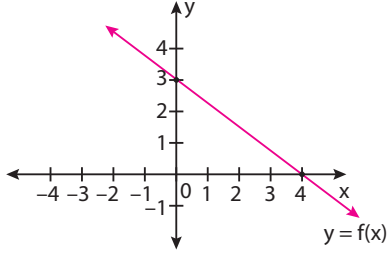


Grafiği verilen doğrusal f fonksiyonun kuralını bulunuz.



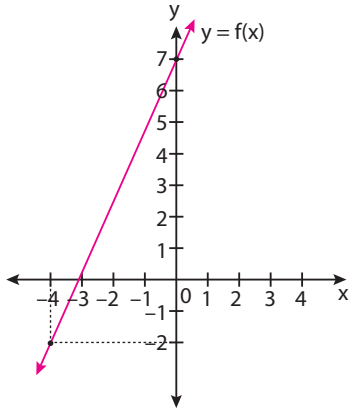
ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

36.



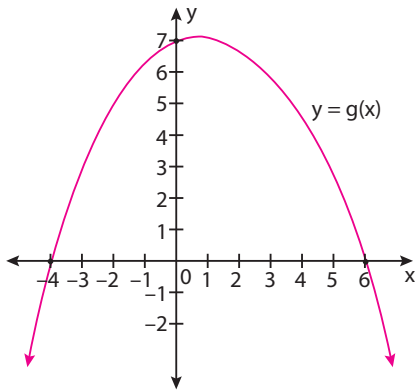
Grafiği verilen doğrusal f fonksiyonun kuralını bulunuz.

37.



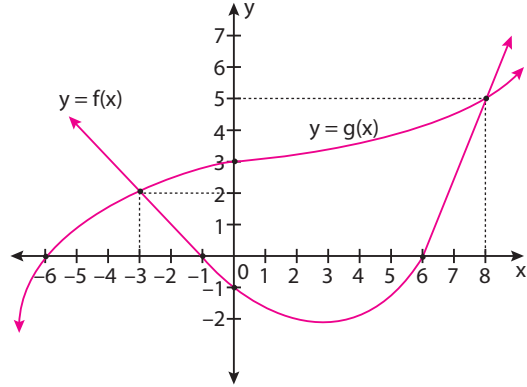
Grafiği verilen doğrusal f fonksiyonu için $f(8)$ değerini bulunuz.

38.



$g(m) = 0$, $g(t) = 7$ ise $m - t$ nin olabileceği değerler nelerdir?

39.



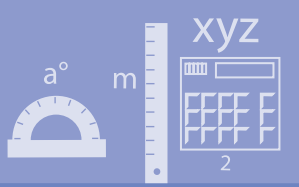
f ve g fonksiyonlarının verilen grafiklerini kullanarak $f(n) = g(n)$ eşitliğini sağlayan n değerleri toplamını bulunuz.

40. Verilen $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için

- $A = \{-1, 1\}$ kümesinin f altındaki görüntüsü nedir?
- $B = \{-2, \frac{1}{2}\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü nedir?
- $[-2, 0)$ aralığının f altındaki görüntüsü nedir?
- $(0, 2]$ aralığının f altındaki ters görüntüsü nedir?

41. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $f(3x - 5) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlanmışsa $f(-2)$ kaçtır?



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – I

42. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre,

a. $f(-2) + f(1) + f(2)$

b. $f(x^4 + 1)$

c. $f(-x^2)$

ifadelerinin değerlerini bulunuz?

43. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-\infty, -2) \\ 4, & x \in [-2, 2] \\ 2x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

ile veriliyor. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

44. Bir kargo şirketi 0 ile 2 kg arasında olan gönderilere m TL, 2 ile 5 kg arasında olan gönderilere 2m TL, 5 ile 15 kg arasında olan gönderilere 3m TL, 15 ile 30 kg arası gönderilere ise 4m TL ücret alıyor. Bu şirketin fiyat tarifesini gösteren bir grafik çiziniz.

45. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + |x|$ fonksiyonu için

a. $A = \{-3, 1, 4\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü

b. $B = \{2\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü

c. $[2, 4]$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü

ç. $[-2, 0]$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü

bulunuz.

46. Gerçek sayılarda tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -2 \text{ ise} \\ 3, & -2 < x < 1 \text{ ise} \\ -x^2, & 1 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

f fonksiyonu için;

a. $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ kümesinin f altındaki görüntüsünü

b. $B = \{-1, 0, -4\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü

c. $(-1, 0]$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü

bulunuz.

47. $f: (-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2, & -5 < x < -2 \text{ ise} \\ |x|, & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x + 2, & 2 \leq x \leq 5 \text{ ise} \end{cases}$

f fonksiyonu veriliyor. Buna göre;

a. $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü

b. $B = \{0, 1, 2, 4\}$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü

c. $(1, 3)$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü

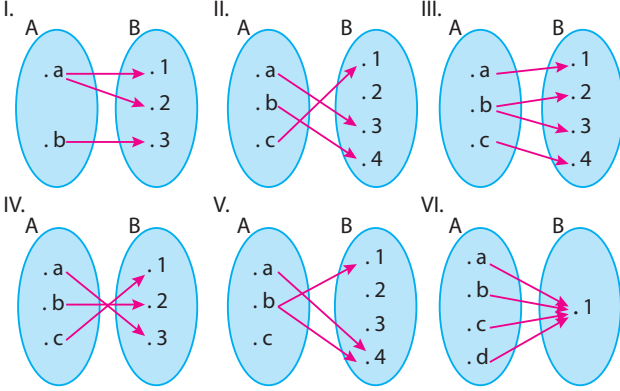
ç. $[-2, 1)$ aralığının f altındaki ters görüntüsünü

bulunuz.



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – II

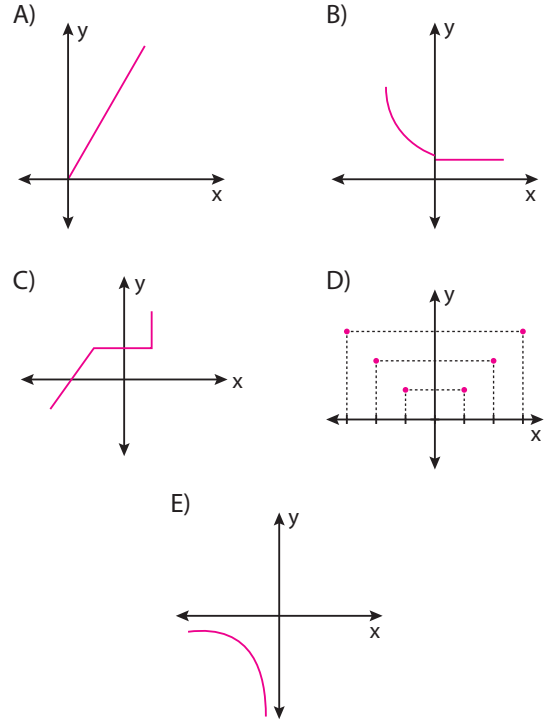
1. Aşağıda verilen ilişkilendirmelerden hangileri fonksiyon belirtir?



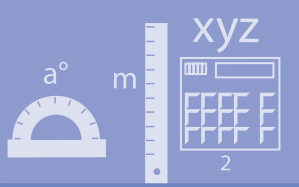
- A) I – III – V B) II – IV – VI C) I – III – IV – VI
D) II – III – V E) I – II – III – IV

2. Fonksiyonlarla ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) Bir fonksiyon bir tek kuralla verilmelidir.
B) Bir fonksiyonun bir grafiği vardır.
C) Her fonksiyon ya bire birdir ya da örtendir.
D) Bir kümenin her bir elemanını başka bir kümenin yalnız bir elemanına eşleyen ilişkidir.
E) Cebirsel olarak ifade edilmeyen ilişkiler fonksiyon belirtmez.

3. Aşağıdaki grafiklerden hangisi bir fonksiyon grafiği değildir?



4. $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $f(x) = 3x - 1$ ise f 'in görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\{3, 11, 19, 27\}$ B) $\{1, 3, 5, 7\}$ C) $\{2, 6, 10, 14\}$
D) $\{2, 10, 12, 18\}$ E) $\{6, 10, 18, 30\}$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – II

5. $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ olmak üzere

$f: A \rightarrow B, f(x) = 3x - 1$ ve $f(A) = B$ ise A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ C) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
D) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ E) $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ olmak üzere $f((2, 6))$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(11, 23)$ B) $(23, 11)$ C) $[23, 11)$
D) $[11, 23)$ E) $(11, 23]$

7. Değer kümesi \mathbb{R} olan bir f fonksiyonu için $\text{Grafik}(f) = \{(-2, 1), (-1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ olarak veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2, 3\}$ B) $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ C) $\{-2, -1\}$
D) $\{-2, -1, 3\}$ E) $\{-1, 1, 2, 3, 4\}$

8. $f: \mathbb{N} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+6}{x-3}$ fonksiyonu veriliyor.
 $f(2) + f(4) - f(0)$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

9. f bir doğrusal fonksiyon ve $f(x) = 4x - 6$ olarak veriliyor. Buna göre $f(2 - x) + f(2x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4x - 4$ B) $5x - 3$ C) $6x - 2$ D) $7x - 1$ E) $8x$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 9$ fonksiyonu için $f(3) + f(4) = 3 \cdot f(n + 2) + 3$ ise n değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ fonksiyonu veriliyor.
 $2f(1) + f(4) = 3f(n + 2) + 3$ ise n değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

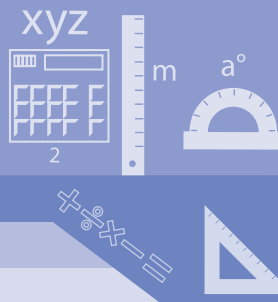
12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x - 4) = 5x - 9$ fonksiyonu veriliyor. $f(2) + f(-1) + f(5)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $A = \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere: $f: A \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x^2 - 1$, fonksiyonu veriliyor.

$f(A)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1\}$ B) $\{0, 1\}$ C) $\{-1, 0\}$
D) $\{-1, 1\}$ E) $\{-1, 0, 1\}$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – III

1. $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$ fonksiyonu veriliyor.
 $f(A) = \{1, 4, 7\}$ olduğuna göre A kümesi hangisidir?

A) $\{1, 2, 3\}$ B) $\{0, 1, 2\}$ C) $\{-1, 0, 1\}$
D) $\{-2, -1, 0\}$ E) $\{-3, -2, -1\}$

2. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için
 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = 3x + 5$ ve $f(m) = g(2m)$ olduğuna göre m sayısını bulunuz.

A) -8 B) -3 C) 3 D) 5 E) 8

3. $h: A \rightarrow B$ olmak üzere, h fonksiyonu bire-bir ve örtenidir. $s(A) = 3a - 3$ ve $s(B) = 2a + 1$ ise bu fonksiyonun tanım kümesinin eleman sayısı, $s(A)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 9 E) 12

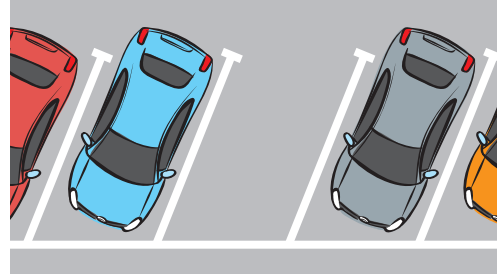
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(n+1) = f(n) + n$ ve $f(1) = m$ veriliyor.
 $f(4) = 16$ ise m kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

5. Tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için
 $f(x) - f(x+2) = x$ eşitliği sağlanmaktadır. $f(12) = 94$ ise $f(72)$ kaçtır?

A) 1200 B) 1210 C) 1220 D) 1230 E) 1240

6. Aşağıdaki problemlerden hangilerinin çözümünde fonksiyonlardan yararlanılır?



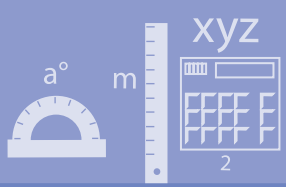
- I. İki otoparktan biri saat başına 2 TL sabit ücret, diğeri ise her ay 50 TL sabit abonelik ücreti alıp saat başına 50 kuruş ücret öneriyor. Birinci otoparkı tercih edince daha karlı çıkmak için bir ayda en fazla kaç saat otopark kullanılmalıdır?
- II. En az karton kullanarak yapılabilecek 12 br^3 hacimli bir silindirin yarıçapı ve yüksekliği nedir?
- III. Pınar'ın eviyle okulu arası 900 m dir. Pınar sabah okula yürüyerek gitmeye karar veriyor. İlk 5 dakika 600 m yürüyor. Ama daha sonra yorulmaya başlıyor ve hızını yarıya düşüyor. Pınar okuluna evden çıktıktan kaç dakika sonra varır?

A) I ve II B) II ve III C) I, II ve III
D) I, III E) Hiçbiri

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \text{ ise} \\ x, & 0 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ 1 - x^2, & x \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$

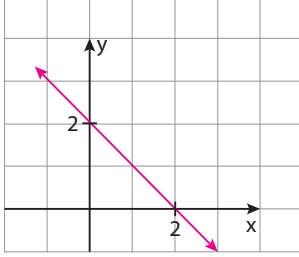
olduğuna göre, $f(-10) + f(3) + f(10)$ kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – III

8.



Grafiği verilen fonksiyonun x ve y değişkenleri arasında ifade ettiği ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - 2$ B) $y = x + 2$ C) $y = -x - 2$
D) $y = x + 2$ E) $y = \frac{x}{2} - 1$

9.

Kısmi zamanlı çalışan bir işçinin ilk 2 saate kadar ücreti 40 TL dir. İki saatten sonraki her yarım saat için 5 TL ücret ödenmektedir. bu durumda bir günde 8 saate kadar çalışabilen bir işçiye ödenecek ücretin zamana bağlı grafiği veriliyor. Bu grafiğe en doğru şekilde karşılık gelen fonksiyon türü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Mutlak değer fonksiyonu
B) Sabit fonksiyon
C) Doğrusal fonksiyon
D) Parçalı tanımlı fonksiyon
E) Birim fonksiyon

10.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesi ile A da tanımlı bir g fonksiyonu veriliyor.

$\text{Grafik}(g) = \{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (-1, 1), (3, 0)\}$ kümesine göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) g nin görüntü kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ tür.
B) g sabit bir fonksiyon değildir.
C) g bire birdir.
D) g nin değer kümesi A dır.
E) g örten değildir.

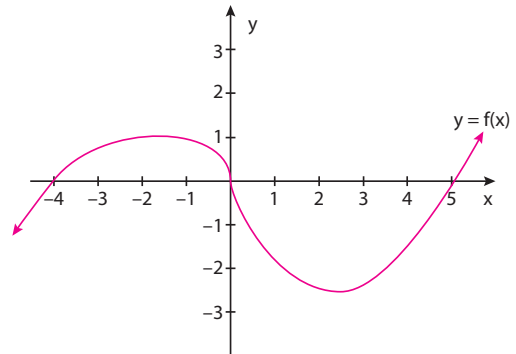
11. Bir top, 64 m yükseklikteki bir binanın tepesinden aşağıya bırakılıyor. Topun bırakıldıktan t saniye sonraki yüksekliği (metre) $y(t) = -4t^2 + 64$ fonksiyonu ile veriliyor. Buna göre top kaç saniye sonra yere düşer?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. Fonksiyonlarla ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) Sabit fonksiyon aynı zamanda bir örten fonksiyon da olabilir.
B) Her doğrusal fonksiyon bire bir fonksiyondur.
C) Birim fonksiyon bir doğrusal fonksiyondur.
D) Sabit fonksiyon bir birim fonksiyon türüdür.
E) Bir fonksiyon hem bire bir hem de örten fonksiyon olabilir.

13. Grafiği verilen bir f fonksiyonunu için



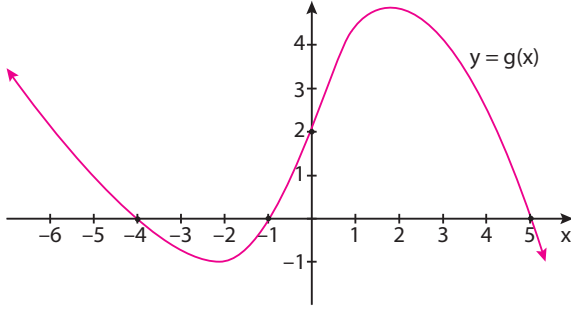
$f(k) = 0$ ise k nın alabileceği kaç değer vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – IV

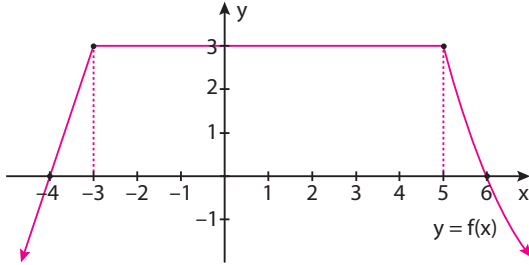
1. Grafiği verilen bir g fonksiyonu için



$g(-2) + g(0) + g(5) + g(-6)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 3 D) 5 E) 6

2. Grafiği verilen bir f fonksiyonu için



$f(2) + f(6) - f(-4)$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

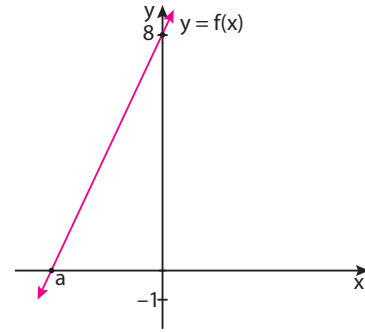
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonu veriliyor.
 $f(2) = a$, $f(a) = b$ ve $f(b) = c$ ise c kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunu bire bir olduğu biliniyor. Bu fonksiyon için $f(2a - 6) = b$, $f(b) = 2$, $f(4)$ ve $f(8) = 4$ ise a kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

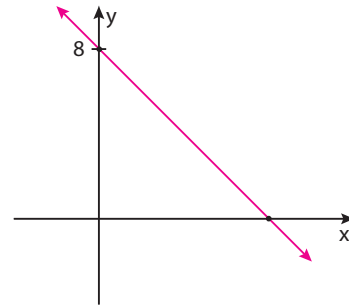
- 5.



Grafiği verilen doğrunun eğimi 2 ise a kaçtır?

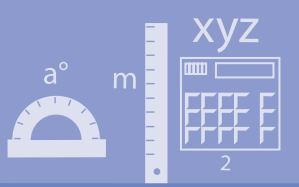
- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

- 6.



Grafiği verilen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) $y = 8 - x$ B) $f(x) = -3x + 8$
C) $y - x = 8$ D) $y + 4x = 8$
E) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 4$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – IV

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a + 5)x^3 + (b + 1)x^2 + kx + t$ fonksiyonu bir birim fonksiyon ise $a + b + k + t$ kaçtır?

- A) -5 B) -1 C) 0 D) 1 E) 5

8. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = (4a - 8)x + b - 4$ fonksiyonu bir birim fonksiyon olduğuna göre $a + 3b$ değeri kaçtır?

- A) 14 B) 12 C) 2 D) 1 E) 0

9. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 5ax + 2b - 29x + 12$ fonksiyonunun bir birim fonksiyon olması için $a + b$ değeri kaç olmalıdır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

10. f doğrusal bir fonksiyon, $f(-1) = 3$ ve $f(1) = 5$ ise $f(x)$ aşağıdakilerin hangisine eşittir?

- A) $-x + 3$ B) $3x = 5$ C) $-x + 4$
D) $x + 4$ E) $x - 4$

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (m + 5)x^2 + (n - 8)x + n - k - 6$ fonksiyonu bir birim fonksiyon olduğuna göre $m + n - k$ kaçtır?

- A) 9 B) 7 C) 5 D) 3 E) 1

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (a - 4)x + a + 3$ fonksiyonu veriliyor. f bir sabit fonksiyon ise $f(2014)$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (a - 6)x^2 + (2a - b)x + (3a - b)$ fonksiyonu veriliyor. f bir sabit fonksiyon ise, $f(41)$ değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14. Bir A kümesinde tanımlı f fonksiyonu $f(x) = \frac{8x - 12}{4x + 2n}$ ile veriliyor. f bir sabit fonksiyon ise $n + f(8)$ toplamı kaçtır?

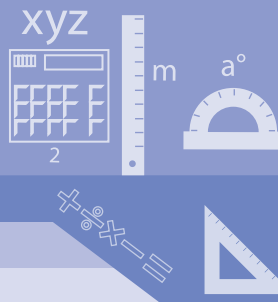
- A) -7 B) -6 C) 5 D) -4 E) -3

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (a + 2b - 5)x^3 + (2a - 3b + 4)x^2 + (a + 4)x + (-b)$ fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon ise $f(4)$ değeri kaçtır?

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

16. f , doğrusal bir fonksiyondur. $f(2) = 6$ ve $f(1) = -3$ ise $f(x + 5)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x + 7$ B) $2x + 6$ C) $3x + 7$
D) $4x + 5$ E) $5x + 4$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

1. f , gerçekte sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyondur. $f(4x) - 3f(x) = 2x - 8$ ise $f(7)$ değeri kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (3a + 7)x + 7b + 1$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $f: \mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \frac{6x + 6 - nx}{2x + 3}$ bir sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(n)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu, $f(x) = -x^2 + 3$ kuralıyla tanımlanıyor. $A = \{-1, 0, 1\}$ olduğuna göre, $f(A)$ kümesinin elemanları toplamı kaçtır?

A) -7 B) -4 C) 0 D) 4 E) 7

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2 - 6x + 8$ olduğuna göre $f(2)$ nin değeri kaçtır?

A) -8 B) -4 C) 0 D) 4 E) 8

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = |x - 5| + |-2x + 3|$ olduğuna göre, $f(6)$ nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(3x + 4) = 8x + 9$ olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(5x + 2) = -x + 7$ olduğuna göre $f(12)$ nin değeri kaçtır?

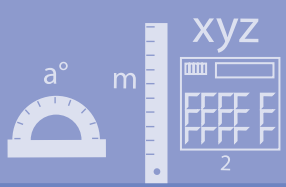
A) 3 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x^2 + 3x) = -x^2 - 6x + 4$ olduğuna göre $f\left(\frac{3}{2}\right)$ in değeri kaçtır?

A) -7 B) 5 C) 0 D) -5 E) -7

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(3^x) = 2nx$ ve $f(81) = 64$ olduğuna göre, n kaçtır?

A) -2 B) 0 C) 2 D) 6 E) 8



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – V

11. $f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{7\}$ ve $f\left(\frac{x+7}{x-1}\right) = \frac{x+9}{6-x}$ olduğuna göre, $f(5)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ olduğuna göre $f(4x - 1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^3 B) $4x^3$ C) $8x^3$
D) $32x^3$ E) $64x^3$

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(a + b) = f(a) + f(b)$ eşitliğini gerçekleyen fonksiyonda $f(2) = 3$ olduğuna göre $f(0) + f(4) + f(8)$ toplamı kaçtır?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x + 2) = f(x + 1) - 4x + 5$ ve $f(2) = 3$ olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

A) -11 B) -9 C) 0 D) 9 E) 11

15. $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x < 1 \text{ ise} \\ x, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu için

$A = \{-2, 0, 1\}$ kümesinin verilen fonksiyon altındaki görüntüsü aşağıdaki kümelerden hangisidir?

A) $\{-6, -4, -1\}$
B) $\{-6, -4, -3\}$
C) $\{-3, -2, 0\}$
D) $\{-2, 0, 1\}$
E) $\{-4, -3, -2\}$

16. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = (x - 3)(x + 3)$ fonksiyonu için $A = \{0\}$ kümesinin verilen fonksiyon altındaki ters görüntüsü aşağıdaki kümelerden hangisidir?

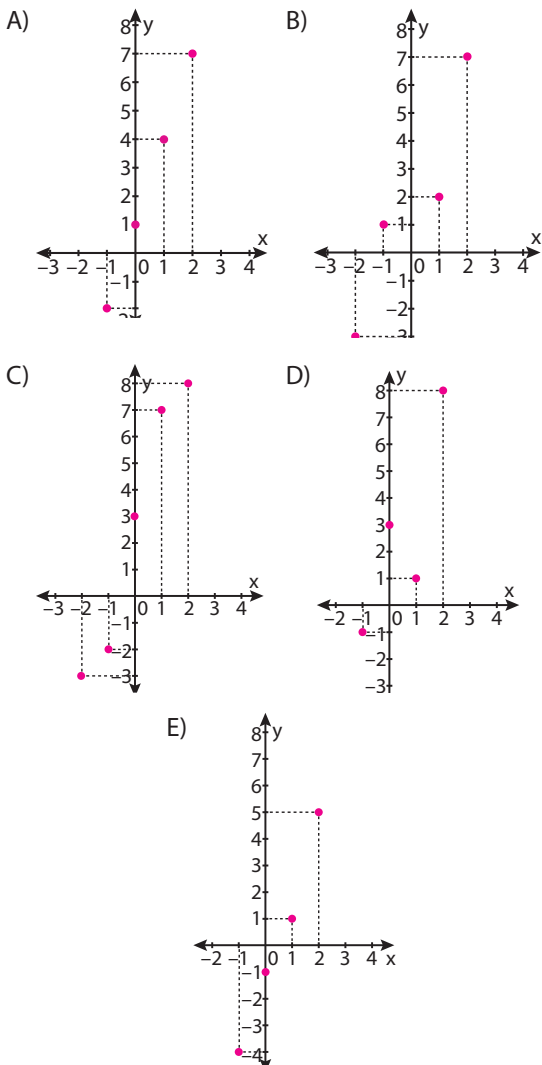
A) $\{3\}$
B) $\{-1\}$
C) $\{-1, 3\}$
D) $\{-1, -3\}$
E) $\{0, -1, -3\}$



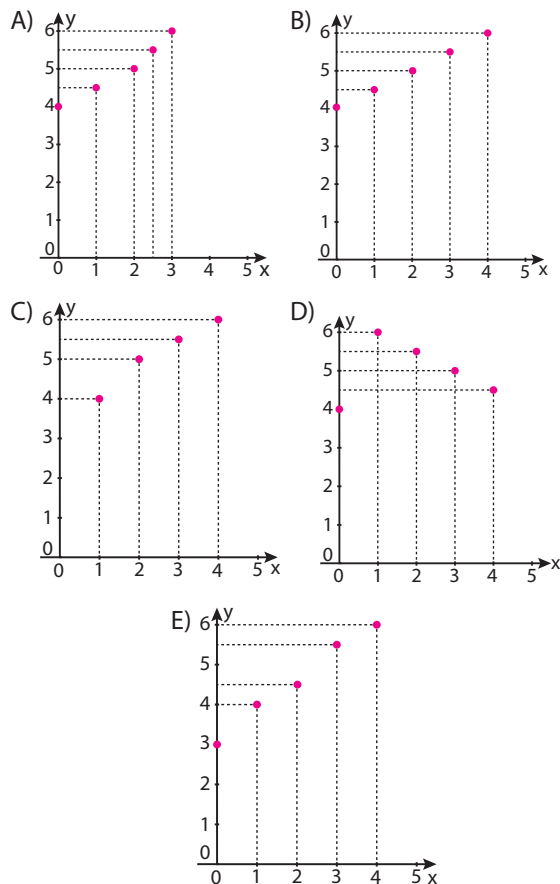
ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

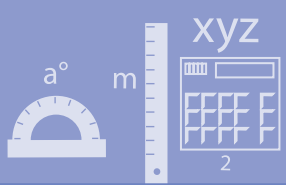


1. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, 1, 4, 7\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B, f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



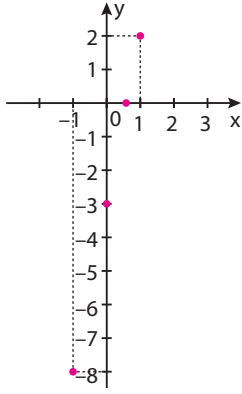
2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin her bir elemanını yarisının dört fazlasına eşleyen fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?





ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

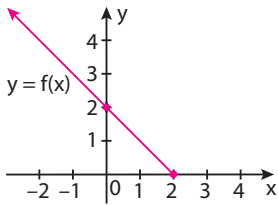
3.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 3$
 B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$
 C) $f: \{-1, 0, \frac{3}{5}, 1\} \rightarrow \{-8, -3, 0, 2\}, f(x) = 5x + 3$
 D) $f: \{-1, 0, \frac{3}{5}, 1\} \rightarrow \{-8, -3, 0, 2\}, f(x) = 5x - 3$
 E) $f: \{-1, 0, \frac{3}{5}, 1\} \rightarrow \{-8, -3, 0, 2\}, f(x) = -3x + 5$

4.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x$
 B) $f: (-\infty, 2) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x - 2$
 C) $f: (-\infty, 2] \rightarrow [0, \infty), f(x) = 2 - x$
 D) $f: \mathbb{R} \rightarrow [2, \infty), f(x) = 2 - x$
 E) $f: \{-\infty, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$

5.

$A = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ ve $B = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ kümeleri veriliyor. $f: A \rightarrow B, f(x) = -2x + 5$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

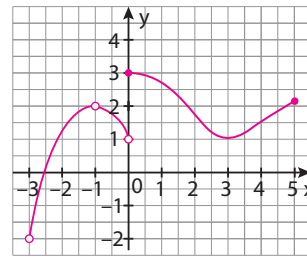
- A) $\{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$
 B) $\{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$
 C) $\{-5, -1, 3, 5, 7\}$
 D) $\{-5, -1, 0, 3, 5, 6\}$
 E) $\{-5, -1, 1, 3, 5, 7\}$

6.

$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ fonksiyonu için görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}]$ B) $[-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$ C) $(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$
 D) $[-1, 2]$ E) $(-1, 2)$

7.



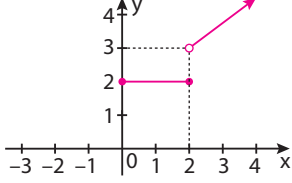
Şekildeki grafiği verilen fonksiyon için tanım ve görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

| Tanım Kümesi | Görüntü Kümesi |
|-----------------------|--------------------|
| A) $[-3, 5] - \{-1\}$ | $(-2, 3) - \{-1\}$ |
| B) $(-3, 5]$ | $(-2, 3]$ |
| C) $(-3, 5] - \{-1\}$ | $(-2, 3]$ |
| D) $(-2, 3]$ | $(-3, 5] - \{-1\}$ |
| E) $(-2, 3] - \{-1\}$ | $(-3, 5] - \{-1\}$ |



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

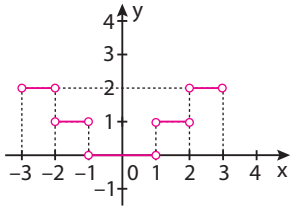
8.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon için tanım ve görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

| | Tanım Kümesi | Görüntü Kümesi |
|----|---------------|--------------------------|
| A) | \mathbb{R} | $(2, \infty)$ |
| B) | $(0, \infty)$ | \mathbb{R} |
| C) | $[0, \infty)$ | $[2, \infty)$ |
| D) | $[0, \infty)$ | $\{2\} \cup (3, \infty)$ |
| E) | $[2, 2]$ | $(2, \infty)$ |

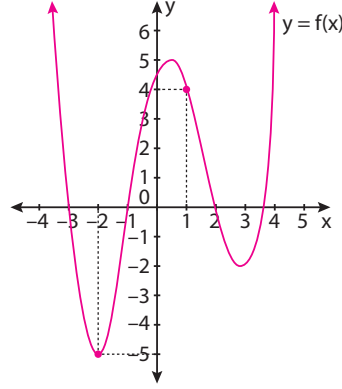
9.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon için sırasıyla tanım ve görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

| | Tanım Kümesi | Görüntü Kümesi |
|----|--|------------------|
| A) | $(-3, 3)$ | $[0, 2]$ |
| B) | $(-3, 3) - \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ | $\{0, 1, 2, 3\}$ |
| C) | $(-3, 3)$ | $\{0, 1, 2\}$ |
| D) | $(-3, 3) - \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ | $[0, 2]$ |
| E) | $(-3, 3) - \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ | $\{0, 1, 2\}$ |

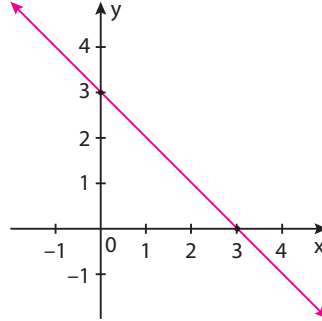
10.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için $f(2) = a$ ve $f(-2) = b$ ise $\{a, b\}$ aşağıdakilerden hangisidir?

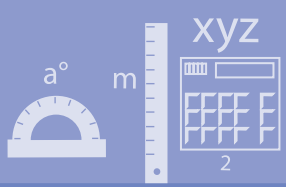
- A) $\{-5, 0\}$ B) $\{-2, 1\}$ C) $\{-5, 2\}$
D) $\{-2, 2\}$ E) $\{-5, 4\}$

11.



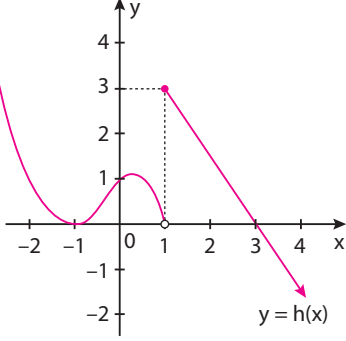
Şekildeki grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

- A) $\{0\}$ B) $\{3, 0\}$ C) $\{3\}$
D) $\{-3\}$ E) $\{ \}$



ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VI

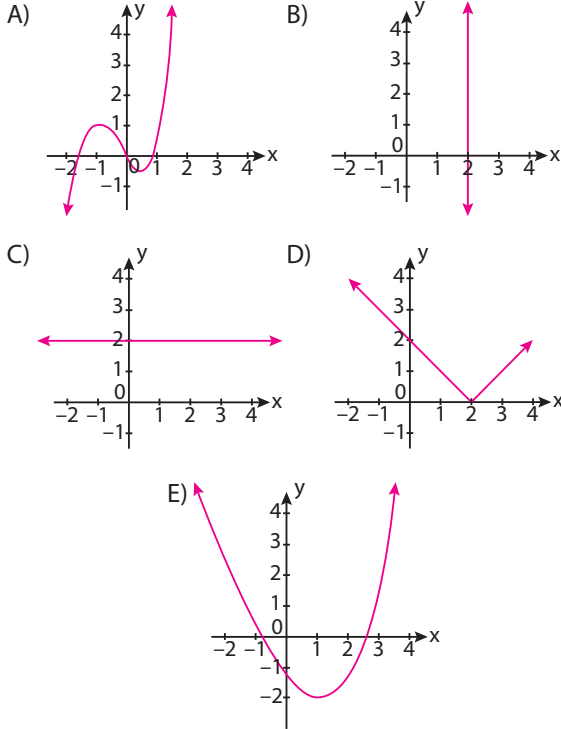
12.



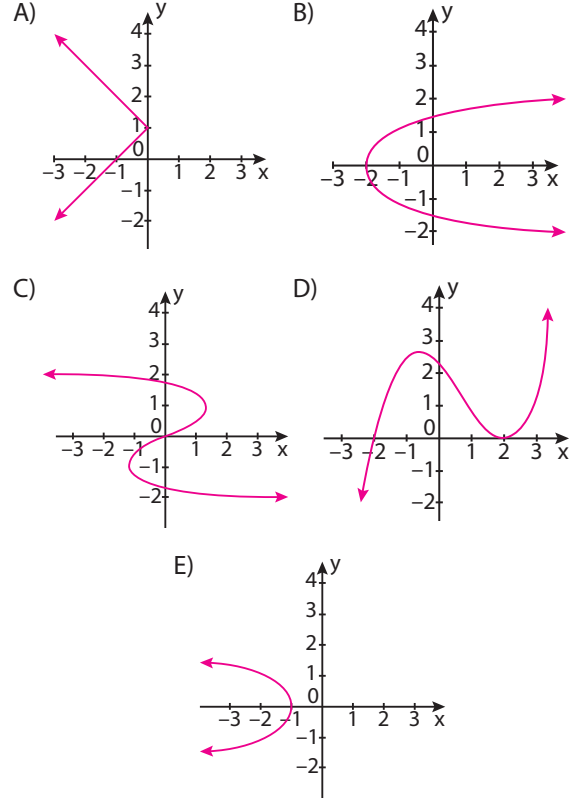
Şekilde grafiği verilen $y = h(x)$ fonksiyonu için $h(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-1, 0, 1\}$ B) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ C) $\{-1, 1, 3\}$
D) $\{3, 1\}$ E) $\{-1, 3\}$

13. Aşağıda verilen grafiklerden hangisi bir fonksiyon grafiği belirtmez?



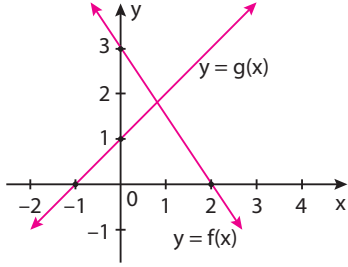
14. Aşağıda verilen grafiklerden hangisi bir fonksiyon grafiğidir?





ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

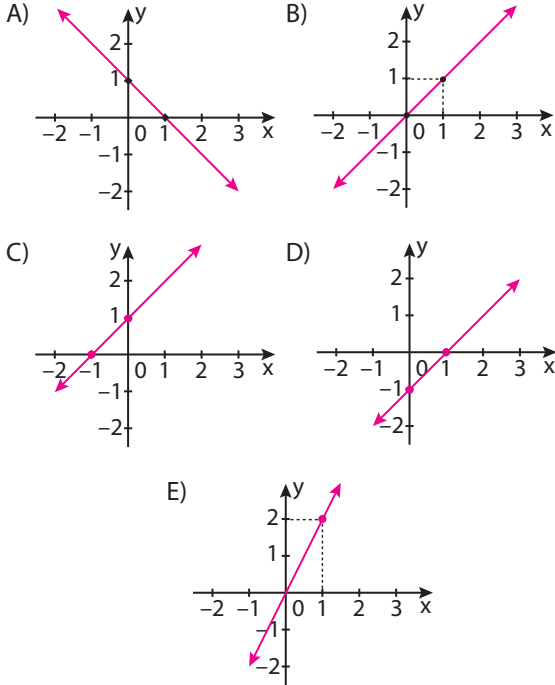
1.



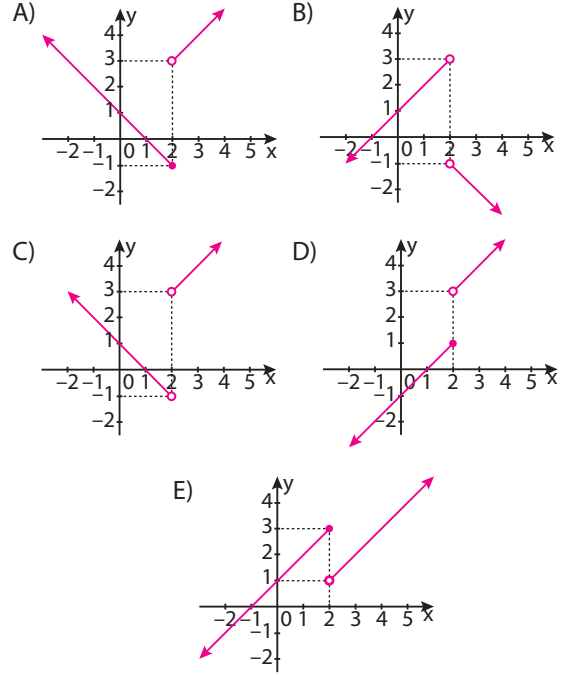
Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. f fonksiyonun eğiminin g fonksiyonun eğimine oranı nedir?

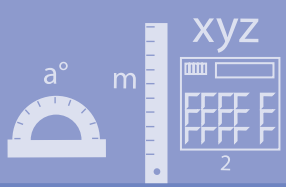
- A) -1 B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

2. Aşağıda verilen grafiklerden eğimi en büyük olan hangisidir?



3. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 2 \text{ ise} \\ 1 - x, & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

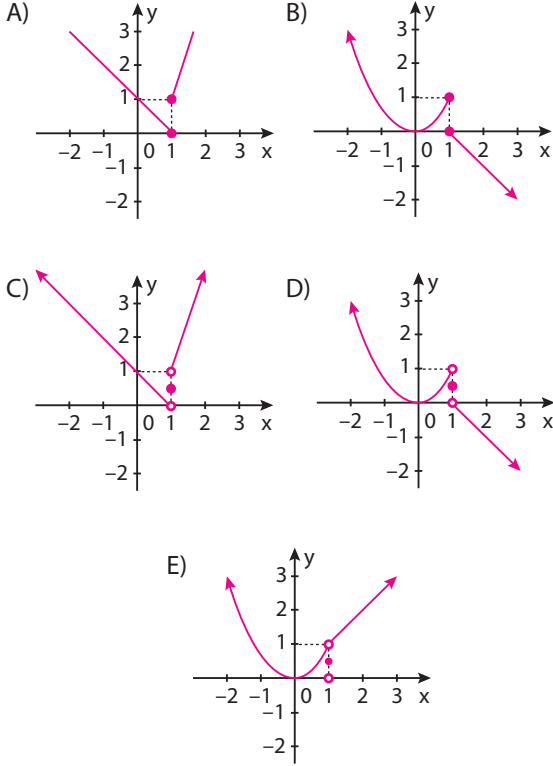




ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

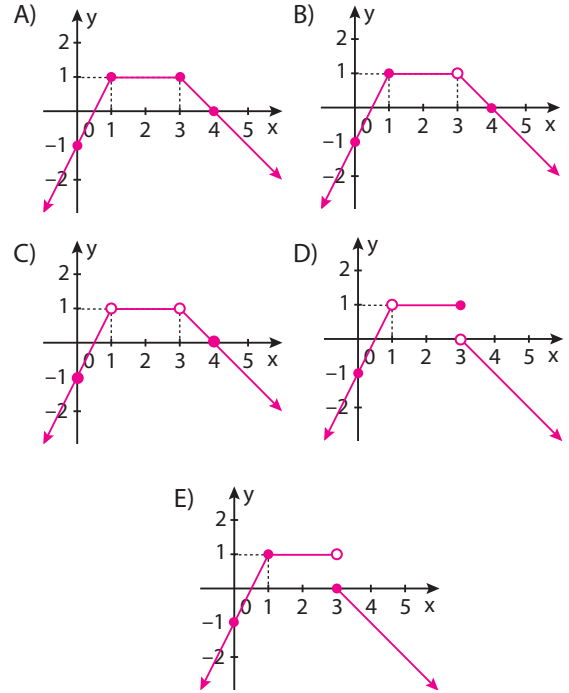
4. $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x > 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiği

aşağıdakilerden hangisidir?



5. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 1, & 1 < x < 3 \text{ ise} \\ -x + 4, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun

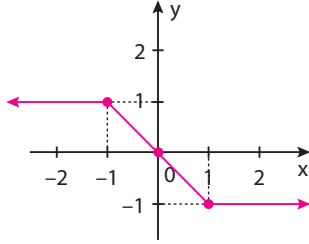
grafiği aşağıdakilerden hangisidir?





ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

6.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

$$A) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

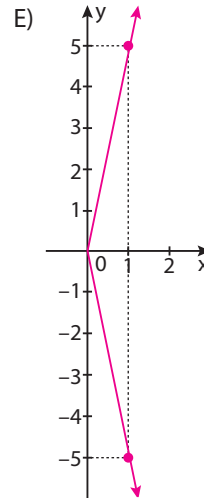
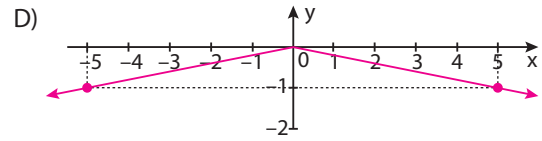
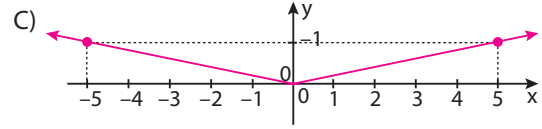
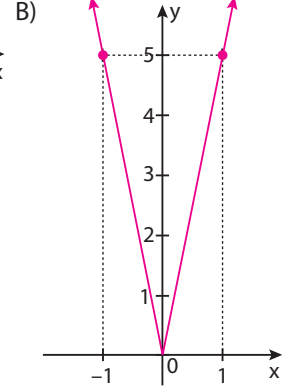
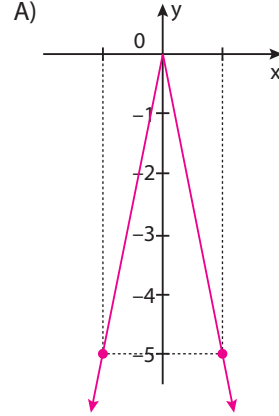
$$B) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

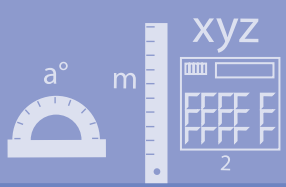
$$C) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \text{ ise} \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -1, & x > -1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$D) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \text{ ise} \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -x, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$E) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 \leq x < 1 \text{ ise} \\ -1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

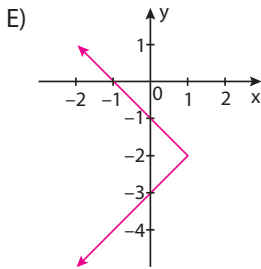
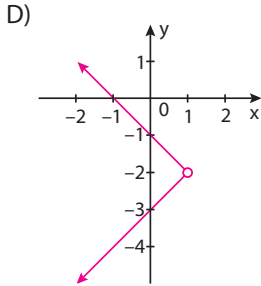
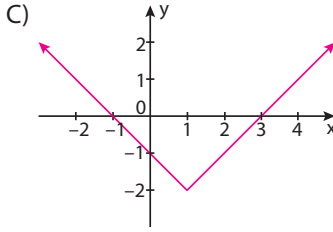
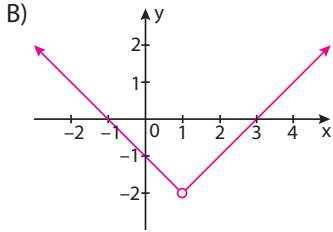
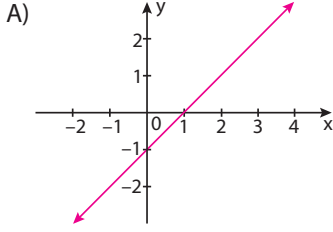
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |5x|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



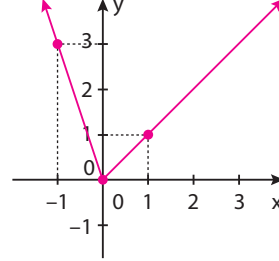


ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1| - 2$ fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

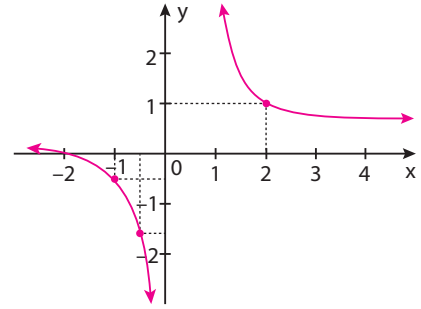


9. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x| - x$
 B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x| + x$
 C) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x| + x$
 D) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - |x|$
 E) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x| - x$

- 10.



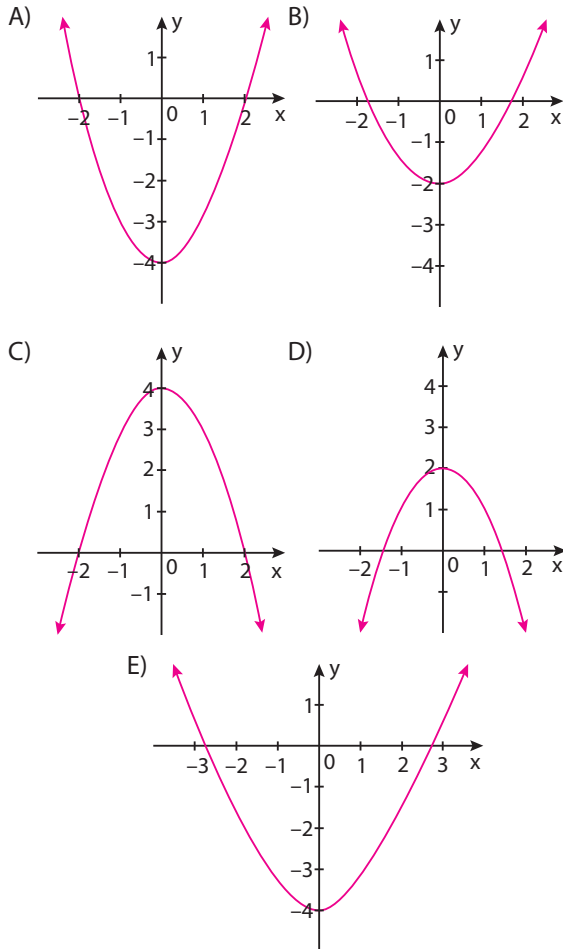
- Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + 1$
 B) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - 1$
 C) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$
 D) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$
 E) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

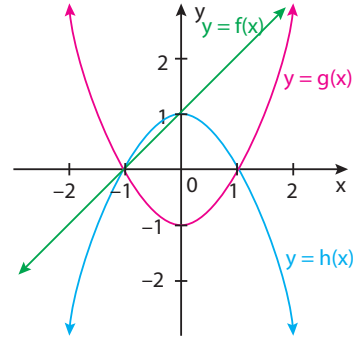


ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

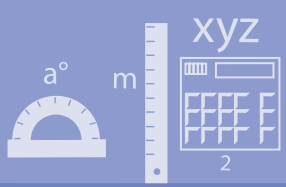


- 12.



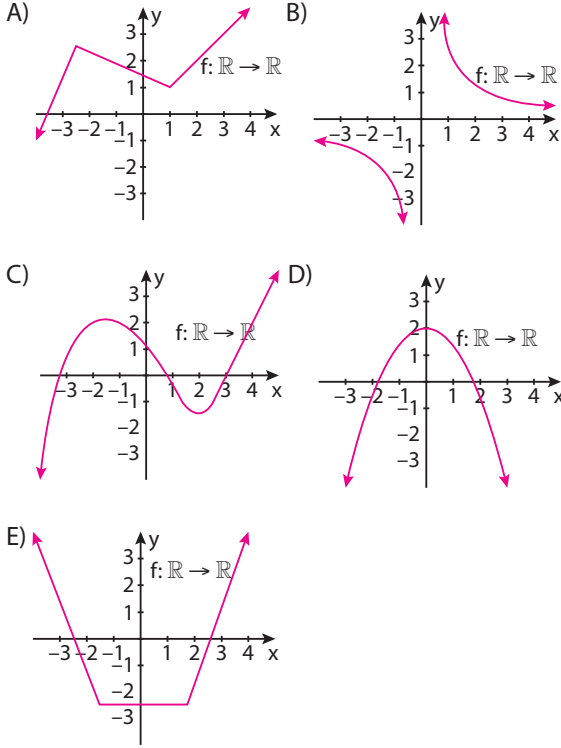
Şekilde grafiği verilen fonksiyonlar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 1$
- B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 1$
- C) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 1$
- D) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 1$
- E) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 - 1$
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 + 1$

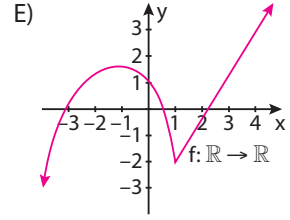
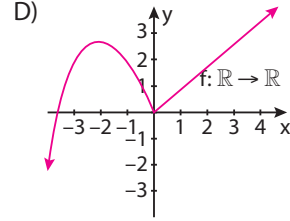
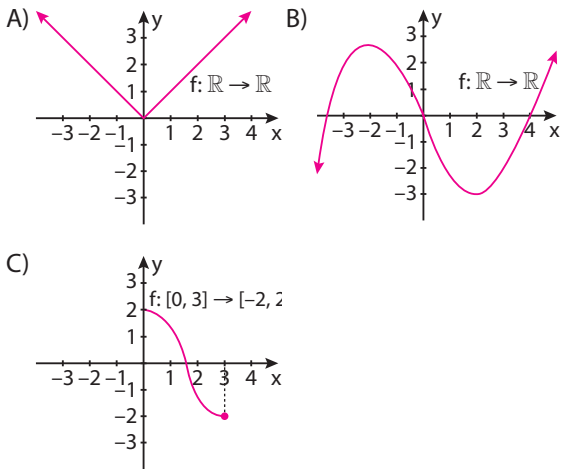


ÜNİTE DEĞERLENDİRME – VII

13. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisi bire birdir?



14. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisi örten değildir?



15. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisi birebir ve örtendir?

