

A. TANIM

1. Nesnelerin iyi tanımlanmış elemanlar topluluğuna küme denir.
2. Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanı denir.
3. Kümeler; A, B, C, ... gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, ... gibi küçük harflerle gösterilir.
4. a, A kümesinin elemanı ise, $a \in A$
a, A kümesinin elemanı değil ise $a \notin A$ şeklinde gösterilir.
5. Kümede bir eleman birden fazla yazılmaz.
6. Elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.
7. A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

B. KÜMELERİN GÖSTERİMİ**1. Liste(Açık) Biçimde Gösterim**

Kümenin elemanlarının aralarına virgül konularak {.....} şeklindeki bir sembolün içine açık bir biçimde yazılmasına denir.

2. Venn Şeması İle Gösterim

Elemanlarının tümünün önlerinde nokta konularak kapalı bir eğri içerisine yazılmasına denir.

3. Ortak Özellik Yöntemi

Bir kümenin çok sayıda eleman sayısı olabilir. Venn şeması ya da liste yöntemi ile gösteremeyebiliriz. Bu durumda ortak özellik yöntemi devreye girer.

$$A = \{ x \mid P(x) \}$$

A kümesi, $P(x)$ önermesini sağlayan x lerden oluşur.
 $\{ x \mid P(x) \} = \{ x : P(x) \}$ kümelerinde \mid ve $:$ işaretlerinin anlamı "öyleki" demektir.

ÖRNEK

"marmara"

kelimesinin harflerinden oluşan kümenin eleman sayısı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÖRNEK

$$A = \{ a, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$$

kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $s(A) = 4$ B) $\{b, a\} \in A$ C) $\{a, \{b\}\} \in A$
D) $a \in A$ E) $\{c, b, a\} \in A$

ÖRNEK

$$A = \{ x \mid 3 < x \leq 200, x = 5k \text{ ve } k \in \mathbb{Z} \}$$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

ÖRNEK

$$A = \{ x \mid 70 \leq x < 304, x = 4k \text{ ve } k \in \mathbb{Z} \}$$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

- A) 55 B) 56 C) 57 D) 58 E) 59

ÖRNEK

$$A = \{ x \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ ve } x \in \mathbb{Z} \} \text{ olmak üzere,}$$

$$B = \{ (x,y) \mid x < y \text{ ve } x, y \in A \} \text{ ise,}$$

$s(B)$ kaçtır?

- A) 36 B) 42 C) 45 D) 48 E) 52

C. KÜME ÇEŞİTLERİ**1. Boş Küme**

Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir.
Boş küme \emptyset , $\{ \}$ sembolleri ile gösterilir.
 $s(A) = 0 \Rightarrow A$ boş kümedir.

2. Denk Kümeler

Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir. Denklik " $=$ " sembolü ile gösterilir.

3. Eşit Kümeler

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir.

A ile B eşit ise $A = B$

A ile B eşit değil ise $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

$A = B$ ise $A \equiv B$ dir. Yani eşit olan kümeler aynı zamanda denk kümelerdir.

4. Alt Küme

Bir A kümesinin bütün elemanları B kümesinin de elemanı ise, A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir.

Eğer A, B nin alt kümesi değil ise,

$A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

$A \subset B$; A kümesi B kümesinin alt kümesi

$B \supset A$; B kümesi A kümesini kapsar.

$\forall x \in A$ iken $x \in B \Leftrightarrow A \subset B$ dir.

5. Özalt Küme

Bir kümenin kendisi hariç diğer bütün alt kümelerine özalt küme denir.

1. Boş küme her kümenin alt kümesidir.
 $\emptyset \subset A$

2. Her küme kendisinin bir alt kümesidir.
 $A \subset A$

3. $s(A) = n$ ise,
A kümesinin alt küme sayısı $= 2^n$ dir.

4. n elemanlı bir kümesinin r elemanlı alt küme sayısı $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$ dir.

ÖRNEK

Örnek :

Aşağıdakilerden hangisi boş kümedir?

A) $\{0\}$

B) $\{\emptyset\}$

C) $\{x \mid x^2 < x \text{ ve } \frac{1}{x} < x, x \in \mathbb{R}\}$

D) $\{x \mid |x+2| + |x^2-4| \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$

E) $\{(x,y) \mid |x-2| + \sqrt{y+3} = 0 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$

ÖRNEK

$A = \{a \mid 2 \leq \sqrt{a} \leq 3 \text{ ve } a \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{b \mid 3 < b < 10 \text{ ve } b \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $A = B$

B) $A \equiv B$

C) $B \equiv C$

D) $A = C$

E) $A \equiv C$

ÖRNEK

$A = \{1, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{\{7, 8\}\}\}$
kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

ÖRNEK

İki kümenin alt küme sayılarının toplamı 160 tır.

Bu iki kümenin eleman sayıları farkı 2 ise, eleman sayıları toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

ÖRNEK

7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 35 E) 40

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8
(1993 ÖSS)

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 5 elemanı bulunur?

- A) 24 B) 22 C) 20 D) 16 E) 8
(1996 ÖSS)

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a bulunur ve b bulunmaz?

- A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 elemanı bulunur?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde hem 1 hem de 2 elemanı bulunmaz?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

ÖRNEK

Bir A kümesinin alt küme sayısı ile özalt küme sayısı toplamı 1023 ise, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

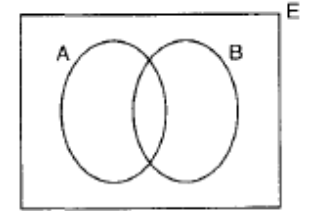
6. Kuvvet Kümesi

Bir kümenin tüm alt kümelerini içine alan kümeye kuvvet kümesi denir.

7. Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan kümeye evrensel küme denir.

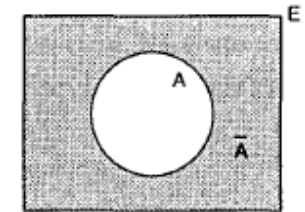
Evrensel küme genellikle E harfi ile gösterilir.



8. Bir Kümenin Tümlenyeni

Bir A kümesinin dışında kalan ve evrensel kümeye ait elemanların oluşturduğu kümeye A nın tümlenyeni denir ve \bar{A} ya da A^c ile gösterilir.

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$$



Şekilde görüldüğü gibi $s(A) + s(\bar{A}) = s(E)$ dir.

- 1) $(A^c)^c = A$
- 2) $(\emptyset)^c = E$
- 3) $(E)^c = \emptyset$
- 4) $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

ÖRNEK

$E = \{x \mid 0 < x < 9, x \in \mathbb{Z}\}$ ve $A = \{2, 4, 6, 7\}$ ise,

\bar{A} nedir?

- A) $\{1, 3, 5, 8\}$ B) $\{1, 3, 5\}$ C) $\{0, 1, 3, 5, 8\}$
D) $\{3, 5, 8\}$ E) $\{3, 5, 8, 9\}$

ÖRNEK

$E = \{x \mid 0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$ ve

$\bar{A} = \{x \mid 4 \leq x < 6, x \in \mathbb{R}\}$ ise,

A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
B) $\{x \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ veya } 6 < x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$
D) $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{ veya } 6 < x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$
E) $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{ veya } 6 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$

ÖRNEK

A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.

$s(A) + s(\bar{B}) = 13$ ve $s(B) + s(\bar{A}) = 17$ ise,
 $s(E)$ kaçtır?

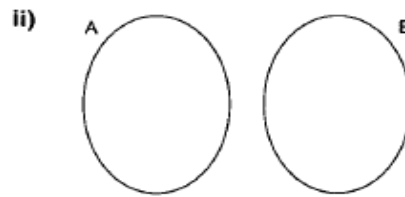
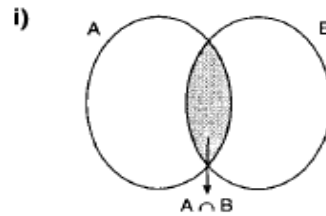
- A) 14 B) 15 C) 16 D) 24 E) 30

D. KÜMELERDE İŞLEMLER

1. Kümelerin Kesişimi

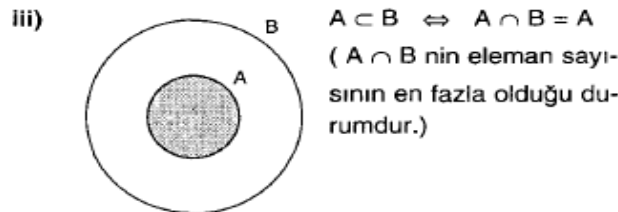
A ile B iki kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$



$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

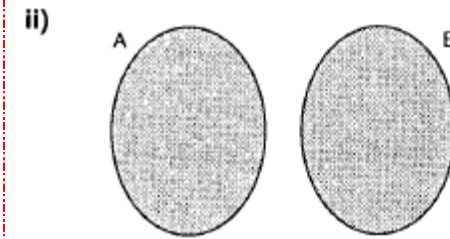
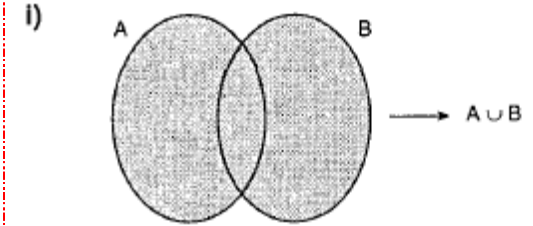
(A ile B ayrıktır.)



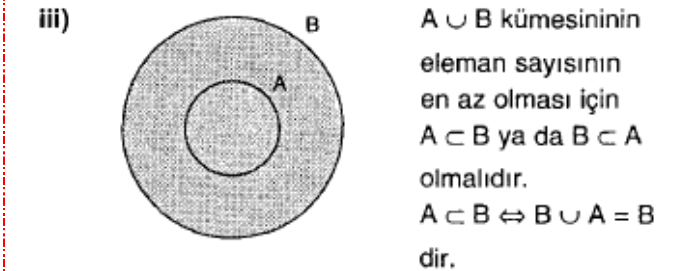
2. Kümelerin Birleşimi

A ile B kümelerinin ortak olan veya olmayan tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümelerin birleşim kümesi denir. Ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$



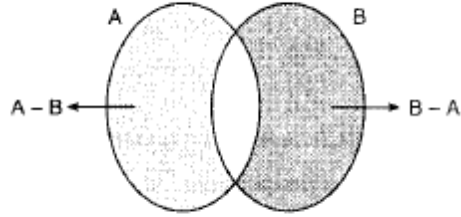
$A \cap B = \emptyset$ olduğunda $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı en fazla olur.



3. İki Kümenin Farkı

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye A fark B denilir. Ve $A - B$ ya da $A \setminus B$ şeklinde gösterilir.

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B \}$$



$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$ (simetrik fark) denilir.

ÖRNEK

$A = \{1, 3, 6, 9\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ ise, $A \cup B$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- B) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
- C) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
- D) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
- E) $\{2, 5, 6, 7, 9\}$

ÖRNEK

A ve B birer küme olmak üzere, $A - B$ kümesinin eleman sayısı 4, $B - A$ kümesinin eleman sayısı 5, A kümesinin eleman sayısı 6 dır.

Buna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15
- (1988 ÖSS)

ÖRNEK

$A = \{\text{Sınıftaki gözlüklü öğrenciler}\}$

$B = \{\text{Sınıftaki sarışın öğrenciler}\}$

$C = \{\text{Sınıftaki erkek öğrenciler}\}$

$D = \{\text{Sınıftaki kız öğrenciler}\}$

olduğuna göre, $C \cap A - (B \cup D)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) {Sınıftaki sarışın olmayan, gözlüklü erkek öğrenciler}
- B) {Sınıftaki gözlüklü olmayan, sarışın erkek öğrenciler.}
- C) {Sınıftaki gözlüklü olmayan, sarışın kız öğrenciler}
- D) {Sınıftaki gözlüklü erkek öğrenciler}
- E) {Sınıftaki sarışın kız öğrenciler}

(1991 ÖSS)

ÖRNEK

$A = \{x \mid 11 \leq x \leq 1200, x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{y \mid 8 < y < 900, y = 6k, k \in \mathbb{N}\}$

olduğuna göre, $(A \cap B)$ nin eleman sayısı kaçtır?

- A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 74
- (1992 ÖSS)

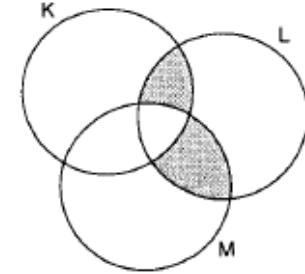
ÖRNEK

Boş olmayan kümelerden A ve B kümeleri için $3.s(A - B) = 4.s(A \cap B) = 5.s(B - A)$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

- A) 12 B) 27 C) 35 D) 47 E) 60
- (1999 ÖSS - İptal)

ÖRNEK



Yukarıdaki şemada taralı bölge aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $K \cap L \cap M$
- B) $(K \cap L) \setminus M$
- C) $(M \cap L) \setminus K$
- D) $(K \cap M) \setminus (K \cap L \cap M)$
- E) $(L \cap (K \cup M)) \setminus (K \cap L \cap M)$

(1999 ÖSS)

Birleşim ve Kesişimin Özellikleri

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup E = E$, $A \cap E = A$
6. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
 $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

Tümlemenin Özellikleri

1. $(A')' = A$
2. $(\emptyset)' = E$
3. $E' = \emptyset$
4. $A \cap A' = \emptyset$
5. $A \cup A' = E$
6. $s(A) + s(A') = s(E)$
7. $E - A = A'$
8. $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$
9. De Morgan Kuralı
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$
10. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A' \supset B')$

ÖRNEK

$A = \{s, a, r, i, \{i\}, n\}$ ve

$\bar{B} = \{k, u, m, r, a, l\}$ ise

A - B kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

- A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

ÖRNEK

A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,

$$s(E) = 12$$

$$s(A \setminus B) = 4$$

$$s(A' \cap B') = 3$$

olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
(1998 ÖSS)

ÖRNEK

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$

$$A \cup C = \{1, 5, 6, 8, 9, 10\} \text{ ise,}$$

$A \cup (B \cap C)$ nedir?

- A) $\{1, 6, 8\}$
B) $\{1\}$
C) $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
D) $\{1, 4, 6, 8\}$
E) $\{1, 8\}$

ÖRNEK

A ve B kümeleri, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,

$$s(E) = 14$$

$$s(B \setminus A) = 7$$

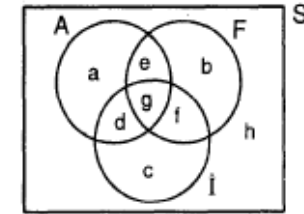
$$s(B' \cap A') = 4$$

olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Uyarı:

1. Küme problemlerinin çözümü yapılırken, verilene uygun bir şekilde Venn Şeması çizilip, en çok kesişim olan bölgeden en aza doğru verilen eleman sayıları uygun bölgelere yazılarak çözüm yapılır.
2. Bir sınıfta (S), Almanca bilenlerin kümesi (A), Fransızca bilenlerin kümesi (F), İngilizce bilenlerin kümesi (İ) olmak üzere bu dillerden;



en çok birini bilenlerin sayısı: $h + a + b + c$

yalnız birini bilenlerin sayısı: $a + b + c$

en az ikisini bilenlerin sayısı: $d + e + f + g$

hiçbirini bilmeyenlerin sayısı: h

Almanca ve Fransızca bilenlerin sayısı: $e + g$

İngilizce bilmediği halde Almanca ve Fransızca bilenlerin sayısı: e olur.

ÖRNEK

42 kişilik bir sınıfta İngilizce, Fransızca dillerini bilen ve hiçbirini bilmeyen öğrenciler vardır.

Hiçbirini bilmeyen 2 kişi, en çok bir dil bilenler 32 kişi olduğuna göre, bu sınıfta iki dil bilen kaç kişi vardır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20

ÖRNEK

Bir sınıfta İngilizce veya Almanca dillerinden en az birini bilen 49 öğrenci vardır. İngilizce bilenlerin sayısı; Almanca bilenlerin sayısının 3 katı ve her iki dili bilenlerin ise 6 katıdır.

Buna göre, bu sınıfta İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

- A) 45 B) 44 C) 42 D) 35 E) 28

ÖRNEK

Almanca ile İngilizce dillerinden en az birini bilenlerin bulunduğu bir sınıftaki öğrencilerden 25 tanesi Almanca, 35 tanesi İngilizce biliyor.

Bu öğrencilerin 13 tanesi her iki dili de bildiğine göre sınıf mevcudu kaçtır?

- A) 60 B) 54 C) 50 D) 47 E) 42

ÖRNEK

Futbol oynayan herkesin basketbol oynadığı bir sınıfta; iki oyun oynayanlar ile bir oyun oynayanların sayısı birbirine eşittir.

Buna göre, futbol oynayanların sayısı ile basketbol oynayanların sayısının toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

ÖRNEK

Bir toplulukta futbol ve voleybol oynayanlar ile hiçbir oyun oynamayanlar vardır. 9 kişi sadece voleybol, 5 kişi sadece futbol oynamakta ve 7 kişi de hiçbir oyun oynamamaktadır. Bu toplulukta 28 kişi olduğuna göre, **futbol oynayan kaç kişi vardır?**

- A) 18 B) 16 C) 13 D) 12 E) 10

ÖRNEK

Bir sınıftaki öğrencilerin % 40 ı İngilizce bilmektedir. Bu sınıfta yalnız İngilizce bilenler, yalnız Almanca bilenler ve hiçbir dil bilmeyenlerin sayısı birbirine eşittir.

Buna göre, yalnız bir dil bilenler sınıfın yüzde kaçındır?

- A) 60 B) 50 C) 30 D) 20 E) 10

ÖRNEK

Basketbol, voleybol ve hentbol oyunlarından en az birini oynayanların bulunduğu bir topluluk 28 kişidir. Bu toplulukta 16 kişi basketbol, 14 kişi voleybol, 12 kişi de hentbol oynamaktadır. Hem basketbol hem de voleybol oynayanlar 7, hem basketbol hem de hentbol oynayanlar 6, hem voleybol hem de hentbol oynayanlar 5 kişidir.

Buna göre, bu toplulukta her üç oyunu da oynayan kaç kişi vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÖRNEK

Tıp ve Hukuk fakültesi öğrencilerinden oluşan 41 kişilik bir toplulukta, kız öğrencilerin sayısı 22, Hukuk fakültesinde okuyan öğrencilerin sayısı 15 ve Tıp fakültesinde okuyan erkek öğrencilerin sayısı 11 dir.

Buna göre, Hukuk'ta okuyan kız öğrenci sayısı kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 15 E) 16